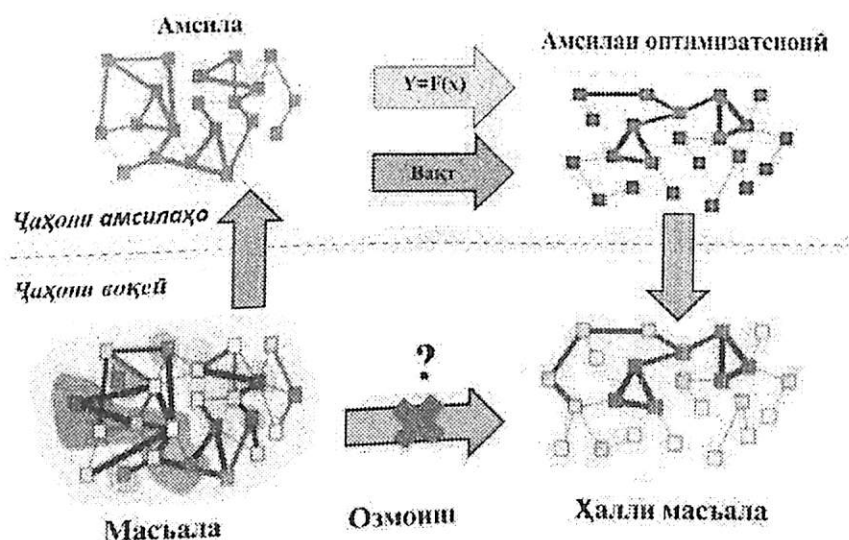


САИДОВ ИСРОИЛ МАҲМАДОВИЧ

АСОСҲОИ АМСИЛАСОЗИИ РИЁЗӢ



Душанбе - 2020

УДК: 519.6 (575.2)

C-14

УДК: 519.6 (575.2)

ББК: 77.452.9 (точикӣ)

A-86

Саидов И.М. Асосҳои амсиласозии риёзӣ. -- Душанбе, 2020.
-- 152 с.

Китоби дарсӣ дар ҷаласаи кафедраи информатикаи ДМТ аз 13
августии соли 2020 таҳти №1 муҳокима шуда, ба ҷоп тавсия
шудааст.

Муаллиф: н.и.-т., дотсент Саидов И.М.

Муҳаррири масъул: дотсент Ҷалилов Х.М.

Муқарризон: д.и.ф.м., профессор Юнусӣ М.К.
н.и.ф.м., дотсент Саъдулоев Р.И.

772 912

ISBN 978-99975-1-171-3



© Саидов И. М.

"Методикаи таҳия намудани амсилаҳои
риёзӣ худ як санъат аст ва ин санъатро бояд
самаранок истифода бурд".

Е.С. Вентсел

"Инсон танҳо он чизро дарк менамояд, ки
онро амсиласозӣ карда метавонад".

И.А. Поletaев

МУҚАДДИМА

Амсиласозӣ яке аз усулҳои асосии раванди шинохт ва
дарки объектҳо мебошад. Ба амсиласозӣ танҳо дар
ҳолатҳое даст мезананд, ки объекти додашударо дар
амалия тадқиқ намудан ғайриимкон бошад. Одамизод ҳар
рӯз садҳо амсилаҳои гуногуни объектҳои муҳити атрофро
дар намуди таҳаюлотӣ меофарад.

Амсиласозӣ яке аз усулҳои идрок аст, ки барои
тадқиқи масъалаҳои ҷойдошта, новобаста аз намудашон
истифода мешавад.

Тадбиқи метод ва усулҳои амсиласозӣ дар
масъалаҳои илмӣ-тадқиқотӣ аз замонҳои қадим оғоз
ёфтааст ва мунтазам ҳама соҳаҳои нав ба нави илмиву
маърифатиро фаро гирифтааст. Дар ҷаҳони имрӯза қариб
дар ҳамаи соҳаҳо амсиласозиро ба пуррагӣ истифода
мебаранд.

Амсиласозӣ имрӯз дар бунёди афзорҳои техникӣ,
риёзӣ, бинокорӣ, кимиё, геология, архитектура, физика,
биология, тиб ва ҳатто илмҳои ҷамъиятшиносӣ бо таври
хеле васеъ мавриди истифода қарор гирифтааст.

Ҳамин тариқ, бояд қайд намуд, ки барои як объекти
асил имкониятҳои гуногуни сохтани якчанд амсилаҳои
махсусгардонидашуда мумкин аст, ки ҳар кадоми онҳо, ё
ягон тарафи муайяни ин объектро тасвир менамоянд ва ё

хосиятҳои онро бо дараҷаҳои гуногуни тадқиқотӣ инъикос мекунанд.

Амсиласозии риёзӣ дар соҳаҳои гуногуни системаҳои биологӣ, экологӣ ва иқтисодӣ васеъ истифода бурда мешавад. Дар ҳолати дуруст истифода намудани амсилаҳои имконияти хубе барои муайян намудан ва пешгӯӣ намудани ҳолати объекти додашуда, фароҳам меояд.

Дар китоби мазкур амсилаҳои асосии намунавӣ барои ташаккули таҳаввулотӣ популятсия, амсиласозӣ дар масъалаҳои тиб ва амсиласозии масъалаҳои иқтисодӣ дида баромада шудааст.

Ҳангоми тартиб додани китоби таълимии мазкур ҳамчун сарчашмаҳои асосӣ якчанд манбаъҳо истифода бурда шудааст, аммо ҳамчун асос маводҳо аз адабиётҳои [1], [10], [15], [21], [23], [36], [43], [47], [50], [52], [59], [60], ва [65], гирифта шудааст.

Китоби дарсии "Асосҳои амсиласозии риёзӣ" дар асоси Қонуни Ҷумҳурии Тоҷикистон «Дар бораи маориф», Стандарти давлатии таҳсилоти олии касбии Ҷумҳурии Тоҷикистон, Стратегияи миллии рушди маориф то соли 2020, дастури нишондодҳои ЮНЭСКО оид ба таълими фанҳои информатикаву технологияи иттилоотӣ ва дигар санадҳои меъёрии ҳуқуқии соҳаи маориф, ки аз ҷониби Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон таҳия ва тасдиқ шудаанд, барои донишҷӯён ва магистрантони ихтисоси 31030400-информатикаи муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ мураттаб гардидааст.

Хонандаи азиз! Ман ба маслиҳату пешниҳодҳои Шумо ниёз дорам. Эҳтиромона хоҳиш менамоям, ки фикри андешаҳоятонро оид ба мазмуни китоб ба нишонии Saidzoda-84@yandex.ru ё isroil-84@list.ru ирсол намоед.

Муаллиф

БОБИ 1.

МАФҲУМИ АМСИЛА ВА АМСИЛАСОЗӢ

1.1. Амсила(модел)

Амсиласозӣ ягона усул ва методи омӯзиши ҷаҳонӣ нест. Амсиласозӣ як соҳаи пурраи дониш аст, ки методологияи махсуси омӯзиши усулҳои шинохт ва дарки объекти додашударо дар бар мегирад.

Амсила чунин мафҳумест, ки объекти додашударо аз ҷиҳати моддӣ тасвир мекунанд. Дар ҷараёни омӯзиши объект, амсила объекти додашудро ба объекти тимсолӣ иваз мекунанд.

Раванди сохтан ва тадқиқ намудани амсилаҳоро амсиласозӣ меноманд.

Ба ибораи дигар, амсила ҳамчун ивазкунандаи объекти асли буда, омӯзиши баъзе хусусиятҳои объектро, ки барои муҳаққиқон писанд аст, мавриди омӯзиш қарор медиҳад.

Ҳама гуна амсила бо объекти асли шабеҳ шуда наметавонад, зеро ҳангоми сохтани он муҳаққиқ танҳо омилҳои муҳимтаринро аз нуқтаи назари худ ба назар мегирад. Амсилаи "мукаммал" бешубҳа бо асли объекти додашуда, қомилан шабеҳ хоҳад буд. Агар натиҷаҳои амсиласозӣ муҳаққиқро қонеъ карда тавонанд ва барои пешгӯии рафтор ё хосиятҳои объекти таҳқиқшуда асоснок бошанд, пас меғоянд, ки амсила ба объекти сохташуда мувофиқ аст.

Дар адабиётҳои пешин ба ҷои амсила мафҳуми моделро истифода мебарданд. Модел аз калимаи латинии "modulus" гирифта шуда, дар забони тоҷикӣ бо маънои

ченак, андоза, намуна, меъёр истифода мешавад. Дар адабиётҳои навин бошад, ба ҷойи калимаи модел-амсила ва ба ҷойи моделсозӣ- амсиласозиро истифода мебаранд.

Дар зери мафҳуми амсила фаҳмидан мумкин аст:

- шакл ва ё намунае, ки барои таҷдиди силсилаи ӯ оммавии ҳар гуна объекти додашуда тарроҳӣ шудааст;
- дастгоҳи тақлидӣ, ки сохтор ва фаъолияти ҳама гуна дастгоҳҳои дигарро барои мақсадҳои илмӣ, амалӣ (масалан, озмоишҳо) ё варзӣ тақмил медиҳад;
- тайёр намудани маҳсулот (аз ҷӯб, гил, мум ва ғайра), ки аз қолаби он барои сохтани маводи аслӣ аз дигар маводҳо (аз металл, гаҷ ва ғайра) замина фароҳам меорад;
- тасвирҳои, ки дар намуди расм, нақша ва блокҳо дода шудаанд ва барои таҳияи объекти аслӣ мусоидат мекунанд.

Масалан: пеш аз ба кор андохтани ҳавопаймои нав он дар ҷойи маҳсус санҷида мешавад - ин амсила аст.

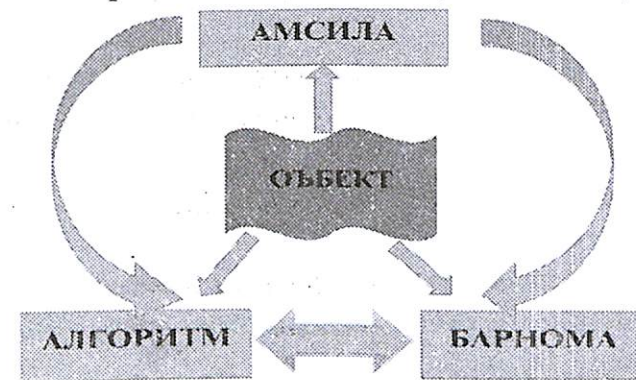
Барои нишон додани системаи хунгарди рағҳо, дастгоҳ ба тасвирҳои кашидашуда, ишора мекунад - ин амсила аст.

Асосан амсиларо ҳамчун як ашёи моддӣ ё аз ҷиҳати ақлонӣ муаррифишаванда фаҳмидан мумкин аст, ки дар ҷараёни шинохтан объектро ба намунааш иваз мекунад.

Ҳар як раванди таҳқиқшударо тавассути амсилаҳои мухталиф тасвир кардан мумкин аст. Дар ҳоле ки ягон амсила наметавонад, ҳамаи хусусиятҳои объекти

додашударо комилан ва ҳамаҷониба тасвир кунад. Аммо, истифодаи амсилаи соддакардашуда, ки хусусиятҳои инфиродии объекти таҳқиқшударо инъикос мекунад, ба мо имкон медиҳад, ки робитаи зич, сабаб, натиҷаҳо, воридот ва содиротро дақиқтар бубинем ва зуд хулосаҳои зарурӣ барорем.

Ҳангоми тадқиқи илмӣ ягон объекти додашуда, пеш аз ҳама хусусиятҳои объект омӯхта шуда, барои он амсила (дар намуди консептуалӣ, риёзӣ ва компютерӣ), алгоритм ва барнома сохта мешавад (Расми 1.1.1.).



Расми 1.1.1. Унсурҳои асосии амсиласозии риёзӣ

Мақсади сохтани амсилаҳо. Дар бисёр мавридҳо барои гузаронидани таҷрибаҳо ва таҳлил намудани хусусиятҳои ягон объект мушкилиҳои зиёде рӯйи кор меоянд. Мо тавассути сохтани амсилаҳо метавонем, объекти додашударо таҳлил намуда, дурнамои онро тавассути амсилаҳо пешгӯӣ намоем. Бояд қайд намуд, ки омӯзиши мустақими аксари объектҳои додашуда ғайриимкон аст.

Амсиласозиро асосан барои омӯзиши ҳадафҳои зерин истифода мебаранд:

- ✓ барои фаҳмидани он, ки чӣ гуна объект бо таври мушаххас сохторбандӣ шудааст: сохтораи чӣ гуна аст, робитаҳои дохилӣ, хосиятҳои асосӣ, қонунҳои инкишоф, худтанзимкунӣ ва ҳамкорӣ бо ҷаҳони беруна;
- ✓ омӯختан ва тарзи идора намудани объект ё раванд, муайян кардани усулҳои беҳтарини идоракунӣи объекти додашуда, мақсадҳо ва меъёрҳои додашуда;
- ✓ идоракунӣи объекти додашуда ва равандҳои кори он;
- ✓ усулҳои идоракунӣ барои мақсадҳо ва меъёрҳои додашуда;
- ✓ пешгӯии оқибатҳои мустақим ва ғайримустақими объекти додашуда, татбиқи усулҳо ва шаклҳои таъсир ба объект.

Ба амсила таърифҳои гуногуни зиёдеро додан мумкин аст.

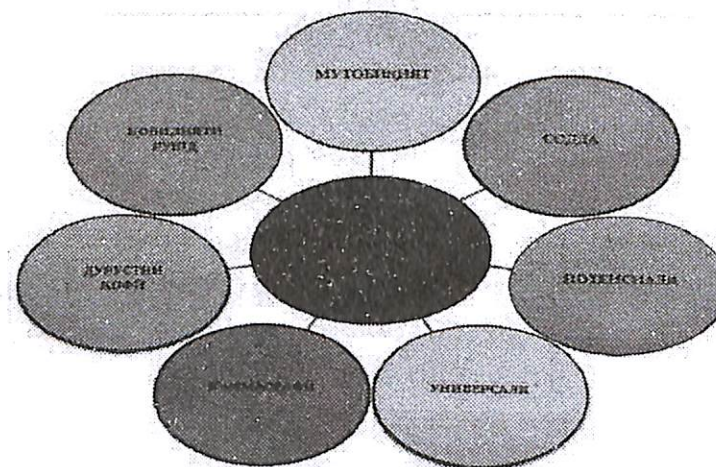
Таъриф. Амсилаи объект гуфта, мо инъикосгари хосият ва хусусиятҳои муҳими объекти додашударо дар назар дорем.

1.2. Хосиятҳои амсила

Хосиятҳои амсила. Амсилаҳо дорои якчанд гурӯҳи хосиятҳо мебошанд, ки онҳо дар расми 1.2.1. оварда шудаанд.

Мутобиқият. Амсилаи сохташуда муносиб ва ё мутобиқаткунанда ҳисобида мешавад, агар он хосиятҳои додашудаи объектро бо дақиқии қобили қабул инъикос карда тавонад. Дақиқият то дараҷае бояд муайян карда шавад, ки параметрҳои амсила ва объект бо ҳам мувофиқат кунанд. Аниқияти амсила дар шароити

гуногуни кори иншоот гуногун аст. Ин шароит бо параметрҳои беруна тавсиф мешаванд. Муайян кардани масъалаи мутобиқияти амсилаҳо як кори мураккабест, ки хароҷоти калони ҳисобиро талаб мекунад.



Расми 1.2.1. Хосиятҳои амсила

Универсалӣ (ҳамаҷониба). Амсила бояд ҳамаҷониба, вобаста аз рӯи миқдор ва таркиби параметрҳои он ба назар гирифта шавад.

Каммасраф. Амсила тавассути барномаҳои компютерӣ баҳодиҳӣ карда мешавад, ки он аз ҷиҳати иқтисодӣ ягон хароҷоти зиёдатии талаб намекунад.

Содда. Амсилае, ки дар он натиҷаи дилхоҳ, дар лаҳзаҳои вақт бо таври дақиқ ба даст оварда мешавад, дар сурате, ки баъзе аз омилҳо ҳангоми ҳисобкунӣ ба назар гирифта нашаванд.

Потенциалӣ. Амсила-потенциалӣ номида мешавад, агар қобилияти ба даст овардани донишҳои нав дар бораи объекти таҳқиқшуда, тавассути амсила ба даст оянд.

Дурустии кофӣ. Дар ин марҳила натиҷаҳои бадастовардашудаи амсилаи таҳияшуда, бояд эътимодноқ бошанд.

Қобилияти рушд (такмилдиҳӣ). Амсилаи додашударо такмил ва ё рушд додан мумкин бошад. Яъне, қобилияти рушддиҳии амсила ҷой дошата бошад.

Шаклҳои муарриффии амсилаҳо

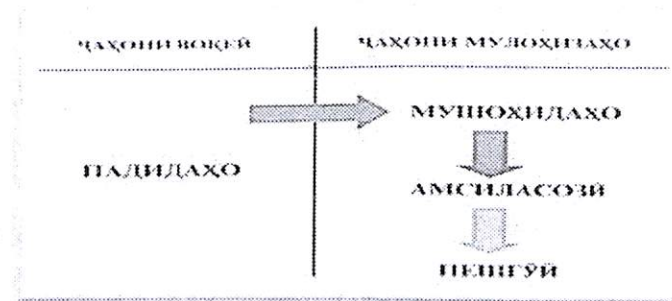
Амсилаҳо дар чунин намуд ва шаклҳо муарриффӣ мешаванд:

1. **аналитикӣ-таҳлилӣ** - навишти амсила дар шакли ҳалли аналитикии муодилаҳои ибтидоӣ;
2. **алгоритмӣ** - навишти алгоритми ҳалли амсила тавассути методҳои ҳисобкунӣ имконпазир бошад;
3. **нақшавӣ (графикӣ)** - тасвири амсила дар баъзе механизмҳои графикӣ (масалан, дар шакли график, микросхемаҳои эквивалентӣ, диаграммаҳо ва ғайра) имконпазир бошад;
4. **физикӣ** - муарриффии амсилаҳо ҳамчун нусхаи воқеияшон дар равандҳои технологӣ муайян бошад;
5. **инвариантӣ** - навишти амсила бо истифодаи забони анъанавии математикӣ, новобаста аз усули ҳалли он;
6. **шабеҳӣ** - амсилаҳо дар асоси шабеҳии зӯҳуроти табиати гуногуни ҷисмонӣ тасвир мешаванд, инчунин бо муодилаҳои риёзӣ навишта мешаванд.

1.3. Равандҳои амсиласозӣ

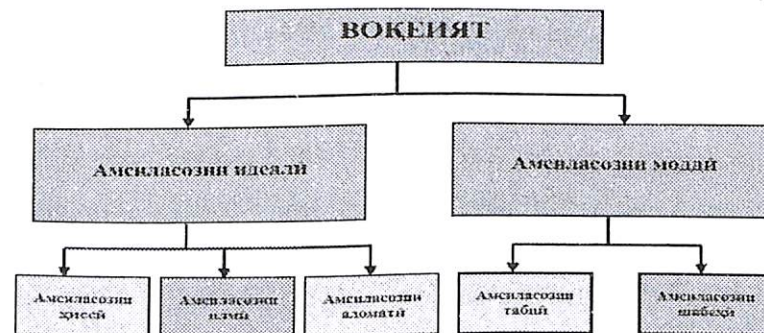
Ба назар гирифтани омилҳо ва тасвирҳои ибтидоии усули шиноخت ва дарки оламо мо метавонем, бо ҷаҳони воқеӣ муқоиса намоем. Дар ҷаҳони воқеӣ падидаҳо ва

равандҳои мухталифи гуногун ҳам дар намуди табиӣ ва ҳам дар намуди техногенӣ ба назар мерасанд. Ин ҷаҳони мулоҳизаҳо як олами тафаккур аст, ки тавассути мушоҳида намудан ва пешгӯӣ намудани воқеияти ҳодисаҳои ҷойдошта моро ба масъалаҳои асоситарини амсиласозӣ оварда мерасонад (Расми 1.3.1.).



Расми 1.3.1. Тавсифи шиноخت ва дарки объектҳо

Вобаста ба тарзи сохт ва шакл амсилаҳоро ба ду гурӯҳ ҷудо намудан мумкин аст (Расми 1.3.2.).



Расми 1.3.2. Намудҳои амсиласозӣ

Дар қисмати наватӣ, доир ба тавсифи амсилаҳои идеалӣ ва моддӣ баъзе маълумотҳоро меорем.

Амсиласозии идеалӣ. Амсила дар он ҳолат, идеалӣ номида мешавад, агар дар он тавсифи шакл, гуфтор, нақша, чадвалҳо, ифодаҳои математикӣ бо объекти воқеӣ муқоиса карда шаванд.

Амсиласозии идеалиро ба намудҳои зерин ҷудо намудан мумкин аст: ҳиссӣ, аломатӣ-рамзӣ ва илмӣ.

Амсиласозии ҳиссӣ. Амсиласозии ҳиссӣ, ки ба идеяи ҳиссии объекти тадқиқотии додашуда асос ёфтаанд ва барои ба расмӣ даровардани объект асос намешаванд.

Масалан, амсилаи ҳиссӣ метавонад, таҷрибаи **зиндагии шахсро** дар табобати бемориҳо бо истифодаи **усулҳои анъанавии тиббӣ** дар бар гирад.

Амсиласозии илмӣ. Амсиласозии илмӣ ҳамеша аз ҷиҳати мантиқӣ баҳодиҳӣро ба объекти додашуда ба роҳ мемонад. Инчунин аз байни ҳамаи он гипотезаҳои додашуда, ҳамоноро қабул мекунад, ки аз ҷиҳати илмӣ асосноканд.

Амсиласозии аломатӣ. Амсиласозӣ бо истифода аз тасвирҳои имкониятноки дар ягон намуди додашуда ба монанди: диаграммаҳо, графикҳо, нақшаҳо ва ғайраҳо тасвир карда мешаванд. Намунаи амсиласозии аломатӣ ва ё рамзӣ ёддоштҳои асарҳои мусиқӣ, формулаҳои кимиёвӣ ва ғайра шуда метавонанд.

Амсиласозии моддӣ. Амсилаи моддӣ амсилае мебошад, ки дар он объект бо истифодаи шабеҳи моддии худ мавриди санҷиш ва тадқиқ қарор мегирад. Инчунин дар амсиласозии моддӣ хусусиятҳои асосии физикӣ, геометрӣ, динамикӣ ва функционалии объекти мазкурро бо таври мушаххас таҷассум карда мешаванд.

Амсиласозии моддиро дар навбати худ ба амсиласозии табиӣ ва шабеҳӣ ҷудо мекунам.

Амсиласозии табиӣ - амсиласозие, ки дар он объекти воқеӣ бо шабеҳи худ алоқамандӣ дорад. Инчунин дар асоси назарияи хосиятҳо, равандро ва зухуротҳои омӯхташуда аз амсила ба объект гузаштан имконпазир аст.

Мисол, озмоиши автомобил ва ё ҳавопаймон нав дар нақбӣ бодӣ.

Амсиласозии шабеҳӣ-амсиласозие мебошад, ки дар асоси шабеҳияти равандро ва зухуротҳои гуногуни табиати ҷисмонӣ, ба таври расмӣ тавсиф карда мешавад.

1.4. Амсилаҳои риёзӣ ва таснифи онҳо

Амсилаи риёзӣ. Мафҳуми «амсиласозии риёзӣ» дар даҳсолаҳои охир дар адабиётҳои илмӣ, аз ҷумла дар илмҳои табиӣ ва техникӣ хеле маъмул аст. Дар айни замон, қариб ягон ширкати муҳандисӣ ё тарроҳие вуҷуд надорад, ки амсилаҳои математикиро истифода набарад. Дар солҳои охир, истифодаи амсилаҳои математикӣ дар таҳқиқотҳои илмӣ, бахусус дар соҳаҳои иқтисодиёт, менеҷмент, таърих, биология ва ғайра васеъ истифода мешавад. Бояд қайд намуд, ки амсиласозии математикӣ фанни алоҳидаи байнисоҳавие мебошад, ки маҷмӯи объектҳои додашударо, бо усулҳои гуногун таҳқиқ мекунад.

Амсилаҳои риёзӣ, гуфта навишти хусусият ва ҳолатҳои объектҳои додашударо бо забони математикӣ меноманд.

Амсилаҳои риёӣ бо таври мушаххас хусусиятҳо ва муносибатҳои байни ҳамдигарии ҷузъҳо ва параметрҳои объекти додашударо инъикос мекунанд.

Амсиласозии математикиро ҳамчун раванди таҳия намудан ва омӯзиши масъалаҳои риёӣ фаҳмидан мумкин аст.

Таърифи муфассали амсиласозии риёиро чунин баён намудан мумкин аст: *“Амсиласозии риёӣ тасвири рамзии илмӣи объекти додашуда бо забони математикӣ буда, тадқиқот дар он бо истифода аз усулҳои муайяни математикӣ гузаронида мешавад”*.

Амсилаҳои математикӣ робитаи байни сарчашмаи маълумотҳо ва арзишҳои додашударо тавсиф мекунанд.

Унсурҳои умумикардшудаи як амсиларо дида мебароем (Расми 1.4.1.).



Расми 1.4.1. Амсилаи умумикардшудаи риёӣ
Дар ин амсила:

- X, Y - маҷмӯи маълумотҳои воридшаванда, X - тағйирёбанда;
- Y -тағйирёбандаи мустақил-доимӣ (константҳо);
- L -оператори математикӣ, ки амалиётро аз рӯи маълумотҳои додашуда муайян намуда, муносибатҳои

ададӣ ё мантиқӣ дар байни маҷмӯи маълумотҳои воридотӣ ва содиротиро месанҷад;

- $G(X, Y)$ - маҷмӯи маълумотҳои содиротӣ ва маҷмӯи функцияҳои меъёриро ҳамчун ҳадаф ифода мекунанд.

Амсилаи риёӣ шабеҳияти риёзии объекти таҳияшуда мебошад. Дараҷаи мутобиқат намудани амсила ба объекти додашуда, аз дурустии ҳалли он муайян карда мешавад.

Таснифи амсилаҳои риёӣ. Дар айни замон, миқдори зиёди амсилаҳои риёӣ дар соҳаҳои мухталиф истифода мешаванд. Дар натиҷаи тадқиқотҳои зиёди илмӣи олимони соҳаи амсиласозии риёӣ қариб барои ҳамаи соҳаҳо амсилаҳои риёӣ сохта шудааст.

Дар робита ба ин, амсилаҳои математикиро вобаста ба хусусиятҳои дошташон ба якчанд гуруҳҳо ҷудо мекунанд:

- Вобаста ба сохтори мураккаби объекти додашуда ҳангоми амсиласозӣ;
- Параметрҳои воридотӣ ва содиротӣ;
- Усулҳои таҳқиқотии амсила;
- Объекти таҳқиқот;
- Ба амсила нисбат ба дараҷаи зинаҳояш баҳо додан;
- Табиат ва хусусиятҳои объектро нишон додан;
- Тартиби ҳисоб;
- Назорати раванди идоракунӣ.

Ҳоло дар поён, таснифи гурӯҳҳои амсилаҳои математикиро вобаста ба баъзе хусусиятҳо пешниҳод менамоем.

Аз рӯйи операторҳои амсилавӣ. Вобаста аз оператори амсилавӣ, амсилаҳо ба хаттӣ, ғайрихаттӣ, алгоритмӣ, оддӣ ва мураккаб ҷудо карда мешаванд.



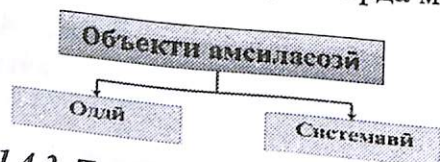
Расми 1.4.2. Таснифи амсиласозии математикӣ аз рӯи операторҳои амсилавӣ

Агар параметрҳои воридотӣ ва содиротии амсила хаттӣ бошанд, пас амсилаи риёзӣ мутаносибан хаттӣ номида мешавад, дар ҳолати вобастагии ғайрихаттӣ, амсила ғайрихаттӣ номида мешавад.

Агар оператори амсилавӣ вобастагии функционалии параметрҳои содиротӣ ва параметрҳои воридотиро дар шакли ифодаи алгебравӣ ҳисоб намояд, амсила оддӣ аст.

Амсилае, ки системаи муносибатҳои ҳолатҳои ҷойдоштаро дар намуди муодилаҳои дифференсиалӣ ва ё интегралӣ коркард мекунад, амсилаи мураккаб номида мешавад. Агар ҳангоми сохтани объект, аз алгоритмҳои истифода шавад, он гоҳ оператори додашуда, оператори амсилавӣ ё алгоритмӣ номида мешавад.

Аз рӯи мураккабии объекти тадқиқот. Аз рӯи сохтори мураккабӣ амсилаҳо ба объектҳои тадқиқотӣ-оддӣ ва тадқиқотӣ-системавӣ ҷудо карда мешаванд.

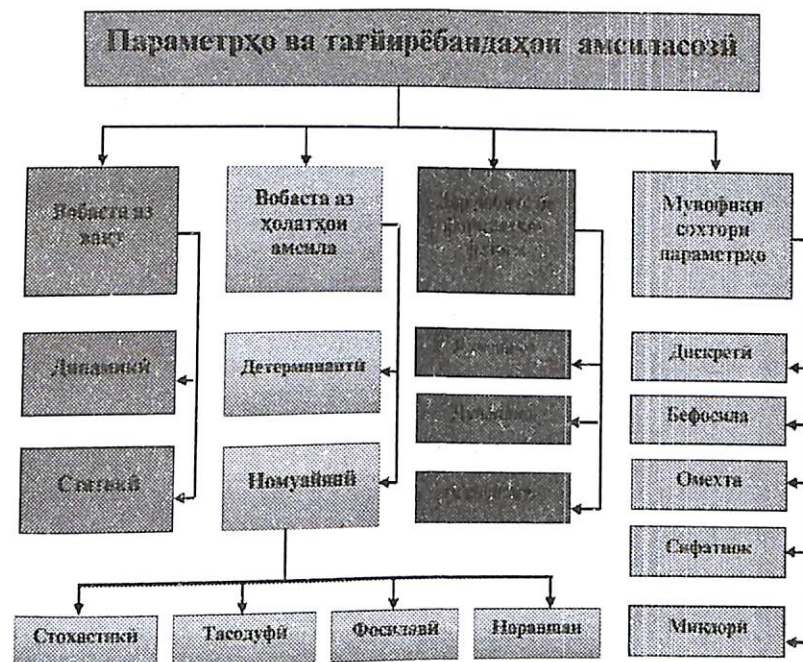


Расми 1.4.3. Таснифи амсиласозии математикӣ аз рӯи объекти мураккаб

Дар амсилаҳои оддӣ, сохтори дохилии объект ба назар гирифта намешавад. Инчунин унсурҳои таркибии он дар раванди ҳисобкунӣ ба инобат гирифта намешаванд. Дар таҳқиқоти системавӣ бошад, объекти система маҷмӯи ҳамаи унсурҳои ба ҳам алоқамандро дар бар мегирад, ки дар маҷмӯъ бо муҳити атроф робита доранд.

Вобастагии амсила аз параметрҳои воридотӣ ва содиротӣ. Ҳоло маънидодкунии параметрҳои содиротӣ ва воридотии тағйирёбандаҳои амсилавиро баён мекунем.

Амсилаи риёзӣ вобаста ба параметрҳои воридотӣ ва содиротӣ дар расми 1.4.4. оварда шудааст.



Расми 1.4.4. Таснифи амсилаҳои риёзӣ вобаста аз параметрҳо

Амсилаҳои риёзиро дар вобастагӣ ба параметрҳои воридотӣ ва содиротӣ дар чунин намуд таснифбандӣ намудан мумкин аст.

Дар робита ба мавқеи фазогӣ. Дар робита ба мавқеи фазогӣ таснифи амсилаҳо ба якченака, дученака ва сеченака чудо мешаванд. Ин тақсимот барои амсилаҳои тадбиқ карда мешавад, ки координатаҳои фазоро ҳамчун параметр дороанд.

Дар робита аз вақт. Амсилаҳоро ба намудҳои динамикӣ ва статикӣ чудо мекунанд. Баъзе параметрҳои амсилаҳо дар бисёр мавридҳо бетағйир мемонад, вале онҳо бо гузашти вақт қимати худро ё тағйир намедиханд ва ё тағйир медиҳанд.

Динамикӣ. Агар ҳолати система аз вақт вобастагӣ дошта бошад бо мурури замон тағйир ёбад, пас амсила динамикӣ номида мешаванд.

Статикӣ. Амсилаи статикӣ ҳолати объекти додашударо, дар як ҳолати оромӣ тавсиф мекунанд.

Вобаста ба сохтори параметрҳо бошад, амсилаҳо ба сифатӣ, омехта, дискретӣ, бефосила ва миқдорӣ чудо карда мешавад.

Вобаста аз ҳолатҳои амсила. Параметрҳои амсиларо вобаста аз ҳолатҳояш ба детерминантӣ ва номуайянӣ чудо мекунанд.

Детерминантӣ. Ҳолати системаро вобаста аз вақт тавсиф намуда, имкон медиҳад, ки арзиши параметрҳои содиротӣ ва қиматҳои параметрҳои воридотиро назорат ва пешгӯӣ намоем;

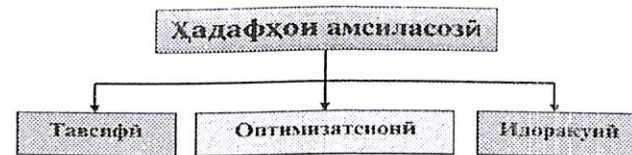
Номуайянӣ. Ҳолати тағйир ёфтани миқдори бузургиҳо ба таври тасодуфӣ баҳодиҳӣ мешавад. Инчунин қиматҳои

параметрҳои содиротӣ ва воридотӣ номуайян боқӣ мемонанд.

Дар навбати худ амсилаҳои дорои параметрҳои номуайянро ба гурӯҳҳои зерин чудо намудан мумкин аст:

- ✓ **Стохастикӣ.** Дар ҳолати стохастикӣ қиматҳо ва параметрҳои додашудаи амсила бо тағйирёбандаҳои тасодуфӣ, аз рӯйи эҳтимолияти додашудаашон муайян карда мешаванд.
- ✓ **Тасодуфӣ.** Ҳама қиматҳои додашудаи амсила аз рӯйи тағйирёбандаҳои тасодуфӣ муайян карда мешаванд, ки бо баҳодиҳии эҳтимоли, дар натиҷаи коркарди додаҳои таҷрибавӣ муайян карда шудаанд.
- ✓ **Фосилавӣ.** Арзишҳои ҳама параметрҳои амсила тавассути бузургиҳои фосилавӣ, дар ягон фосилаи муайян бо қиматҳои имконпазири параметрҳо тавсиф карда мешаванд.
- ✓ **Норавшан-нофаҳмо.** Ҳама қиматҳо ё параметрҳои алоҳидаи амсила тавассути функсияҳои навишта мешавад, ки дар маҷмӯи номуайян дода шудаанд.

