МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Часть 2

Московский педагогический государственный университет

МПГУ

1872

Москва 2022

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

В двух частях

ЧАСТЬ 2

Под редакцией А. Л. Чекина

МПГУ
Москва • 2022

УДК 378(075.8):[51+002]
ББК 22.1я73+32.81я73
М34

DOI: 10.31862/9785426310612

Рецензенты:

А. Г. Леонов, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

А. И. Лебо, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики в начальной школе Иститута детства ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»

Авторы:

А. Л. Чекин, Л. Л. Босова, А. А. Локшин, А. С. Добротворский,
О. В. Бахтина, Е. А. Иванова, Н. Н. Лаврова, В. В. Тимошенко

М34 **Математика и информатика** : в 2 частях. Часть 2 : учебное пособие / под ред. А. Л. Чекина. – Москва : МПГУ, 2022. – 344 с. : ил.
ISBN 978-5-4263-1061-2

Учебное пособие предназначено для студентов факультетов начального образования педагогических вузов, обучающихся по образовательной программе бакалавриата по направлению 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Начальное образование») и направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) при условии, что первым профилем является профиль «Начальное образование». Во вторую часть пособия включены материалы, соответствующие разделам программы, которые относятся к изучению чисел (неотрицательных целых, целых, положительных рациональных), величин (положительных скалярных) и элементов геометрии (на основе геометрических преобразований). Каждая глава кроме адаптированного теоретического материала содержит еще и достаточно большой перечень задач, которые можно использовать на практических занятиях.

УДК 378(075.8):[51+002]
ББК 22.1я73+32.81я73

ISBN 978-5-4263-1061-2
DOI: 10.31862/9785426310612

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой коллективный труд преподавателей кафедры математики и информатики в начальной школе факультета начального образования Института детства ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (МПГУ), созданный на основе многолетнего опыта работы авторов по подготовке будущих учителей начальных классов в предметной области «Математика и информатика», которая в настоящее время осуществляется по образовательным программам по направлению 44.03.01 Педагогическое образование (профиль «Начальное образование») и направлениям 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) при условии, что первым профилем является профиль «Начальное образование».

Вторая часть пособия состоит из десяти глав, которые дополняют содержание первой части настоящего пособия, делая его завершенным и полностью отвечающим современным задач профессиональной подготовки будущих учителей начальных классов в той предметной области, которая и значится в качестве названия этой учебной книги.

Глава 1 «Количественная теория целых неотрицательных чисел» (авторы – А.А. Локшин, Е.А. Иванова, А.С. Добротворский) посвящена рассмотрению центрального вопроса всего изучаемого курса – построению системы целых неотрицательных чисел на основе теоретико-множественного подхода. Важность этой теории определяется тем, что она лежит в основе арифметической содержательной линии практически всех действующих программ начального курса математики (исключение составляют лишь программы, базирующиеся на идеях Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова).

Глава 2 «Десятичная система счисления и арифметические алгоритмы с точки зрения теории множеств» (авторы – А.А. Локшин, Е.А. Иванова) интересна тем, что впервые в учебных пособиях данного направления обосновано устройство десятичной системы счисления и хорошо знакомых алгоритмов арифметических действий на основе количественной теории.

В главе 3 «Системы счисления» (автор – А.Л. Чекин) рассматриваются общие вопросы возникновения и развития различных систем нумерации чисел, дается сравнительный анализ позиционных и непозиционных систем счисления, подробно рассматриваются недесятичные позиционные системы счисления, что оказывает важное положительное влияние на понимание основных принципов устройства общепринятой десятичной системы.

Глава 4 «Делимость целых неотрицательных чисел» (автор – А.Л. Чекин) посвящена рассмотрению основных вопросов теории делимости целых неотрицательных чисел, знание которых позволит будущему учителю начальных классов с пониманием ориентироваться в арифметической составляющей начального курса математики, включая основную теорему арифметики.