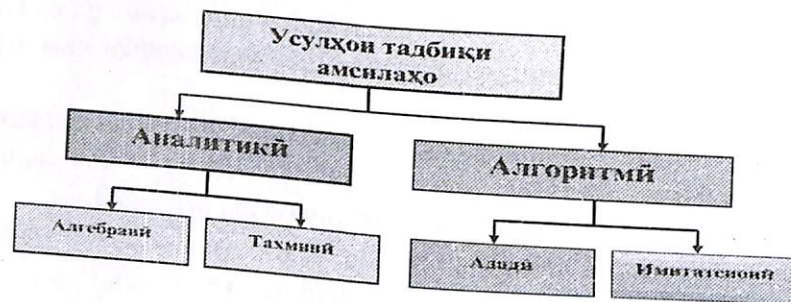
Ҳадафҳои амсиласозӣ. Ҳадафҳои амсиласозӣ гуфта, он вобастагиро ва амалҳоеро дар назар доранд, ки бо мақсади расидан ба ҳалли оптималии масъалаҳои ҷойдошта равона шудаанд. Вобаста аз ҳадафҳо амсилаҳоро ба ба чунин қисмҳо чудо мекунанд: тавсифӣ, оптимизатсионӣ ва идоракунии (Расми 1.4.5.).



Расми 1.4.5. Таснифи амсилаҳои математикӣ вобаста аз ҳадафҳо

Бо истифода аз амсилаҳои оптимизатсионӣ, ҳисоб кардани меъёрҳои оптималии параметрҳои объекти амсиласозӣ имконпазир аст. Аз тарафи дигар, ин гурӯҳи амсилаҳоро барои дарёфти ҳолати оптималии равандҳои додашуда, истифода бурдан мумкин аст. Бо мақсади қабул намудани қарорҳо ҳангоми идоракуниҳо дар соҳаҳои мухталиф амсилаҳои идоракунӣ истифода бурда мешаванд.

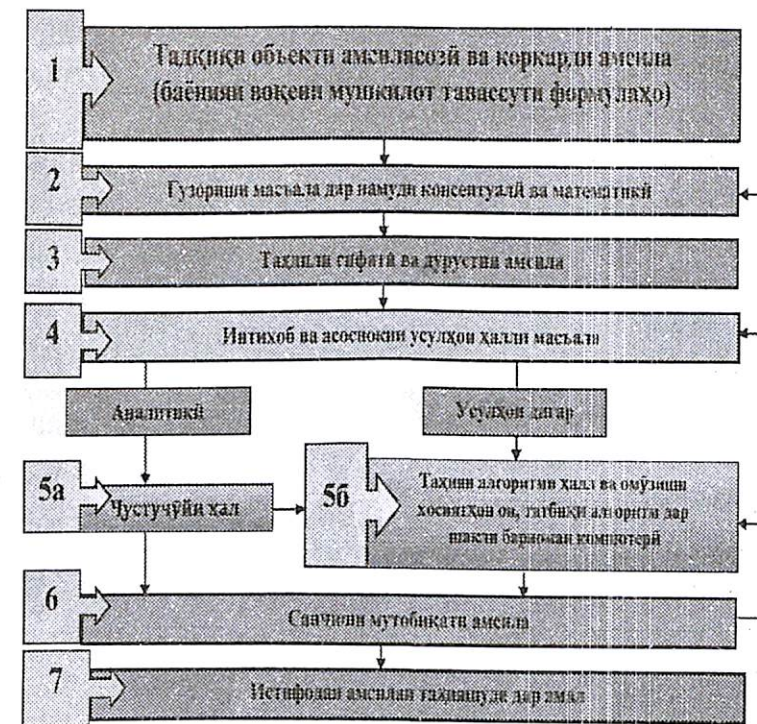
Вобаста аз усули тадбиқ. Вобаста аз усулҳои тадбиқӣ, амсилаҳоро ба қисматҳои алоҳида ҷудо мекунанд (Расми 1.4.6.).



Расми 1.4.6. Таснифи амсилаҳои математикӣ вобаста аз усули тадбиқ

1.5. Марҳилаҳои сохтани амсилаҳои риёзӣ

Сохтани амсилаҳои риёзӣ як раванди хеле душвор буда, арзиши баланди захираҳои моддӣ ва вақтро талаб мекунанд. Мутахассиси амсиласоз бояд бо маҳорати баланд ва салоҳият бо таври математикӣ, усулҳои ададӣ, барномасозӣ ва системаҳои ҳозиразамони ҳисоббарориро истифода намояд. Сохтани марҳилаҳои амсилаҳои риёзӣ дар расми 1.5.1 нишон дода шудааст.



Расми 1.5.1. Марҳилаҳои амсиласозӣ

1. **Тадқиқи объекти амсиласозӣ ва коркарди амсила.** Сохтани амсила аз тавсифи шифоҳии ашё ё объект оғоз меёбад. Ин марҳила маълумоти умумиро дар бораи табиат ва сохтори объект дар бар мегирад. Ин марҳиларо асосан таҳияи амсилавӣ меноманд. Мақсади ин марҳила таҳия ва баёни пурмазмунӣ масъалаи амсиласозӣ мебошад.
2. **Гузориши масъала дар намуни концептуалӣ ва математикӣ.** Дар ин марҳила, баҳодиҳии объекти додашуда анҷом меёбад. Инчунин ҳангоми таҳия

намуди амсила омилҳои нозизе, ки ба объект на он қадар таъсиррасонанд, ба ҳисоб гирифта намешаванд.

Ҳадафи таҳияи амсилаи концептуалӣ ин тасвири мазмунноки объекти додашуда, бо воситаи нақша ва блокҳо аст, ки маҷмӯи гипотезаҳои додашударо оид ба хосиятҳо ва рафтори объекти амсиласозӣ дар бар мегиранд. Амсилаи концептуалӣ имконият медиҳад, ки мо дар асоси он амсилаи математикиро рӯйи кор орем. Дар ин марҳила тартиб додани тавсифи математикӣ ҳодисаҳо ва унсурҳои асосӣ дар объекти додашуда, пешакӣ муайян карда карда мешаванд ва сипас муносибати байни онҳо муқаррар карда мешаванд. Инчунин барои ҳар як ҷузъи интиҳобшудаи объект як муодила навишта мешавад, ки фаъолияти онро инъикос мекунад. Илова бар ин, муодилаҳои математикии тартибдодашуда бояд инъикосгари робитаи байни ҷузъҳои интиҳобкардашуда бошанд. Вобаста аз раванд ва тавсифи математикии объект, муодилаҳои тартибдодашуда метавонанд дар намуди системаи алгебравӣ ва ё системаи муодилаҳои дифференсиалӣ пешниҳод гарданд. Раванди ба даст овардани маҷмӯи муодилаҳои математикӣ, ки объекти амсиласозиро ба таври возеҳ тавсиф мекунад, гузориши масъалаи амсиласозӣ дар намуди математикӣ номида мешавад.

3. **Таҳлили сифатӣ ва дурустии амсила.** Барои назорат намудани дурустӣ ва эътимоднокии системаи математикии ба вучуд омада, гузаронидани як қатор санҷишҳо ҳатмӣ аст:

- ✓ назорати андоза;
- ✓ назорат аз рӯйи вобастагиҳо;
- ✓ назорати ҳолатҳои фавқулодда;
- ✓ назорати шароити канорӣ;
- ✓ назорати ҳолатҳои физикӣ;
- ✓ назорат вобаста аз ҷудокунии риёзии ҷузъҳои система.

Мафҳуми «дурустии амсила», хусусан дар математикаи амалӣ, хеле муҳим аст. Муайян кардани дурустии масъалаи математикӣ кори душвор аст. Барои таъмини дурустии амсилаи математикӣ, ҳама санҷишҳои назоратӣ бояд гузаронида шаванд.

Дар ин марҳила, сохтани амсилаи риёзӣ ба итмом мерасад ва пас аз он озмоиши ҳисоббарорӣ гузаронида мешавад.

4. **Интиҳоб ва асоснокии усулҳои ҳалли масъала.** Амсилаи таҳияшуда бо ҳама гуна усулҳои имконпазир санҷиш карда мешавад. Азбаски на ҳама амсилаҳо аз ҷиҳати назариявӣ ҳал карда мешаванд, бинобар ин аз усулҳои ҳисоббарорӣ васеъ истифода мебаранд. Асосан, ин методҳоро дар таҳлили объектҳои ғайрихаттӣ тадбиқ намудан муҳим аст, зеро таҳлили сифатии ин объектҳо номаълум аст.

Вобаста аз роҳҳои ҳалли масъала, ҳамаи методҳои додашударо чунин тақсимбандӣ намудан мумкин аст.

- ✓ **Аналитикӣ-таҳлилӣ.** Ин усулҳо барои таҳлили натиҷаҳо мувофиқанд, аммо онҳо танҳо барои амсилаҳои нисбатан содда тадбиқ мешаванд. Агар

- ҳалли аналитикии масъала вучуд дошта бошад, он гоҳ ҳалли ададӣ амалан татбиқ карда намешавад;
- ✓ **Алгоритмӣ.** Барои усулҳои алгоритмӣ озмоиши ҳисоббарорӣ бо истифодаи компютер иҷро карда мешавад.
5. **Чустучӯӣи ҳалли масъала ё тадбиқи алгоритм дар шакли барномаҳои компютерӣ.** Ин марҳила дар тавсифи таҷриба ва барномаҳои компютерӣ баррасӣ карда мешавад.
6. **Санҷиши мутобиқати амсила.** Дар ин марҳила, мувофиқати амсила ба объект вобаста аз хусусиятҳои ҷойдошташ, муайян карда мешавад. Ҳамзамон, амсила барои расидан ба ҳадаф бо ҳар васила омӯхта мешавад, масалан, муқоиса бо таҷриба ё равишҳои дигар. Инчунин ин марҳила, марҳилаи муқаррар кардани дараҷаи мувофиқати амсила бо объекти ниҳой мебошад. Барои санҷидани мутобиқати амсилаи математикӣ ба раванди воқеӣ, муқоисаи натиҷаҳои ҷенкунӣ дар объект бо натиҷаҳои пешгӯии амсила дар намуни шабеҳӣ лозим аст.
7. **Истифодаи амалии амсила.** Сарфи назар, аз соҳаи таҳияшудаи амсила, бояд таҳлили сифатӣ ва миқдорӣ натиҷаҳои амсиларо мавриди тадбиқ дар амал қарор диҳем, яъне:
- хусусиятҳои оптималии роҳи ҳалли масъаларо пайдо кунем;
 - миқёс ва самти намунавии амсиларо нишон диҳем;
 - дурустии ҳамаи гипотезаҳои дар марҳилаи таҳияи амсилаи риёзӣ қабулшударо санҷида, имкониятҳои

соддатаринро барои баланд бардоштани самаранокии кори объект дар ҳолатҳои зарурӣ арзёбӣ кунем;

- бояд нишон диҳем, ки амсилаи сохташуда дар оянда дар кадом соҳаҳо истифода бурда мешавад.

1.6. Амсилаҳои имитатсионӣ

Дар айни замон, оид ба масъалаи амсиласозии имитатсионӣ нуқтаи назари ягона вучуд надорад. То имрӯз, шумораи зиёди таърифҳо ва истилоҳҳои «амсиласозии имитатсионӣ» мавҷуданд.

Амсиласозии имитатсионӣ- як методе мебошад, ки ба мо имкон медиҳад, амсилаҳоро эҷод намоем, ки равандҳоро тавре ки дар асл вучуд доранд, тавсиф намояд. Чунин амсилаҳоро метавон барои як санҷиш ва ҳам барои маҷмӯи муайяни санҷишҳо истифода кард. Натиҷаҳо асосан бо таври тасодуфии равандҳои додашуда муайян карда мешаванд. Инчунин дар асоси маълумотҳои бадастоварда мо метавонем омори саҳеҳ ва устуворро ба даст орем.

Бо таври дигар: амсиласозии имитатсионӣ як усули тадқиқот мебошад, ки дар он системаи тадқиқшаванда бо амсилае иваз карда мешавад, ки системаи воқеиро бо дақиқияти кофӣ тавсиф мекунад. Бо мақсади гирифтани маълумот дар бораи ин система таҷрибаҳо гузаронида мешаванд. Инчунин, синфи объектҳои вучуд дорад, ки бо сабабҳои гуногун барои онҳо амсилаҳои аналитикӣ-таҳлилий таҳия нашудаанд.

Амсиласозии имитатсионӣ- тавсифи мантиқӣ-математикии объект мебошад, ки онро барои таҷриба дар компютер бо мақсади тарроҳӣ, таҳлил ва баҳодиҳии фаъолияти объект истифода бурдан мумкин аст.

Амсиласозии имитатсиониро аз рӯи қоидаҳо ҳамчун маҷмӯи муодилаҳои дифференциалӣ, нақшаҳо, шабакаҳо ва ғайра баррасӣ намудан мумкин аст.

Амсиласозии имитатсионӣ муайян менамояд, ки системаи додашуда, дар ҳолати кунунӣ ва оянда кадом вазъро дармеебад.

Имитатсия -ин чараёни "ичро" гаштани амсила, бо гузашти вақт (дискретӣ ё доимӣ) дар ҳолати тағйирёбанда мебошад.

Мақсади амсиласозии имитатсионӣ аз таҷдиди рафтори системаи омӯхташуда дар асоси таҳлили робитаҳои назарраси унсурҳои он, ё ба ибораи дигар, таҳияи афзори мукамал барои гузаронидани таҷрибаҳои гуногуни объекти додашуда мебошад.

Амсиласозии имитатсионӣ дар мавридҳои зерин истифода бурда мешавад:

- ✓ дар ҳолате, ки озмоиши объекти додашуда: душвор, гаронарзиш ё ғайриимкон бошад;
 - ✓ дар ҳолате, ки таҳияи амсилаи аналитикӣ-таҳлилӣ ғайриимкон бошад;
 - ✓ дар ҳолате, ки агар рафтори системаро вобаста аз вақт тақлид кардан лозим бошад.
- Агар раванди амсиласозии имитатсиониро тавассути муқоисакуниҳо бо амсилаҳои классикии математикӣ нишон диҳем, ҳангоми сохтани амсилаҳои математикии

системаҳои мураккаб як қатор мушкilot пайдо шуданаш мумкин аст. Амсила, чун қоида, аз миқдори зиёди параметрҳо, муносибатҳои зиёди байни унсурҳо ва маҳдудиятҳои сохторашон гуногуни ғайримуқаррарӣ вобастагӣ дорад.

Ба системаҳои воқеӣ аксар вақт омилҳои гуногуни тасодуфӣ таъсир мерасонанд, ки баррасии онҳо таҳлилӣ душвори бузургро ба бор меорад ва аксар вақт шумораи зиёди онҳо ҳалнашавандаанд. Ин мушкilot танҳо бо истифодаи амсиласозии имитатсионӣ муайян карда мешавад. Бартарии асосии амсиласозии имитатсионӣ аз таҳлили қобилияти ҳалли масъалаҳои мураккаб иборат аст. Амсиласозии имитатсионӣ имконият медиҳад, ки мо ба назар гирифтани омилҳо, ба монанди мавҷудияти унсурҳои ҷудогона ва давомдор, хусусиятҳои ғайримуқаррарии унсурҳои система, таъсири тасодуфии онҳо ва ғайра, ки аксар вақт дар таҳқиқоти таҳлилӣ мушкilot эҷод мекунанд, бо таври содда омӯзем.

Дар амсиласозии имитатсионӣ ду усули фарқкунанда мавҷуд аст:

- ✓ усули амсиласозии оморӣ;
- ✓ усули санҷиши оморӣ (Монте-Карло).

Усули Монте-Карло усули ададӣ буда, барои амсиласозии тағйирёбандаҳо ва функцияҳои тасодуфие истифода мешавад, ки хусусиятҳои эҳтимолияти онҳо бо ҳалли масъалаҳои таҳлилӣ мувофиқат мекунанд. Он аз такрористеҳсолкунии равандҳои иборат мебошад, ки амалӣ кардани тағйирёбандаҳо, функцияҳои тасодуфӣ ва

коркарди минбаъдаи иттилоот бо усулҳои омили математикӣ вобаста аст.

Агар ин методро барои амсиласозии мошинҳои имитатсионӣ, барои омӯхтани хусусиятҳои равандҳои амалкунандаи системаҳои, ки таъти таъсири тасодуфӣ қарор мегиранд, истифода барем, пас ин методро усули амсиласозии омори меноманд.

Усули амсиласозии имитатсионӣ барои арзёбии ҳолатҳои сохтори система, самаранокии алгоритмҳои гуногуни идоракунии система, таъсири тағйирот дар параметрҳои гуногуни система истифода мешавад.

Амсиласозии имитатсионӣ барои таҳлили сохтори алгоритм ва параметрҳои системаҳо метавонад ҷаме эҷод карда шавад, ки маҳдудиятҳои муайян мавҷуд бошанд.

Соҳаи истифодаи амсилаҳои имитатсионӣ:

- ✓ равандҳои ҳисмонӣ;
- ✓ маводи илмӣ;
- ✓ нанотехнология;
- ✓ равандҳои соҳибдорӣ;
- ✓ истеҳсол;
- ✓ амнияти иттилоотӣ ва ғайра.

▼ Ба саволҳои зерин ҷавоб гуед:

1. Амсила чист? Зери мафҳуми амсила, чиро фаҳмидан мумкин аст? Равандҳои амсиласозӣ кадомҳоянд?
2. Дар зери мафҳуми амсиласозӣ чиро фаҳмидан мумкин аст?

3. Амсилаҳои моддӣ аз иттилоотӣ бо кадом хусусиятҳои худ фарқ мекунанд?
4. Бо кадом мақсадҳо амсилаҳо месозанд?
5. Хосиятҳои амсиларо номбар кунед?
6. Кадом шакли муаррифии амсилаҳо медонед?
7. Барои чи амсиларо потенциалӣ мегӯянд?
8. Амсилаи идеалӣ аз амсилаи моддӣ чӣ фарқ дорад?
9. Амсилаи интуитивӣ гуфта чиро мефаҳмед?
10. Амсиласозии аналогӣ гуфта, чиро дар назар доранд?
11. Бо кадом мақсад ва вазифаҳо амсилаҳои рамзӣ муоинагардонӣ карда мешаванд?
12. Дар зери мафҳуми амсиласозии аломатӣ ва ё рамзӣ чиро мефаҳмед?
13. Зарурияти санҷиши мувофиқати амсила бо воқеият аз чӣ иборат аст?
14. Амсилаи математикӣ чи гуна аст?
15. Классификасияи амсилаҳои риёзиро номбар кунед?
16. Операторҳои амсилавиро номбар намоед?
17. Дар кадом вақт, ҳолати системаҳои додашударо детерминантӣ мегӯянд?
18. Фарқи байни амсилаҳои иттилоотии статикӣ ва динамикӣ дар чист?
19. Ҳадафҳои амсиласозиро номбар намоед?
20. Амсилаҳои аналитикӣ аз амсилаҳои алгоритмӣ чӣ фарқ доранд?

Супоришҳои зеринро мустақилона иҷро кунед:

1. Тавассути Интернет барои соҳаҳои гуногуни илм амсилаҳои рамзии муоинашаванда ҷустуҷӯ намоед ва бо тарзи кори онҳо шинос шавед.
2. Оиди амсилаҳои динамикӣ мисолҳои мушаххас оварда, тавассути компютер барнома тартиб диҳед.
3. Оид ба амсилаҳои аналогӣ мисолҳои мушаххаси ҳаёти таҳия намоед.
4. Дар намуди концептуалӣ амсилаи тарзи парвариши гулҳоро таҳия намоед.
5. Фарқияти амсилаҳои статикӣ ва динамикиро бо мисолҳо нишон диҳед.

БОБИ 2. АМСИЛАСОЗИИ ДИНАМИКИИ ПОПУЛЯТСИЯҶО

2.1. Амсилаи динамикии популятсияи якҷинса. Амсилаи Малтус

Барои ҳолати мазкур, мо усулҳои асосиро дида мебароем, ки барои тарҳрезии тағйироти ҷомеаи биологӣ истифода бурда мешаванд. Барои навишти дурусти риёзии ташаккули динамикии популятсия бо ёрии муодилаҳои оддии дифференциалӣ шартҳои зеринро бояд риоя кард:

- *популятсия бояд дар муҳит баробар тақсим карда шавад;*
- *популятсия то дараҷаи кифоя аз рӯи синну сол ва нишонаҳои ҷинсӣ якҷинса бошад;*
- *раванди аз нав ҳосилшавӣ бефосила ба амал ояд;*

Дар ҳолати додашуда, мо шумораи популятсияро бо $N(t)$ ишора мекунем. Функсияи $N(t)$ бояд дискретӣ бошад, аммо пешниҳодҳои овардашуда имкон медиҳанд, бо хатогиҳои муайян ҳисоб карда шавад, ки функсияи мазкур, барои ҳамаи $t \geq 0$ бефосила мебошад. Дар як қатор ҳолатҳо барои қулай ҳисоб кардан ба сифати шумораи популятсия ҳаҷми биомассаи ҳамаи популятсияро (масалан, маълум аст, ки биомассаи мӯрчаҳо ба биомассаи одамон муқоисашаванда аст, аммо шумора якҷанд маротиба фарқ мекунад) дида баромада мешавад.

Аз мазмуни биологӣ бармеояд, ки бояд $N(t) \geq 0$ барои ҳама ҳолатҳои додашудаи $t \geq 0$ бошад.

Минбаъд, шумораи ибтидоии навъҳои асосии ҷараёни ташаккули популятсияро бо $N_0 = N(0)$ ифода мекунем.

Дар боби мазкур, амсилаҳои асосии ҷараёни ташаккули як популятсияро аз назар гузаронида, ба назар мегирем, ки таъсири ҳар як навъ аз навъҳои мавҷуда хеле хурд мебошад.

Амсилаи нахустини ҷараёни ташаккули популятсия, ки соли 1798 нашр шуда буд, аз тарафи демограф ва иқтисодчии австриягӣ Томас Малтус (1766-1834) пешниҳод шуда буд.

Бигузор, α -таваллудшавии нисбӣ (таносуби шумораи таваллудшудагон дар воҳиди вақт ба шумораи умумии популятсия), β -миқдори нисбии фавт (таносуби шумораи популятсияи фавтида аз даррандагон, беморӣ, пиршавӣ ва амсоли инҳо дар воҳиди вақт ба миқдори умумии популятсия) бошад. Фарз мекунем, ки афзоиши нисбӣ $\delta = \alpha_0 - \beta_0$ бузургии доимӣ мебошад. Онгоҳ, барои муайян намудани популятсияи навъҳо бо шумораи ибтидоии N_0 чунин ҳисобкуниҳо мегузаронем:

Бо $N(t)$ - шумораи популятсияро дар лаҳзаи вақти t ишора мекунем, $t \in [0, t_k]$. Дар фосилаи додашуда афзоишро муайян менамоем. Маълум аст, ки

$$N(t + \Delta t) - N(t) = [\alpha(N) - \beta(N)]\Delta t$$

муодилаи балансро ифода мекунад. Дар ин ҷо α -функсияи тавлидшавӣ, β -функсияи фавт мебошанд. Ҳар ду тарафи баробарии охирон, яъне афзоишро ба Δt тақсим намуда ҳосил мекунем.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \alpha(N) - \beta(N)$$

аз ин ҷо меёбем:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha(N) - \beta(N) \\ N(0) = N_0, \quad 0 < t \leq t_k \end{cases} \quad (2.1.1.)$$

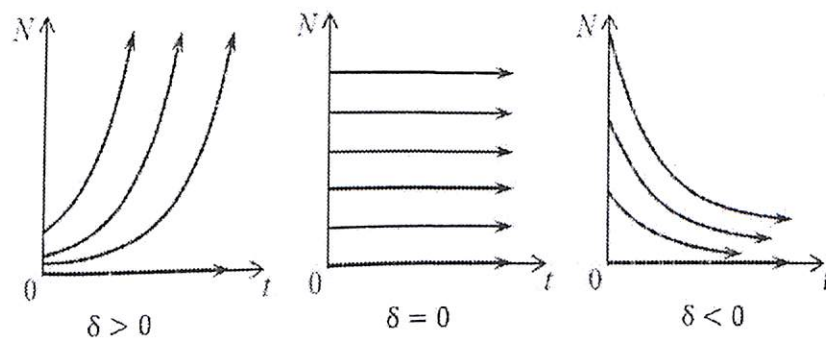
Бигзор, $\alpha(N) = \alpha_0(N)$, $\beta(N) = \beta_0(N)$, бошад. Ишораи $\delta = \alpha_0 - \beta_0$ -ро истифода намуда, амсилаи Малтусро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \delta N \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (2.1.2.)$$

Муодилаи ҳосилшударо ҳал намуда меёбем.

$$N(t) = N_0 e^{\delta t}$$

Ҳалли ёфташударо ба таври графикӣ шарҳ медиҳем.



Расми 2.1.1. Динамикаи ташаккули популятсия

Маълум аст, ки агар $\delta > 0$ бошад, пас шумораи популятсия беохир меафзояд, ҳангоми $\delta < 0$ популятсия кам шуда, бо зиёдшавии вақт ба сифр

майл мекунад ва дар ҳолати $\delta = 0$ бе тағйир мемонад.

Бо истифода аз маълумотҳо дар бораи афзоиши шумораи аҳоли Малтус нахуст шуда ба он далел таваҷҷуҳ зоҳир намуд, ки шумораи инсоният аз рӯи экспонент меафзояд, то он замоне, ки истехсоли ғизо бо мурури замон ба таври хаттӣ (дар пешрафти математикӣ) меафзояд. Аз ин ҷо хулоса бароварда шудааст, ки дер ё зуд экспонент хатман функцияи хаттиро пеш мегузарад ва гуруснагӣ оғоз мегардад. Дар асоси ин хулосаҳо Малтус дар бораи зарурати ворид намудани маҳдудиятҳо доир ба таваллудҳо, бахусус барои табақаҳои камбағалтарини ҷомеа далелҳо оварда буд.

Камбудии асосии назарияи Малтус аз нуқтаи назари муосир набудани механизми худтанзимкунии шумораи инсоният мебошад, ки ба гузариши демографии он оварда мерасонад. Гузариши демографӣ ин пастшавии босуръати таърихӣ таваллудшавӣ ва микдори фавт мебошад.

Дар замонҳои Малтус ин ходиса танҳо дар шаҳрҳои бузурге мушоҳида карда мешуд, ки дар онҳо табақаҳои якхелаи аҳоли зиндагӣ мекарданд, дар замони ҳозира тамоми қитъаҳо, аз он ҷумла тамоми мамлакатҳои мутараққиро дар бар мегирад.

Бо вучуди ин назарияи Малтус қонуниятҳои ҷараёни ташаккули иқтисодӣ-демографии ҷомеаро хеле дуруст шарҳ медиҳад. Ақидаҳои Малтус ба рушди биология таъсири пурзӯри мусбӣ расониданд. Пеш аз ҳама, ба миён омадани амсилаҳои нисбатан мукаммали

математикӣ-биологӣ аз таҳаввулоти амсилаи мантиқии Гомпертс ва Ферхюлст дар ин замина, пайдо шуданд.

2.2. Амсилаи Гомпертс

Қонуниятҳои тағйирёбии давомнокии ҳаётро дар давраҳои таърихӣ маълум аст, ки зина ба зина дар як организми алоҳида омӯхтан номумкин аст. Чунин таҳқиқотҳои популятсияро, асосан бо истифодаи усулҳои омории мегузаронанд. Ҳанӯз соли 1825 Бенджамин Гомпертс вобастагии афзоиши микдори фавтро аз рӯи синну соли одамон ва ҳайвонот нишон дода буд. Тибқи қонуни Гомпертс микдори фавт бо таври экспонентӣ бо синну сол меафзояд. Ҳамин тариқ, ҳаҷми популятсия бо синну сол аз рӯи экспоненти дучанда яъне

$$N(t) = \exp(-mb^t)$$

паст мешавад.

Барои ин ҳолат, амсилаи ба ин мулоҳизаҳо мувофиқро дида мебароем:

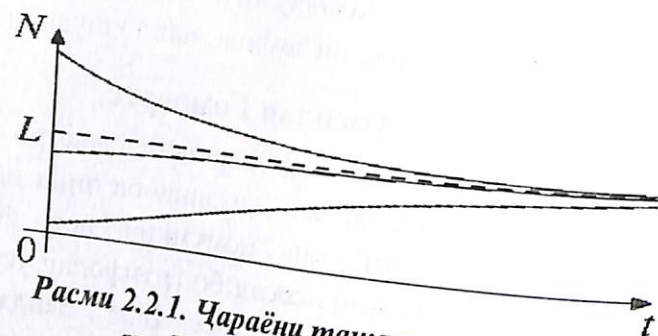
$$\frac{dN}{dt} = a \left(1 - \frac{\ln N}{\ln L}\right) N, \quad (2.2.1.)$$

Ин ҷо a — таваллудшавии нисбӣ, суръати афзоиш $a > 0, L > 1$.

Ҳалли муодилаи мазкурро ҳангоми дида баромадани муодилаи зерин меёбем:

$$N(t) = L \left(\frac{N_0}{L}\right)^{\exp\left(-\frac{at}{\ln L}\right)} \quad (2.2.2.)$$

Ифодаи (2.2.2) ду хосияти муҳим дорад: ҳангоми $0 < N_0 < L$ шумораи N меафзояд, ҳангоми $N_0 > L$ бошад кам мешавад, аммо бо вучуди ин ба ҳудуди L наздик мешавад (Расми 2.2.1).



Расми 2.2.1. Чараёни ташаккули популятсия аз рӯи амсилаи Гомпертс

Ҳамин тариқ, L -ин шумораи максималии популятсияро мебошад, ки дар шароитҳои маҳдудияти захираҳои фаъолияти ҳаёти имконпазир мебошад. Бузургии мазкурро ҳаҷми муҳит низ меноманд.

2.3. Амсилаи логистикӣ Ферхюлст

Таҳлилҳо нишон медиҳанд, ки миқдори популятсия на танҳо аз таносуби таваллудшавӣ ва миқдори фавт, балки аз маҳдудияти захираҳои ғизоӣ ва дигар омилҳо ҳам (муҳити маҳдудкунанда) вобаста аст.

Барои ин омилҳоро муайян намудан математикии белгиягӣ Ферхюлст варианти хуदाстро оид ба назаргирии омилҳои мазкур пешниҳод намуд. Вай дар назди худ мақсади муайянкуниро гузошт, ки оё аҳолии Белгия метавонад, ба таври бемаҳдуд афзояд.

Ҳамчун ҳалли масъала амсилаи нави чараёни ташаккули шумораи популятсияро ҳангоми захираҳои маҳдуд пешниҳод кард, ки он намуди зеринро дорад.

$$\frac{dN}{dt} = a \left(1 - \frac{N}{L} \right) N \quad (2.3.1.)$$

ин ҷо: $L > 0$.

Ҳалли муодилаи мазкур намуди зерин дорад.

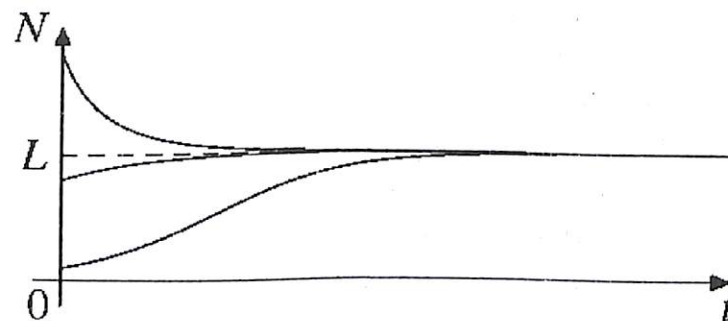
$$N(t) = \frac{LN_0}{N_0 + (L - N_0)e^{-at}}. \quad (2.3.2.)$$

Хосияти ҳалли муодила (2.3.1.) ба хосиятҳои ҳалли муодилаи (2.2.1.) монанд аст, аммо ҳангоми қиматҳои хурди N ҳалли (2.3.1.), назар ба (2.2.1.) тезтар меафзояд, ки равандҳои таҳаввулотиро хубтар нишон медиҳад. Инчунин ҳангоми қиматҳои хурди N миқдори популятсия қариб ба таври экспоненсиалӣ меафзояд, аммо бо мурури замон, ҳангоми ба L наздик шудан, афзоиш яку якбора суст мешавад.

Агар қимати ибтидоӣ $N_0 < L/2$ бошад, қачхатти афзоиш нуқтаи қачшавӣ дорад (Расми 2.3.1.).

Дар натиҷаи тадқиқот амсилаи аз ҷониби Ферхюлст пешниҳод кардашуда, ҳудуди болоии шумораи аҳолии Белгияро пешгӯӣ намуд, ки ба 9.4 млн нафар баробар аст.

Аҳолии ҳозираи Белгия 10.4 млн-ро ташкил медиҳад, ки дар ҳақиқат ҳам барои пешгӯии 200-сола натиҷаи саҳеҳ мебошад.



Расми 2.3.1. Чараёни ташаккули популятсия дар амсилаи Ферхюлст

Масъалаи 1. Бигузор $N_0 < L/2$ бошад. Дар як график ҳалли муодилаҳои (2.3.1) ва (2.2.1.) дар шароитҳои якхелаи ибтидоӣ сохта шавад.

Барои ҳолати маҳдудкунанда амсилаи умумии муҳитро месозем.

$$\frac{dN}{dt} = (a - f(N))N, \quad a > 0, \quad (2.3.3.)$$

Дар инҷо $N \geq 0$, $f(N)$ функсияи бефосила дифференсиронидашуда аст, ки вобастагии интенсивияти маҳдудшавиро аз миқдори навҳо инъикос мекунад.

Шартҳои афзоиш, ҳангоми киматҳои хурди N намуди $f(0) = 0$ дорад, шартҳои афзоиши интенсивияти маҳдудшавиро дар намуди

$$f'(N) > 0, N > 0$$

муайян мекунем.

Ғайр аз ин, фарз мекунем, ки шартҳои $\tilde{N} > 0$ ҷой дорад, ки $f(\tilde{N}) = a$ иҷро мешавад. Дар акси ҳол, қисмати рости муодилаи (2.3.3.) дар тамоми киматҳои $N \geq 0$ мусбат мебошад ва ба монанди амсилаи (2.1.1.) ҳалҳо бефосила меафзояд, ки ба мантиқи биологӣ мухолифат мекунад.

Исбот кардан душвор нест, ки агар чунин шартҳои $\tilde{N} > 0$ ҷой дошта бошад, ки $f(\tilde{N}) = a$ иҷро шавад, пас ғайр аз ҳолати ноустувори мувозинати $N = 0$ дар муодила ҳолати ноустувори асимптотикии сифрии мувозинати $N = \tilde{N}$ пайдо мешавад.

Бузургии $\tilde{N}$ дар ин ҳолат ҳаҷми муҳит мебошад. Динамикаи ташаккули ҳалли муодилаи (2.3.3.) мисли (2.2.1.) ё (2.3.2.) мебошад, аммо воридкунии функсияи ғайрихаттии $f(N)$ имкон медиҳад, ки маълумоти

таҷрибавӣ барои таҳқиқотиҳои минбаъда, нисбатан саҳеҳтар нишон дода шаванд.