В главе 5 «Положительные рациональные числа как операторы» (автор – А.А. Локшин) изложен операторный подход к построению системы положительных рациональных чисел в авторском изложении.

В главе 6 «Целые числа как операторы» (авторы – А.А. Локшин, Е.А. Иванова, Н.Н. Лаврова) продолжена реализация операторного подхода, но уже к построению системы целых чисел. Это позволяет дать более понятное обоснование правилам выполнения арифметических действий на множестве целых чисел.

Глава 7 «Выражения. Уравнения. Неравенства» (автор – Н.Н. Лаврова) посвящена рассмотрению алгебраических вопросов, которые в той или иной степени проецируются на начальный курс математики.

В главе 8 «Геометрические преобразования плоскости» (автор – В.В. Тимошенко) изложены программные вопросы геометрического характера на основе понятия геометрического преобразования плоскости. Материал данной главы дает представление о том, как принято выстраивать изложение материала в учебниках для математических специальностей.

В главе 9 «Величины» (авторы – А.А. Локшин, О.В. Бахтина) рассмотрены вопросы теории положительных скалярных величин. При этом набор изучаемых величин определяется принадлежностью той или иной величины к программному содержанию начального курса математики.

Глава 10 «Информационные модели на графах» (автор – Л.Л. Босова) является заключительной. В ней изложены основные вопросы теории графов, которые имеют прямое отношение к задачам в области информатики, в частности к построению информационных моделей.

Каждая глава завершается достаточно обширным перечнем задач по соответствующей проблематике, а также списком рекомендуемой литературы. Задачи целесообразно использовать на практических занятиях в процессе работы по данному учебному пособию.

А.Л. Чекин

ГЛАВА 1. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Книга [1] вплоть до недавнего времени была одним из немногих пособий по математике для будущих учителей начальных классов, где подробно излагалась количественная теория целых неотрицательных чисел (базирующаяся на элементарной теории множеств). Это учебное пособие, изданное в 1998 году, стало в настоящее время библиографической редкостью.

В других существующих математических пособиях, ориентированных на ту же читательскую аудиторию, обычно подробно излагается не количественная, а порядковая теория целых неотрицательных чисел (базирующаяся на аксиоматике Пеано), а количественной теории уделяется значительно меньше внимания.

В чем же причина столь явного превалирования теории Пеано над количественной теорией? Все дело в том, что, не выходя за пределы «наивного» теоретико-множественного подхода, не удается строго обосновать некоторые математические факты, прежде всего, доказать теорему о конечности объединения двух конечных множеств. Именно преимуществом в строгости изложения и объясняется упомянутая выше сложившаяся ситуация.

Парадокс, однако, заключается в том, что у учителей начальных классов существует объективная потребность именно в количественной теории. Дело в том, что, объясняя ребенку смысл понятия натурального числа, учитель неизбежно обращается к врожденному «чувству количества», проявляющемуся даже у детей шестимесячного возраста. И если младшему школьнику можно при этом обойтись без понятия «множество», то учителю необходима теоретико-множественная база, опираясь на которую он будет давать уверенные объяснения и ответы на вопросы учеников.

Упомянутый выше парадокс проявляется особенно ярко при знакомстве со свойствами арифметических операций, в частности коммутативностью и ассоциативностью сложения. В количественной теории эти свойства в буквальном смысле слова очевидны (фактически следуют из коммутативности и ассоциативности логических союзов «и», «или»); в аксиоматической (порядковой) теории Пеано доказательства этих свойств сложения занимают не меньше, чем полстраницы каждое. Нет никакого сомнения в том, что внутреннюю опору при рассказе ученикам о свойствах сложения учитель будет искать именно в количественной теории, а не в порядковой.

Преодоление возникшего парадокса, предложенное в [1], заключается в том, что будущий учитель начальных классов не нуждается в курсе математики в тотальной математической строгости доказательств, но, несомненно, нуждается в ясности и обоснованности выводов «на уровне здравого смысла».

В этой главе представлено сокращенное и переработанное изложение подхода, развитого в [1]. Мы старались избегать длинных доказательств, по возможности заменяя их перечислением наиболее существенных «опорных» соображений. По сравнению с [1] видоизменен подход к понятию «конечное множество»; кроме того, по-другому представлена тема «Деление», предложен ряд новых задач.

1.1. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

Количественная теория целых неотрицательных чисел (ц.н.ч.), которую мы собираемся построить, базируется на понятии конечного множества.

Определение 1.1. («Физический» уровень строгости; см. [1]). Будем по очереди ставить мысленные метки на элементы некоторого непустого множества A и будем делать это с постоянной скоростью. Если к некоторому моменту времени обнаружится, что все элементы множества A снабжены нашими мысленными метками, то такое множество назовем *конечным.* Пустое множество $\emptyset$ по определению считается конечным.

Замечание. С математической точки зрения дефект определения 1.1 в том, что используются понятия «время» и «скорость», для общепринятого введения которых уже необходимо располагать понятием числа. (А мы еще только собрались строить систему целых неотрицательных чисел.)

Можно, впрочем, в определении 1.1 обойтись интуитивным понятием времени и считать, что:

а) наблюдатель (который подразумевается в определении 1.1) переворачивает песочные часы каждый раз после того, как поставит мысленную метку на какой-нибудь элемент множества *A*;

б) в течение интервала времени, отмеряемого песочными часами, наблюдатель обязательно ставит мысленную метку на какой-нибудь не отмеченный ранее элемент множества *A*.

Тогда вышеупомянутые претензии к определению 1.1, очевидно, отпадут. (Тем не менее использование интуитивного понятия времени представляется с точки зрения чистой математики нарушением строгости изложения.)

Теорема 1.1. *Пусть A – непустое конечное множество. Тогда A не равномощно никакому своему подмножеству B, отличному от A.*

Доказательство. Пусть некоторое множество *A* конечно в смысле определения 1.1. Очевидно, что время, затрачиваемое наблюдателем для расстановки меток на элементах множества *A*, не зависит от порядка, к котором расставляются метки. Отсюда сразу следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Известный математик Р. Дедекинд (1831–1916), один из создателей теории вещественных чисел, предложил следующее определение непустого конечного множества.

Определение непустого конечного множества по Р. Дедекинду. *Непустое множество A конечно, если оно не равномощно никакому своему подмножеству, не совпадающему с A.*

Таким образом, проведенное выше на физическом уровне строгости доказательство теоремы 1.1 представляет собой не что иное, как вывод постулированного Дедекиндом свойства конечных множеств.

Подчеркнем, что именно математически строгое определение Дедекинда является общепринятым в научной литературе; мы, однако, будем строить наше изложение на определении 1.1.

Изложение количественной теории ц.н.ч., основанное на определении Дедекинда, можно найти в [1], [2].

Утверждение 1.1. *Множество, равномощное конечному, само конечно.*

Утверждение 1.2. *Любое подмножество конечного множества тоже конечно.*

Утверждение 1.3. *Объединение двух конечных множеств само является конечным множеством.*

Справедливость всех трех утверждений сразу следует из определения 1.1.

Утверждение 1.4. *Пусть A и B – два конечных множества. Тогда по крайней мере одно из них равномощно некоторому подмножеству другого.*

Доказательство. Попросим наблюдателя (см. замечание к определению 1.1), ставящего мысленные метки на элементы конечных множеств, начать ставить свои метки одновременно на элементы множеств A и B. Очевидно, что процедура постановки таких меток закончится в некоторый момент времени, причем реализуется одна из следующих двух ситуаций:

а) Одновременно исчерпаются элементы обоих множеств A и B; при этом множества A и B оказываются равномощными. Тем самым справедливость утверждения 1.4 в этом случае установлена.