Ҳамчунин функсияи $f(N)$ характери гуногуни бисёрбузургӣ дорад.

Масалан: αN^β - и дараҷавӣ, $\alpha \ln(\beta N + 1)$ - и логарифмӣ, $\alpha N/(\beta - N)$ - гиперболия, ки дар он ҷо α, β - доимииҳои мусбат мебошанд.

2.4. Амсилаи шумораи популятсия дар ташаккули даврӣ

Таҳлили ҷараёни ташаккули шумораи зиёди намудҳои ҳайвонот ба зарурати баҳисобгирии сиклҳои даврӣ дар муҳити атрофӣ моро ба ҳалли ин масъала водор мекунад.

Бигузор, бузургии a дар ҳудуди $[0, +\infty)$ функсияи бефосилаи $a = a(t)$, бошад.

Сараввал, муодилаи зеринро дида мебароем:

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N \quad (2.4.1.)$$

Ҳалли умумии муодилаи (2.4.1.) намуди зеринро дорад.

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_0^t a(\tau) d\tau\right) \quad (2.4.2.)$$

Фарз мекунем, ки коэффитсиенти афзоиш $a(t)$ - функсияи даврӣ бо даври T ($T > 0$) мебошад, яъне

$$a(t + T) = a(t) \quad \forall t > 0.$$

Қимати миёнаи коэффитсиенти $a(t)$ - ро бо воситаи $\bar{a}$ дар ҳудуди вақти t - ӯлонии T чунин ишора мекунем:

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(\tau) g\tau.$$

Пас аз ин, аз:

$$N(t+T) = N(t) \exp \left(\int_t^{t+T} a(\tau) d\tau \right)$$

бармеояд, ки $N(t)$ функсияи даврӣ мебошад, агар $a = 0$ бошад.

Масъалаи 2. Бигузор, $a = 0$ бошад. Оё баробарии $\tilde{N} = N_0$, ки дар он $\tilde{N}$ - қимати миёнаи шумораи популятсияҳо дар ҳудуди вақти T мебошад, ҷой дорад ё не?

Акнун муодилаи зеринро дида мебароем:

$$\frac{dN}{dt} = a(t) \left(1 - \frac{N}{L} \right) N \quad (2.4.3.)$$

Барои ҳолати даврӣ будани $a(t)$. Ҳалли умумии муодила намуди зеринро дорад.

$$N(t) = \frac{LN_0}{N_0 + (L - N_0) \exp \left(- \int_0^t a(\tau) d\tau \right)}$$

Фарз мекунем, ки $\bar{a} > 0$. Исбот кардан душвор нест, ки барои ҳолати мазкур ҷангоми ба ҳудуд гузаштан

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = L.$$

мешавад.

2.5. Амсилаи популятсия вобаста аз сатҳи пасти бӯҳрон

Дар амсилаҳои пештар пешниҳодшуда, афзоиши микдори биомассаи популятсия ба микдори ҳуди популятсия ҳамчун мутаносиби роста фарз карда мешуд.

Ин ҳолат танҳо ба ҳамон популятсияҳое дахл дорад, ки афзоиши онҳо худ ба худ афзоянда (масалан, микроорганизмҳо) мебошад. Илова бар ин, барои аксари ҳайвонот ҷуфтшавие хос аст, ки воҳурии байни ҷинсҳои

гуногуни як навъро ифода мекунад. Аз ин рӯ, афзоиши популятсияҳо бояд микдори бархӯрди байни фардҳоро дар бар гирад. Ҳамин тарик, барои муайян намудани полпулятсияи гуногунҷинс дар шароитҳои захираҳои бемаҳдуд метавон амсилаҳои дигарро истифода намуд, масалан:

$$\frac{dN}{dt} = aN^2$$

Муодилаи дар боло овардашуда он далелро, ки ҷангоми зичии пасти популятсияҳо суръати афзоиш яку яқбора паст мешавад, нишон медиҳад, зеро эҳтимолияти воҳурии ду фардҳои ҷинси гуногун ҷангоми пастшавии зичии навъҳо мутаносибан ба квадрати зичӣ кам мешавад. Формулае, ки ҳарду ин падидаҳо ба назар мегирад, намуди зерин дорад.

$$\frac{dN}{dt} = a \frac{bN}{b + \tau N} N \quad (2.5.1.)$$

Агар мо популятсияи ҳайвонотҳоро ба назар гирем, бузургии $a > 0$ микдори тавлидбиро инъикос мекунад. $\tau > 0$ - бошад, вақти ҳомиладории ҷанин;

$b > 0$ - вақти миёнаи байни ҳомиладориҳои пайдарпайи модинахоро инъикос мекунад.

Аз ин ҷо, ҳулоса баровардан мумкин аст, ки ҷангоми зичии пасти популятсия афзоиш ба aN^2 , ҷангоми зичии баланд бошад ба $-(ab/\tau)N$ мутаносиб аст.

Таҳлилҳои болоиро ба назар гирифта, ба формулаи нишондиҳандаи микдори ҷавро дохил менамоем:

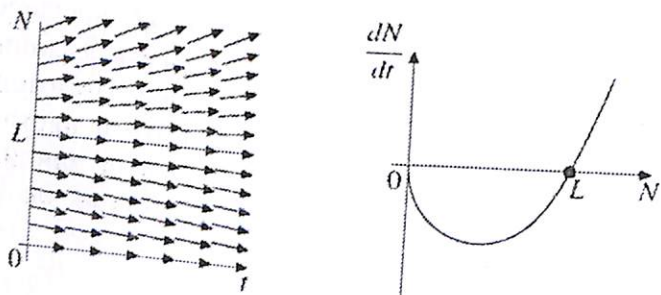
$$\frac{dN}{dt} = a \frac{bN}{b + \tau N} N - cN, \quad (2.5.2.)$$

ин ҷо c - микдори ҷавт, $c > 0$.

Муодилаи (2.5.2) ду ҳалли статсионарӣ дорад: якум $N = 0$ ва дуюм $N = cb/(ab - c\tau) = L$.

Графикҳои мувофиқи $N(t)$ ва $f(N)$ дар расми 2.5.1 оварда шудааст.

Аз график дида мешавад, ки ҳалли $N = 0$ устувор, $N = L$ бошад -ноустувор мебошад. Ҳангоми $N_0 > L$, мувофиқи (2.1.2), навъҳо ба таври беаҳдуд меафзоянд.



Расми 2.5.1. Вобастагии миқдори популятсия аз вақт ва суръати афзоиш

Барои намудҳои гуногун қиматҳои пасти зичии бухронӣ L гуногун аст. Масалан, барои барқароршавии навъҳои муши обӣ ба ҳазор километр як ҷуфти фардҳо кифоя аст, барои кабӯтари сайёр бошад, шумора дар садҳо ҳазор фард аз сатҳ бухронӣ камтар мебошад. Ба миқдори мутлақи зиёди навъҳо нигоҳ накарда, вай ба марг маҳкум мешавад.

Дар замони ҳозира барои як қатор намудҳо камшавии миқдори навъҳои табиӣ пасттар аз сатҳи бухронӣ мушоҳида карда мешавад, ки марги бешубҳаи ин навъҳоро ҳатто дар шароитҳои ба китоби Сурх ворид карда шуда, ифода мекунад.

Формулаи нисбатан умумие, ки ҳам сарҳади поёнии миқдор ва ҳам рақобати намуди дохилӣ ба назар гирифта мешавад, намуди муодилаи Базикиро дорад.

$$\frac{dN}{dt} = a \frac{bN^2}{b + \tau N} - cN - dN^2.$$

Тағйирёбандаҳои нави $N = \frac{b}{\tau}x$, $t = \frac{\tau}{ab}t'$ -ро ворид мекунем ва $D = \frac{c\tau}{ab}$, $C = \frac{d}{a}$, -ро ишора намуда, муодилаи зеринро ҳосил мекунем.

$$\frac{dx}{dt'} \left(\frac{x}{x+1} - D - Cx \right) x.$$

Ҳолати мувозинатии $N_1^* = 0$ дар қиматҳои дилҳоҳи имконпазири бузургӣҳо худудан устувор аст.

Агар:

$$A = (c\tau + bd - ab)^2 - 4c\tau db > 0$$

ва

$$B = ab - c\tau - bd > 0$$

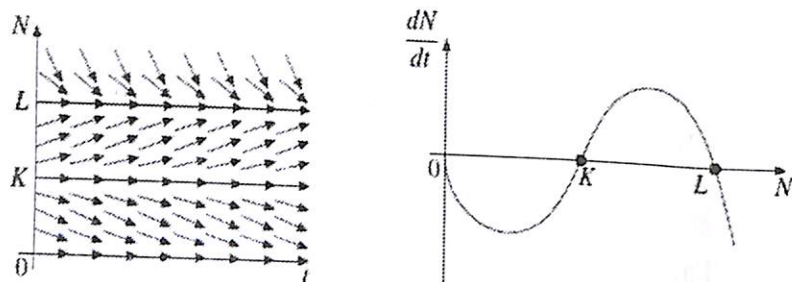
бошад, пас система боз ду ҳолати мувозинатӣ дорад.

$$N_2^* = \frac{B - \sqrt{A}}{2d\tau}, \quad N_3^* = \frac{B + \sqrt{A}}{2d\tau},$$

$N_2^*, N_3^* > 0$, ки яке аз онҳо N_3^* - худудан устувор, дигараш бошад N_2^* - худудан ноустувор аст.

Вобастагии миқдори N аз вақт ва суръати афзоиши $\frac{dN}{dt}$ аз миқдор дар расми 2.5.2. нишон дода шудааст.

Дар ин ҷо: $N = 0$ ва $N = L$ -ҳолатҳои устувори статсионарӣ мебошанд; $N = K$ ҳолатҳои ноустувореанд, ки соҳаи ҷазбшавии ҳолатҳои устувори мувозинатиро ҷудо месозанд. Бузургӣҳои L ва K барои популятсияҳои гуногун ҷарҳела мебошанд ва мумкин аст, танҳо аз мушоҳидаҳо ва таҷрибаҳо муайян карда шаванд.



Расми 2.5.2. Вобастагии миқдори популятсия аз вақт ва суръати афзоиш аз миқдор

Падидаҳои мушоҳидашуда барои муодилаи М.Оллі хос мебошанд, ки намуди зеринро дорад.

$$\frac{dN}{dt} = a(N - K) \frac{L - N}{L} N, a > 0, L > K > 0. \quad (2.5.3.)$$

Ин ҷо, ба мисли амсилаи пешина, миқдори камтарини бӯхронии L ва ҳаҷми муҳит K ҷой дорад.

Муодилаи Базикин бузургҳои зиёдтаре дорад ва имкон медиҳад хусусиятҳои хоси навъҳо нисбатан саҳеhtar ба назар гирифта шавад, аммо (2.5.3.) барои истифода соддатар ва қулайтар мебошад.

2.6. Масъалаи сарфшавии захираҳо

Масъалаҳои гуногуни мантиқӣ ҳангоми сохтани амсилаҳои математикӣ дар равандҳои биологӣ васеъ истифода бурда мешаванд. Ҳангоми ҳалли масъалаҳои иқтисодие, ки бо таъсири инсон вобаста мебошанд, **санчидан** мумкин аст, ки оё равандҳои идоракунии баамаломата устувор мебошанд ё не.

В.И. Арнолд амсилаи оддии мантиқиеро, ки чараёни **ташаккули** системаи идориро нишон медиҳад, тадқиқ намуда, ҳолатҳои онро нишон додааст.

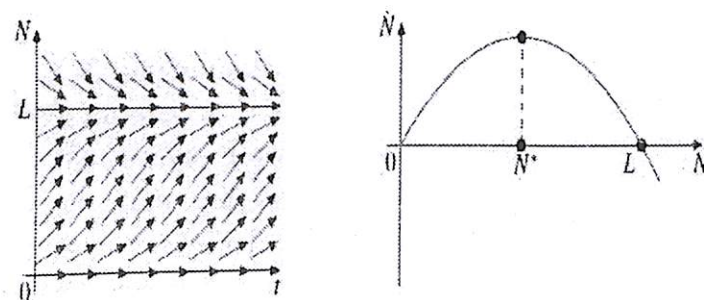
Фарз мекунем, ки миқдори зағорамоҳиҳо дар ҳавз бо муодилаи зерин ифода карда шудаанд:

$$\frac{dN}{dt} = F(N).$$

Ин ҷо, $N(t)$ – миқдори зағорамоҳиҳо дар лаҳзаи вақти t , функцияи $F(N)$ ду сифр дорад:

$$F(0) = F(L) = 0$$

илова бар ин, ҳангоми $N \in [0, L]$ вай мусбист, дар дигар ҳолатҳо бошад, манфӣ (Расми 2.6.1.).



Расми 2.6.1. Вобастагии миқдори популятсия аз вақт ва суръати афзоиш аз миқдор бе сайд

Мушоҳида кардан душвор нест, ки ду ҳолати мувозинатӣ ҷой дорад: ноустувории бемаънӣ ва устувории асимптотикӣ $N = L$.

Фарз мекунем, ки зағорамоҳиҳо ба таври даврӣ сайд карда мешаванд. Муайян мекунем, ки интиҳоби доимӣ бо интенсивияти $c > 0$ ба миқдори моҳиҳо чи гуна таъсир мерасонад.

Муодилаи зеринро дида мебароем:

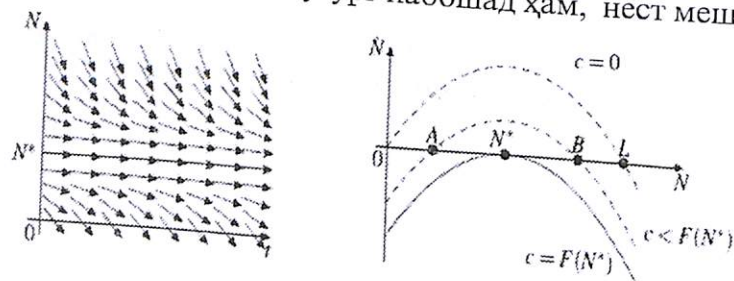
$$\frac{dN}{dt} = F(N) - c.$$

Бигузор $F(N^*)$ — максимуми функцияи $F(N)$ бошад. Агар ҳисса аз дошта гирифтани моҳиҳо аз $c < F(N^*)$ хеле кам бошад, пас тағйиротҳо (назар ба навъҳои озод, ки барои онҳо $c = 0$ мебошад) чунин мебошад: муодила ду ҳолати мувозинатӣ дорад A ва B .

Ҳолати B устувор аст: навъ дар ин ҳолат, назар ба $c = 0$, камтар аст, аммо вай ҳангоми майлқуниҳои хурди N аз ҳолати мувозинатӣ B барқарор мешавад.

Ҳолати A ноустувор аст: агар бо ягон сабабҳо (масалан, шикори бемаврид) ҳаҷми навъ ҳадди ақал аз сатҳи A каме паст шавад, пас минбаъд вай то интиҳо пурра нест мегардад.

Бо афзоиши ҳиссаи шикор ҳолатҳои A ва B ба ҳамдигар наздик мешаванд ва ҳангоми ҳиссаи бӯҳронӣ $c = F(N^*)$ ба як ҳолати ноустувори мувозинат якҷоя мешаванд. Дар ҳолати ҳиссаи шикори зиёд аз ҳолати бӯҳронӣ $c = F(N^*)$ будан, навъи N то интиҳои вақт, ҳар қадаре вай дар ибтидо бузург набошад ҳам, нест мешавад.



Расми 2.6.2. Вобастагии миқдори популятсия аз вақт ва суръати афзоиш ҳангоми шикори бӯҳронӣ (қатъӣ)

Бо ҳатти бефосила ҳолати $c = F(N^*)$ нишон дода шудааст.

Аз ин ҷо дида мешавад, ки интиҳоби қиматҳои бузург c -лаҳзаи танзими истифодабарии навъҳои N фавқуллодда аст. Дар ҳолати кӯшиши зиёд намудани ҳиссаи истифодабарии c , ташкили ба нақшагирифтаи муносиб набояд аз сатҳи бӯҳронии $c = F(N^*)$ зиёд бошад.

Муносибгардонӣ ба интиҳоби маҳз қимати бӯҳронии $c = F(N^*)$ оварда мерасонад, ки дар он навъи истифодашаванда ҳоло нест нашудааст, аммо фоида аз истифодабарӣ дар муддати вақт ба қимати имконпазири максималии $c = F(N^*)$ мерасад (даромади калон дар муддати тӯлонӣ ғайримикон аст, зеро суръати максималии афзоиши ҳатто навъи истифоданашаванда низ ба $F(N^*)$ барорбар аст. Аз расм дида мешавад, ки дар чунин интиҳоби муносиб $c = F(N^*)$ ба амал меояд. Навъи ибтидоӣ чӣ гунае набошад, бо мурури замон вай ба низоми статсионарии

$A = B = c = N^*$ баробар мешавад, ки ноустувор аст. Камшавии тасодуфии на он қадар зиёди N ба пурра нестшавии популятсия то интиҳои вақт оварда мерасонад.

Аз ин рӯ, муносибгардонии бузургиҳо метавонад бо сабаби ноустувории ба миён омада ба пурра нестшавии навъи истифодашаванда оварда расонад (ва дар бисёр ҳолатҳо ҳам оварда мерасонад, ки аз онҳо амсилаи мазкур танҳо мисоли оддӣ мебошад).

Қарор дар бораи қиматҳои истифодабарӣ, ҳиссаи доштагирӣ ё шикори ягон намуди ҳайвонотро на ба таври

супориши ($c = \text{const}$), балки вобаста аз ҳолати ба даст омадаи система: $c = kN$ бояд қабул намуд. ки дар он бузургии k (ҳиссаи тафриқавӣ (дифференсиалӣ)) интиҳоб карда шавад. Дар ин ҳолат амсила шакли зеринро мегирад.

$$\frac{dN}{dt} = F(N) - kN.$$

Дар ҳолати ҷойдошта, даромади миёнаи бисёрсола $c = kN$ муносиб мебошад, агар хатти рости $y = kN$ аз максимуми қатъатти $y = F(N)$ гузарад. Дар чунин ҳолат интиҳоби ҳиссаи тафриқавӣ k даромади миёна:

$$c = kN^* = F(N^*)$$

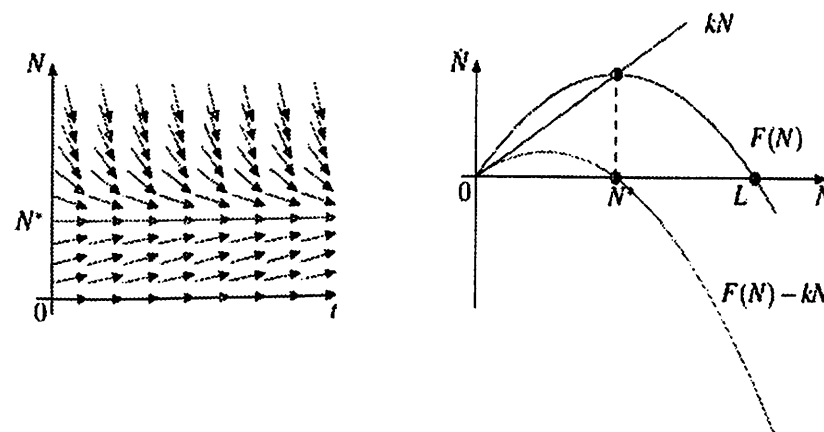
ба қимати максималии имконпазир баробар мешавад. Ҳамин тариқ, муодилаи зеринро соҳиб мешавем:

$$\frac{dN}{dt} = F(N) - \frac{F(N^*)}{N^*} N.$$

Дар қиёс бо системаи банақшагирифтаи қатъӣ, система бо алоқаи баръакс дар қиматҳои муносиби коэффитсиенти k устувортар аст (камшавии хурди тасодуфӣ нисбат ба сатҳи статсионарӣ $N = N^*$ ба худ ба худ барқароршавии сатҳи статсионарӣ бо қувваи худи система оварда мерасонад). Зиёда аз ин майлқунии на он қадар зиёди коэффитсиенти k аз қимати муносиби

$$k = F(N^*)/N^*$$

на худбахуд нестшавии система, балки танҳо ба камшавии хурди даромад оварда мерасонад (Расми 2.6.3).



Расми 2.6.3. Вобастагии миқдори популятсия аз вақт ва суръати афзоиш аз миқдор ҳангоми шикор

Масъалаи 3. Бигузур, $F(N) = N(1 - N)$ бошад.

Фарз мекунем, ки суръати сайд (шикор кардан) доимист ва ба $c > 0$ баробар аст. Муодиларо бо назардошти сайд нависед. Ҷараёни ташаккули миқдори популятсияро вобаста аз бузургии c таҳқиқ намоед.

Бигузур, моҳиҳои сайдшуда ба миқдори ҷории популятсия pN мутаносиб бошад, $p > 0$. Муодиларо нависед ва фаҳмонед, ки оё ягон қиматҳои имконпазири p ҷой доранд, ки дар сайди доимӣ бо суръати $c = \frac{1}{4}$ бошад.

▼ Ба саволҳои зерин ҷавоб гӯед:

1. Амсилаи нахустини ҷараёни популятсия аз ҷониби кадом олим сохта шудааст?
2. Барои чӣ амсилаи ташаккули популятсияро динамики меноманд?

3. Назария ва ақидаҳои Малтусро шарҳ диҳед?
4. Амсилаи Малтус аз амсилаи Гомпертс чӣ фарқ дорад?
5. Барои чӣ ҳама вақт ҳангоми тадқиқи масъалаҳо қимати $a > 0$ гирифта мешавад?
6. Хосиятҳои амсилаи риёзии Гомпертсро шарҳ диҳед?
7. Омилҳои фарқкунандаи амсилаи Гомпертс аз Ферхюлст?
8. Оё тавассути амсилаи Ферхюлст динамикаи афзоишбӣи аҳолиро баҳо додан мумкин аст?
9. Кадом роҳи ҳалҳои амсиларо ҳалли статсионарӣ меноманд?
10. Устувории амсила аз кадом параметрҳо вобастагӣ дорад?
11. Барои чӣ популятсияро якҷинса мегӯянд?
12. Популятсияи якҷинса аз популятсияи дуҷинса чӣ фарқият дорад?
13. Омилҳои асосии таъсиррасон дар амсилаи Ферхюлст кадомҳоянд?
14. Кампавии популятсия аз кадом параметрҳо вобастагӣ дорад?
15. Оё аз рӯи амсилаҳои математикӣ, дурнамои популятсияи аҳолиро барои ягон соли муайян пешгӯӣ намудан мумкин аст?

Супоришҳои зеринро мустақилона иҷро кунед:

1. Барои амсилаи риёзии Малтус барномаи компютерӣ тартиб диҳед.

2. Барои амсилаи риёзии Ферхюлст барномаи компютерӣ тартиб диҳед.
3. Аз амсилаи Гомпертс истифода намуда, дурнамои афзоишбӣи аҳолии ҶТ тадқиқ намоед.
4. Тавассути барномаи компютерӣ, саҳеҳияти амсилаҳои Гомпертс ва Ферхюлстро баҳо диҳед.
5. Барои амсилаи популятсия вобаста аз сатҳи пасти бӯҳрон барномаи компютерӣ дар C++ таҳия намуда, якчанд сценариҳо гузаронед.

БОБИ 3. АМСИЛАҲОИ РИЁЗИИ ТАЪСИРОТИ БАЙНИҲАМДИГАРИИ ДУ ЧИНСА

Шарҳи умумӣ

Дар боби пешин амсилаҳои динамикии ташакули миқдории яке аз популятсияҳо дида баромада шуд.

Дар экосистемаҳо аз ҷиҳати биологӣ намудҳои зиёди организмҳо мавҷуданд, илова бар ин таъсири байниҳамдигарии намудҳои гуногуни ин организмҳо метавонанд, ҳархела бошанд. Дар ин боб мо таъсиррасонии эҳтимолии ду намуди организмҳо (ҳайвонотҳо)-ро дида мебароем.

Умуман се намуди таъсири байниҳамдигарии организмҳо ҷой дорад:

Симбиоз — шакли ҳамтаъсирии байни организмҳои намудҳои гуногун. Намуди ба ҳам манфиатнокӣ симбиозро мутуализм (++) меноманд. Инчунин дар ин марҳила боз муносибатҳои дигар ҳам мавҷуд аст. Масалан: комменсализм гуфта, муносибатеро меноманд, ки ба як симбионт манфиатнок буда, аммо ба дигараш (+0) бетаъсир аст; аменсализм бошад — муносибате, ки ба яке зарарнок, аммо ба дигар бетаъсир мебошад (0—);

Рақобат — муборизаи ду намуд барои захираҳои муайян (—);

"Дарранда-сайд" — навъи ҳамтаъсирие, ки дар он як намуд ғизои дигаре мебошад (+—).

Бартарие, ки ҳайвоноти гуногуни ба муносибати мутуалистӣ воридшуда ба даст меоранд, метавонад хеле фарқ намояд, масалан, яке аз ҳарифон дигарашро ҳамчун

барандаи ғизо истифода барад, то он замоне ки дуҷум аз душманон ё шароитҳои барои афзоиш муносиб ҳифз мешаванд. Дар дигар ҳолатҳо намудҳое, ки ба таври озодона ғизо ба даст меоранд, ҳарифро аз муфтхӯрҳо озод намуда, растаниҳоро гардолуд мекунанд ё тухмиҳоро паҳн мекунанд. Ба ин нигоҳ накарда, ҳар як иштирокчи ҷуфти мутуалистӣ ба манфиати худ амал мекунад, муносибатҳои баҳамманфиатнок ба миён меояд, зеро манфиати ба даст омада аз талаботе, ки барои нигоҳдошти муносибатҳои байниҳамдигарӣ лозим аст, зиёд мебошад. Баъзан намудҳо-мутуалистҳо ҳам дар натиҷаи ҳосилшавии баъзе аз микробҳо (занбуруғрешаҳо) байни занбуруғҳо ва растаниҳо ба ҳамдигар ҳамтаъсирии зичи ҷисмонӣ мекунанд. Алоқаи доимии намудҳо ҳангоми мутуализм таҳаввулоти якҷояи онҳоро ба миён меорад.

Мисоли хоси ин ҳолат мутобиқгардии байниҳамдигарие, ки дар растаниҳои гулдор ва гардолудкунандагони онҳо ба миён омадааст.

Ҳамчун мисоли комменсализм метавонад растаниҳои лубиёӣ ва ғалладонагӣ бошанд, ки дар киштзорҳои аз пайвастагиҳои нитрогенӣ камбағал, аммо аз пайвастагиҳои калий ва фосфор бой буда, якҷоя месабзанд. Растаниҳои лубиёӣ растаниҳои ғалладонагиро бо миқдори иловагии нитрогенӣ дастрас ва таъмин намуда, бар ивазаш чизе намегиранд. Варианти дигари комменсализм — кӯмаки якҷонибаи растани- "момодоя"-и дигар растани мебошад. Ба мисли он, ки дарахти тус ё роздор қочҳои ҷавонро аз нурҳои офтоб ҳифз мекунанд, ки бе он, онҳо наметавонанд дар ҷойҳои кушода рушду нумӯ

намоянд, инчунин шохаҳои ҷавони кочро аз фишурдашавии онҳо ба воситаи хоки хунукшуда, ҳифз мекунанд. Чунин навъи алоқаи байниҳамдигарӣ танҳо барои растаниҳои ҷавони коч хос аст. Асосан, то синну соли муайян расидан, коч худро ҳамчун рақибӣ пурқувват нишон медиҳад ва момодояҳои худро пахш мекунанд.

Дар ҷаҳони ҳайвонот ҳолатҳои зиёде ҷой доранд, ки ҳайвони нисбатан хурдтар аз боқимондаи ғизои ҳайвони нисбатан бузургтар истеъмол мекунанд, инчунин вариантҳои гуногуни интиқолнамоӣ бо истифодаи ҳайвоноти нисбатан бузург (моҳӣ – ба наҳанг часпида) ҷой дорад. Симбиозро дар ҳайвоноти баҳрӣ К. Мёбиус (1877) кашф кардааст. Як қатор ҳайвонот маскани худро якҷоя бо бадани он истифода мебаранд.

Ҳамчун мисоли ҳосилшавии якҷонибаи манфии муҳит метавонад таъсири дарахтон-ҳукмфармоён (дарахтони баланд) ба намуди қабатҳои ушнавӣ ва гиёҳӣ шуда метавонанд. Зери ҷодари дарахтон рӯшноӣ кам шуда, намнокии ҳаво зиёд мегардад. Навъҳои тоқатоваре, ки дар қабати рӯйизаминӣ иштирок мекунанд, таъсироти марговари ин таъсирро ҷуброн мекунанд ва мувозинати экологиро дар чунин ҷангал таъмин мекунанд. Илова бар ин, дарахтон бо намудҳои қабатҳои рӯйизаминӣ рақобат намекунанд, зеро рақобат мусобиқаро байни намудҳои ҷангоми истифодаи захираҳои муайяни муҳит ифода мекунанд.

Амсилаи математикии нахустини ҳамтаъсирии байниҳамдигарӣ, амсилае мебошад, ки соли 1925 аз ҷониби А. Лотка пешниҳод карда шуда буд. Соли 1926

(новобаста аз Лотка) амсилаҳои монанд (ва нисбатан мураккабтар) аз ҷониби математики италийӣ Вито Волтерра коркард шуда буд. Тадқиқотҳои ӯ дар соҳаи масъалаҳои экологӣ асоси назарияи муосири математикии ҷомеаи биологиро ташкил намуданд.

Муодилаеро дида мебароем, ки ҳамтаъсирии байнинавъиро нишон медиҳад:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (c_1 + a_{11}N_1 + a_{12}N_2)N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = (c_2 + a_{22}N_2 + a_{21}N_1)N_1. \end{cases} \quad (3.1.)$$

Қисмати аввали муодиларо мушаххастар дида мебароем. Ҷамъшавандаҳои $a_{12}N_1N_2$ ва $a_{21}N_1N_2$ ба ҳамтаъсирии байнинавъӣ мувофиқат мекунанд. Чунин шуморида мешавад, ки тағйирёбии биомасса ба шумораи бархӯрди N_1N_2 мутаносиб буда, аломати коэффитсиентҳои a_{12} ва a_{21} аз хусусияти ҳамтаъсирӣ вобаста аст. Агар намудҳо бо ҳам рақобат намоянд, пас коэффитсиентҳои a_{12} ва a_{21} бояд манфӣ бошанд, агар мутуализм ҷой дошта бошад, пас мусбӣ ва дар ҳолати амсилаи "Дарранда- сайд" – аломатҳо гуногун мебошанд.

Ҷамъшавандаи c_iN_i бо ҷараёни ташаккули популятсияи ҷудокардашуда муайян карда мешаванд.

Дар ҳолате, ки агар ягон намуд дар набудани намуди дигараш ғавтад, коэффитсиенти c_i бояд манфӣ ва агар зиёд шавад – мусбӣ мешавад.

Ҷамъшавандаҳои $a_{ii}N_i^2$ барои рақобатҳои дохилӣ масъуланд ва бояд $a_{ii} < 0$, $i = 1, 2$. бошад.

Аз мазмуни биологӣ маълум мешавад, ки системаи (3.1.) танҳо ҳангоми $N_i > 0$ дида баромада мешавад. Зеро $N_1 = 0$ ва $N_2 = 0$ маҷмӯи инвариантӣ буда, қисми рости (3.1) бошад, ба шартҳои мавҷудият ва ягонагии ҳал ҷавобгӯ аст, агар $N_i(0) > 0$ бошад, пас барои ҳама ҳолатҳои $t > 0$ ифодаи $N_i(t) > 0$ дуруст аст. Яъне:

$$\{(N_1, N_2) \mid N_1 > 0, N_2 > 0\}$$

Ҳамин тариқ, амсила аз нуқтаи назари биологӣ дуруст аст, дар ҳолатҳое, ки агар миқдори ибтидоии ҳайвонот манфӣ бошад. Пас дар ин ҳолат онҳо манфӣ боқӣ мемонанд (гарчанде дар ҳолати умумӣ ба сифр майл намоянд). Минбаъд чунин баробарино бояд қабул намоем.

$$N^+ = \{(N_1, N_2) \mid N_1 \geq 0, N_2 \geq 0\}.$$

3.1. Амсилаи Лотка—Волтерра

Амсилаи ҳамтаъсирии байнинавъиро, аз амсилаи классикии «Дарданда-сайд» бо худбахуд маҳдудшавии ($a_{11} = a_{22} = 0$) дида мебароем:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (c_1 + a_{12}N_2)N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = (c_2 + a_{21}N_1)N_2. \end{cases} \quad (3.1.1.)$$

Барои амиқӣ чунин меҳисобем, ки $N_1(t)$ - миқдор (биомасса)-и сайд, $N_2(t)$ бошад, миқдор (биомасса)-и даррандагон мебошад. Дар набудани даррандагон, сайд зиёд мешаванд агар ($c_1 > 0$), дар ҳолати набудани сайд даррандагон мефавтанд, яъне ($c_2 > 0$). Бархӯрди даррандагон бо сайди худ ба гузариши биомасса аз ($a_{12} < 0$) ба даррандагон ($a_{21} > 0$) оварда мерасонад.

Системаи (3.1.1.) ду ҳолати мувозинатӣ дорад:

$$M_0 = (0,0)^*, \quad M_1 = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)^*,$$

ки ин ҷо $\tilde{N}_1 = -c_2/a_{21}$, $\tilde{N}_2 = -c_1/a_{12}$.

Устувории ҳолат ва мувозинатро тадқиқ мекунем. Барои нуқтаи M_0 чунин системаро дида мебароем:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = c_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = c_2 N_2. \end{cases} \quad (3.1.2.)$$

Азбаски $c_1 > 0$ ва $c_2 < 0$ гуногуналомат мебошанд, ҳолати мувозинатӣ ноустувор мебошад.

Акнун системаро дар атрофи нуқтаи махсуси M_1 дида мебароем. Қимати ҳосилаҳои хусусии қисми рости матритсаи (3.1.1.)-ро ҳангоми

$\tilde{N}_1 = -c_2/a_{21}$, $\tilde{N}_2 = -c_1/a_{12}$ ҳисоб мекунем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_{N_1=\tilde{N}_1, N_2=\tilde{N}_2} &= \begin{pmatrix} c_1 + a_{12}\tilde{N}_2 & a_{12}\tilde{N}_1 \\ a_{21}\tilde{N}_2 & c_2 + a_{21}\tilde{N}_1 \end{pmatrix} \Big|_{N_1=-c_2/a_{21}, N_2=-c_1/a_{12}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_2 a_{12}}{a_{21}} \\ -\frac{c_1 a_{22}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аз ин ҷо: ҳосил мекунем

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = -\frac{c_1 a_{12}}{a_{21}} x_2, \\ \frac{dX_2}{dt} = -\frac{c_1 a_{21}}{a_{12}} x_1. \end{cases} \quad (3.1.3.)$$

Ин ҷо: $X_i = N_i - \tilde{N}_i$ мебошад. Аз муодилаи ҳосилшуда $\lambda^2 - c_1 c_2 = 0$ дида мешавад, ки наздикшавии

хатгӣ ба савол доир ба устуворӣ ҷавоб дода наметавонад. Барои ин аз усули Ляпунов истифода намуда, функсияи зеринро дида мебароем:

$$V(N_1, N_2) = N_1 - \tilde{N}_1 - \tilde{N}_1 \ln \frac{N_1}{\tilde{N}_1} - \frac{a_{12}}{a_{21}} (N_2 - \tilde{N}_2 - \tilde{N}_2 \ln \frac{N_2}{\tilde{N}_2}). \quad (3.1.4.)$$

Масъала. Исбот карда шавад, ки функсияи Ляпунов муайян карда шудааст ва ҳангоми $N \in N^+$ ба таври мусбӣ муайян мешавад.