б) В одном из множеств A, B элементы исчерпаются раньше, чем в другом. Справедливость доказываемого утверждения в этом случае также очевидна.

Утверждение 1.5. *Декартово произведение двух конечных множеств конечно.*

Утверждение 1.5 также можно доказать, опираясь на определение 1.1. Мы предоставляем эту возможность читателю.

Задачи. 1. Доказать утверждение 1.1, опираясь на определение конечного множества, данное Дедекиндом.

2. Доказать утверждение 1.2, опираясь на определение конечного множества, данное Дедекиндом.

3*. Опираясь на определение конечного множества, данное Дедекиндом, доказать, что объединение конечного множества A и одноэлементного множества $\{x\}$ конечно.

3. Верно ли, что пересечение двух конечных множеств обязательно конечно?

4. Верно ли, что разность двух конечных множеств всегда конечна?

5. Пусть A – конечное множество, а множество B – *бесконечно* (т.е. не является конечным). Конечна или бесконечна разность $A \setminus B$?

6. Пусть A – конечное множество, а множество B – бесконечно. Конечна или бесконечна разность $B \setminus A$?

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОГО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Определение 1.2. Пусть A – некоторое непустое конечное множество. Рассмотрим класс a всех конечных множеств, равномощных множеству A. Этот класс мы назовем *натуральным числом* (числом a). При этом число a будем называть *численностью* множества A.

Определение 1.3. Класс всех конечных множеств, равномощных пустому множеству $\varnothing$, назовем числом «*ноль*» (0). (Нетрудно понять, что этот класс не содержит в качестве своего элемента никакого другого множества, кроме $\varnothing$.) Ноль по определению является численностью пустого множества.

В общем случае тот факт, что a есть численность конечного множества A, будем записывать в виде $a = n(A)$.

Множество всех натуральных чисел будем обозначать через N.

Множество $N_0 = N \cup \{0\}$назовем множеством *целых неотрицательных чисел.*

Каждый элемент множества N_0 будем называть *целым неотрицательным числом* (*ц.н.ч.*).

Замечание. Два целых неотрицательных числа a и b считаются равными ($a = b$), если они обозначают один и тот же класс равномощных друг другу конечных множеств. Таким образом, равенство двух ц.н.ч. – это их совпадение.

Иногда можно услышать вопрос: зачем нужны два разных обозначения для одного и того же класса? Ответ на этот вопрос состоит в следующем. Во многих случаях заранее (до проведения вычислений) невозможно сказать, имеют ли два числовых выражения одно и то же числовое значение или нет. Поэтому обозначают числовые значения таких выражений с помощью разных букв (например, a и b). Если выясняется, что числовые значения обоих рассматриваемых выражений совпадают, то пишут $a = b$.

1.3. СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.4. Суммой $a + b$ двух целых неотрицательных чисел a и b называется численность объединения конечных множеств A и B таких, что

$$a = n(A),\ b = n(B),\ A \cap B = \emptyset. \tag{1.1}$$

Иными словами,

$$a + b = n(A \cup B), \tag{1.2}$$

где конечные множества A и B удовлетворяют условиям (1.1).

Это определение и определение целого неотрицательного числа вместе образуют фундамент всей количественной теории ц.н.ч.

Задача. Доказать, что приведенное выше определение суммы двух ц.н.ч. не зависит от выбора конечных множеств A и B, удовлетворяющих условиям (1.1).

Замечание. У нас остался невыясненным вопрос: всегда ли можно найти в классах a и b непересекающиеся множества A и B? Следуя [1], мы будем считать, что ответ на этот вопрос всегда положителен «ввиду многообразия нашего мира». Тем самым мы снова обращаемся к аргументам «физического» характера.

Замечание. В силу сказанного выше мы имеем все основания считать, что сумма двух произвольно взятых ц.н.ч. определена, и притом единственным образом.