Аз функсияи $V(N_1, N_2)$ дифференциал гирифта, ҳосил мекунем:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(3.1.3.)} = \dot{N}_1 \frac{N_1 - \tilde{N}_1}{N_1} - \frac{a_{12}}{a_{21}} \dot{N}_2 \frac{N_2 - \tilde{N}_2}{N_2} = 0.$$

Нуқтаи M_1 устувор аст, зеро шартҳои теоремаи Ляпунов дар бораи устуворӣ иҷро мешаванд.

Ба муодилаи (3.1.1.) бармегардем. Онро ба намуди зерин табдил медиҳем:

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{(c_1 + a_{12}N_2)N_1}{(c_2 + a_{21}N_1)N_2},$$

Аз ин ҷо:

$$(c_1 + a_{12}N_2)N_1 dN_2 (c_2 + a_{21}N_1)N_2 dN_1$$

Ин муодиларо ба $N_1 N_2$ ҷудо мекунем (дар ин ҳолат $1/(N_1 N_2)$ —зарбкунандаи интегралӣ мебошад):

$$\left(\frac{c_1}{N_2} + a_{12} \right) dN_2 = \left(\frac{c_2}{N_1} + a_{21} \right) dN_1,$$

Аз ин ҷо вобастагии амиқи байни N_1 ва N_2 -ро ҳосил мекунем:

$$\frac{N_2^{c_1} N_1^{-c_2}}{e^{-a_{12}N_2} e^{a_{21}N_1}} = C, C = \text{const.}$$

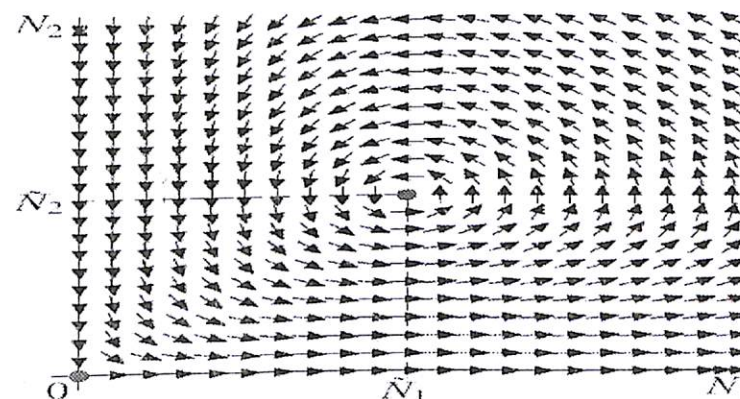
Исбот намудан душвор нест, ки қимати нисбатан калонеро, ки C дар нуқтаи статсионарӣ соҳиб шуда метавонад чунин аст:

$$\tilde{N}_1 = -\frac{c_2}{a_{21}}, \quad \tilde{N}_2 = -c_1/a_{12}$$

$$C^* = \max_{N_1, N_2 > 0} \frac{N_2^{c_1} N_1^{-c_2}}{e^{a_{21}N_1 - a_{12}N_2}} = \left(\frac{c_1}{-ea_{12}} \right)^{c_1} \left(\frac{-c_2}{ea_{21}} \right)^{-c_2}.$$

ин ҷо e —асоси логарифмаи натуралӣ мебошад.

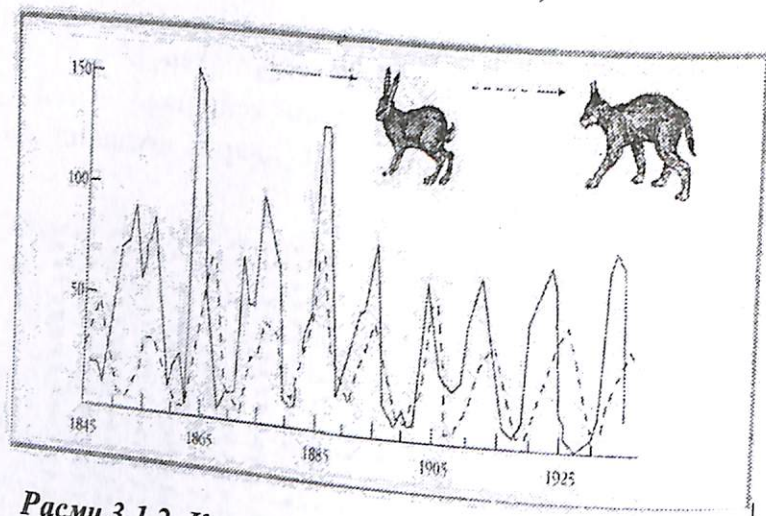
Сиклҳое, ки дар расми 3.1.1. оварда шудаанд, дар табиат мушоҳида карда мешаванд.



Расми 3.1.1. Ҷараёни таҷаккули система дар амсилаи Лотка-Волтерра бе худбахуд маҳдудшавӣ

Онҳоро метавон ба намуди зерин нишон дод: вақте ки миқдори даррандагон меафзояд, онҳо сайдро нест мекунанд ва миқдори сайдҳо кам мешавад. Вақте ки сайдҳо аз меъёри муқаррарӣ кам мешаванд, онҳо барои хӯроки даррандагон намерасанд ва миқдори даррандагон кам шудан мегирад. Вақте ки даррандагон хеле кам мешаванд, онҳо миқдори ками сайдҳоро истеъмол мекунанд ва миқдори сайдҳо оҳиста-оҳиста меафзояд. Миқдори ғизо барои даррандагон меафзояд ва даррандагон зиёд мешаванд. Сикл сарбаст мешавад ва ҳама аз сари нав

огоз мегардад. Илова бар ин, миқдори даррандагон ва сайди онҳо наздики ҳолати мувозинатӣ тағйир меёбанд, ки танҳо аз c_i, a_{ij} вобаста аст. (Расми 3.1.2).



Расми 3.1.2. Качхатҳои миқдори заргӯш ва силовсин дар Канада

Қонуни якуми Волтерра (қонуни синкли даврӣ): раванди нобудшавии сайдҳо аз ҷониби даррандагон аксаран ба тағйирёбиҳои даври харду навъ оварда мерасонад, ки танҳо аз суръати афзоиши навъҳои дарранда-сайд ва аз таносуби ибтидоии миқдори онҳо вобаста аст. Тағйирёбии миқдори ду навъ даврист, бо давре, ки ҳам аз миқдори ибтидоӣ ва ҳам аз коэффитсиенти система вобаста аст.

Ҳангоми омӯзиши системаҳои "дарранда - сайд" донишмандон муҳим аст, ки миқдори миёнаи ҳайвонот дар ҳудуди ҷойдоштаи мазкур чӣ гуна мебошад. Қимати миёнаи даррандагон ва сайдҳо барои марҳилаи ихтиёрии качхатро дар квадрат (чоряк)-и мусбӣ ҳисоб мекунем.

Системаи (3.1.1.)-ро дар намуди зерин аз нав менависем:

$$\frac{d \ln N_1}{dt} = c_1 + a_{12} N_2, \quad \frac{d \ln N_2}{dt} = c_2 + a_{21} N_1$$

ва аз ҳар як муодила дар масофаи $[0, T]$ интеграл мегирем, ки дар он —даври лаппиш чунин мешавад:

$$\int_0^T \frac{d \ln N_1(t)}{dt} dt = \int_0^T (c_1 + a_{12} N_2(t)) dt = c_1 T + a_{12} \int_0^T N_2(t) dt.$$

Дар назар бояд дошт, ки:

$$\int_0^T \frac{d \ln N_1(t)}{dt} dt = \ln N_1 T - \ln N_1(0) = 0.$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{T} \int_0^T N_2(t) dt = -\frac{c_1}{a_{12}}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T N_1(t) dt = -\frac{c_2}{a_{21}}.$$

Қонуни дууми Волтерра (қонуни бақои бузургҳои миёна):

Миқдори миёнаи популятсия барои ҳар як намуд, новобаста аз сатҳи ибтидоӣ дар ҳолате, ки суръати ҳоси зиёдшавии навъҳо, инчунин самаранокии дарранда доимист, доимӣ мемонад. Миқдори миёнаи популятсия аз миқдори ибтидоӣ вобаста нест, аммо аз коэффитсиенти система вобаста аст.

Дар давраи Ҷанги Якуми Ҷаҳон ҳаҷми шикори моҳӣ дар Адриатик яку якбора кам шуд. Дар натиҷаи шикор ҳиссаи моҳии дарранда афзуд, яъне маълум шуд, ки

ҳангоми камшавии таъсироти беруна таносуби миқдори миёнаи даррандагон ба миқдори миёнаи сайд меафзояд.

Қонуни сеюми Волтерра (қонуни тағйирёбии бузургҳои миёна): ҳангоми вайроншавии сатҳи популятсияи даррандагон ва сайд (масалан, моҳиҳо дар рафти шикор ба миқдори онҳо мутаносиб аст) миқдори миёнаи навъи сайд меафзояд, даррандагон бошад, кам мешаванд.

Дар ҳақиқат ҳам, бигузур якуякбора нестшавии берунаи ҳарду навъ бо суръате ба амал ояд, ки ба шумораи популятсия мутаносиб бошад, яъне ба қисми рости (3.1.1.) ҷамъшавандаҳоро илова мекунем $-\lambda_i N_i$, $\lambda_i > 0$.

Мушоҳида кардан душвор нест, ки ҳангоми $\lambda_i < c_1$ ҳолати нави мувозинатӣ M_i чунин мешавад.

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1 &= \frac{-c_2 + \lambda_2}{a_{21}}, \\ \tilde{N}_2 &= \frac{-c_1 + \lambda_1}{a_{12}}.\end{aligned}$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки миқдори миёнаи даррандагон кам мешавад. Миқдори миёнаи сайд бошад меафзояд. Дар ҳолати $\lambda_1 \geq c_1$ дар система танҳо ҳолати сифрии мувозинатӣ боқӣ мемонад, ки ба нестшавии ҳарду навъ мувофиқат мекунад.

Амсилаи (3.1.1.) равандҳои воқеии биологиро на он қадар хуб нишон медиҳад, аз ҷумла, имконоти нестшавии танҳо яке аз навъҳо, яъне даррандагонро ба назар намегирад. Ғайра аз ин, аз нуқтаи назари математикӣ, ҳолати мувозинатӣ устувор аст, аммо на аз ҷиҳати асимптотикӣ.

Аз ин рӯ, ҳангоми тағйиротҳои хурди муодила дар қисми рости (3.1.1.) ҳолати мувозинатӣ метавонад, ноустувор бошад. Асосан, чунин системаҳо дар амал тадбиқнашаванда мебошанд.

Акнун ҳолати зеринро дида мебароем:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (c_1 + a_{11}N_1 + a_{12}N_2)N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = (c_2 + a_{22}N_2 + a_{21}N_1)N_2 \end{cases}$$

Ҳангоми

$$c_1 > 0, c_2 < 0, a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{12} < 0, a_{21} > 0.$$

Дар аксари N^+ муодилаи додашуда на зиёда аз се ҳолати мувозинатӣ дошта метавонад:

$$M_0 = (0,0)^*, M_1 = (-c_1/a_{11}, 0)^*, M_2 = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)^*.$$

ин ҷо: $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2$ бо таносуби зерин муайян карда мешавад:

$$\tilde{N}_1 = \frac{c_2 a_{12} - c_1 a_{22}}{\Delta}, \quad \tilde{N}_2 = \frac{c_1 a_{21} - c_2 a_{11}}{\Delta},$$

ин ҷо: $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

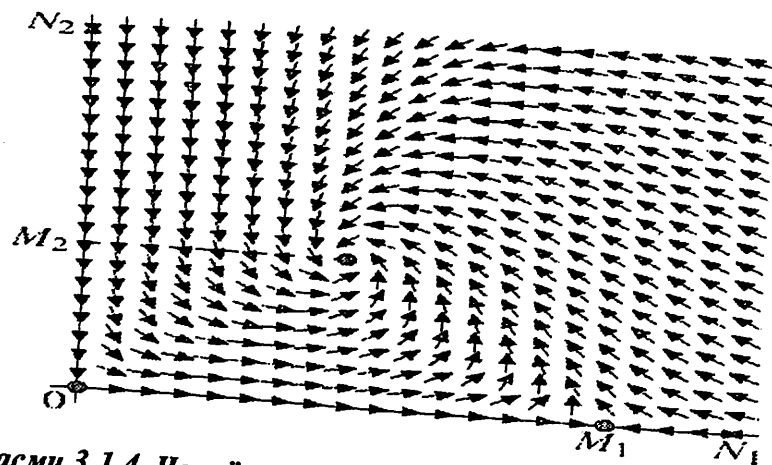
Бо ёрии ҷудокунии қисми хаттӣ исбот кардан душвор нест, ки ҳолати мувозинатии M_0 ноустувор аст.

Акнун нуқтаҳои M_1 ва M_2 -ро дида мебароем.

Бо назардошти ҳамаи аломатҳои коэффитсиентҳои система ҳолати мувозинатӣ $M_2 \in N^+$ мешавад, танҳо агар шартҳои зерин иҷро гардад:

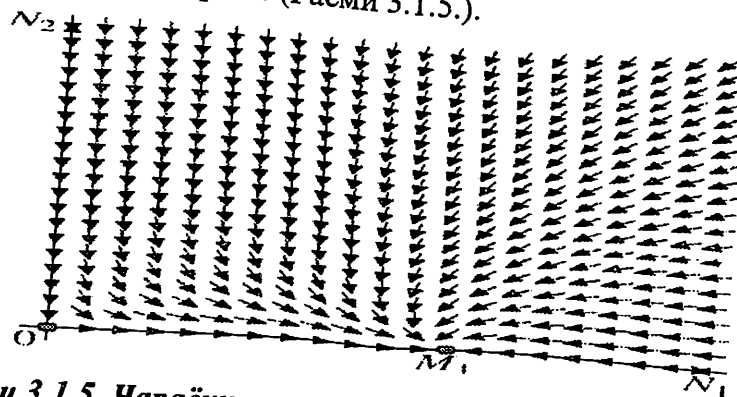
$$m = c_1 a_{21} - c_2 a_{11} \geq 0, \quad (3.1.5.)$$

илова бар ин, агар $m = 0$ бошад, пас ҳолати мувозинатии M_1 ва M_2 ба ҳам мувофиқ меоянд. Барои ин ҳолат системаи наздикшавии хаттиро менависем:



Расми 3.1.4. Чараёни ташаккули система дар амсилаи Лотка-Волтерра бо худбахуд маҳдудшавӣ

Ҳамин тариқ, натиҷахоро нисбат ба бузургии m ҷамъ намуда, ҳосил мекунем: агар $m > 0$ бошад, пас ҳолати мувозинати M_1 ноустувор, M_2 бошад-асимптотикӣ устувор мебошад; аммо агар $m < 0$ бошад, онгоҳ дар чоряки мусбӣ танҳо ҳолати мувозинати M_1 ҷой дорад ва он устувор аст (Расми 3.1.5.).



Расми 3.1.5. Чараёни ташаккули система дар амсилаи Лотка-Волтерра бо худбахуд маҳдудшавӣ, (Нобудшавии даррандагон)

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \begin{pmatrix} c_1 + 2a_{11}N_1 + a_{12}N_2 & a_{12}N_1 \\ a_{21}N_2 & c_2 + 2a_{22}N_2 + a_{21}N_1 \end{pmatrix}.$$

Барои нуқтаи M_2 полиноми хос намуди зеринро дорад:

$$\lambda^2 - (a_{11}\tilde{N}_1 + a_{22}\tilde{N}_2)\lambda + \tilde{N}_1\tilde{N}_2\Delta.$$

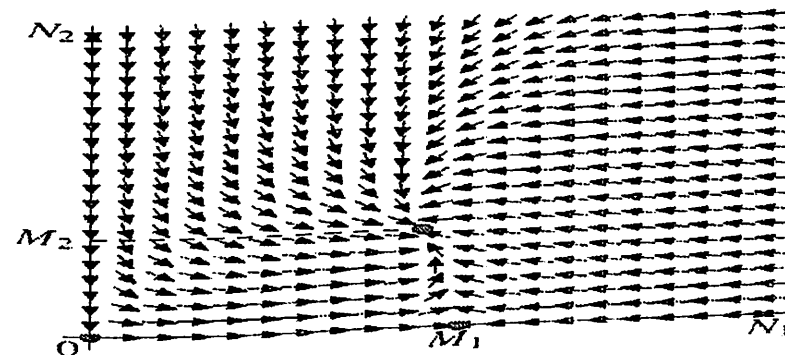
Аз ин ҷо, ададҳои хос баробар аст, ба:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a_{11}\tilde{N}_1 + a_{22}\tilde{N}_2 \pm \sqrt{(a_{11}\tilde{N}_1 + a_{22}\tilde{N}_2)^2 - 4\Delta\tilde{N}_1\tilde{N}_2} \right).$$

Агар ифодаи зери реша аз сифр хурд бошад, пас ададҳои хос маҷмӯӣ мебошад (Расми 3.1.3.), агар аз сифр калон ё баробари сифр бошад, пас моддӣ (нуқтаи хоси навъи "гиреҳ" ё "гиреҳи тавлидӣ" мувофиқанд, расми 3.1.4.), мебошанд.

Акнун нуқтаи M_1 -ро дида мебароем. Полиноми хос намуди $\lambda^2 + (c_1 + m/a_{11})\lambda + c_1m/a_{11}$ -ро дорад, аз ин рӯ, устувории нуқтаи M_1 бо аломати m муайян карда мешавад.

Агар $m < 0$ бошад, пас M_1 ба таври асимптотикӣ устувор аст, агар $m > 0$ - ноустувор.



Расми 3.1.3. Чараёни ташаккули система дар амсилаи Лотка-Волтерра бо худбахуд маҳдудшавӣ

3.2. Амсилаи Холлинг-Тэннер

Дар мисоли муодилаи Лотка-Волтерра хосияти муҳими сифатии нуқтаҳои махсуси устувори асимптотикӣ дида мешавад. Боз дигар намудҳои амсилаҳо ҷой дорад, ки дар онҳо лапшиҳои хомӯшнашаванда ҳангоми тадқиқ ба амал меоянд. Дар ҷараёни ташаккули таҳаввулотии чунин система, амсилаи Холлинг-Тэннерро мисол овардан мумкин аст.

Суръати афзоиши навъи сайд дар ин амсила, ба суммаи се бузургӣ баробар аст:

- ✓ суръати зиёдшавӣ дар сурати набудани даррандагон rN_1 ;
- ✓ таъсири рақобати байниҳамдигарӣ баҳри ба даст овардани ғизо $-rN_1^2/K$;
- ✓ таъсири даррандагон, барои ҳолати $-\omega N_1 N_1 / (D + N_2)$.

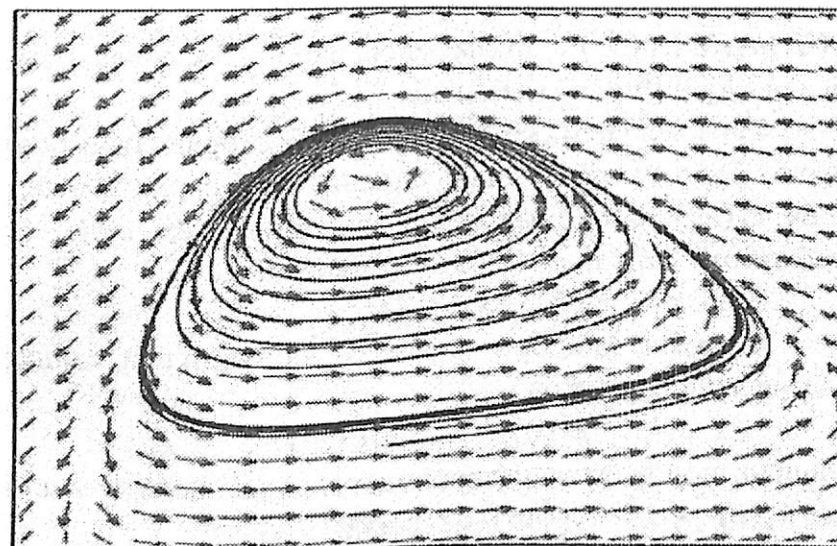
Суръати афзоиши популятсияи даррандагон N_2 ба мисли амсилаи Лотка-Волтерра сохта мешавад. Дар ҳолате, ки сайдҳо кам мушоҳида карда шаванд. Агар барои нигоҳдории ҳаёти як дарранда J сайд лозим бошад, пас аз N_1 — сайд метавонад N_1/J даррандаро бо ғизо таъмин намояд.

Бо назардошти амсилаи афзоиши навъи даррандагон, ки дар он шумора популятсия наметавонад аз бузургии бӯҳронӣ зиёд бошад, мо системаи навбатиро мавриди омӯзиш қарор медиҳем.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \left(r \left(1 - \frac{N_1}{K} \right) - \omega \frac{N_2}{D + N_1} \right) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = s \left(1 - \frac{JN_2}{N_1} \right) N_2. \end{cases} \quad (3.2.1.)$$

Дар ин ҷо: $r, K, \omega, s, J > 0$, доимиҳои додашуда мебошанд.

Ҷараёни ташаккули ҳолати системаро дар намуди расми 3.2.1. дидан мумкин аст.



Расми 3.2.1. Ҷараёни ташаккули система дар амсилаи Холлинг-Тэннер

Метавон исбот намуд, ки агар $s < \frac{r(K-D-2)}{K(D+1)}$ бошад, пас дар гузариши фазавӣ, система сикли устувори ҳудудӣ дорад.

3.3. Амсилаи Колмогоров

Математики машҳур А.Н.Колмогоров пешниҳод намудааст, ки ҳангоми тадқиқи система аз функсияи дар қисмати рости муодила ҷойдошта, даст кашида, танҳо маҳдудшавии муайяно барои ин ҳолат, дида бароем. Амсилаи "Дарранда-сайд"-ро дида мебароем:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = k_1(N_1)N_1 - L(N_1)N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = k_2(N_1)N_2. \end{cases} \quad (3.3.1.)$$

Дар ин ҷо

$k_1(N_1)k_2(N_1), L(N_1)$ дифференциалҳои бефосила дар фосилаи $N_1 \in [0, +\infty)$ мебошад.

Фарз мекунем, ки дар набудани даррандагон бояд шартҳо барои худбахудмахдудшавӣ иҷро карда шаванд, онҳо $k'_1(N_1) < 0$ зиёдшавии микдори сайд буда, ба таҳаввулотӣ даррандагон таъсир мерасонад.

Аз ин рӯ: $k'_2(N_1) > 0$.

Ҳангоми микдори хурди N_1 популятсияи сайдҳо бояд зиёд шавад, онҳо

$$k_1(0) > 0 > k_1(+\infty)$$

мебошад, популятсияи даррандагон, яъне ҳолати фавти онҳо $k_2(0) > 0 > k_2(+\infty)$ мешавад.

Дар ҳолати $L(0) = 0$, $L(N_1) > 0$, ҳангоми $N_1 > 0$ будан, функсияи трофикии дарранда, ба шумораи сайд баробар мешавад.

Қараёни ташаккули системаи додашудаи (3.3.1.)-ро тадқиқ мекунем.

Система на зиёда аз се ҳолати мувозинатӣ дорад:

$$M_0 = (0,0)^*, \quad M_1 = (A,0)^*, \quad M_2 = (B,C)^*.$$

Дар ин ҷо, нуқтаи A -ро аз муодилаи зерин муайян кардан мумкин аст.

$$k_1(A) = 0.$$

Мазмуни биологӣ бузургии A чунин аст:

A - микдори сайдест, ки қобилияти дар экосистема бе даррандагон зиндагӣ карданро дорад.

Координатаҳои нуқтаи $(B,C)^*$ аз таносуби зерин муайян карда мешавад.

$$k_2(B) = 0, k_1(B)B - L(B)C = 0.$$

Мазмуни биологӣ бузургии B чунин аст:

B -микдори сайде мебошад, ки қобилияти ғизодиҳии даррандагонро доранд.

Аз хосиятҳои функсияи $k_2(N_1)$ дида мешавад, ки ҳолати мувозинатии M_2 ба маҷмӯи N^+ дахл дорад, танҳо агар $k_2(B) > 0$ ё ин ки ҳуди $A > B$.

Аз сари нав наздикшавии ҳаттиро дар атрофи нуқтаҳои махсус барои ҳолати ҷойдошта дида мебароем.

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \begin{pmatrix} k'_1(N_1)N_1 + k_1(N_1) - L'(N_1)N_2 - L(N_1) \\ k'_2(N_1)N_2 & k_2(N_1) \end{pmatrix}.$$

Нуқтаи $M_0 = (0,0)^*$ -ро дида мебароем.

Барои ҳолати мазкур системаи наздикшавии ҳаттӣ намуди зеринро дорад.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1(0)x_1, \\ \dot{x}_2 = k_2(0)x_2, \end{cases}$$

Дар инҷо $x_i = N_i - \bar{N}_i$.

Ададҳои хоси $\lambda_1 = k_1(0)$ ва $\lambda_2 = k_2(0)$ буда, аломатҳои гуногун доранд. Аз ин рӯ, ҳолати мувозинатии M_0 ноустувор аст.

Нуқтаи $M_1 = (A,0)^*$ -ро дида мебароем.

Системаи наздикшавии ҳаттӣ намуди зеринро дорад:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k'_1(A)Ax_1 - L(A)x_2, \\ \dot{x}_2 = k_2(A)x_2. \end{cases}$$

Ададҳои хоси $\lambda_1 = k'_1(A)A$, $\lambda_2 = k_2(A)$.

Ҳангоми $B < A$, $k_2(A) < 0$ -ро ба даст меорем.

Агар $B > A$ бошад, пас $k_2(A) > 0$ мебошад ва нуқтаи махсус устувор аст.

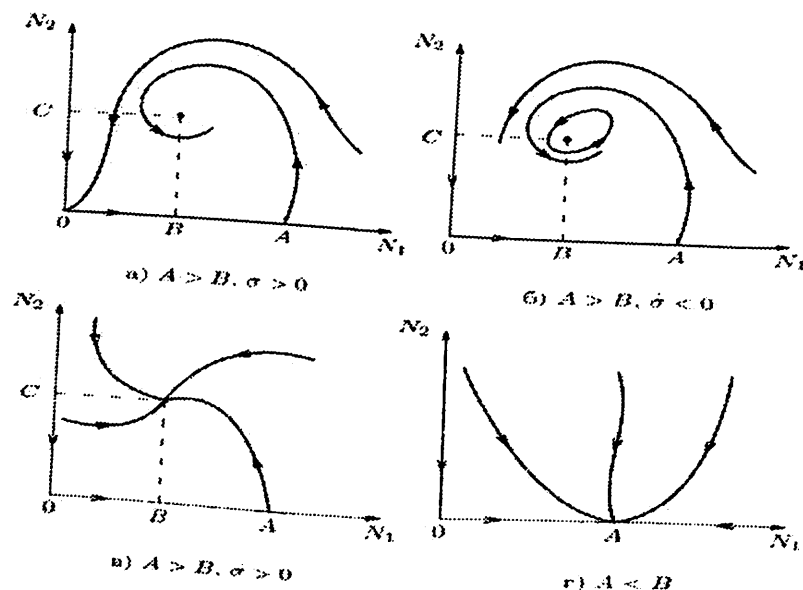
Бигузор, шарт $A > B$ иҷро шавад, ки он $M_2 \in N^+$ -ро қаноат кунонад. Он гоҳ, наздикшавии хаттӣ дар намуди зерин дида мешавад.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (k'_1(B)B + k_1(B) - L'(B)C)x_1 - L(B)x_2, \\ \dot{x}_2 = k'_2(B)x_1 \end{cases}$$

Ишора мекунем:

$$\sigma = -k'_1(B)B - k_1(B) + L'(B)C.$$

Агар $\sigma > 0$ бошад, пас нуқтаи M_2 устувор, агар $\sigma < 0$, пас нуқтаи M_2 ноустувор мебошад, аммо дар атрофи он мумкин аст, сиклҳои устувори худудӣ чой дошта бошанд (Расми 3.3.1).



Расми 3.3.1. Вариантҳои ҳамвории фазавӣ дар амсилаи Колмогоров

▼ Ба саволҳои зерин ҷавоб гӯед:

1. Таъсири байниҳамдигарии организмҳо аз кадом омилҳо вобастагӣ дорад?
2. Симбиоз чист?
3. Нахустин амсилаи риёзии таъсири байниҳамдигарии организмҳо аз ҷониби кадом олим пешниҳод шудааст?
4. Ҳангоми мунтазам кам гаштани сайдҳо ҳолати система чӣ мешавад?
5. Ҳангоми мунтазам кам шудани даррандагон ҳолати система чӣ мешавад?
6. Қонуни якуми Волтерраро шарҳ диҳед?
7. Қонуни дуҷуми Волтерраро шарҳ диҳед?
8. Қонуни сеҷуми Волтерраро шарҳ диҳед?
9. Оё ҳолати системаи “Дарранда - сайд”-ро дар ҳолати статсионарӣ омӯختан мумкин аст?
10. Устувории системаи “Дарранда - сайд”- аз кадом омилҳо вобастагӣ дорад?
11. Амсилаи риёзии Колмогоров аз амсилаи Холлинг-Тэннер чи фарқ дорад?
12. Амсилаи риёзии Колмогоров аз амсилаи Лотка-Волтерра чи фарқ дорад?
13. Омилҳо ва параметрҳои таъсиррасони амсилаи риёзии Колмогоров аз чӣ вобастаанд?
14. Омилҳо ва параметрҳои таъсиррасони амсилаи риёзии Холлинг-Тэннер аз чӣ вобаста аст?
15. Оё бе рақобати байниҳамдигарӣ ҳолати системаи “Дарранда-сайд” устувор буда метавонад?

- Сунорини ҳон зиринро мустиқилона иҷро кунед:
1. Барои амсилаи рӯзии "Даранда-сайи" барномаи компютери тартиб диҳед.
 2. Барои амсилаи рӯзии Колмоторов барномаи компютери тартиб диҳед.
 3. Аз амсилаи Холлинг-Тэннер истифода намулда, дуринамон афзонишбӣни популятсияи бузи кӯҳиро таъкиқ намоед.
 4. Таъкиқи компютери мӯқоисаи байни амсилаҳои Колмоторов ва Холлинг-Тэннерро гузаронед.
 5. Аз усули Ранге-Кутта истифода намулда, барои амсилаҳои 3.1.1, 3.2.1. ва 3.3.1. Колмоторов компютери тартиб диҳед.
- озмонии ҳон сенарияи гузаронед.

БОБИ 4.

ТАЪБИҚИ АМСИЛАҲОИ РИЪЗИ ДАР ТИБ

4.1. Таъкиқи рӯзии ва компютери тартиби

намудҳои инсулин ба организм

Бемории қанд ин беморие мебошад, ки дар ҳолати норасоии инсулин дар β-катақчаҳои таълиқи зерин меъда бавҷӯд меояд. Норасоии мутлақи инсулин ба бемории шадиди қанд оварда мерасонад.

Диабети қанд ин бемории таълиқи зерин меъда мебошад ва ин бемории таълиқи зерини буда, баъд аз бемории ҷоғар, дар байни касалиҳои эндокринӣ дар ҷои дуюм меистад. Ба диабети қанд одомони ҳар ду ҷинс, ҳар синну сол, ғирифтор мешаванд, лекин бештар ба ин бемории одомони синнашон аз 40 то 80 сола ва қуддагон ғирифтор мешаванд. Ҳамин тариқ паҳншавии диабети қанд сол аз сол дар ҷаҳон афзониш меёбад.

Организми одми солим дар як шабонарӯз аз 23 то 60 воҳиди инсулинро коркард мекунад. Ин микдор вобаста аз истеъмоли хӯрок ба организм тақсим карда мешавад. Инсулин дар ҳудуди тақрибан 1,0 воҳид дар як соат ҳисоб карда мешавад, ки ин ба 24 воҳид дар як шабонарӯз рост меояд.

Намудҳои инсулин. Аз сабаби он ки ба ин бемории шахсони зиёде ғирифтор мешаванд, дар дорухонаҳо микдори гуногуни ҷаҳон инсулинро мушоҳида намудан мумкин аст. Ҳамаи ҷаҳонро метавон ба 3 гурӯҳи асосӣ тақсим кард:

- мутлоқи аз давомнокии таърир ва вақти фаропасти он - *активанд, ҳумили-Р, беринисуллин ва таъри* (Ҷаваби 1);

- давомнокии миёнаи амал - семелент, инсулонг, ленте, монотард, протофан, актрафан, хумулин-М ва ғайра (Ҷадвали 2);
- инчунин онҳое, ки дарозмуддат мебошанд - ултратард, ултралент-илетин-1, гуминсулин ва ғайра (Ҷадвали 3).

Ҷадвали 1. Тавсифи инсулини оддӣ.

Оғози таъсир	10–30 дақиқа
Таъсири максималӣ	60–90 дақиқа
Давомнокии таъсир	4–8 соат

Ҷадвали 2. Тавсифи инсулини таъсироташ миёна.

Оғози таъсир	30–90 дақиқа
Таъсири максималӣ	2–15 соат
Давомнокии таъсир	14–24 соат

Ҷадвали 3. Тавсифи инсулини таъсироташ дарозмуддат.

Оғози таъсир	1–4 соат
Таъсири максималӣ	2–24 соат
Давомнокии таъсир	18–30 соат

Оғози таъсири инсулин аз лаҳзаи ворид гардидани инсулин ба хун муайян карда мешавад. Аз лаҳзаи воридкунӣ миқдори инсулин дар хун тадриҷан меафзояд ва кори организмро хуб мегардонад.

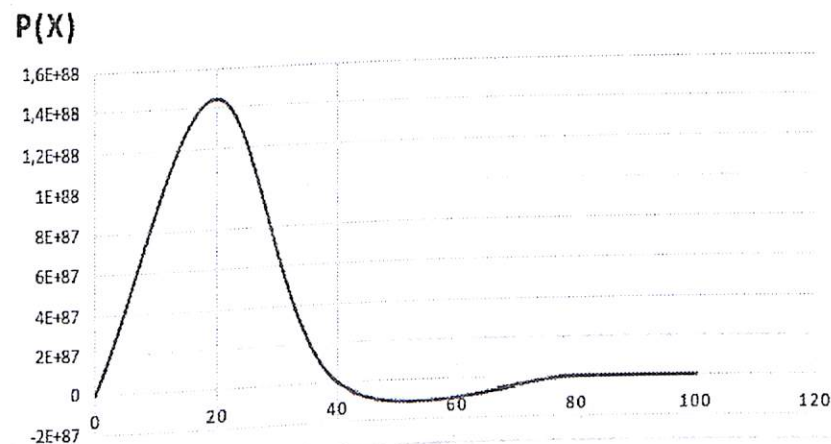
Амсилаи риёзии таъсири инсулин. Барои интиҳоби инсулин тавассути барнома ва системаҳои компютерӣ, миқдори инсулини тайёри ба хун воридшаванда ба ҳисоб гирифта мешавад. Барои ин тавассути амсилаи математикӣ навъҳои гуногуни инсулинро ҳисоб мекунем.