1.4. ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ: КОММУТАТИВНОСТЬ И АССОЦИАТИВНОСТЬ

Теорема 1.2. (О коммутативности сложения в N_0). *Для любых двух ц.н.ч. a и b*

справедливо равенство:

$$a + b = b + a. \tag{1.3}$$

Доказательство. Равенство (1.3) сразу следует из определения 1.4 и коммутативности операции объединения множеств.

Теорема 1.3. (Об ассоциативности сложения в N_0). *Для любых трех ц.н.ч. a, b, c*

справедливо равенство:

$$(a + b) + c = a + (b + c). \tag{1.4}$$

Доказательство. Равенство (1.4) непосредственно следует из определения 1.4 и ассоциативности операции объединения множеств.

1.5. ОТНОШЕНИЕ «МЕНЬШЕ» И ЕГО ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА

Определение 1.5. Пусть *a и b* – числа из N_0. Будем говорить, что *a меньше, чем b* (и писать $a < b$), если найдутся конечные множества A и B с численностями *a и b* соответственно и такие, что выполнено строгое включение $A \subset B$.

Теорема 1.4. (О *транзитивности* отношения «меньше»). *Пусть a, b, c – числа из* N_0. *Тогда*

$$a < b,\ b < c \Rightarrow a < c. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $a < b$, $b < c$. Нетрудно видеть, что тогда можно найти конечные множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем выполнены строгие включения:

$$A \subset B,\ B \subset C \tag{1.5}$$

(докажите!). Однако в силу транзитивности строгого включения множеств имеем из (1.5)

$$A \subset C,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 1.5. (Об *антирефлексивности* отношения «меньше»). *Для любого a из N_0 неверно, что $a < a$.*

Доказательство. См. теорему 1.1.

Теорема 1.6. (О *связности* отношения «меньше»). *Пусть a и b – числа из N_0, причем $a \neq b$. Тогда имеет место по крайней мере одно из двух соотношений:*

$$a < b,\ b < a. \tag{1.6}$$

Доказательство. См. утверждение 1.4.

Теорема 1.7. (Об *асимметричности* отношения «меньше»). *Пусть a и b – числа из N_0, причем $a \neq b$. Тогда одновременно оба соотношения* (1.6) *выполняться не могут.*

Доказательство. Утверждение этой теоремы сразу следует из теорем 1.4 и 1.5.

Замечание. Совокупность установленных выше свойств отношения «меньше» (транзитивность, антирефлексивность, связность, асимметричность) позволяет говорить об отношении «меньше» как об *отношении строгого линейного порядка*.

Замечание. Наряду с отношением «меньше» вводятся также отношения «меньше или равно», «больше», «больше или равно»:

а) $a \le b \Leftrightarrow a < b$ *или* $a = b$;

б) $a > b \Leftrightarrow b < a$;

в) $a \ge b \Leftrightarrow a > b$ *или* $a = b$.

Задачи. 1. Верно ли, что $7 \ge 2$?

2. Верно ли, что $7 \ge 12$?

3. Верно ли, что $5 \le 3$?

4. Верно ли, что $5 \le 13$?

5. Верно ли, что 5 не меньше 4?

6. Верно ли, что 4 не больше 5?

1.6. СВЯЗЬ ОТНОШЕНИЯ «МЕНЬШЕ» СО СЛОЖЕНИЕМ

Теорема 1.8. *Пусть a и b – числа из N_0. Тогда*

$$a < b \Leftrightarrow \text{ существует такое } w \in N, \text{ что } a + w = b. \tag{1.7}$$

Доказательство. См. определение отношения «меньше» и определение сложения в N_0.

Теорема 1.9. (О монотонности сложения). Пусть *a, b, c – числа из* N_0. *Тогда*

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c. \tag{1.8}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества $A, B, C,$ численности которых равны соответственно $a, b, c,$ причем $A \subset B$, $C \cap B = \emptyset$. Теперь, вспоминая определение понятия «меньше», заключаем, что утверждение теоремы геометрически очевидно.