Барои ин аз ҷадвалҳои дар боло овардашудаи 1–3 истифода мебарем ва намуди умумии функсияро менависем:

$$P(x) = \frac{x}{b} e^{\left(\frac{-x^2}{2b^2}\right)}$$

Дар инҷо $P(x)$ - зичии эҳтимолияти тағйирёбии тасодуфии x ; b - параметри миқёс.

Илова бар ин, мувофиқи нишондоди графיקии ин функсия ва параметрҳои он, ёфтани омилҳои таъсири инсулин осон аст. Масалан: давомнокии амали дору ва вақти амали максималии он.



Расми 4.1.1. Намуди умумии функсияи тақсироти зичии эҳтимолиии инсулин

Аз таҳлилҳои болоӣ истифода намуда амсилаи риёзии таъсири инсулинро дар намуди зерин менависем:

$$I(t) = D \frac{t}{T_{max}} e^{\frac{-t^2}{2T_{max}^2}}; \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.1.1.)$$

Дар инҷо i – суръати воридшавии инсулин ба хун;

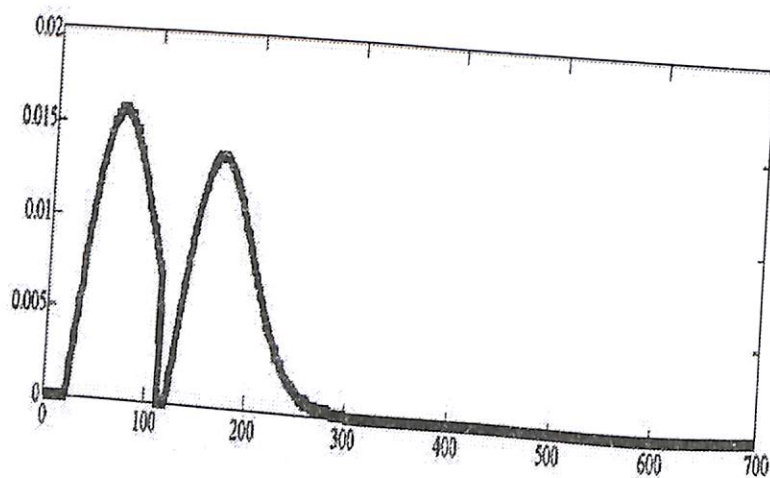
t – вақти додашуда;

D – миқдори зарурии инсулин;

$T_{\max}$ – давраи вақт аз гузаронидани сӯзандоруи инсулин то ҳадди максималии он;

T – таъсири инсулин то охирин лаҳзаҳои таъсирбахшӣ.

Ҳангоми амсиласозии инсулинҳои навъҳои гуногун аз формулаи истифодаи ҳабаҳои навъҳои гуногун (4.1.1.) истифода намудан мумкин аст. Барои санҷиши ҳолати додашуда, ҳамчун намуна барои инсулини намуди Berlinsulin n 30/70 ($T_{\max}=45$, $T=90$) ва барои Berlinsulin n 20/80 ($T_{\max}=45$, $T=180$) барномаи компютерӣ тартиб дода, графикро месозем (Расми 4.1.2.).



Расми 4.1.2. Таъсири инсулини намуди Berlinsulin n 30/70 ва Berlinsulin n 20/80.

Аз расми 4.1.2. дида мешавад, ки ҳарду навъи инсулин таъсири якхела доранд. Аз ин ҷо бармеояд, ки амсилаи

(4.1.1.) ба коркард ниёз дорад. Акнун ҳолати дигарро дида мебароем.

Бо назардошти он ки инсулинҳо давомнокии гуногуни таъсир ва вақти максималиро доранд, ба формулаи (4.1.1) тағйирот ворид намуда, онро дар намуди зерин менависем.

$$I(t) = D \frac{t}{T_{\max}} e^{\frac{-t^d}{dT_{\max}^d}}; \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.1.2.)$$

Дар иҷо d -коэффитсиенти суръати камшавии функсия.

Коэффитсиент d вобастагӣ дорад аз муносибати T ба $T_{\max}$. Ин коэффитсент бо таври эмпирикӣ аз натиҷаҳои таҷрибавӣ интиҳоб карда мешаванд.

Натиҷаҳои таҷрибавӣ дар ҷадвали 4 ва расми 4.1.2. оварда шудаанд.

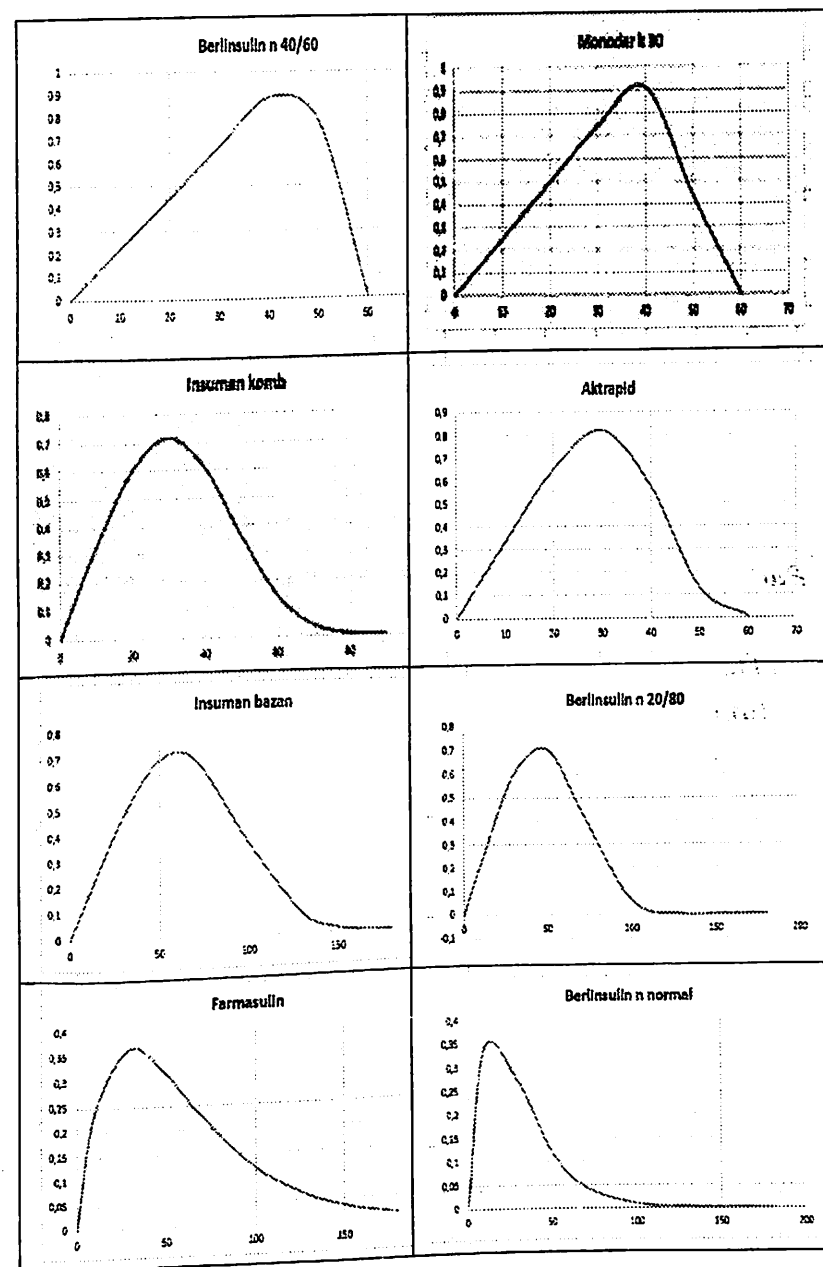
Ҷадвали 4. Натиҷаи таҷрибаҳои компютерӣ барои муайянкунии d .

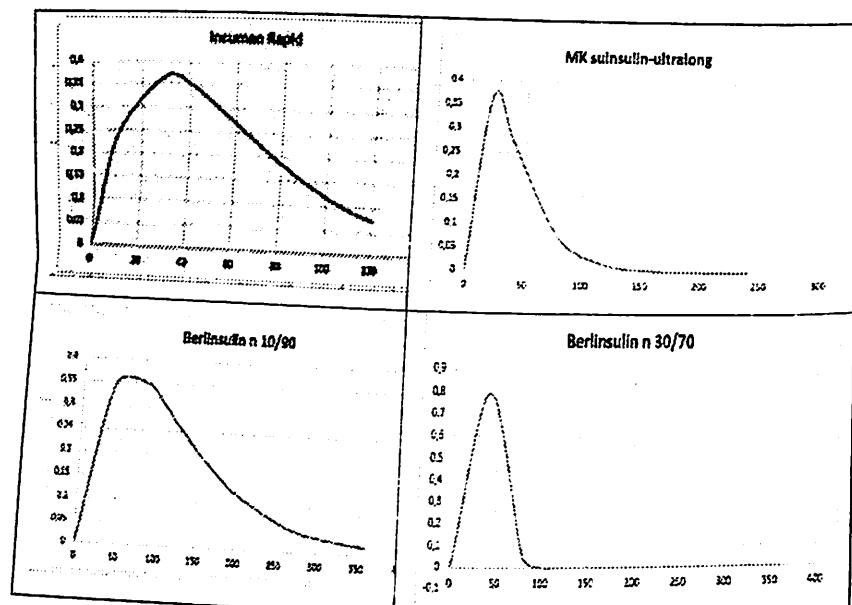
№	Номгӯи инсулини- ҳабаҳо	Лаҳзаи таъсир вобаста аз, T дақиқа	Лаҳзаи максималии таъсир, $T_{\max}$ дақиқа	Муносибати $T/T_{\max}$	Коэффитсент d
1	Berlinsulin n 40/60	60	45	1,3	$\approx 17,00$
2	Monodar k 30	60	40	1,5	$\approx 11,00$
3	Aktrapid	60	30	2,0	$\approx 5,60$
4	Berlinsulin n 30/70	90	45	2,0	$\approx 5,60$

№	Номгӯи инсулин- ҳабҳо	Лаҳзаи таъсир вобаста аз, T дақиқа	Лаҳзаи максималии таъсир, T_{max} дақиқа	Муносибати T/T_{max}	Козффитсент d
5	Insuman komb	90	30	3,0	$\approx 2,80$
6	Insuman bazal	180	60	3,0	$\approx 2,80$
7	Insuman Rapid	120	30	4,0	$\approx 2,00$
8	Berlinsulin n 20/80	180	45	4,0	$\approx 2,00$
9	Farmasulin	180	30	6,0	$\approx 1,40$
10	Berlinsulin n 10/90	360	60	6,0	$\approx 1,40$
11	Berlinsulin n normal	180	15	12,0	$\approx 0,86$
12	MK suinsulin- ultralong	240	20	12,0	$\approx 0,86$

Норасоиҳои дар формулаи (4.1.1.) қайдшуда дар формулаи (4.1.2.) ба пуррагӣ баргараф карда шуданд.

Аз натиҷаҳои компютерӣ ва графикҳо (Расми 4.1.3.) аён аст, ки намудҳои гуногуни инсулин ҳабҳо суръати пастравиро доранд ва то ба итмом расидани амали инсулин суръати он ба таври ночиз коҳиш меёбад.





Расми 4.1.3. Нақшаи таъсири намудҳои гуногуни инсулин

Тадқиқҳои компютери дар боло гузаронидашуда ба қадри кофӣ имконият медиҳанд, ки таъсири намудҳои гуногуни омилҳои инсулинро таҳлил ва мавриди омӯзиш қарор диҳем.

4.2. Амсилаи риёзии муайянкунандаи тавозуни «Глюкоза – Инсулин» дар хун

Бояд қайд намуд, ки қабл аз сохтани амсилаи математикӣ як қатор маълумот марбут ба тавозуни ҳормони ҳосилкунандаи ғадуди зерӣ меъда, яъне инсулин ва сатҳи глюкоза дар таркиби хун пешниҳод менамоем. Ғадуди зерӣ меъда узви системаи ҳозима маҳсуб меёбад. Дар таносуби функционалӣ, яъне фаъолияти худ он ду узви

гуногун аст. Дар ин қисм, қисми эндокринии ғадуди зерӣ меъда дида баромада мешавад.

Якчанд намуди ҳуҷайраҳо аз ҳамдигар фарқ карда мешавад:

α - ҳуҷайраҳо барои ҳосилшавии глюкагон, β - ҳуҷайраи инсулин, δ - ҳуҷайраи соматотатин.

Дар ин ҷо α ва β - ҳуҷайраҳо ба тағйирёбии камтарини таркиби глюкозаи хун ва ҳудуди берун аз ҳуҷайра эҳсосшаванда интиҳоб шудаанд, ки вобаста ба ин суръати гардиши инсулин ё глюкагонро тағйир медиҳанд.

Глюкагон анғезандаи аз ҷиҳати биологӣ истеҳсолкунандаи инсулин мебошад, ки дар зерӣ таъсири воридшавии миқдори зиёди глюкоза ба ғадуди зерӣ меъда, синтез ва гардиши инсулинро аз миқдори глюкоза кам мекунад. Таҳти таъсири ҷараёни миқдори зиёди глюкоза ба ғадуди зерӣ меъда, синтези инсулин меафзояд. Бо камшавии миқдори глюкоза он низ кам мешавад. Тамоми бофтаҳои организм ба инсулин ҳассос мебошанд, ғайр аз торҳои асаб ва эритроцитҳо, ки дар онҳо глюкоза ҳангоми мавҷуд набудани инсулин низ ҳал мешавад.

Сатҳи баланди глюкоза дар таркиби хун (дар беморони диабети қанд) се сабаб дорад:

1. ҳосилшавии нокифояи инсулин аз ҷониби β - ҳуҷайраҳои ғадуди зерӣ меъда;
2. тағйирёбии сохтори молекулярии инсулин (инсулини «нуқсдор»);
3. аз ҷониби ретсепторҳои ҳуҷайраҳо шинохта нашудани инсулин (яъне ҳуҷайраҳо инсулинро ба қадри кофӣ қабул намеkunанд).

Ҳангоми истеҳсоли нокифояи инсулин (ҳолати 1.), диабет вобаста ба инсулин ё диабети навъи I номида мешавад. Дар ҳолатҳои (2) ва (3) ҳангоми истеҳсоли миқдори кофӣи инсулин, диабет вобаста аз инсулин ва ё диабети навъи II номида мешавад.

Тавре маълум аст, инсулини таркиби хун дар ду шакл – шакли озод ва алоқаманд бо сафедаҳо вуҷуд дорад. Минбаъд таҳти мафҳуми инсулин ҳамеша инсулини озод фаҳмида мешавад.

Амсилаи риёзӣ. Ҳангоми таҳия намудани амсилаи риёзӣ омилҳои асоситарини зеринро ба назар мегирем:

- ✓ шиддатнокии истеҳсоли инсулин, яъне инсулине, ки дар як воҳиди β - ҳуҷайраҳо ғадуди зери меъда ҳосил карда мешаванд ва мутаносибан ба ҳолатҳои баландшавии консентратсияи глюкоза дар таркиби хун вобастаанд;
- ✓ аз сабаби он ки инсулин гузаронандаи глюкоза тавассути пардаҳои ҳуҷайра мебошад, пас дар организм мунтазам ҳалшавии тарафайни инсулин ва глюкоза ба амал меояд. Шиддатнокии истифодаи ин консентратсияи инсулин ҳам ба консентратсияи глюкоза мутаносиб аст;
- ✓ ҳангоми таъсири ҳормонҳои инсулин, пеш аз ҳама глюкони сатҳи глюкоза аз меъёри муқаррарӣ кам мешавад, глюкоза ҷигарро барои нигоҳ доштани таркиби мӯътадили худ дар хун мегузорад;
- ✓ дар сурати зиёд шудани глюкоза аз сатҳи бӯҳронӣ(критикӣ) он тавассути гурдаҳо бо пешоб аз организм берун мебарояд.

Дар асоси омилҳои дар боло номбаршуда муодилаи дифференсиалиро дар чунин намуд тартиб медиҳем:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \alpha(\Gamma - \Gamma_0)\theta(\Gamma - \Gamma_0) - \beta\Gamma I, \\ \frac{d\Gamma}{dt} = \gamma(\Gamma - \Gamma_0)\theta(\Gamma - \Gamma_0) - \sigma\Gamma I - \mu\theta(\Gamma - \Gamma_{cr})(\Gamma - \Gamma_{cr}) + S(t), \end{cases} \quad (4.2.1.)$$

дар ин ҷо ишораҳои зерин оварда шудааст:

$I = I(t)$ - консентратсияи муттаҳидаи инсулин дар таркиби хун;

$\Gamma = \Gamma(t)$ - сатҳи глюкоза дар хун вобаста аз вақт t ;

$S(t)$ - манбаи берунаи воридшавии глюкоза (миқдори глюкозаи ба организм аз берун воридшаванда дар воҳиди вақт ва ҳаҷми хун);

Γ_0 - сатҳи мӯътадили глюкоза (аз рӯи баъзе ҳисобкуниҳо $\Gamma_0 = 5,5$ ммол/л гирифта шудааст);

Γ_{cr} - ҳолати бӯҳронӣ(критикӣ) глюкоза, яъне ҳолате мебошад, ки глюкоза тавассути гурда бароварда мешавад(чунин меҳисобем, ки $\Gamma_{cr} = 10$ ммол/л);

$\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \mu$ - маҷмӯи доимиҳо буда, барои ҳар органиزمи фардӣ тафовут доранд: α - коэффитсиенте, ки ба ҳассосият нисбати глюкоза ҷавобгӯ аст, β - коэффитсиенти ҳалшавии инсулин аз тариқи глюкоза, γ - коэффитсиенти ҷавобгӯӣ баромадани глюкоза аз ҷигар барои нигоҳ доштани сатҳи мӯътадили он, σ - коэффитсиенти ҳалшавии глюкоза аз ҷониби инсулин, μ - параметри баромадани глюкоза тавассути гурдаҳо, агар он аз сатҳи бӯҳронӣ зиёд шавад.

Дар системаи муодилаҳои (4.2.1.) мо ҳамчунин аз тэта-функсияи Хевисайдро истифода менамоем, ки дар он:

$\theta(x) = 1$ дар сурати $x > 0$ ва $\theta(x) = 0$, агар $x < 0$ бошад.

Аз тарафи дигар, $\beta I \Gamma$ дар муодилаи (4.2.1.) миқдори инсулине мебошад, ки глюкоза дар воҳиди вақт дар як воҳиди ҳаҷми хун ҳал намудааст.

Тавассути $\Delta_T I = \beta \int_0^T I \Gamma dt$ - миқдори инсулини ҳалшуда ба ҳар як воҳиди глюкоза дар воҳиди вақт T нишон дода шудааст.

Инчунин, $\sigma I \Gamma$ дар муодила (4.2.1.) миқдори глюкозае, ки инсулин дар воҳиди вақт ҳосил намудааст.

Илова бар ин, аломатҳои зеринро ворид мекунем:
 $\Delta_T \Gamma = \sigma \int_0^T I \Gamma dt$ - миқдори глюкозае, ки инсулин дар воҳиди вақт T ҳал намудааст.

Байни бузургиҳои $\Delta_T \Gamma$ ва $\Delta_T I$ алоқаи бараъло мавҷуд аст:

$$\Delta_T \Gamma = \lambda \Delta_T I, \text{ дар ин ҷо } \lambda = \frac{\beta}{\sigma}.$$

Мантиқан, коэффитсиенти λ -миқдори глюкозаи ҳалнамудаи 1 воҳид инсулин мебошад. Қабул шудааст, ки 1 воҳид инсулин метавонад 4г глюкозаро ҳал намояд, яъне $\lambda = 4$ г/воҳ., ё агар глюкоза бо грамм нею бо ммол чен карда шавад, пас $\lambda = 22$ ммол/воҳид.

Баъдан, мо тахмин менамоем, ки агар $\sigma = \lambda \beta$ бошад ва β - доимӣ буда, суръати раванди ҳалшавии глюкоза ва инсулинро тавсиф медиҳад.

Ҳамин тавр, аз панҷ доимии тавсифдиҳандаи тавозуни глюкоза - инсулин, бузургии λ доимии универсалӣ мебошад. Аммо бояд қайд намуд, ки ин таҳлилҳо танҳо барои шахсони солим хос мебошанд,

барои беморони диабети қанд бошад, бузургии λ доимо иваз мешавад.

Таҳлили устувории ҳалли масъала.

Мо тадқиқотро дар бораи устувории ҳалли масъалаи ҷойдоштаи системаи муодилаҳои (4.2.1.) мегузаронем.

Бо назардошти он ки манбаи глюкоза $S(t)$ мавҷуд нест, ягона роҳи ҳалли ин масъала, ин ҳалли $I=0, \Gamma=\Gamma_0$, бо глюкозаи муқаррарии таркиби хун мебошад. Хотирнишон месозем, ки ҳама параметрҳо дар системаи (4.2.1.) овардашуда мусбат мебошанд.

Бигзор $\delta \Gamma$ ва δI манбаи тамоюлҳои хурди консентратсияи глюкоза ва инсулинро нишон диҳанд. Дар хотир меорем, ки дар ҳолати додашудаи мо $\delta I > 0$ аст. Азбаски функцияи Хевисайда дар тарафи рости системаи муодилаҳои дифференсиалӣ мавриди омӯзиш қарор дорад, ду ҳолатро ба назар гирифтани лозим аст:

$$\Gamma > \Gamma_0, \delta \Gamma > 0 \text{ ва } \Gamma < \Gamma_0, \delta \Gamma < 0.$$

Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X = \begin{pmatrix} \delta I \\ \delta \Gamma \end{pmatrix} \quad (4.2.2.)$$

Дар ин ҷо:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta \Gamma_0 & \alpha \\ \sigma \Gamma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нишондиҳандаҳои λ дар матритсаи A инкишофи экспоненсиалӣ ё афтидани нишонаҳои хурд $X(t) = e^{\lambda t}$ -ро муайян мекунанд.

Дар ҳолати ҷойдошта:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \Gamma_0 / 2 \pm \sqrt{\Delta}; \quad \Delta = \beta^2 \Gamma_0^2 / 4 - \alpha \sigma \Gamma_0$$

Дар ҳолати манфӣ будани ($\lambda \pm < 0$), ҳалли масъалаи додашуда, барои ҳама гуна арзишҳои параметрҳои система устувор аст. Инчунин, ду ҳолати параметри Δ барои масъалаи ҷойдошта мувофиқ меояд. Барои $\Delta > 0$, мо зичии нисбатан заиф бо экспоненти λ_+ дорем ва дар ҳолати $\Delta < 0$ ба сустшавии даври (бо нишондиҳандаи) $-\beta\Gamma_0/2$ мувофиқат мекунад, ки дар он сатҳи глюкоза аз меъёри додашуда поён мешавад.

Инчунин дар ҳолати ($\delta\Gamma < 0$), матритсаи A барои система ҳолати зеринро дорад:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta\Gamma_0 & 0 \\ -\sigma\Gamma_0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Нишондиҳандаҳои ин матритса барои ҳама гуна арзиши параметрҳои система воқеӣ ва манфӣ мебошанд:

$$\lambda_1 = -\beta\Gamma_0, \lambda_2 = -\gamma.$$

Ҳамин тавр, чун дар ҳолати қаблӣ, тамоюлҳои манфии сатҳи глюкоза бо таври монотонӣ амал мекунад.

Таҳлили устувории дар боло баррасишуда нисбати ҳолатҳое тадбиқ намешаванд, ки як ё якчанд параметрҳои α , β , γ ба сифр баробар бошанд.

Ҳолати $\gamma = 0$ ба набудани амали гормонҳои инсулин, пеш аз ҳама глюкоген мувофиқат мекунад. Бинобар ин баррасии он маъно надорад.

Ҳолати $\beta = 0$ низ таъсиррасон нест, зеро он ба сатҳи сифрии истифодаи мутақобилаи инсулин ва глюкоза мувофиқат мекунад.

Дар ҳолати $\alpha = 0$ ба қатъи пурраи истеҳсоли инсулин аз тарафи β -хучайраҳои ғадуди зери меъда мувофиқат мекунад. Ин ҳолат барои беморони гирифтори диабети

қанд имконпазир аст. Барои $\alpha = 0$, устувории системаи (4.2.1.) бо наздикшавии ҳаттӣ муайян карда намешавад ва омӯзиши махсусро талаб мекунад.

Ҳолати системаи (4.2.1.)-ро ҳангоми

$$S(t) = 0 \text{ ва } \alpha = 0$$

дида мебароем.

Бо воситаи $\Gamma(0)$, $I(0)$ консентратсияи инсулин ва глюкозаро дар лаҳзаи аввалии вақт ифода мекунем.

Маълум аст, ки дар ҳолати

$\Gamma(0) < \Gamma_0$ будан, сатҳи глюкоза паст мешавад, то ҳолати муқаррарии нормалӣ.

Ин ҳолатро мо ҳангоми $\delta\Gamma < 0$ дида баромада будем.

Системаи (4.2.1.)-ро барои ҳолати

$$\Gamma_0 < \Gamma(0) < \Gamma_{cr}$$

дида мебароем. Дар натиҷа:

$$\frac{dI}{dt} = \beta\Gamma I, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \lambda\beta\Gamma I \quad (4.2.3.)$$

Ин системаро бо таври элементарӣ интегронида ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \Gamma(0) \frac{Ce^{\beta\sigma t}}{\Gamma(0)e^{\beta\sigma t} - \lambda I(0)}; \\ I(t) &= I(0) \frac{C}{\Gamma(0)e^{\beta\sigma t} - \lambda I(0)}; \\ C &\equiv \Gamma(0) - \lambda I(0) \end{aligned} \quad (4.2.4.)$$

Барои таҳлили ҳалли додашуда бояд се ҳолатро дида бароем:

$$A) C > 0, B) C < 0, C) C = 0.$$

Дар ҳолати А): $\Gamma(t) \rightarrow C, I(t) \rightarrow 0$. Ин ҳолат ба ҳолате мувофиқат мекунад, ки дар лаҳзаи аввалини вақт миқдори барзиёди глюкоза вучуд дорад ва пас аз истифодаи муштарак инсулин ва глюкоза, $\Gamma = C$ мешавад.

Дар ҳолати В) $\Gamma(t) \rightarrow 0, I(t) \rightarrow I(0) - \Gamma(0)/\lambda$. Ин ҳолат ба зиёдшавии консентратсияи ибтидоии инсулин мувофиқ меояд.

Дар ҳолати С) ҳалли системаи (4.2.4.) намуди зеринро дорад:

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(0)}{1 + \Gamma(0)\beta t}; \quad I(t) = \frac{I(0)}{1 + \Gamma(0)\beta t};$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки $\Gamma(t) \rightarrow 0, I(t) \rightarrow 0$. Дар хотир бояд дошт, ки системаи (4.2.3.) танҳо барои $\Gamma > \Gamma_0$ маъно дорад. Дар ҳолате, ки сатҳи глюкоза аз сатҳи муқаррарӣ паст мешавад, механизме фаъол карда мешавад, ки сатҳи глюкозаро ба ҳолати муқаррарӣ бармегардонад. Инчунин дар тарафи рости муодилаи дуввуми система, $\gamma(\Gamma_0 - \Gamma)$ пайдо мешавад.

Ҳамин тариқ, тадқиқоти дар боло овардашуда нишон медиҳад, ки сатҳи муқаррарии глюкозаи хун ҳолати муътадил барои ҳама гуна арзишҳои мусбати параметрҳои системаро дорад (ба истиснои ҳолат $\alpha = 0$ барои $C = \Gamma(0) - \lambda I(0) > \Gamma_0$, ки барои он $\Gamma \rightarrow C$).

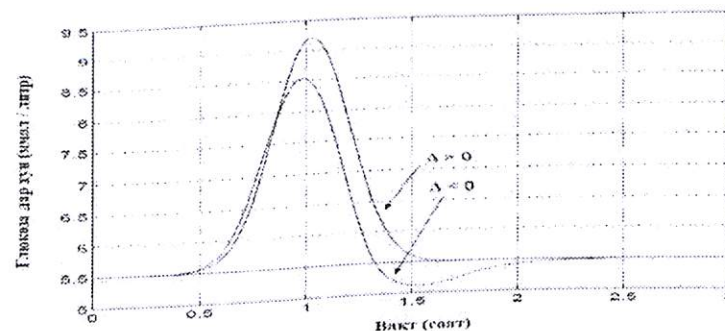
Аз нуқтаи назари математикӣ, ин маънои онро дорад, ки диабет бо гум шудани устувории ҳалли масъала алоқаманд нест, яъне системаи (4.2.1.) бифуркатсия надорад ва фарқи байни шахси солим ва бемор бо диабет сифатӣ нест, балки танҳо миқдорӣ мебошад.

Бояд қайд намуд, ки тадқиқоти дар боло зикршуда оид ба бемории қанд дар тиб бо санҷиши беморон барои таҳаммулпазирии глюкоза мувофиқат мекунад. Аз ин рӯ, аломати параметри Δ -ро тариқи таҷрибавӣ муайян кардан мумкин аст.

Тибқи амсилаи дар боло пешниҳодшуда, мо маълумоти ҳисобкунии рақамии санҷиши таҳаммулпазирии сатҳи глюкозаро пешниҳод менамоем. Ҳамчун манбаи глюкоза $S(t)$ дар муодилаи (4.2.1.), мо функцияи Гауссро интихоб мекунем.

$$S(t) = Ae^{-\frac{(t-1)^2}{2D^2}} \quad (4.2.5.)$$

бо амплитудайи $A = 124$ (ммол/л.сония) ва парокандашавии $D^2 = 1/32$ (соат). Чунин интиҳоби параметрҳои манбаи глюкоза ба ассимилятсияи самаранок мувофиқ аст. Мувофиқи таҳлили глюкоза барои ним соат ва истеъмоли умумии глюкоза 50 г.-ро ташкил мекунад. Аз ин чунин хулоса мебарояд, ки ҳаҷми хун дар организми инсон 5л аст. Дар расми 4.2.1. графикҳои афтандашавӣ ба сатҳи муқаррарии глюкоза, ки тавассути системаи рақамии ҳалли (4.2.1.) барои аломатҳои гуногуни параметри Δ ба даст оварда шудааст, нишон дода шудааст.



Расми 4.2.1. Озмоиши таҳаммулпазирии глюкоза барои нишонаҳои гуногуни параметр Δ

4.3. Тадқиқи бемории сироятии сил тавассути амсилаҳои математикӣ

Ангезаҳои бемории сил. Бемории сил (туберкулез) аз калимаи латинӣ *tuberculum* «лӯндача» ва ё «арзана» гирифта шудааст. Ин бемории дар ҷаҳон хеле паҳнгардидаи бактериявии инсон ва ҳайвонот мебошад, ки барангезандаи он микробактерияи сил (ҷӯбчамикроби Кох) мебошад. Бемории сил (БС) асосан ба шуш осеб расонида, баъзан ба узвҳо ва системаҳои дигар низ асар мегузорад.

Амсилаи математикии ангеизиши бемории сил. Барои таҳия намудани амсилаи математикии бемории сироятии сил ва гузаронидани тадқиқотҳои илмӣ аз қорҳои илмии олимони соҳаи амсиласозии математикӣ ва компютерӣ Авилов К.Н. ва Романюх А.А. истифода мебарем.

Барои гузаронидани тадқиқотҳои илмӣ ва сохтани амсилаи риёзӣ баъзе ишораҳо истифода шудаанд, ки маънои онҳо чунин аст:

ТБ – Сил-туберкулез

ТОД – Сили роҳи нафас

ВЛТ – Сили узвҳои таносул

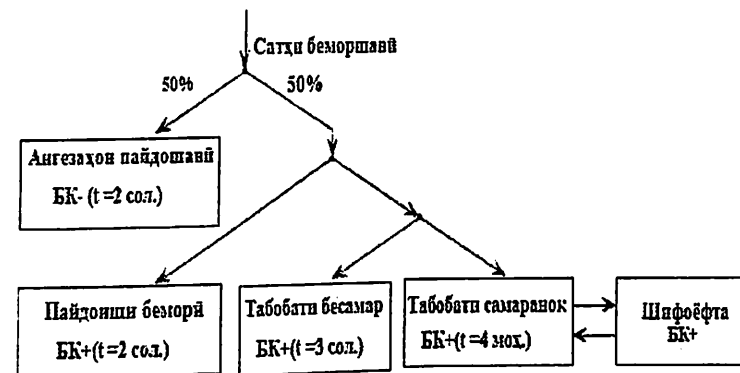
БК+ – Сирояткунанда

БК- – Бехатар

МБТ – Микро бактерияҳо

КОИ – Иммуноитети ҳуҷайраҳо

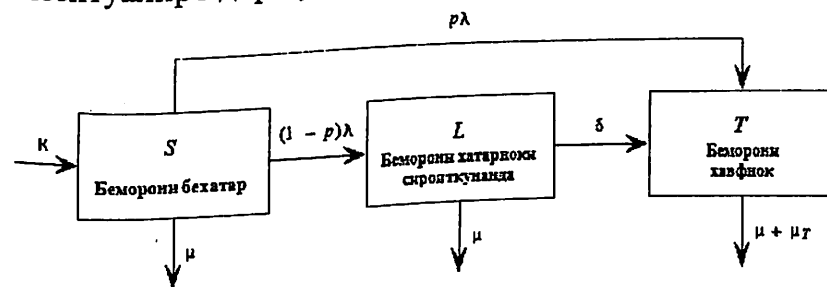
Бемории сироятии сил асосан дар чунин намуд дар байни ҷомеа паҳн мегардад:



Расми 4.3.1. Ангезаҳои бемории сироятии сил

Дар расми 4.3.1. пайдоиши ангеаҳои бемории сил дар лаҳзаи вақти t муайян карда шудааст, ки дар ин ҷо ҳар як БК+ ин шумораи бемор ба 10 нафар дар як сол (сарфи назар аз паҳншавӣ ва сирояти аҳоли) мебошад. Инчунин 10%-и шахсони бемор метавонанд дар як сол ҳади ақал 5%-и шахсони дигарро ба ин беморӣ мубтало созанд.