Доказательство арифметическое. Пусть $a < b$; тогда в силу (1.7) найдется такое $w \in N$, что

$$a + w = b.$$

Прибавим c к обеим частям этого равенства, получим

$$(a + w) + c = b + c,$$

откуда, пользуясь ассоциативностью и коммутативностью сложения, имеем:

$$(a + c) + w = b + c.$$

В силу теоремы 1.8 из последнего равенства вытекает искомое неравенство

$$a + c < b + c.$$

Теорема 1.10. *Пусть a, b, c, d – числа из* N_0.*Тогда*

$$a < b,\ c < d \Longrightarrow a + c < b + d. \tag{1.9}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера четыре конечных множества A, B, C, D численности которых равны соответственно a, b, c, d, причем $A \subset B$, $C \subset D$, $B \cap D = \emptyset$. Теперь, вспоминая определение сложения и определение понятия «меньше», заключаем, что утверждение теоремы геометрически очевидно.

Доказательство арифметическое. Пусть $a < b$, $c < d$. Имеем в силу монотонности сложения:

$$a + c < b + c,$$
$$c + b < d + b,$$

откуда, пользуясь коммутативностью сложения и транзитивностью отношения «меньше», получаем требуемый результат.

1.7. СОКРАТИМОСТЬ СЛОЖЕНИЯ

Теорема 1.11. (О сократимости сложения). *Пусть a, b, c – числа из N_0. Тогда*

$$a + c = b + c \Longrightarrow a = b. \tag{1.10}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть $a + c = b + c$, но $a \neq b$. Тогда в силу связности отношения меньше обязательно должно быть $a < b$ или $b < a$. Прибавляя c к каждому из этих неравенств, получим, что должно соответственно быть

$a + c < b + c$ или $b + c < a + c$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием.

Теорема 1.12. *Пусть a, b, c – числа из N_0. Тогда*

$$a + c < b + c \Longrightarrow a < b. \tag{1.11}$$

Доказательство этой теоремы также может быть проведено от противного, аналогично доказательству теоремы 1.11.

1.8. ВЫЧИТАНИЕ. ОБРАТНОСТЬ ВЫЧИТАНИЯ К СЛОЖЕНИЮ. МОНОТОННОСТЬ ВЫЧИТАНИЯ

Определение 1.6. Пусть a и b – числа из N_0 такие, что $b \leq a$. Тогда, очевидно, найдутся

конечные множества A и B такие, что

$$n(A) = a,\ n(B) = b, \tag{1.12}$$

$$B \subseteq A. \tag{1.13}$$

Разностью чисел a и b назовем численность разности множеств A и B. Иными словами,

$$a - b = n(A \setminus B). \tag{1.14}$$

Число a называется при этом *уменьшаемым*, а число b – *вычитаемым.*

Замечание. Опираясь на теорему 1.1, нетрудно показать, что определение разности чисел a и b не зависит от выбора конечных множеств A и B, удовлетворяющих условиям (1.12), (1.13). Иными словами, разность (1.14) определена единственным образом.

Замечание. Продемонстрируем важность условия (1.13) на примере. Пусть A – множество численности 2, а B – множество численности 1, и пусть A и B не пересекаются. Тогда $A \setminus B = A$, и мы получаем, что

$$n(A \setminus B) = n(A) = 2 \neq 2 - 1.$$

Замечание. Подчеркнем, что, в отличие от сложения, операция вычитания выполнима в N_0 не для всех пар ц.н.ч., а только для таких пар (a, b), где $b \le a$.

Теорема 1.13. (Об обратности вычитания к сложению). *Пусть a, b, c – числа из N_0. Тогда*

$$a - b = c \Leftrightarrow a = c + b. \tag{1.15}$$

Доказательство. См. определения 1.4 и 1.6.