Барои муайян намудани ангеаҳои пайдошавӣ ва сироятёбии бемории сироятии сил мо амсилаи концептуалиро дар чунин намуд тартиб медиҳем:



Расми 4.3.2. Амсилаи концептуалии ангеизиши бемории сироятии сил

Аз амсилаи концептуалӣ (Расми 4.3.2.) истифода намуда, ангезаҳои пайдошавии бемории сироятӣ силро дар намуди амсилаи математикии зерин навиштан мумкин аст.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= K - \lambda s - \mu s \\ \frac{dL}{dt} &= (1-p)\lambda s - \delta L - \mu L \\ \frac{dT}{dt} &= \delta L - p\lambda s - (\mu - \mu_T)T \\ \lambda(t) &= \beta T(t)\end{aligned}\quad (4.3.1.)$$

Дар амсилаи математикии таҳияшуда, параметр ва додашудаҳое, истифода шудаанд, ки дорои чунин маъноҳоянд:

$S(t)$ - Лаҳзаҳои ҳасосстариине, ки дар вақти t ба беморӣ гирифторм шудан мумкин аст;

$L(t)$ - Шумораи сироятёфтаҳо дар лаҳзаи t ;

$T(t)$ - Шумораи бемороне, ки бемориро дар лаҳзаи ват t паҳн мекунанд;

$\lambda(t)$ -Гузaronидани корҳои фаҳмондадиҳии сироятӣ дар байни аҳоли, дар лаҳзаи вақт t ;

K - Популятсияҳои мубталошавии ҷавонон ба беморӣ;

μ -Муриш аз беморӣ;

p -Эҳтимолияти гирифтормшавии фаврӣ ба беморӣ;

δ - Доимии додашуда;

μ_T - Муриши иловагӣ аз беморӣ;

β - "Коэффитсиенти интиқоли" сироятишавӣ;

f_F -Эҳтимолияти бо суръат афзоишёрӣ ба беморӣ;

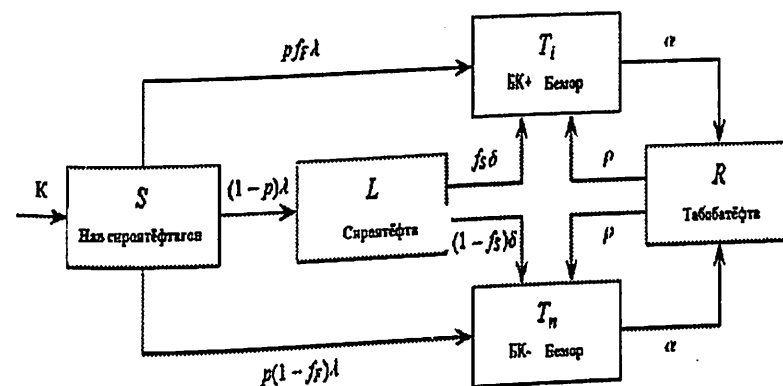
f_S -Эҳтимолияти афзоишёрӣ аз рӯйи ангезаҳои

эндогенӣ;

2р-Рушди беморӣ ;

α - Табобати худсарона.

Дар ҳолати дуум мо амсилаи бемории силро дар намуди мукамалтар тартиб медиҳем. Барои ин амсилаи концептуалиро дар намуди зерин тартиб медиҳем:



Расми 4.3.3. Амсилаи концептуалии паҳншавии бемории сил

Дар асоси амсилаи концептуалии таҳияшуда, амсилаи математикиро дар намуди мукамалтари зерин тартиб медиҳем:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= K - \lambda s - \mu s \\ \frac{dL}{dt} &= (1-p)\lambda s - (\delta + \mu)L \\ \frac{dT_1}{dt} &= p f_F \lambda s + f_S \delta L + \rho R - (\mu + \lambda + \alpha)T_1 \\ \frac{dT_2}{dt} &= p(1-f_F)\lambda s + (1-f_S)\delta L + \rho R - (\mu + \lambda + \alpha)T_2 \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha(T_1 + T_2) - (2\rho + \mu)R \\ \lambda(t) &= \beta T_1(t)\end{aligned}\quad (4.3.2.)$$

Дар асоси амсилаи математикии таҳияшуда имконият фароҳам меояд, ки дурнамои афзоишбёии бемории сироятӣ силро таҳлил намуда, рафти афзоишбёии онро муайян созем. Инчунин дар асоси амсилаи сохтасуда, тартиб додани барномаҳои компютерӣ, имконпазир аст.

4.4. Амсилаи классикии SIR

Бемориҳои сироятӣ ва паҳншавии онҳо як зухуроти мураккаб бо омилҳои бо ҳам алоқаманд мебошад. Барои муайян намудани дурнамои омилҳои бемориҳои сироятӣ амсилаҳои математикиро истифода намудан имконпазир аст. Амсилаҳои математикии барои муайян намудани динамикаи мураккаби паҳншавии бемориҳои сироятӣ заминаи мусоидро фароҳам меоранд. Дар ин қисмат мо амсилаи классикии SIR-ро мавриди омӯзиш қарор медиҳем.

Дар амсилаи классикии SIR (аз забони англисӣ Susceptible-ҳассос-солим, Infected –сироятшуда, Removed-хориҷшуда) ба се гурӯҳ тақсим мешавад: ҳассос-солим $S(t)$, сироятӣ $I(t)$ ва хориҷшуда $R(t)$:

- $S(t)$ -шахсони солим;
- $I(t)$ –шахсони сироятшуда, ки қобилияти паҳн кардани беморию доранд;
- $R(t)$ -шахсоне, ки дар натиҷаи солимшавӣ ва ё марг аз гурӯҳ хориҷ шудаанд.

Популятсияро дар чунин намуд ҳисоб мекунем:

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{constant} = N.$$

SIR- амсиларо бе назардошти таваллуд ва фавт тавассути маҷмӯи муодилаҳои дифференсиалии муқаррарӣ дар бар мегирад, яъне:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases} \quad (4.4.1.)$$

Системаи муодилаҳои (4.4.1.)-ро системаи Камек-Макендрик меноманд (Kermack, W. O. ва A. G. McKendrick, 1927).

Дар инҷо β - коэффитсиент, ки он метавонад бо суръат, бо назардошти эҳтимолияти гирифтӣ шудан ба беморӣ, ҳангоми тамос бо шахси бемор ба вучуд ояд; $\gamma = 1/t$, t - вақти беморӣ, коэффитсиентро ҳамчун суръати барқароршавӣ бо қимати аввалии $t = 0$, дар бар мегирад.

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 > 0$$

Тарафи рости муодилаи якуми система кам шудани шумораи аҳолии солимро бо сабаби сироятӣ шуданашон нишон медиҳад. Тарафи рости муодилаи дуюми системаи (4.4.1.) бошад, афзоиши шумораи шахсони сироятшударо тасвир мекунад. Тарафи рости муодилаи сеюм бошад, камшавии шумораи сироятёфтагонро бо барқароршавӣ ё марги шахсони алоҳида тавсиф мекунад. Дар нақша ба таври равшан гузариш аз як сатҳ ба сатҳи дигар нишон дода шудааст.



Расми 4.4.1. Нақшаи умумии гузариш аз як сатҳ ба сатҳи дигар. S – солим, I -сироятёфта, R -хориҷшуда

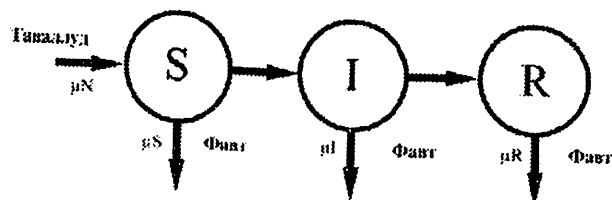
Ҷадвали 1. Ҷадвали гузариши амсилаи SIR

№	Гузариш	Суръати гузариш
1	$(S, I) \rightarrow (S - 1, I + 1)$	$(\beta SI)/N$
2	$(I, R) \rightarrow (I - 1, R + 1)$	γI

Бояд қайд намуд, ки суммаи тарафи рости муодилаҳои системаи (4.4.1.) ба сифр баробар аст, аз ин ҷо бар меояд, ки популятсияи беморон бетағйир боқӣ монад. Ин яке аз хусусияти муҳими ин амсила аст. Барои нигоҳ доштани ин хусусият, шахсони солимшуда ва фавтидагон ба сатҳи дахлнопазирӣ меафтанд. Ин як роҳи мантиқии ҳал аст, зеро дар ҳарду ҳолат шахс ба дигарон сироят карда наметавонад.

Система (4.4.1.) ҳаттӣ нест ва қобили таҳлил нест. Бинобар ин, мо якчанд методи ададиро барои ҳалли ин системаи муодилаҳои дифференсиалӣ дида мебароем.

Инчунин, дар амсилаи классикии SIR, ки дар боло оварда шудааст, метавонад мисоли воридшавии тавлидшудагон ба синфи шахсони солим ва хоричшавии фавт аз синфҳои солим, сироятшуда ва хоричшуда ба назар гирифта шавад (Расми 4.4.2.).



Расми 4.4.2 Амсилаи бо назардошти таваллуд ва фавт

Фарз мекунем, ки $1/\mu$ - миёнаи умумии умр аст. Дар ин ҳолат амсила метавонад, бо маҷмӯи муодилаҳои дифференсиалии зерин навишта шавад:

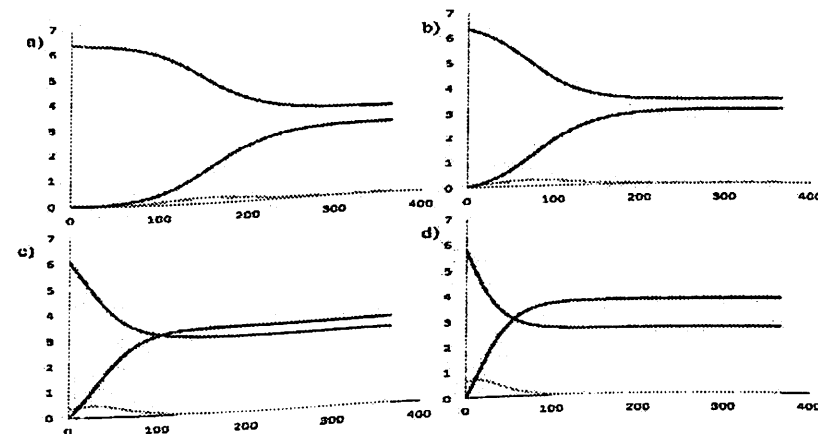
$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} + \mu N - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (4.4.2.)$$

Бо қиматҳои аввала дар ҳолати $t = 0$:

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 > 0$$

Барои фаҳмо шудани амсила, мо ҳалли ададии онро ҷустуҷӯ менамоем.

Барои ин, аз забони объектгарои C# истифода менамоем. Барои ҳалли ададии системаҳои муодилаҳои дифференсиалии оддӣ аз формулаҳои тартиби чорум ва панҷуми Ранге-Кутта истифода мебарем.



Расми 4.4.3. Графики паҳншавии беморӣ вобаста аз сирояти аҳоли

Натиҷа:

- а) 0.1% сирояти аҳоли, б) 1% сирояти аҳоли, с) 5% сирояти аҳоли, д) 10% сирояти аҳоли.

Ранги кабӯд – гурӯҳи солим, сабз - сироятёфта, сурх - хориҷшуда. Тири абтсиса - вақт (бо рӯз), тири ордината –шумораи популятсия (бо млн. нафар).

Ба сифати параметрҳо $\beta = 0.128$, $\gamma = 0.0963$ ва вақтро 365 рӯз интиҳоб мекунем. Миқдори умумии популятсия $N = 6380000$. Ҳолати паҳншавии беморӣ $I(0)=I_0>0$. Қиматҳои аввала $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$, шумораи сироятшудагон ба андозаи фоизи шумораи умумии аҳоли гирифта мешавад.

4.5. SEIRD-амсила

Бемориҳои сироятӣ метавонанд, давраи ниҳонӣ ё пинҳонии бемориҳо дошта бошанд. Ин давра аз лаҳзаи сироят ёфтани шахс то оғози нишонаҳои аввал аст. Масалан, дар мавриди сирояти Эбола, давраи ҳисоб аз 2 то 21 рӯз давом мекунад.

Амсилаи SEIRD вазъиятро вақте ба назар мегирад, ки шахс аллакай сироят ёфтааст, аммо беморӣ дар давраи ниҳой аст.

Дар амсилаи SEIRD, популятсия ба панҷ гуруҳ ҷудо карда мешавад:

$S(t)$ -солим, $E(t)$ -ниҳой, $I(t)$ - сироятшуда, $R(t)$ -хориҷшуда, $D(t)$ -фавтида.

Гурӯҳҳои $S(t)$ ва $I(t)$ шабеҳи амсилаи SIR ҳисоб карда мешаванд, $E(t)$, $R(t)$, $D(t)$ бошанд, дар намуди зерин дида мешаванд:

- $S(t)$ -шахсони солим;
- $I(t)$ –шахсони сироятшуда, ки қобилияти паҳн кардани бемориҳо доранд;
- $E(t)$ –баҳисобгирии давраи инкубатсионӣ;
- $R(t)$ –баҳисобгирии шахсони солимгашта;
- $D(t)$ –шумораи фавтидагон.

Дар ҳолати додашуда, популятсия дар лаҳзаи вақти t ба N баробар мешавад.

$$S(t)+E(t)+I(t)+R(t)+D(t) = constant = N.$$

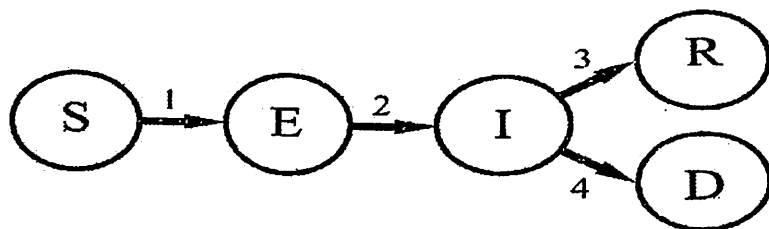
SEIRD-амсила дар намуди ситемаи муодилаҳои дифференсиалии зерин навишта мешавад:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \delta E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} = \mu I(t) \end{cases} \quad (4.5.1.)$$

Дар ин ҷо коэффитсиентҳои β, γ шабеҳи амсилаи дар боло овардашударо дошта, $1/\delta$ давраи ниҳойро ифода мекунад, μ - коэффитсиенти фавтро дар лаҳзаи аввали вақти $t=0$ ифода мекунад.

$$S(0) = S_0 > 0, E(0) = E_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 > 0$$

Сохтори амсилаи додашударо дар намуди блок-схема тасвир намудан мумкин аст (Расми 4.5.1).



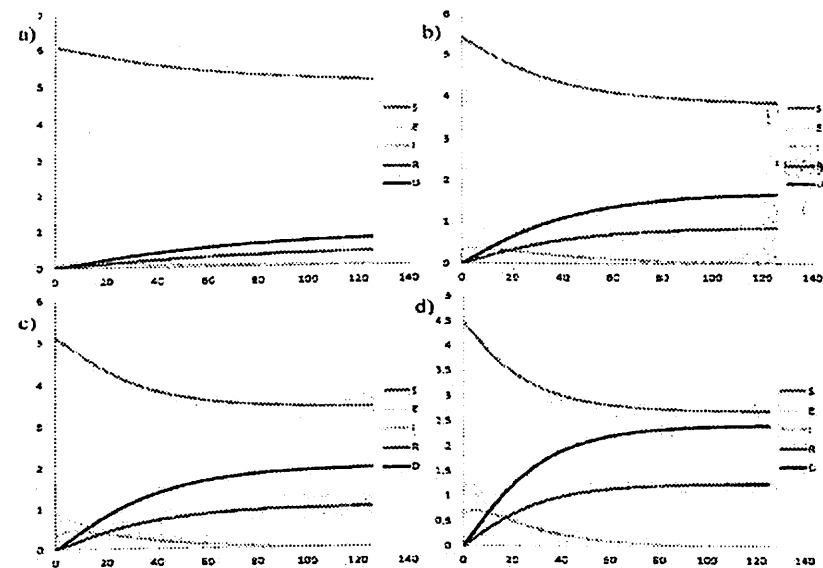
Расми 4.5.1. Нақшаи умумии SEIRD-амсила: S - солим, E - ниҳой, I - сироятидагон, R - солимидагон, D - фавтидагон

Ҷадвали 2. Ҷадвали гузариши амсилаи SEIRD

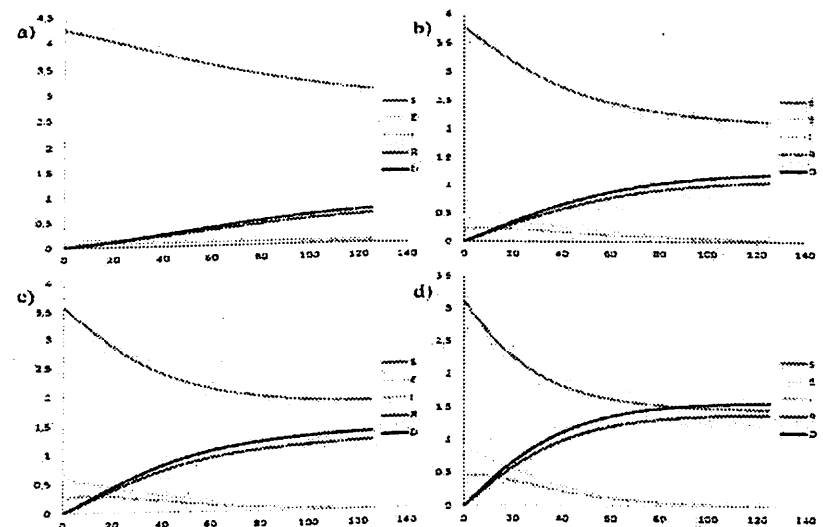
№	Гузариш	Суръати гузариш
1	$(S, E) \rightarrow (S - 1, E + 1)$	$(\beta SI)/N$
2	$(E, I) \rightarrow (E - 1, I + 1)$	δE
3	$(I, R) \rightarrow (I - 1, R + 1)$	γI
4	$(I, D) \rightarrow (I - 1, D + 1)$	μI

Барои амсилаи мазкур фосиларо 125 рӯз гирифта амсилаи компютериро тартиб медиҳем.

Ба сифати параметрҳо: а) $N = 6380000$, $\beta = 0.128$, $\gamma = 0.05$, $\delta = 0.1$, $\mu = 0.0963$; б) $N = 4450000$, $\beta = 0.16$, $\gamma = 0.0667$, $\delta = 0.0833$, $\mu = 0.0751$.



Расми 4.5.2. Тасвир барои ҳолати а).



Расми 4.5.3. Тасвир барои ҳолати б).

Дар расмҳои 4.5.2. ва 4.5.3. диаграммаи паҳншавии бемориҳо нишон дода шудааст.

Тири абтсиса – вақт ва рӯзҳо, тири ордината-миқдори аҳоли - шумораи аҳоли ба миллионҳо нафар.

а) 95% аҳолии солим, 4% ҳолати ниҳой, 1% сироятёфта.

Қиматҳои аввала: $S(0) = 0.95N$, $E(0) = 0.04N$, $I(0) = 0.01N$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$.

б) 85% аҳолии солим, 10% ҳолати ниҳой, 5% сироятёфта. Қиматҳои аввала: $S(0) = 0.85N$, $E(0) = 0.1N$, $I(0) = 0.05N$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$.

с) 80% аҳолии солим, 15% ҳолати ниҳой, 5% сироятёфта. Қиматҳои аввала: $S(0) = 0.8N$, $E(0) = 0.15N$, $I(0) = 0.05N$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$.

д) 70% аҳолии солим, 20% ҳолати ниҳой, 10% сироятёфта. Қиматҳои аввала: $S(0) = 0.7N$, $E(0) = 0.2N$, $I(0) = 0.1N$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$.

▼ Ба саволҳои зерин ҷавоб гӯед:

1. Кадом роҳҳои тадқиқи амсилахоро дар соҳаи тиб медонед?
2. Кадом омилҳоро ҳангоми амсиласозӣ ҳамчун параметр қабул намудан мумкин аст?
3. Ҳангоми тадқиқи бемории сироятии сил кадом омилҳо ба амсила таъсир мерасонанд?
4. Амсилаи риёзии таъсири инсулинро шарҳ диҳед?
5. Устувории амсила аз кадом омилҳо вобастагӣ дорад?
6. Амсилаи концептуалиро барои чӣ месозанд?

7. Амсилаи риёзӣ дар вақти тадқиқи ҳодисаҳо чӣ нақш дорад?
8. SIR амсила аз SEIRD амсила бо кадом хусусиятҳо фарқ мекунанд?
9. Оё раванди фавт ба амсила ягон таъсир мерасонад?
10. Ҳангоми тадқиқи эпидемияҳо раванди солимшавӣ ба амсила чи таъсир расонида метавонад?
11. Барои чӣ қиматҳои аввала яъне $S_0 > 0$, $I_0 > 0$ ва $R_0 > 0$ –ро мусбат интиҳоб мекунанд?
12. Барои чӣ дар бисёр мавридҳо, баъзе аз параметрҳои амсила доимӣ аст?
13. Амсилаи риёзӣ аз амсилаи компютерӣ чӣ фарқият дорад?
14. Барои чӣ ҳангоми тадқиқи амсилахоро аз усулҳои ададӣ истифода мебаранд?
15. Оиди коэффитсиентҳои амсилаи бемории сироятии сил маълумот диҳед?
16. Дар кадом ҳолат амсилахони сохташуда, қобили қабул нестанд?
17. Ҳангоми тадқиқи бемориҳо барои чӣ амсилахони динамикиро бештар истифода мебаранд?
18. Ҳадафи истифодаи амсилахоро дар тадқиқи бемориҳо дар чӣ аст?
19. Ба сифати қиматҳои аввала кадом параметрҳоро қабул намудан мумкин аст?
20. Қиматҳои аввала ба амсила таъсир мерасонанд ё не?

Супоришҳои зеринро мустақилона иҷро кунед:

1. Барои амсилаи SIR барномаи компютерӣ тартиб диҳед. Ба сифати параметрҳо:
 А) $\beta = 0.228$, $\gamma = 0.93$ ва вақтро 135 рӯз интихоб намуда, миқдори умумии популятсия:
 $N = 8380000$;
 Б) $\beta = 0.1228$, $\gamma = 0.183$ ва вақтро 365 рӯз интихоб намуда, миқдори умумии популятсия: $N = 10280000$.
 Ҳолати паҳншавии беморӣ $I(0) = I_0 > 0$. Қиматҳои аввала $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$, шумораи сироятшудагон ба андозаи фоизи шумораи умумии аҳоли гирифта мешавад.
2. Барои амсилаи SEIRD барномаи компютерӣ тартиб диҳед. Ба сифати параметрҳо:
 А) $N = 7580000$, $\beta = 0.138$, $\gamma = 0.03$, $\delta = 0.21$, $\mu = 0.0363$;
 Б) $N = 8950000$, $\beta = 0.216$, $\gamma = 0.0967$, $\delta = 0.0965$, $\mu = 0.0451$
3. Амсилаи бемории сироятии силро тавассути компютер барномасозӣ намоед. Ба сифати параметрҳо:
 $K=0,01$, $\mu=0,0012$, $p=0,0003$, $\delta=0,32$, $\mu_t=0,00021$,
 $\beta=0,1322$, $f_F=0,1212$, $f_S=0,0036$, $2\rho=0,0012$,
 $\alpha=0,000056$.

БОБИ 5.

АМСИЛАСОЗИҲОИ РИЁЗӢ ВА ТАДБИҚИ ОНҲО ДАР МАСЪАЛАҲОИ ИҚТИСОДӢ

Амсилаҳои риёзӣ дар ҳалли масъалаҳои иқтисодӣ тадбиқҳои гуногуни зиёде доранд. Онҳо бо таври математикӣ қараёни иқтисодии объекти тадқиқшавандаро тавсиф мекунанд. Амсила шакли тадбиқи речаи иқтисодиро дар шакли абстрактӣ тавассути ифодаҳои математикӣ тасвир мекунанд.

Барои омӯхтани зухуротҳои муҳталифи иқтисодӣ, тавсифи соддакардашудаи нақшавии онҳо, ки амсилаҳои иқтисодӣ ном доранд, истифода бурда мешаванд. Ҳангоми сохтани амсила, иқтисоддонҳо омилҳои назаррасеро муайян мекунанд, ки онҳо ҷузъҳои муҳими объекти тадқиқшавандаро муайян мекунанд.

Таҳияи амсилаҳои риёзии иқтисодӣ асосан якчанд марҳилаҳоро дар бар мегиранд:

- ✓ мавзӯ ва мақсади омӯзиширо муайян мекунанд;
- ✓ унсурҳои сохторӣ ё функционалӣ дар низомии иқтисодии баррасишаванда ҷудокарда шуда, хусусиятҳои муҳимтарини онҳо муайян карда мешаванд;
- ✓ аломатҳои рамзиро барои хусусиятҳои баррасишудаи объекти амсиласозӣ муаррифӣ намуда, муносибатҳои байни онҳоро ба расмият мебароранд ва барои онҳо амсилаи математикиро месозанд;
- ✓ аз рӯйи амсилаи математикии додашуда, ҳисоббаробаркуниҳо гузаронида, ҳалҳои ҳосилшударо таҳлил мекунанд.

5.1. Тадбиқи амсилаҳои риёзӣ дар бозор

Бозор- як механизме мебошад, ки харидорон ва фурӯшандагони молҳои гуногун ва хизматрасониҳоро муттаҳид месозад.

Барои мушаххас гаштани кор баробарии як намуди маҳсулотро дида мебароем. Вобастагии ҳаҷми талабот аз омилҳои муайянкунандаи мол функцияи талабот номида мешавад. Ин функцияро метавон дар намуди формулаи зерин пешниҳод кард:

$$Q_d = f(P, P_a, P_b, I, T, W) \quad (5.1.1.)$$

дар инҷо Q_d – ҳаҷми талабот ба ин маҳсулот вобаста аз воқиди вақт аст.

P, P_a, P_b – нархи ин ва дигар намуди молҳо;

I – даромади пулӣ;

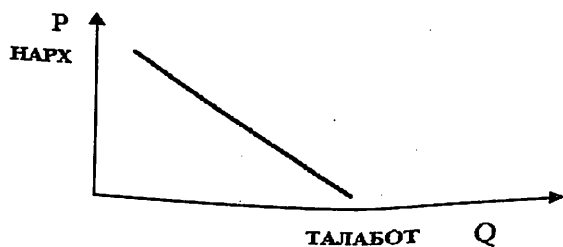
T – афзалиятҳои истеъмолкунандагон;

W – ҷамъшавии амвол.

Агар фарз кунем, ки ҳамаи омилҳои номбаршуда ба ҳаҷми талабот таъсир мерасонанд, ба истиснои нархи маҳсулоти дахлдор, он гоҳ функцияи зерини талабот вобаста аз нархро ба даст меорем:

$$Q_d = f(P) \quad (5.1.2.)$$

Дар ҳолати бетағйир мондани шартҳо, ҳаҷми талабот вобаста аз болоравии нархҳо коҳиш меёбад. Ин ҳолатро метавонем, бо график пешниҳод намоем (Расми 5.1.1.).



Расми 5.1.1. Графики ҳолат

Ҳолати дигарро дида мебароем:

$$Q_s = f(P, P_a, P_b, \dots, K, C, Z), \quad (5.1.3.)$$

дар ин ҷо Q_s – ҳаҷми пешниҳоди маҳсулот барои як воқиди вақт;

P, P_a, P_b – нархи маҳсулот;

K – хусусияти истифодашавандаи технологӣ;

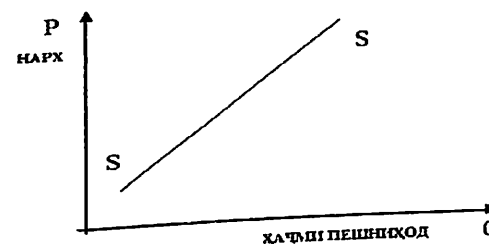
C – андоз ва грантҳо;

Z – шароити табиӣ ва иқлимӣ.

Агар ҳамаи ҳолатҳои ҷойдошта ба ғайр аз нарх бетағйир боқӣ монад, функцияи пешниҳод аз нархро ҳосил мекунем:

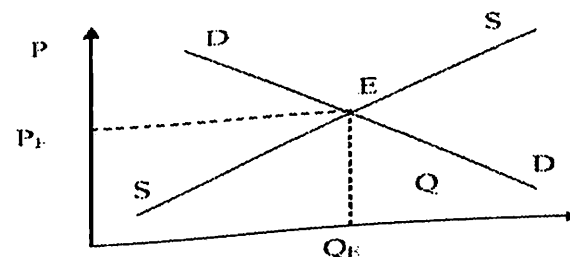
$$Q_s = f(P) \quad (5.1.4.)$$

Барои ин ҳолати графики функция намуди зеринро мегирад (Расми 5.1.2.).



Расми 5.1.2. Графики ҳолат

Таҳлили амалҳои мутақобилаи талабот ва пешниҳодро ба таври графикӣ метавон пешниҳод кард (Расми 5.1.3.).



Расми 5.1.3. Нақшаи муайянкунии мувозинати нарх

Координатаҳои нуқтаи E мувозинати нархи P_E ва тавозуни Q_E мебошанд.

Яъне:

$$Q_E = Q_d = Q_s. \quad (5.1.5.)$$

На дар ҳама ҳолатҳо, афзоиши пешниҳоди маҳсулот ё хизматрасонӣ ба паст шудани нархи тавозуни онҳо оварда мерасонад. Масалан, афзоиши шумораи табибон дар ИМА ва зиёд шудани пешниҳоди хизматрасонии онҳо ба болоравии пардохт ва афзоиши шумораи хизматрасониҳои тиббӣ натиҷа надод.

Ин аз баланд шудани сатҳи даромади аҳоли, давомнокии умр ва пиршавии аҳоли вобаста аст.

5.2. Намудҳои функсияҳои истеҳсоли

Функсияҳои истеҳсоли ба маънои васеъ амсиласозии вобастагиро дар бар мегиранд, ки дар байни нишондиҳандаҳои фаъолияти истеҳсоли, ба монанди ҳаҷми истеҳсолот, хароҷоти сармоя, ҳосилнокии меҳнат ва ғайра мавҷуданд.

Ба маънои дигар, функсияи истеҳсоли гуфта, вобастагии истеҳсолот аз арзиши захираҳои гуногуни истеҳсолиро дар назар доранд.

Дар намуди умумӣ функсияи истеҳсолиро чунин навиштан мумкин аст:

$$P = f(F_1, F_2, F_3 \dots F_n), \quad (5.2.1.)$$

дар ин ҷо P - истеҳсоли маҳсулотҳо (маҳсулотҳои истеҳсоли);

F_i -милҳои муайянкунандаи арзиши маҳсулот (хароҷоти меҳнат, мавод ва ғайра). Робитаи байни хароҷоти намудҳои мухталифи захираҳо ва ҳаҷми истеҳсолот бояд бо воситаи муодилаи регрессивии бисёркарата нишон дода шавад.

Ҳангоми таҳияи амсилаҳои оптималии масъалаҳои иқтисодӣ, ки ба воқеияти ҳақиқии иқтисодӣ наздик мешаванд, амиқ ва дақиқ кардани робитаи байни арзиши захираҳо ва маҳсулот талаб карда мешавад.

Бештар вақт барои ҳалли масъалаҳои ҷойдошта аз маъмултарин функсияи ғайрихаттии зерин истифода мебаранд.

$$P = a_0 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}. \quad (5.2.2.)$$

Ин муодила ба функсияи хаттии логарифмии зерин мувофиқат мекунад:

$$\ln P = \ln a_0 + a_1 \times \ln F_1 + \dots + a_n \times \ln F_n. \quad (5.2.3.)$$

Барои ҳар як омилҳои ҷойдошта, муайян намудан мумкин аст, ки суръати зиёдшавии ҳосилнокӣ, бо маҳдудияти афзоишдан омилҳои ҷойдошта вобаста аст.

Бинобар ин

$$\frac{\delta P}{\delta F_1} = a_0 \times a_1 \times F_1^{a_1-1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}. \quad (5.2.4)$$

Суръати мутлақ ба андозаи ҳама бузургӣҳои муодила вобаста аст. Вобастагии ҳосилаҳои хусусии ду омил ҳамчун меъёри хоси ҷойивазкунии захираҳо аз нуқтаи назари истеҳсоли ин маҳсулотҳо ба ҳисоб меравад.

Барои ба даст овардани суръати нисбӣ, бояд бузургии суръати мутлақро ба арзиши захираҳо тақсим намоем.

Ҳамин тавр, барои омилҳои аввала суръати нисбӣ чунин мешавад:

$$\frac{\delta P}{\delta F_1} \times \frac{F_1}{P} = \frac{(a_0 \times a_1 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}) \times F_1}{P} = \frac{a_0 \times a_1 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}}{a_0 \times F_1^{a_1} \times F_2^{a_2} \times \dots \times F_n^{a_n}} = a_1 \quad (5.2.5.)$$

Суръати нисбии тағйирёбии маҳсулотҳо аз тағйирёбии хароҷот дар ҳолати 1% будан, тағйирпазирии маҳсулот ба хароҷот номида шуда, бо E ишора карда мешавад. Барои дилҳоҳ омили i шартӣ зерин иҷро мешавад.

$$E_i = \frac{\delta P}{\delta F_i} \times \frac{F_i}{P} = a_i \quad (5.2.6.)$$

Ҳамин тавр, барои муодилаи намуди (5.2.2.) тағйирпазирии маҳсулот барои ҳар як омили ҷойдошта доимӣ буда, он ба коэффитсиенти муодилаи регрессионӣ баробар аст. Барои ҳама гуна ҳаҷми хароҷот ва истеҳсолот зиёдшавии хароҷоти навъи i -манбаъҳо то 1% ба афзоиши ҳосилот ба a_i % оварда мерасонад.

Фарз менамоем, ки, ширкат n намудҳои гуногуни маҳсулотро истеҳсол мекунад.

Бо воситаи $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ вектори баромади ҷузъҳои ҳар як намуди маҳсулоти истеҳсолшударо ишора мекунем. Фарз мекунем, ки барои истеҳсоли маҳсулот m намуди омилҳо истифода мешаванд.

Бо воситаи $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ вектори хароҷоти омилҳои истеҳсоли ва ҷузъҳои онро барои ҳар як омили муайян ифода мекунем.

Аз ин ҷо:

$$S = \{q = (q_1, \dots, q_n)^T \mid q_i \geq 0, i = \overline{1, n}\} \quad (5.2.7.)$$

Аз ин ҷо:

$$R = \{x = (x_1, \dots, x_m)^T \mid x_i \geq 0, i = \overline{1, m}\} \quad (5.2.8.)$$

Вобастагии технологии арзиши омилҳои истеҳсолот ва ҳаҷми маҳсулот бо истифодаи функсияҳои истеҳсоли тавсиф карда мешавад.

Дар намуди умумӣ функсияи истеҳсолиро чунин навиштан мумкин аст:

$$F(x, q, A) = 0,$$

Дар ин ҷо A матрисаи ҳолати технологӣ бо андозаи $n \times m$ мебошад.

Агар ба сифати аргументҳои мустақил хароҷот ва ё сарфшавӣ гирифта шавад, он гоҳ ин функсияро функсияи истеҳсолии баромад меноманд.

Агар ба сифати аргументҳои мустақил ҳаҷми истеҳсолот ба инobat гирифта шавад, он гоҳ функсияро функсияи истеҳсолии хароҷот меноманд.

Маҳсулоти ниҳони i -юми истеҳсолшуда (MP_i -marginal product (англ.)), аз рӯйи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$MP_i(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)}{\Delta x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (5.2.9.)$$

Функсияи истеҳсолии (5.2.9.) дорои хосиятҳои зерин аст:

1. Бо зиёд шудани истеъмол вобаста аз омилҳои ҷойдошта, ҳаҷми истеҳсолот меафзояд:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = MP_i(x) \geq 0. \quad (2.5.10.)$$

2. Бо зиёд шудани истеъмол вобаста аз омилҳои ҷойдошта, ҳаҷми истеҳсолот кам мешавад:

$$\frac{\partial MP_i(x)}{\partial x_i} \leq 0. \quad (5.2.11.)$$

3. Функсияи истеҳсоли барои аргументҳои додашудаи худ якҷинса аст:

$$f(t \cdot x) = t^\beta f(x), \quad (5.2.12.)$$

дар инҷо β дараҷаи якҷинсагиро ифода мекунад.

Намудҳои асосии функсияҳои истеҳсолиро дида мебароем:

1. Функсияи истеҳсоли ғайрикласикӣ (функсияи истеҳсоли Кобб-Дуглас):

$$f(x) = Ax_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m},$$

$$A > 0, \sum_{i=1}^m a_i = 1, a_i \geq 0, i = \overline{1, m} \quad (5.2.13.)$$

Дар инҷо бузургҳои $a_1, \dots, a_m$ нишондоди маҳсулотро ба тағйир ёфтани ҳаҷми омили дахлдори истеҳсолот ифода мекунад, A омили миқёс аст.

2. Функсияи истеҳсоли «харч-баромад» (функсияи Леонтев):

$$f(x) = \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_m}{a_m} \right\}. \quad (5.2.14.)$$

Ин функсия таносубро муқаррар менамояд, ки дар он истеъмоли хароҷоти омилҳои истеҳсолот барои истеҳсоли як воҳиди маҳсулот, анҷом медиҳад. Бузургҳои $a_1, \dots, a_m$ арзишҳо ва таносуби ҳаҷми истеъмоли омилҳои дахлдори истеҳсолот мебошанд.

3. Функсияи хаттии истеҳсоли:

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = \sum_{i=1}^m a_i x_i. \quad (5.2.15.)$$

Қимати синфи функсияҳои ғайриқубра ҳолатро тавсиф менамояд, ки омилҳои истеҳсолот қанча ивазшавандаанд.

Коэффитсиентҳои $a_1, \dots, a_m$ таносубе мебошанд, ки дар онҳо як омилро ба ҷои омили дигар иваз кардан мумкин аст.

5.3. Амсилаи риёзии Кобб-Дуглас

Яке аз аввалин корҳои илмӣ-амалӣ ҳангоми омӯзиши функсияҳои истеҳсоли аз тарафи Кобб Ч. ва Дуглас П. гузаронида шудааст. Онҳо дар асоси маълумоти ҷойдошта, тадқиқотҳои илмиро барои пешрафти саноати истеҳсолот дар ИМА барои солҳои 1899-1922 гузаронидаанд.

Дар ин тадқиқотҳо аз функсияи намуди зерин истифода карда шуд:

$$Y = a_0 \times X_1^{a_1} \times X_2^{a_2}, \quad (5.3.1.)$$

Дар ин ҷо Y - ҳаҷми истеҳсоли маҳсулот;
 X_1 - хароҷоти меҳнат; X_2 - арзиши дорониҳои истеҳсоли.

4) бо афзониши номаҳзудӣ яке аз захираҳо, маҳсулот бохир афзониш меёбад:

$$f(+\infty, L) = f(K, +\infty) = +\infty. \quad (5.3.7.)$$

Функсияи истеҳсоли якчанд омили

(мултипликативии) Кобб-Дугласро дар намуди зерин дида

мебароем:

$$Y = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}, \quad (5.3.8.)$$

Дар инҷо α -коэффитсиенти сатҳи технологӣ; α_1, α_2 -

коэффитсиентҳои ҷанлиро дар вобастагӣ ба меҳнат ва

маблағ мебошанд.

Агар $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2$ бошад, афзониш ва сарфани

меҳнат бо таъри интенсивӣ ба амал меояд, дар акси ҳол -

афзониши пасандоз (васеъ).

Дар ҳолати хаттӣ $F(K, L) = X_0 = \text{const}$ будан муодилаи

функсияи истеҳсоли намуди зеринро мегирад:

$$AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} = X_0 = \text{const} \quad (5.3.9.)$$

$$\varepsilon \quad K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A} L^{-\alpha_2}, \quad (5.3.10.)$$

Дар ҳолати изоквантӣ:

$$F(K, L) = X_0 = \text{const, to}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0 \quad (5.3.11.)$$

Изоквантӣ ин як баромади баробар, яъне хатти

каҷи баробар мебошад. Ин хаттест, ки нуқтаҳоро бо ҳам

мепаивандад ва вариантиҳои гуногуни омезиши омилҳоро

барои ҳолатҳои якхела нигоҳ доштани истеҳсоли маҳсулот

таъсир мекунад.

Дар натиҷа муҳаққиқон ба чунин ҳулоса омаданд,
ки $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, яъне самараи доимии меъёри истеҳсолот вучуд

дорад.

Функсияи маҷмуи маҳсулоти дохилӣ, вобаста аз

арзиши воситаҳои асосӣ ва шумораи кормандоне, ки дар

ҳаҷми халқ кор мекунад, дар солҳои 1960-1994 чунин

шакл дошт:

$$Y = 0.931K^{0.54}L^{0.59} \quad (5.3.2.)$$

Тибқи иқтисодиёти ИМА барои солҳои 1980-1995,

Функсияи истеҳсоли Кобб-Дуглас дар намуди зерин дида

шуда буд:

$$Y = 2.251K^{0.4}L^{0.8} \quad (5.3.3.)$$

Функсияи истеҳсоли

$$Y = F(K, L)$$

таъриқласии номида мешавад, агар он шартҳои зеринро,

ки ба таъбири табиии иқтисодӣ мувофиқанд, қонеъ

кунонад:

1) ҳангоми набудани яке аз захираҳо, истеҳсоли

имконнопазир аст:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0; \quad (5.3.4.)$$

2) бо афзониши захираҳо, афзониши маҳсулот

меафзояд:

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial K} > 0; \quad (5.3.5.)$$

3) бо афзониши захираҳо суръати афзониши маҳсулот

коҳиш меёбад:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad (5.3.6.)$$

Барои ин ҳолат:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$$

аст, бинобарин dK ва dL аломатҳои гуногун доранд: агар $dL < 0$, маънои камшавии музди меҳнатро дорад, $dK > 0$, яъне арзиши маош вобаста ба миқдори кор dK .

Дар баробари афзоиши миқдори захираҳо омили муҳимтарини афзоиши истеҳсолот ин пешрафти илмӣ ба ҳисоб мераванд, ки ба баланд бардоштани сатҳи таҳассуси кормандон ва дар ташкил намудани истеҳсолоти беҳтарин зоҳир шудаанд. Пешрафти илмӣ асосан дар намуди функсияи истеҳсоли зерин инъикос меёбад:

$$Y = a_0 \times X_1^{a_1} \times X_2^{a_2} \times e^{\lambda t}, \quad (5.3.12.)$$

дар ин ҷо λ -доимӣ, инъикосгари суръати пешрафти технологӣ; t – омили вақт.

Параметр e^t бошад, ин ифодаи тамоюли муваққатии рушди истеҳсолот мебошад, ки бо пешрафти технологӣ, банақшагирии мукамал, идоракунӣ ва ташкили истеҳсолот алоқаманд аст.

Бо назардошти маҳдудиятҳо ва яқбора баланд шудани арзиши захираҳои табиӣ, функсияи истеҳсолотро дар намуди зерин дида мебароем:

$$Y = a_0 \times X_1^{a_1} \times X_2^{a_2} \times X_3^{a_3}, \quad (5.3.13.)$$

дар ин ҷо X_3 -арзиши захираҳои табиӣ истифодашаванда мебошад.

Ҳангоми таҳлили падидаҳои иқтисодӣ бо истифодаи функсияҳои истеҳсолӣ савол ба миён меояд, ки

оё дар ҳолати калон будани ҳаҷми истеҳсолот арзиши он тавассути функсияҳои истеҳсолӣ таҳлил карда мешавад?

Дар ин ҳолат, арзишҳо таҳлил карда мешаванд, тавассути:

$$A = \sum_{i=1}^m a_m \quad (5.3.14.)$$

Барои ин се ҳолат ҷой дорад:

1. агар $A=1$, пас афзоиши захираҳо дар k ҳолати ҷойдошта, ба зиёд шудани ҳосилнокӣ ба k -маротиба баробар аст.
2. агар $A > 1$, пас мо метавонем дар бораи таъсири мусбати васеъ кардани миқёси истеҳсолот сӯҳбат кунем, зеро зиёдшавии захираҳо ба k маротиба боиси зиёд шудани ҳаҷми истеҳсолот аз k ҳолат мегардад.
3. Агар $A < 1$, бошад, ин маънои таъсири манфӣ ба истеҳсолотро дорад.

Дар асоси функсияҳои истеҳсолӣ, амсилаи риёзии вобастагии талабот аз даромадро метавон эҷод кард:

$$Y = a_0 \times X_1^{a_1}, \quad (5.3.15.)$$

дар ин ҷо Y - талабот; X_1 - бузургии даромади аҳоли.

Кoeffитсиенти a_1 нишон медиҳад, ки чӣ қадар талабот ба даромад 1% афзоиш ёфтааст. Ин коэффитсиент метавонад манфӣ бошад. Масалан, дар сурати афзоиши даромадҳои аҳоли истеъмоли нон, картошка ва ғайра метавонад кам шавад.

5.4. Амсилаи риёзии Солоу

Амсилаи риёзии (Robert Merton Solow) Роберт Мертон Солоу дар асоси омилҳои ғайриклассикии рақобати комил, дар бозорҳои истеҳсоли сохта шудааст, ки шуғли пурраи захирахоро таъмин мекунад. Аз таҳлилҳои олимони бармеояд, ки баробарии талабот ва пешниҳод бояд муайян бошад.

Ҳадафи асосии амсилаи Солоу аз посух ба саволҳои зерин иборат аст: омилҳои мутавозини рушди иқтисодӣ кадомҳоянд, иқтисодиёт дар шароити нишондиҳандаҳои системаи иқтисодӣ чӣ гуна суръати афзоишро таъмин карда метавонад ва чӣ тавр даромадҳои аҳоли ва истеъмолатҳо афзоиш меёбанд?

Умуман, ҳаҷми маҳсулоти дохилии Y аз 3 омили истеҳсолот вобаста аст: қувваи кори L , сармоя K , замин N :

$$Y = f(L, K, N).$$

Омили замин дар амсилаи Солоу аз сабаби самаранокии пасти системаҳои иқтисодӣ, ки тавассути сатҳи баланди технологӣ тавсиф карда шудааст, партофта шуд. Бинобар ин, маҳсулот аз омилҳои меҳнат ва истеҳсолот вобастагӣ дорад:

$$Y = f(L, K)$$

Дар шакли васеъ ин формула чунин навишта мешавад:

$$Y = (\Delta Y / \Delta L) L + (\Delta Y / \Delta K) K, \quad (5.4.1.)$$

дар ин ҷо $\Delta Y / \Delta L$ – маҳсулоти ниҳии меҳнат(қувваи корӣ) MPL , $\Delta Y / \Delta K$ – маҳсулоти ниҳии сармоя(капитал) MPK .

Ин маънои онро дорад, ки маҳсулоти умумӣ баробар аст, ба маблағи сарфшуда ва сармоя аз рӯйи маҳсулоти ҳудудӣ. Афзоиши маҳсулот ΔY аз ҳисоби афзоиши хароҷоти меҳнат ΔL ва хароҷоти сармоя ΔK вобаста аст.

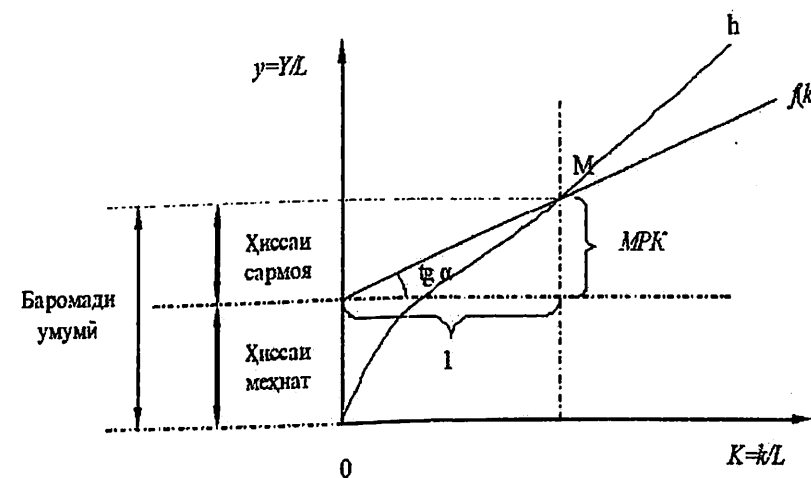
Дар шакли соддакардашуда $y = Y / L$, дар ин ҷо y – ҳосилонокии меҳнат; $k = K / L$, дар ин ҷо k -таносуби сармояи меҳнатӣ. Пас, функсияи истеҳсоли намуди зеринро мегирад:

$y=f(k)$, дар инҷо $f(k)=F(k,1)$.

Намуди графיקии ин функсия дар расми 5.4.1. нишон дода шудааст.

Аз нақша аён аст, ки таносуби сармояи меҳнатӣ k , андозаи баромади як кормандро муайян мекунад:

$$y = f(k).$$



Расми 5.4.1. Графикаи функсияи истеҳсолӣ дар амсилаи Солоу

Дар ҳоле, ки $tg \alpha = MPK$: агар k бо воҳиди бузургӣ афзоиш ёбад, пас y бо воҳидҳои MPK афзоиш меёбад. Тавре, ки таносуби сармояи меҳнат баланд мешавад, ҳосилнокии он ҳам зиёд мешавад, аммо бо суръати коҳишёбии MPK .

Талаботи умумӣ дар амсилаи Солоу вобаста аз сармоягузорӣ ва талаботи истеъмолкунанда муайян карда мешавад. Барои як корманд ин амсила чунин шаклро дорад:

$$y = c + i, \quad (5.4.2.)$$

дар ин ҷо c ва i — истеъмол ва сармоягузорӣ мебошанд.

Даромад мутобиқи меъёри пасандоз байни истеъмолот ва пасандозҳо тақсим карда мешавад, бинобар ин истеъмолотро дар ин амсила чунин тасвир намудан мумкин аст:

$$c = (1 - s)y, \quad (5.4.3.)$$

s — меъёри ҷамъшавии пасандоз. Пас аз ин:

$$y = c + i = (1 - s)y + i, \quad i = sy.$$

Дар мувозинат сармоягузориҳо ба пасандозҳо баробаранд ва ба даромад мутаносиб мебошанд. Дар натиҷа, шартҳои баробарии талабот ва пешниҳоди метавон дар чунин намуд ифода кард:

$$f(k) = c + i \quad \text{ё} \quad f(k) = i/s.$$

Функсияи истеҳсоли пешниҳоди молҳоро дар бозор муайян намуда, ҷамъи сармояро вобаста ба талабот ба маҳсулоти саноатӣ муайян мекунад. Ҳаҷми сармоя таъсири сармоягузориҳои ихтиёрдорӣ тағйир меёбад.

Сармоягузорӣ ба як корманд, қисми даромаде мебошад, ки ба як коргар тааллуқ дорад ($i = sy$) ё

$$i = s * f(k). \quad (5.4.5.)$$

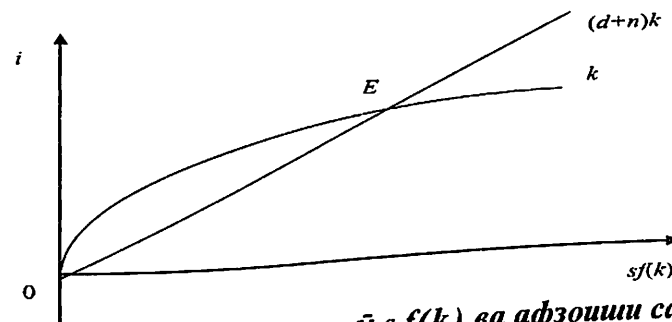
Аз ин ҷо бармеояд, ки чӣ қадаре сармоягузорӣ k , зиёд бошад, сатҳи истеҳсолот $f(k)$ ва сармоя i бештар мешавад.

Дар амсилаи Р. Солоу меъёри пасандоз омилҳои асосие мебошад, ки сатҳи устувории таносуби сармоя ва қувваи кориро муайян мекунад. Меъёри баландтари пасандоз миқдори бештари сармояро таъмин мекунад ва сатҳи истеҳсолотро боло мебарад.

Яке аз омилҳои дигари рушди бемайлони иқтисодӣ, ин афзоиши аҳоли ба ҳисоб меравад.

Барои устувории иқтисодӣ, сармоягузориҳои $sf(k)$, оқибатҳои ҷараёни сармоя ва афзоиши онро $(d + n)k$, дар нуқтаи E тасвир менамоем (Расми 5.4.2). Агар афзоиши аҳоли бо афзоиши сармоягузорӣ баробарӣ накунад, пас он ба кам шудани сармоя оварда мерасонад.

Ҳамин тариқ, аз гуфтаҳои боло чунин хулоса баровардан мумкин аст: дар кишварҳое, ки суръати афзоиши аҳоли баландтар аст, таносуби сармояшон кам, ин маънои камтарини ба даст овардани даромадро дорад.



Расми 5.4.2 Сармоягузорӣ $sf(k)$ ва афзоиши сармоя $(d + n)k$

Манбаи сеюми рушди иқтисодиёт пас аз сармоягузорӣ ва афзоиши аҳоли пешрафти сатҳи технологӣ ба ҳисоб меравад. Дар ҳолатҳои ғайриклассикӣ, пешрафти сатҳи технологӣ ин тағйироти сифатии истеҳсолот мебошад (баланд бардоштани маърифати коргарон, такмили ташкили меҳнат, афзоиши ҳаҷми истеҳсолот).

Ба амсила сатҳи технологиро дохил намуда, функцияи истеҳсолиро дар намуди зерин менависем:

$$Y = f(K, L_\varepsilon, \varepsilon),$$

дар ин ҷо ε - самаранокии меҳнати як корманд (вобаста ба саломатӣ, маълумот ва ихтисос), L_ε – шумораи воҳидии самаранокии қувваи корӣ.

Пешрафтҳои сатҳи технологӣ боиси афзоиши самаранокии ε бо суръати доимии g мешаванд.

Агар $g = 5\%$, бошад, пас даромаднокии ҳар як воҳиди корӣ дар як сол 5% афзоиш меёбад. Ин маънои онро дорад, ки ҳаҷми истеҳсолот афзоиш меёбад, ба шарте, ки қувваи корӣ дар тӯли сол 5% афзоиш ёбад. Ин пешрафти сатҳи технологӣ аст.

Агар шумораи кормандон (қувваи корӣ) L бо суръати n афзоиш ёбад, ва самаранокии сатҳи технологӣ ε бо суръати g зиёд шавад, пас L_ε бо суръати $n + g$ зиёд мешавад. Дар ин ҳолат сармояи як воҳиди меҳнат бо самаранокии доимӣ:

$$k_1 + [K / (L_\varepsilon)],$$

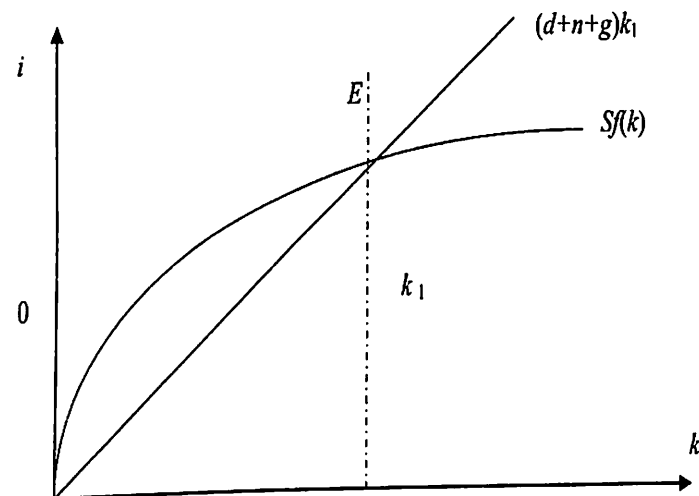
баробар хоҳад буд, ва ҳаҷми истеҳсолот барои як қувваи корӣ бо самаранокии доимӣ $y_1 = Y / (L_\varepsilon)$ баробар мешавад.

Ҳолати мувозинатӣ ва устуворӣ бо шартҳои зерин таъмин карда мешавад:

$$s f(k_1) = (d + n + g)k_1,$$

дар ин ҷо d - меёри пасту баландшавӣ мебошад.

Аз баробарии болоӣ бармеояд, ки танҳо як сатҳи сармояи k_1 мавҷуд аст, ки дар он, сармоя ва баромади истеҳсолот ба як воҳиди қувваи кории самаранок баробар аст (Расми 5.4.3.).



Расми 5.4.3. Шартҳои устувории сармоя ва ҳосилнокии як воҳиди меҳнат бо самаранокии доимӣ

Дар ҳолати устуворӣ k_1 , дар сурати пешрафти сатҳи технологӣ, ҳаҷми умумии сармояи K ва баромади Y бо суръати $n + g$ афзоиш меёбад. Ҳангоми ҳисобкунии як корманд, сармояи k / L ва баромади Y / L бо суръати g афзоиш меёбад. Ҳамин тариқ, пешрафти сатҳи технологӣ дар амсилаи Солоу шартҳои ягона, барои рушди муттасили иқтисодӣ ба ҳисоб меравад.

5.5. Амсилаи риёзии Стоун

Фарз мекунем, ки шумораи муайяни ҳар як намуди маҳсулот дар ҳар сурате, ки набошад, барои истеъмолкунандагон лозим аст. Инчунин, масъалаи харидории маҳсулотҳо интихобӣ нест. Инчунин истеъмолкунанда маблағро мувофиқи хоҳиши худ, барои хариди мол сарф мекунад.

Бо воситаи $b_1, b_2, \dots, b_n$ шумораи камтарини молҳои мувофиқро, ки истеъмолкунанда талаб мекунад, ифода мекунем. Барои ин бояд шартҳои зерин иҷро шавад:

$$\sum_{i=1}^n p_i b_i \leq I. \quad (5.5.1.)$$

Инчунин, мо фарз мекунем, ки истеъмоли маҳсулот бо ёрии функсияи Кобб-Дуглас тавсиф шудааст:

$$u(x) = (x_1 - b_1)^{a_1} (x_2 - b_2)^{a_2} \dots (x_n - b_n)^{a_n},$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = \overline{1, n} \quad (5.5.2.)$$

Он гоҳ масъалаи интихоби истеъмолкунанда намуди зеринро мегирад:

$$\begin{cases} u(x) = (x_1 - b_1)^{a_1} (x_2 - b_2)^{a_2} \dots (x_n - b_n)^{a_n} \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i = I \end{cases} \quad (5.5.3.)$$

5.6. Тадбиқи функсияҳои истеҳсоли дар амалия

Масъалаи 1. Ҳамчун намуна мо ҳалли функсияи классикии Кобб-Дугласро бо ёрии ҷадвали электронии MS EXCEL меёбем.

Ба сифати маълумотҳои ибтидоӣ, мо саноати истеҳсоли Амрико дар солҳои 1899 то 1922 истифода мебарем.

Маълумотҳои ибтидоии амсила инҳоянд:

Y - истеҳсолот;

K - бузургии сармоя-капитал;

L - қувваи корӣ.

Функсияи Кобб-Дуглас намуди зеринро дорад:

$$Y = a_0 \times K^a \times L^a. \quad (5.6.1.)$$

Барои ҳалли регрессионии ҷадвалӣ дар ҷадвали электронии EXCEL мо ин функсияро дар шакли хаттӣ менависем:

$$\ln Y = \ln a_0 + a_1 \times \ln K + a_2 \times \ln L. \quad (5.6.2.)$$

Барои ин, маълумотҳои ибтидоиро логарифмонида, бо истифода аз таҳлили коррелятсия ва регрессия ҳисобкуниҳо гузаронида мешаванд.

Таҳлилҳои коррелятсионӣ мушкулоти зеринро ҳал мекунанд:

1. Мавҷудияти робита ва ё муносибатҳои байни бузургиҳо муайян карда мешавад.
2. Шакли хаттии регрессия муайян карда мешавад.
3. Параметрҳои хаттии регрессия муайян карда мешаванд.
4. Бозътимодӣ ва вобастагии параметрҳо муқаррар шуда, эътимоднокии ин параметрҳои дар алоҳидагӣ муайян карда мешавад.

Барои ҳолати ҷойдошта, дақиқият ва иртибот бо коэффитсиенти коррелятсияи r тавсиф карда мешавад. Коэффитсиенти коррелятсия дар доираи $-1 < r < 1$ ҷойгир

мебошад. Агар $r=0$ бошад, онгоҳ пайвасти хаттӣ вучуд надорад. Агар $r = 1$ бошад, дар байни ин ду бузургӣ робитаи функционалӣ мавҷуд аст. Барои r -ҳои мусбат, муносибати мустақим мушоҳида мешавад, яъне бо зиёд шудани тағйирёбандаи мустақил x , тағйирёбӣ ва вобастагиро аз y меафзояд. Барои коэффитсиенти манфӣ алоқамандии баръакс ҷой дорад.

Маълумотҳои ибтидоӣ дар ҷадвали 5.1. дода шудаанд.

Ҷадвали 5.1.

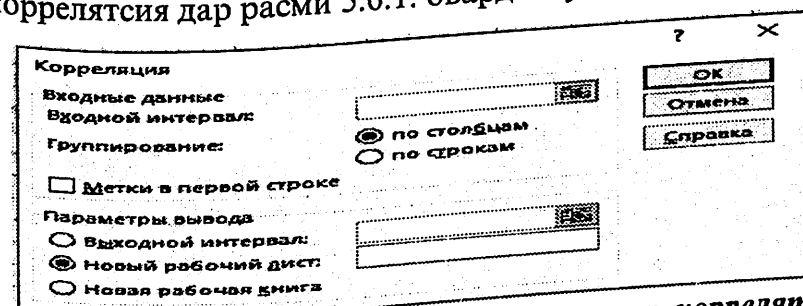
Y	K	L	In Y	In K	In L
100	100	100	4,60517	4,60517	4,60517
101	107	104.8	4,615121	4,672829	4,652054
112	114	110	4,718499	4,736198	4,70048
122	122	117.2	4,804021	4,804021	4,763882
124	131	121.9	4,820282	4,875197	4,803201
122	138	115.6	4,804021	4,927554	4,750136
143	149	125	4,962845	5,003946	4,828314
152	163	134.2	5,023881	5,09375	4,899331
151	176	139.9	5,01728	5,170484	4,940928
126	185	123.2	4,836282	5,220356	4,813809
155	198	142.7	5,043425	5,288267	4,960745
159	208	147	5,068904	5,337538	4,990433
153	216	148.1	5,030438	5,375278	4,997888
177	226	155	5,17615	5,420535	5,043425
184	236	156.2	5,214936	5,463832	5,051137
169	244	152.2	5,129899	5,497168	5,02195

Y	K	L	In Y	In K	In L
189	266	155.8	5,241747	5,583496	5,048573
225	298	183	5,4161	5,697093	5,209486
227	335	197.5	5,42495	5,814131	5,285739
223	366	201.1	5,407172	5,902633	5,303802
218	387	195.9	5,384495	5,958425	5,277604
231	407	194.4	5,442418	6,008813	5,269918
179	417	146.4	5,187386	6,033086	4,986343
240	431	160.5	5,480639	6,066108	5,078294

Барои муайян намудани саҳеҳии нишондиҳандаҳои таҳқиқшуда аз функцияи "Коррелятсия(корреляция)", менюи "Асбобҳо (сервис)" ва банди "Таҳлили маълумот(Анализ данных)" истифода мебарем.

Аз рӯи натиҷаҳои таҳлили коррелятсия метавон хулоса баровард, ки байни ҳаҷми истеҳсолот ва омилҳои ба он алоқаманд муносибати наздик вучуд дорад ва робитаи байни ин омилҳо мустақим аст.

Равзанаи маълумоти ибтидоии таҳлили коррелятсия дар расми 5.6.1. оварда шудааст.



Расми 5.6.1. Манбаи маълумотҳои таҳлили коррелятсия

Цადვალე 5.2.

	A	B	C	D
1	Тағйирёбандаҳо	Y	K	L
2	Y	1		
3	K	0,916240161	1	
4	L	0,94553263	0,847596297	1

Таҳлили робитаи байни омилҳо бо истифода аз функцияи "Регрессия"-и банди менюи "Сервис" ва "Анализ данных" гузаронида мешавад. Натиҷаҳои коркарди маълумоти манбаъҳо дар расми 5.6.2. нишон дода шудааст.

Хулоса ва натиҷаҳо

Отори регрессия	
Барийды R	0.977293344
R -даражы	0.955102279
Даражын нормированы R	0.950826306
Хатосын стандарты	0.059703074
Мушоюнда	24

Таҳлил	df	SS	MS	F	Таъсири F
Регрессия	2	1.592349043	0.79617452	223.3648791	7.03269E-15
Боқимонда	21	0.074853598	0.00356446		
Хатоҳо	23	1.667202641			

	Коеффициент α	Хатхон стандарт	t-омер	P-урин	Поён 95%	Боюн 95%
У-фосит	0.043018979	0.429729409	-0.16010713	0.921208825	-0.936690208	0.89065221
LnK	0.24509873	0.064207822	3.81727212	0.001004788	0.111571254	0.37862626
LnL	0.760556233	0.144063071	5.31750593	2.84314E-05	0.466460676	1.06562181

Расми 5.6.2. Натиҷаи таҳлили регрессионӣ

$$Y = 0,96 \times K^{0.25} \times L^{0.77}. \quad (5.6.2.)$$

✓ афзоиши 1%-и сармоя ба зиёдавии афзоиши 0,25%-и истеҳсолот баробар аст;

✓ афзоиши 1% -и қувваи корӣ, 0.77%-и афзоиши истеҳсоли таъмин менамояд.

Бо афзויши якҷояи 1%, дар сармояи асосӣ ва қувваи корӣ, истеҳсолот дар чунин намуд дида мешавад.

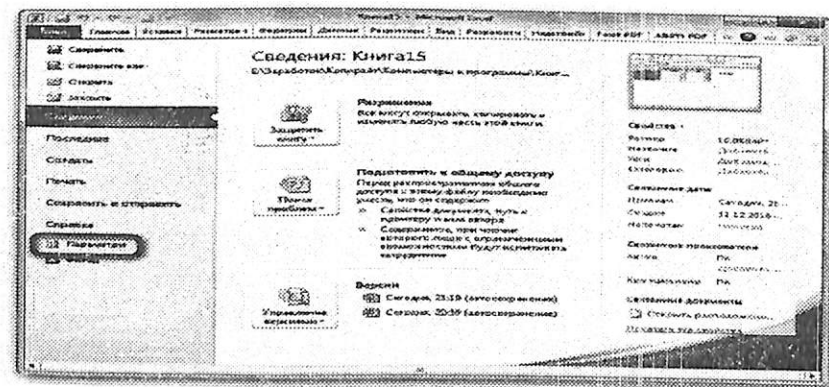
$$a_1 + a_2 = 0,245 + 0,766 = 1,011. \quad (5.6.3.)$$

Натиҷаи бадастомада самаран мусбати
истеҳсолотро нишон медиҳад.

$$a_1 + a_2 > 1. \quad (5.6.4.)$$

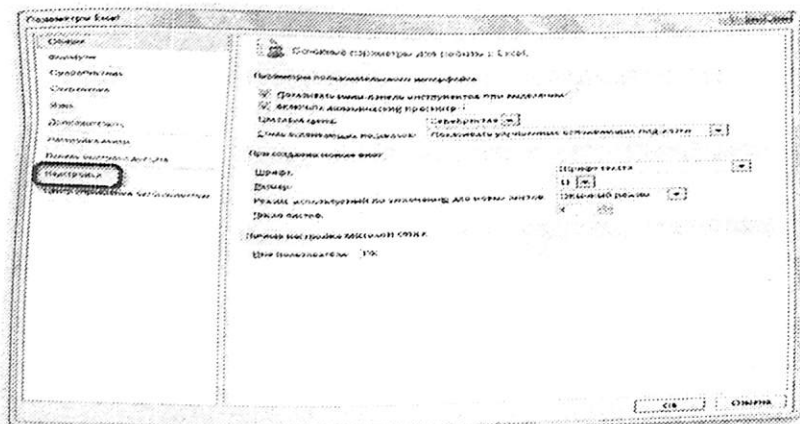
Агар ҳангоми таҳлили маълумотҳо дар менюи ҷадвали электронӣ, дар панели асбобҳо банди “Анализ данных” ҷойгир набошад, онгоҳ барои ҷойгир кардани он чунин амалиёт мегузаронем.

1. Ба менюи файл воридшуда фармони “Параметры”-ро интихоб мекунем(Расми 5.6.3).



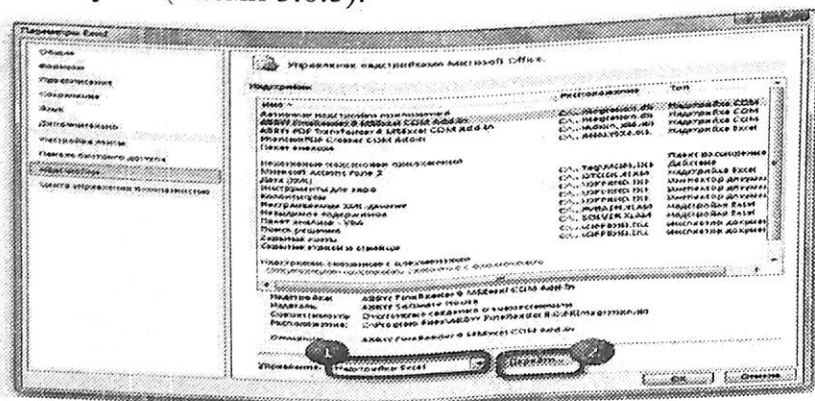
Расми 5.6.3.

2. Аз равзанаи пешниҳодшуда банди "Надстройки"-ро интихоб мекунем(Расми 5.6.4).