Утверждение. *Пусть a и b – числа из N_0 такие, что $b \le a$. Тогда*

$$(a - b) + b = a. \tag{1.16}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера конечные множества A и B, удовлетворяющие условиям (1.12), (1.13). Теперь доказываемое утверждение сразу следует из независимости определения суммы ц.н.ч. от выбора соответствующих непересекающихся множеств (а именно, множеств $A \setminus B$ и B).

Доказательство арифметическое. В силу теоремы 1.13 доказываемое равенство (1.16) равносильно очевидному равенству

$$(a - b) = a - b.$$

Тем самым справедливость (1.16) доказана.

Утверждение. *Пусть a и b – числа из N_0. Тогда*

$$(a + b) - b = a. \tag{1.17}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера конечные непересекающиеся множества A и B, удовлетворяющие условиям (1.12). Теперь доказываемое утверждение сразу следует из независимости определения разности ц.н.ч. от выбора соответствующих множеств (в нашем случае речь идет о множествах $A \cup B$ и B).

Доказательство арифметическое. В силу теоремы 1.13 доказываемое равенство (1.17) равносильно очевидному равенству

$$(a + b) = a + b.$$

Тем самым справедливость (1.17) доказана.

Теорема 1.14. (О монотонности вычитания). *Пусть a, b, c – числа из N_0 и пусть, кроме того, $a \ge c$. Тогда*

$$a < b \Longrightarrow a - c < b - c. \tag{1.18}$$

Доказательство геометрическое. («На языке множеств»). Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем $C \subseteq A \subset B$. Дальнейшее очевидно.

Доказательство арифметическое. Предположим противное, а именно, что $a < b$, но (1.18) не выполнено. Тогда в силу связности отношения «меньше» должно быть

$$a - c = b - c \text{ либо } b - c < a - c.$$

В каждом из двух возможных случаев, прибавляя c к обеим частям соответствующего полученного соотношения и пользуясь равенством (1.16), приходим к противоречию с условием.

Задача. Пусть a, b, c, d – числа из N_0, и пусть $a < b$, $c > d$. Доказать двумя способами, что

$$a - c < b - d.$$

1.9. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВЫЧИТАНИЯ

Теорема 1.15. (О вычитании числа из суммы). *Пусть a, b, c – числа из N_0, тогда*

$$(a + b) - c = a + (b - c) \tag{1.19}$$

(*предполагается, что $b \geq c$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем

$$A \cap B = \emptyset,\ C \subseteq B. \tag{1.20}$$

Нетрудно видеть, что при условии (1.20) справедливо равенство

$$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C),$$

откуда с учетом (1.20) легко следует утверждение теоремы.

Задача. Доказать (1.19) арифметическим способом, опираясь на доказанные ранее свойства сложения и обратность вычитания к сложению.

Теорема 1.16. (О вычитании суммы из числа). *Пусть a, b, c – числа из N_0, тогда*

$$a - (b + c) = (a - b) - c \tag{1.21}$$

(*предполагается, что $a \geq b + c$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим при помощи кругов Эйлера три конечных множества A, B, C, численности которых равны соответственно a, b, c, причем

$$B \cap C = \emptyset, B \cup C \subseteq A. \tag{1.22}$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C,$$

откуда с учетом (1.22) легко следует утверждение теоремы.

Задача. Доказать (1.21) арифметическим способом.

Теорема 1.17. (О вычитании разности из числа). *Пусть a, b, c – числа из N_0, тогда*

$$a - (b - c) = (a + c) - b \tag{1.23}$$

(*предполагается, что $a + c \geq b \geq c$*).