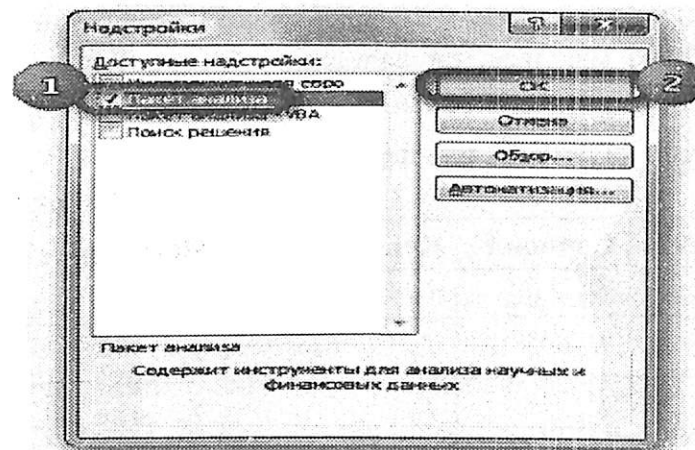
Расми 5.6.4.

3. Дар қисми поёни равзанаи навбатӣ дар баҳши "Надстройка Excel", мо гузаришро ба мавқеи "Перейти" мегузорем ва тугмаи "ОК" -ро паҳш мекунем(Расми 5.6.5).



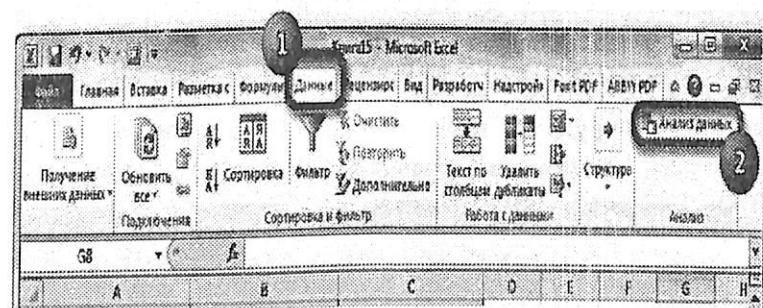
Расми 5.6.5.

4. Аз равзанаи навбатӣ, банди "Пакет анализа" -ро интихоб намуда, тугмаи "ОК" -ро паҳш менамоем(Расми 5.6.6).



Расми 5.6.6.

5. Баъд аз ҳамаи ин амалиётҳо дар панели таҷҳизотҳо, банди "Анализ данных" пайдо мешавад(Расми 5.6.7).



Расми 5.6.7.

Масъалаи 2. Дар масъалаи дуюм мо ҳолати функсияҳои истеҳсолиро бе назардошти сатҳи технологӣ ва бо назардошти сатҳи технологӣ таҳлил намуда, вобастагӣ ва фарқияти ин функсияҳоро муайян менамоем.

Фарз мекунем, ки давраҳои ибтидоии фаъолияти иқтисодӣ барои функсияи истеҳсоли дар лаҳзаи t_0 то t_n дар шакли ҷадвал оварда шудаанд.

Ҷадвали 5.3.

Солҳо	Сармоя K	Қувваи корӣ L	Истеҳсолот Y
t_0	K_0	L_0	Y_0
t_1	K_1	L_1	Y_1
t_2	K_2	L_2	Y_2
...	...	...	...
t_n	K_n	L_n	Y_n

Аз ҷадвали 5.3. аён аст, ки сармоя, қувваи корӣ ва истеҳсолот вобаста аз вақт тағйир меёбанд. Инчунин тағйирёбии сармоя ва қувваи корӣ мустақиланд, аммо формулае, ки тағйирёбандаҳои нишондодашударо ба ҳам пайвандад, вучуд надорад. Тибқи назария, амсилаи математикие, ки метавонад ин вобастагиро нишон диҳад, ин функсияи истеҳсоли Кобб-Дуглас бо назардошти пешрафти сатҳи технологӣ мебошад, яъне амсилаи риёзии Солоу.

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta \cdot e^{\gamma(t-t_0)} \quad (5.6.4.)$$

Дар ин функсия ҳамчун параметрҳои номаълум A , α , β , γ иштирок мекунанд, ки шартҳои додашудаи $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ -ро қоне мекунанд.

Функсияи истеҳсолиро логарифмонида, ҳосил мекунем:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma(t - t_0) \quad (5.6.5.)$$

Аз ин ҷо:

$$x_1 = \ln K, \quad x_2 = \ln L, \quad x_3 = t - t_0, \quad y = \ln Y, \quad a = \ln A.$$

Сипас, баъд аз ишораҳо мо функсияи хаттиро ба даст меорем.

$$a, \alpha, \beta, \gamma: \quad y = a + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \quad (5.6.6.)$$

Қимати бузургҳои x_1, x_2, x_3 ва y барои ҳамаи солҳо маълум аст дар фосилаи t , аз t_0 то t_n .

Барои ҳалли масъалаи ҷойдошта, асосан номуайянҳо бо истифодаи усули квадратҳои хурдтарин муайян карда мешаванд. Барои ин, параметрҳои номаълумҳо чунин интихоб карда мешавад, ки ҳосили ҷамъи квадрати фарқиятҳои тарафҳои ҷаф ва рости муодила минималӣ бошад. Дар ҷадвали электронии Excel ин масъаларо функсияи =ЛИНЕЙН() ҳал мекунад.

Бо назардошти рушди система, функсияи истеҳсоли дар як сол t бо муодилае тавсиф мешавад, ки вобастагиро бо таври возеҳи динамикӣ нишон медиҳад:

$$Y_t = A \cdot K_t^\alpha \cdot L_t^\beta \cdot e^{\gamma(t-t_0)} \quad (5.6.7.)$$

Дар инҷо сармоя $-K_t$, қувваи корӣ $-L_t$ баромади истеҳсоли $-Y_t$. Нишондиҳандаҳои асосӣ инчунин фонди пасандоз S_t ва фонди истеъмолотро C_t -ро дар бар мегиранд. Ин маблағҳо аз меъёри ҷамъоварӣ S_t бо мурури замон $t-t_0$ вобастаанд. Суръати ҷамъшавӣ дар шакли зерин дида мешавад.

$$s_t = s_0 + h \cdot (t - t_0) \quad (5.6.7.)$$

Ё ин, ки

$$s_t = s_0 e^{h(t-t_0)} \quad (5.6.8.)$$

Дар инҷо S_0 ва h параметрҳои доимии вобаста аз бузургии меъёри ҷаъмшавӣ мебошанд.

Фонди пасандозӣ ба ҳосили миқдори ҷамъунӣ S_t ва арзиши функсияи истеҳсолӣ Y_t баробар аст:

$$S_t = s_t \cdot Y_t \quad (5.6.9)$$

Фонди истеъмоли ба фарқи байни арзиши функсияи истеҳсолӣ ва фонди пасандозӣ баробар аст

$$C_t = Y_t - S_t \quad (5.6.10.)$$

Инчунин дар ҳолати ҷойдоштаи мазкур ба нишондиҳандаҳои иловагӣ инҳо дохил мешаванд:

- таносуби сармоя ва қувваи корӣ $\frac{K_t}{L_t}$
- ҳосилнокии меҳнат $\frac{Y_t}{L_t}$,
- бозгашти сармоя $\frac{Y_t}{K_t}$,
- истеъмоли миёнаи сарикасӣ, ба ҳар сари аҳоли $\frac{C_t}{L_t}$.

Нишондиҳандаҳои асосӣ ва иловагии нишондодашуда, барои ҳар соли давраи пешбинишаванда дар асоси гуфтаҳои боло бо таври рекурсивӣ ҳисоб карда мешаванд.

Барои фаҳмо ва саҳеҳ шудани масъалаи бамиёномада, мо ҳамчун намуна динамикаи сармояи асосӣ, қувваи корӣ ва истеҳсолотро дар тӯли 20 соли фаъолияти низомии иқтисодӣ дида мебароем.

Солҳо	Сармоя K	Қувваи корӣ L	Истеҳсолот Y
1991	670	2497	7357
1992	679	2500	7544
1993	686	2507	7712
1994	694	2515	7901
1995	701	2520	8079
1996	710	2529	8282
1997	715	2532	8446
1998	715	2534	8577
1999	724	2543	8790
2000	732	2547	8989
2001	738	2554	9182
2002	739	2563	9331
2003	740	2571	9482
2004	747	2580	9698
2005	747	2583	9845
2006	750	2592	10027
2007	758	2599	10256
2008	764	2600	10466
2009	773	2605	10715
2010	777	2605	10912

Параметрҳои доимӣ, ки суръат ва меъёри ҷамъуниро тавсиф мекунанд, мутаносибан $S_0=0.2$ ва $h_0=0.2$ баробаранд.

Барои додаҳои ибтидоӣ ва таҳлили масъалаи гузошташуда, аз чадвали электронии Excel истифода мебарем (Расми 5.6.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	t	K	L	Y	Y_m	$Y_z^{(0)}$	LnK	LnL	$t-t_0$	LnY
1										
2	1991	670	2497	7357	7359	7359	6,5073	7,8228	0	8,9034
3	1992	679	2500	7544	7542	7434	6,5206	7,824	1	8,9285
4	1993	686	2507	7712	7715	7495	6,5309	7,8268	2	8,9505
5	1994	694	2515	7901	7901	7565	6,5425	7,83	3	8,9747
6	1995	701	2520	8079	8079	7625	6,5525	7,832	4	8,9971
7	1996	710	2529	8282	8281	7703	6,5653	7,8356	5	9,0218
8	1997	715	2532	8446	8448	7745	6,5723	7,8368	6	9,0414
9	1998	715	2534	8577	8573	7747	6,5723	7,8376	7	9,0568
10	1999	724	2543	8790	8786	7825	6,5848	7,8411	8	9,0814
11	2000	732	2547	8989	8990	7892	6,5958	7,8427	9	9,1037
12	2001	738	2554	9182	9182	7945	6,6039	7,8454	10	9,125
13	2002	739	2563	9331	9333	7959	6,6053	7,8489	11	9,1411
14	2003	740	2571	9482	9485	7973	6,6067	7,8521	12	9,1572
15	2004	747	2580	9698	9698	8035	6,6161	7,8555	13	9,1796
16	2005	747	2583	9845	9842	8037	6,6161	7,8567	14	9,1948
17	2006	750	2592	10027	10023	8067	6,6201	7,8602	15	9,2131
18	2007	758	2599	10256	10256	8136	6,6307	7,8629	16	9,2356
19	2008	764	2600	10466	10467	8184	6,6386	7,8633	17	9,2559
20	2009	773	2605	10715	10717	8259	6,6503	7,8652	18	9,2794
21	2010	777	2605	10912	10915	8290	6,6554	7,8652	19	9,2977

Расми 5.6.8. Тасвири додаҳо дар ҷадвали электронии Excel

Аз баробарӣ (5.6.5/) бармеояд, ки қиматҳои функсия $\ln Y$ ба таври хаттӣ аз арзишҳои $\ln K$, $\ln L$ ва $t-t_0$ вобастаанд.

Аз ин рӯ, коэффитсиентҳои $\ln A$, α , β , γ ва муодилаҳои (5.6.5/) -ро дар Excel бо истифодаи функсияи “=ЛИНЕЙН()” муайян кардан мумкин аст.

Дар аввал сутунҳои E ва F –ро муваққатан ҳолӣ монда, сутунҳои G, H, I, J-ро вобаста аз бузургҳои $\ln K$, $\ln L$, $t-t_0$ ва $\ln Y$ пур менамоем.

Барои истифодаи функсияи “=ЛИНЕЙН()” дар ягон майдони ҳолӣ Excel блоки аз сатр ва 4 сутун иборат бударо интихоб менамоем. Сипас, функсияи “=ЛИНЕЙН()”-ро интихоб менамоем. Дар экран равзанае пайдо мешавад, ки дар он бояд қимати 4 аргументро дохил намоем:

- массиви якченакаи қиматҳои $y = \ln Y$;
- массиви дученакаи қиматҳои $x_1 = \ln K$, $x_2 = \ln L$, $x_3 = t-t_0$;
- қимати TRUE (ё рақами 1), зеро дар муодила як адади озод мавҷуд аст;
- қимати FALSE (ё рақами 0), зеро талаб карда мешавад, ки коэффитсиентҳои муодилаи регрессивӣ ҳисоб карда шавад.

Пас аз ин, тугмаҳои F2 ва дар якҷоягӣ тугмаҳои “Ctrl”+”Shift”+”Enter” барои пайдоиши коэффитсиентҳои муодила (5.6.5.) дар блоки интихобшуда паҳш карда мешаванд.

Масалан, дар блоки катакчаҳои G23 : J23 функсияи “=ЛИНЕЙН()”-ро бо қимати ниҳони аргументҳо дохил менамоем. Барои маълумотҳои ибтидоии мо ҳолати функсия чунин мешавад {=ЛИНЕЙН(J2 : J21; G2 : I21; 1; 0)} ва натиҷа дар чунин намуд пешниҳод мешавад.

Ҷадвали 5.5.

	G	H	I	J
22	γ	β	α	A
23	0,0145	0,2400	0,7385	2,2205

Дар диапазони G23 : J23 коэффитсиентҳои муодилаи хаттии (5.6.5) бо тартиби баръакс ҷойгир аст.

Барои ёфтани параметри A формулаи $= \text{EXP}(J23)$ -ро дохил намуда, ҳосил мекунем:

$$A = e^{2,2205} = 9,2120$$

Пас аз ин функсияи истеҳсоли намуди зеринро мегирад:

$$I = I_0 e^{0,0145(t-t_0)} \quad (5.6.11.)$$

$$Y = 9,2120 \cdot K^{0,7385} \cdot L^{0,2400} \cdot e^{0,0145(t-t_0)} \quad (5.6.11.)$$

Дар сурати ба ҳисоб нагирифтани пешрафти сатҳи технологӣ, мо муодилаи зерини функцияи истеҳсолиро ҳосил мекунем:

$$Y = 9,2120 \cdot K^{0,7385} \cdot L^{0,2400} \quad (5.6.12)$$

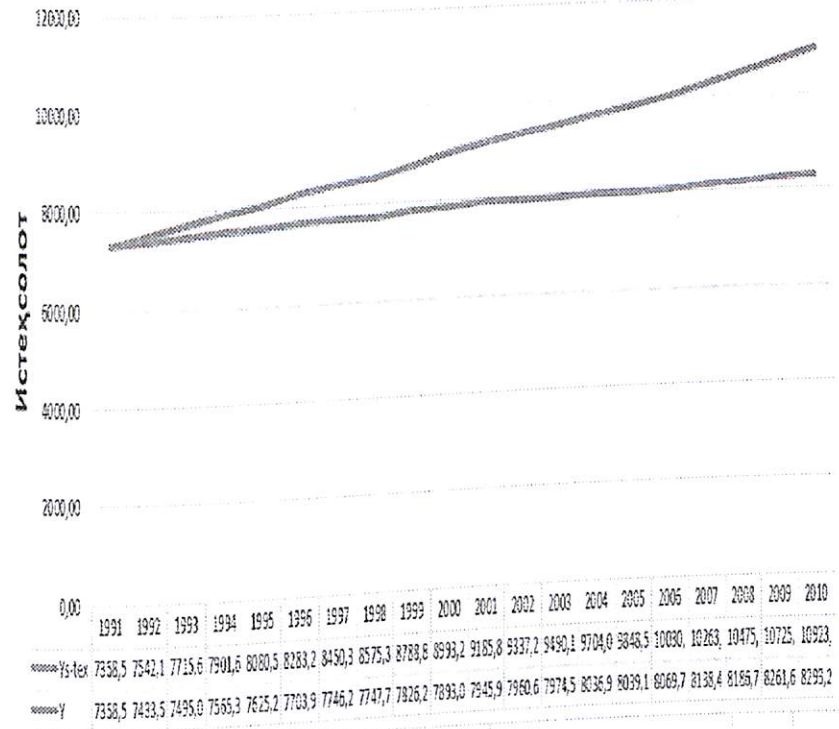
$$Y = 9,2120 \cdot K^{0,7385} \cdot L^{0,2400} \quad (5.6.12)$$

Барои фаҳмо шудани масъалаи гузошташуда, ҳоло дар чадвали электронии Excel, ҳарду ҳолатҳоро муқоиса менамоем, яъне функсияи истехсоли бе сатҳи технологӣ ва бо сатҳи технологӣ. Натиҷаи компютерӣ дар расми 5.6.9. оварда шудааст.

	A	B α 0,7385	C β 0,24	D γ 0,0145	E Δ 9,232
1					
2					
3					
4	Sol	K	L	Vx-teX	Y
5	1991	670	2497	7358,52	7358,52
6	1992	679	2500	7542,11	7433,43
7	1993	686	2507	7715,62	7495,08
8	1994	694	2515	7901,67	7565,32
9	1995	701	2520	8080,57	7625,23
10	1996	710	2529	8283,28	7703,99
11	1997	715	2532	8450,33	7746,23
12	1998	715	2534	8575,38	7774,75
13	1999	724	2543	8788,85	7826,20
14	2000	732	2547	8993,27	7893,00
15	2001	738	2554	9185,85	7945,96
16	2002	739	2563	9337,22	7960,63
17	2003	740	2571	9490,15	7974,55
18	2004	747	2580	9704,08	8036,93
19	2005	747	2583	9848,56	8039,17
20	2006	750	2592	10030,40	8069,73
21	2007	758	2599	10263,59	8138,48
22	2008	764	2600	10475,28	8186,76
23	2009	773	2605	10725,51	8261,68
24	2010	777	2605	10929,75	8293,23

Рисунки 5.6.9. Натягачи компютери

Графики масъалаи додашуда, барои ҳарду ҳолатҳо дар расми 5.6.10. нишон дода шудааст.



Расми 5.6.10. Графики функцияи истеҳсолӣ дар Excel

Аз графикаи ҳолатҳо баръало аён аст, ки ҳангоми баназаргирии сатҳи технологӣ сатҳи истеҳсолот боло меравад. Яъне, баназаргирии сатҳи технологӣ, амсилаи Солоу имкониятҳои бештарро доро аст.

▼ Ба саволҳои зерин ҷавоб гуед:

1. Функсияи истеҳсоли чист?
2. Вазифаҳои функсияҳои истеҳсоли кадомҳоянд?
3. Намудҳои функсияҳои истеҳсолиро номбар кунед?
4. Функсияҳои истеҳсоли дар кадом масъалаҳои иқтисодӣ истифода бурда мешаванд?
5. Функсияҳои истеҳсоли якҷинса, аз кадом параметрҳо иборатанд?
6. Дар амсилаи риёзии Кобб-Дуглас сармоя чӣ вазифаҳо иҷро менамояд?
7. Шартҳои зарурии амсилаи Кобб-Дугласро номбар намоед?
8. Функсияи истеҳсоли классикӣ аз ғайриклассикӣ чӣ фарқият дорад?
9. Сатҳи технологӣ чист?
10. Амсилаи риёзии Солоу аз амсилаи Кобб-Дуглас чӣ фарқият дорад?
11. Параметр ва омилҳои асосии амсилаи Солоуро шарҳ диҳед?
12. Сармояи меҳнатӣ аз кадом омилҳо вобаста аст?
13. Устувории функсияҳои истеҳсоли аз кадом омилҳо вобаста аст?
14. Бузургии сармоя аз бузургии қувваи корӣ чӣ вобастагӣ дорад?
15. Оё тавассути функсияҳои истеҳсоли пешравиҳои истеҳсолотро, барои 10-соли оянда баҳо додан мумкин аст?
16. Кадом омилҳо ба баландшавии сатҳи истеҳсолот мусоидат карда метавонанд?

17. Ба сифати додаҳои ибтидоӣ кадом параметрҳоро қабул намудан мумкин аст?

Супоришҳоро мустақилона иҷро кунед:

Аз додаҳои ибтидоӣ истифода намуда, барои функсияҳои истеҳсоли барномаи компютерӣ тартиб диҳед.

Ҷадвали додаҳои ибтидоӣ 1.

№	Рақами вариантҳо								
	1			2			3		
	Y	K	L	Y	K	L	Y	K	L
1	34,0	21,6	52,6	35,71	23,60	54,60	36,51	24,60	55,6
2	36,9	23,9	57,3	38,52	25,90	59,30	39,31	26,90	60,3
3	37,7	23,7	60,0	39,37	25,70	62,00	40,16	26,70	63,0
4	41,0	25,2	66,1	42,68	27,20	68,10	43,47	28,20	69,1
5	43,6	27,8	69,7	45,23	29,80	71,70	46,02	30,80	72,7
6	45,7	28,6	74,6	47,35	30,60	76,60	48,14	31,60	77,6
7	48,0	31,1	77,9	49,66	33,10	79,90	50,43	34,10	80,9
8	49,3	33,6	78,5	50,91	35,60	80,50	51,68	36,60	81,5
9	50,7	33,3	82,6	52,26	35,30	84,60	53,03	36,30	85,6
10	52	34,0	86,0	53,77	36,00	88,00	54,54	37,00	89,0
11	54,1	35,2	89,2	55,69	37,20	91,20	56,46	38,20	92,2
12	57,5	37,3	95,4	59,14	39,30	97,40	59,91	40,30	98,4
13	34,0	75,8	71,6	243,4	76,80	72,60	247,5	77,80	73,6
14	36,9	77,2	76,3	258,7	78,20	77,30	262,8	79,20	78,3
15	37,7	87,7	79,0	283,7	88,70	80,00	287,9	89,70	81,0
16	41,0	89,9	85,1	300,6	90,90	86,10	304,8	91,90	87,1
17	43,6	90,1	88,7	309,7	91,10	89,70	314,0	92,10	90,7
18	45,7	108,	93,6	351,9	109,2	94,60	356,3	110,2	95,6
19	48,0	99,2	96,9	348,6	100,2	97,90	353,0	101,2	98,9
20	229,	101,	97,5	351,6	102,0	98,50	356,0	103,0	99,5

Чадвали додаҳои ибтидоӣ 2.

№	Рақами вариантҳо								
	1			2			3		
	Y	K	L	Y	K	L	Y	K	L
1	36,0	23,6	62,6	37,71	27,60	51,60	36,51	25,60	53,6
2	37,0	24,9	57,3	38,53	29,90	58,30	39,31	26,90	62,3
3	38,7	26,7	60,0	39,37	29,77	62,00	41,16	29,70	68,0
4	40,0	27,2	66,1	47,68	27,20	68,10	43,47	30,20	69,1
5	43,6	27,8	69,7	45,23	29,80	74,70	49,02	31,80	76,7
6	45,7	28,6	73,6	47,33	30,60	76,60	49,14	33,60	78,6
7	48,0	29,1	77,9	49,67	33,10	79,90	50,43	35,10	81,9
8	49,3	32,6	78,5	51,91	35,60	83,50	51,68	33,60	82,5
9	50,7	33,3	83,6	52,29	34,30	88,60	53,03	36,30	85,6
10	51,2	34,0	86,0	54,77	36,00	89,00	54,54	37,00	89,0
11	54,1	36,2	88,2	55,89	37,20	91,20	56,46	38,20	91,2
12	57,5	37,3	95,3	59,14	39,30	99,40	59,91	40,30	98,4
13	34,0	75,8	73,6	243,4	76,80	72,60	247,5	79,80	73,6
14	36,9	78,2	76,3	258,7	78,20	77,30	262,8	79,20	78,3
15	39,7	87,7	78,0	283,7	89,70	81,00	287,9	89,70	81,0
16	41,0	89,9	83,1	301,6	90,90	86,10	304,8	92,90	87,1
17	46,6	90,1	89,7	310,7	91,10	89,70	324,0	99,10	92,7
18	48,7	108,	93,6	331,9	107,2	94,60	326,3	110,2	96,6
19	49,0	100,	92,9	348,6	102,2	99,90	333,0	101,2	98,9
20	69,6	101,	97,5	361,6	106,0	100,5	346,0	103,0	99,5

АДАБИЁТҲО

1. Авилов К.К. Моделирование эпидемиологии туберкулеза в России // Актуальные вопросы фтизиатрии, пульмонологии и торакальной хирургии. Сб. тез. Всерос. конф. студентов и молодых ученых, посв. Всемирному дню борьбы с туберкулезом. М. 2006. С. 5-7.
2. Авилов К.К., Романюха А.А. Математические модели распространения и контроля туберкулеза // Математическая биология и биоинформатика. 2007. Т. 2, №2. С. 188-318.
([http://www.matbio.org/downloads/Avilov2007\(2_188\).pdf](http://www.matbio.org/downloads/Avilov2007(2_188).pdf))
3. Авилов К.К., Романюха А.А. Математическое моделирование процессов распространения туберкулеза и выявления больных // Автоматика и телемеханика. 2007. Т. 9. С. 145-160.
4. Арнольд В. И. Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения // Квант. 1986. № 2. С. 13-20.
5. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 181 с.
6. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.
7. Базыкин А. Д., Березовская Ф. С. Эффект Олли, нижняя критическая численность популяции и динамика системы хищник-жертва // Проблемы экологического мониторинга и моделирования

- экосистем. СПб.: Гидрометеиздат, 1979. Т. 2. С. 161-175.
8. Бережная, Е.В., Бережной, В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2001. - 368 с.
 9. Блехман, И. И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов, с примерами из механики: учебное пособие / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Н. Г. Пановко. — Москва, 2006. — 376 с.
 10. Боголюбов, А. Н. Основы математического моделирования: конспект лекций / А. Н. Боголюбов. — Москва: Физический факультет МГУ им. Ломоносова, 2001. — 180 с.
 11. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели в биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
 12. Васильченко В. В., Маркман Г. С., Мермельштейн И. Г. О влиянии территорий, недоступных для хищника, на динамику экологических сообществ // Моделирование динамики популяций. Н. Новгород, 1990.
 13. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
 14. Гасилов В.В. Экономико-математические методы и модели Учебное пособие для студентов, обучающихся / Гасилов В.В., Околелова Э.Ю. — Воронеж. — 152 с.
 15. Гасилов, В.В., Околелова, Э.Ю., Замчалова, С.С. Экономико-математические методы и модели / В.В. Гасилов, Э.Ю. Околелова, С.С. Замчалова;

- Воронеж. гос. арх.-строит. ун-т. – Воронеж, 2005. - 157с.
16. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. — Москва: «Высш. школа», 1977.
 17. Гольдштейн, Р.В. О моделировании механического поведения гетероструктур с «квантовыми точками» / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов, П. С. Шушпанников // Известия вузов. Физика. — 2009. — Т. 52, — № 11. — С. 58–66.
 18. Горбань, А. Н. Демон Дарвина: Идея оптимальности и естественный отбор / А. Н. Горбань, Р. Г. Хлебопрос. — Москва: Наука, 1988. — 208 с.
 19. Гуртов, В. А. Радиационные процессы в структурах металл — диэлектрик — полупроводник: уч. пособие / В. А. Гуртов. — Петрозаводск, 1988. — 96 с.
 20. Двойченков В. И., Фрисман Е. Я. Эволюционные последствия конкуренции // Моделирование биологических сообществ. Владивосток, 1975. С. 117-126.
 21. Жемчужкина Т.В. Математическое моделирование действия препаратов инсулина различных типов для системы компьютерного подбора режима инсулинотерапии // Прикладная радиоэлектроника, 2008, Том 7, № 4, – С. 409-412.
 22. Замков, О.О., Толстопятенко, А.В., Черемных, Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: «Дело и Сервис», 2001. – 364 с.

23. Звонарев С.В. Основы математического моделирования: учебное пособие / С. В. Звонарев. — Екатеринбург: Изд-во Урал, 2019. — 112 с.
24. И. Н. Берешко, А. В. Бетин. Математические модели в экологии: учеб. пособие. Ч. 1 / Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т». Харьков, 2006. 68 с.
25. Ибрагимов, И. М. Основы компьютерного моделирования наносистем: учебное пособие / И. М. Ибрагимов, А. Н. Ковшов, Ю. Ф. Назаров. — Санкт-Петербург, 2010. — 384 с.
26. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. Г.И. Жуковой и Ф.Я. Кельмана. - М.: Айрис-пресс, 2002.- 576 с.
27. Карасев, А.И., Кремер, Н.Ш., Савельева, Т.И. Математические методы и модели в планировании - М.: Экономика, 1987.- 196 с.
28. Колмогоров А. Н. Качественное исследование моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. 1972. Вып. 25. С. 100-106.
29. Короткий, А. И. Математическое моделирование /А. И. Короткий, Л. Г. Гальперин. — Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2005. — 102 с.
30. Кудрявцева Е. В., Семенова Е. Е. Математические методы в экологии: сб. задач и упражнений. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005.
31. Кузнецов, Ю.И., Кузубов, В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. - М.: Высшая школа, 1980.- 288 с.

32. Макконелл, К., Брю, С. Экономикс: пер. с англ. - Т.1,2. - М.: Республика, 1992. - 478 с.
33. Мамедов, О.Ю. Современная экономика / под ред. О.Ю. Мамедова. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1995.- С. 132.
34. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
35. Моделирование сверхпроводников на основе временных уравнений Гинзбурга-Ландау / К. С. Гришаков // Известия вузов. Физика. — 2009. — Т. 52, — № 11. — С. 92-102.
36. Моисеев, С. Г. Оптические свойства композитной среды Максвелла-Гарнета с серебряными включениями несферической формы / С. Г. Моисеев // Известия вузов. Физика. — 2009. — Т. 52, — № 11. — С. 7-12.
37. Пайерлс, Р. Построение физических моделей / Р. Пайерлс // УФН. — 1983. — № 6. — С. 32-37.
38. Пономарев, В. Б. Математическое моделирование технологических процессов: курс лекций / В. Б. Пономарев, А. Б. Лошкарев. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУУПИ, 2006. — 129 с.
39. Пых Ю. А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1973.
40. Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993.
41. Ризниченко, Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии: учебник /Г. Ю. Ризниченко.

- Ижевск: НИ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. Ч. 1. — 232 с.
42. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
 43. Самарский, А. А. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент / А. А. Самарский. — Москва: Наука, 1988. — 354 с.
 44. Самарский, А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — Москва: Наука. Физматлит, 1997. — 320 с.
 45. Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
 46. Советов, Б. Я. Моделирование систем: учеб. для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — Москва: Высш. шк., 2001. — 343 с.
 47. Соколов С. В. Модели динамики популяций: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 61 с.
 48. Трусова П. В. Введение в математическое моделирование: учебное пособие / П. В. Трусова. — Москва: Университетская книга, 2007. — 440 с.
 49. Фурсова П. В., Тёрлова Л. Д., Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биологии. М.; Ижевск: РХД, 2008.
 50. Хакимзянов Г.С. Математическое моделирование: учебное пособие / Г.С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, П. В. Воронина. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. — 263 с.

51. Химические приложения топологии и теории графов / под ред. Р. Кинга. — Москва: Мир, 1987. — 560 с.
52. Широкова Н.А. Математическое моделирование баланса «инсулин — глюкоза» в крови// Математические структуры и моделирование. Омск: гос. ун-т, 2002. Вып. 10. с. 106–115
53. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 243 с.
54. Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
55. Fact sheet №103, January 2016. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs103/en/>
56. Frequently asked questions on Ebola virus disease. <http://www.who.int/csr/disease/ebola/faq-ebola/en/>
57. Gause G. F. The struggle for existence. Baltimore: Williams & Wilkins, 1934. 163 pp.
58. Gompertz B. On the nature of the function expressive of the law of human morality, and on a new mode of determining the value of life contingence // Phil. Trans. Phil. Soc. London. A. 1825. Vol. 115. P. 513-585.
59. Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. A Contribution to the
60. Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proc. Roy. Soc. Lond.—1927.—A 115, pp. 700–721.
61. Kermack, W. O.; McKendrick, A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proceedings of the Royal Society, 1927. Vol. 115, No. A771, P.700-721.

62. Lotka A. J. Elements of physical biology. Baltimore: Williams and Wilkins Co., 1925.
63. MacArtur R. Graphical analysis of ecological systems // Division of biology report Perinceton University. 1971.
64. Malthus T. R. An essay of the principle of population, as it affects the future improvement of society with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet, and other writers. London: Printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard, 1798.
65. Mathematical Theory of Epidemics // Proc. Roy. Soc. Lond. 1927. A 115, pp. 700-721.
66. Perelman M.I., Marchuk G.I., Borisov S.E., Kazennukh B.Ya., Avilov K.K., Karkach A.S., Romanyukha A.A. Tuberculosis epidemiology in Russia: the mathematical model and data analysis // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. V. 19, №4. 305-314.
67. Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Corresp. Math. Et Pays. 1838. Vol. 10. P. 113-121.

МУНДАРИЧА

МУҚАДДИМА.....	3
БОБИ 1. МАҲҲУМИ АМСИЛА ВА АМСИЛАСОЗӢ.....	5
1.1. Амсила(модел).....	5
1.2. Хосият ва намудҳои амсила.....	8
1.3. Равандҳои амсиласозӣ.....	10
1.4. Амсилаҳои математикӣ ва таснифи онҳо	13
1.5. Марҳилаҳои сохтани амсилаҳои математикӣ	20
1.6. Амсилаҳои имитатсионӣ	25
БОБИ 2. АМСИЛАСОЗИИ ДИНАМИКИИ	
ПОПУЛЯТСИЯҲО.....	31
2.1. Амсилаи динамикии популятсияи якҷинса. Амсилаи Малтус	31
2.2. Амсилаи Гомпертс	35
2.3. Амсилаи логистикӣ Ферхюлст	36
2.4. Амсилаи шумораи популятсия дар ташаккули даврӣ	39
2.5. Амсилаи популятсия вобаста аз сатҳи пасти бухрон.....	40
2.6. Масъалаи сарфшавии захираҳо	44
БОБИ 3. АМСИЛАҲОИ ТАЪСИРОТИ	
БАӢНИҲАМДИГАРИИ ДУ ҶИНСА.....	52
Шарҳи умумӣ	52
3.1. Амсилаи Лотка—Волтера.....	56
3.2. Амсилаи Холлинг-Тэннер	66
3.3. Амсилаи Колмогоров	67

БОБИ 4. ТАДБИҚИ АМСИЛАҲОИ РИЁЗӢ ДАР ТИБ.....	73
4.1. Тадқиқи риёзӣ ва компютери таъсири намудҳои инсулин ба организм	73
4.2. Амсилаи риёзии муайянкунандаи тавозуни «ГЛЮКОЗА – ИНСУЛИН» дар хун.....	80
4.3. Тадқиқи бемории сироятии сил тавассути амсилаҳои математикӣ	90
4.4. Амсилаи классикӣ SIR	94
4.5. SEIRD-амсила	98
БОБИ 5. АМСИЛАСОЗИҲОИ РИЁЗӢ ВА ТАДБИҚИ ОНҲО ДАР МАСЪАЛАҲОИ ИҚТИСОДӢ.....	105
5.1. Тадбиқи амсилаҳои риёзӣ дар бозор	105
5.2. Намудҳои функсияҳои истеҳсоли	108
5.3. Амсилаи риёзии Кобб-Дуглас	113
5.4. Амсилаи риёзии Солоу	118
5.5. Амсилаи риёзии Стоун	124
5.6. Тадбиқи функсияҳои истеҳсоли дар амалия.....	124
АДАБИЁТҲО.....	142

Ба матбаа 10.10.2020 супорида шуд.
Ба чопаш 21.10.2020 имзо шуд.
Қоғази офсет. Андозаи 60x84 1/16. Ҷузъи чопи шартӣ 9,5
Супориши № 132. Адади нашр 500 нусха.
Матбааи Мехроч-граф
ш. Душанбе, кӯчаи Айний.