Доказательство геометрическое. На этот раз (в отличие от предыдущего) нам не удастся изобразить на диаграмме Эйлера все интересующие нас множества в виде кругов. Итак, условно изобразим в виде областей на плоскости множества A, B, C (численности которых равны соответственно a, b, c), соблюдая при этом следующие условия:

$$A \cap C = \emptyset, C \subseteq B, (B \setminus C) \subseteq A \tag{1.24}$$

(см. рис. 1.1). С учетом (1.24), очевидно, имеем:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \cup C) \setminus B, \tag{1.25}$$

откуда, переходя к численностям множеств в обеих частях (1.25), сразу получаем требуемый результат.

Задача. Доказать (1.23) арифметическим способом.

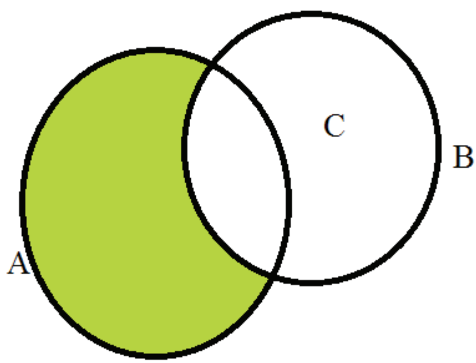


Рис. 1.1

Теорема 1.18. (О вычитании суммы из суммы). *Пусть a, b, c, d – числа из N_0, тогда*

$$(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \tag{1.26}$$

(*предполагается, что $a \geq c$, $b \geq d$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим при помощи кругов Эйлера четыре конечных множества A, B, C, D, численности которых равны соответственно a, b, c, d, причем

$$A \cap B = \emptyset,$$
$$C \cap D = \emptyset,$$
$$C \subseteq A,\ D \subseteq B. \tag{1.27}$$

Нетрудно видеть, что при условиях (1.27) справедливо равенство

$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) = (A \setminus C) \cup (B \setminus D),$$

откуда с учетом (1.27) легко следует утверждение теоремы.

Задача. Доказать (1.26) арифметическим способом.

Теорема 1.19. (О вычитании разности из разности). *Пусть a, b, c, d – числа из N_0, тогда*

$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c) \tag{1.28}$$

(*предполагается, что $a \geq b$, $c \geq d$, $a + d \geq b + c$*).

Доказательство геометрическое. Изобразим в виде областей на диаграмме Эйлера четыре конечных множества A, B, C, D, численности которых равны соответственно a, b, c, d, причем выполнены следующие шесть условий, отвечающих структуре выражений из (1.28):

$$A \cap D = \emptyset,$$
$$B \cap C = \emptyset,$$
$$B \subseteq A,\ D \subseteq C,$$
$$C \setminus D \subseteq A \setminus B,$$
$$B \cup C \subseteq A \cup D \tag{1.29}$$

(см. рис. 1.2). Нетрудно видеть, что если все шесть условий (1.29) выполнены, то справедливо равенство

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \cup D) \setminus (B \cup C). \tag{1.30}$$

Переходя в (1.30) к численностям множеств в правой и левой частях с учетом (1.29) получаем требуемый результат.

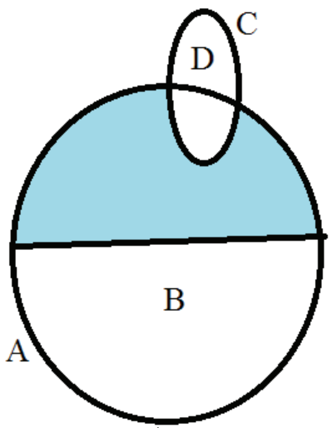


Рис. 1.2

Задача. Доказать (1.28) арифметическим способом.

1.10. УПОРЯДОЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА N_0

Шаг нулевой.

У нас уже есть обозначение для класса, содержащего пустое множество:

$$0 = n(\emptyset). \qquad (1.31)$$

Так как пустое множество является подмножеством любого непустого конечного множества A и при этом не совпадает с A, то, очевидно,

$$0 < n(A),$$

т.е. ноль меньше любого ненулевого ц.н.ч. (любого натурального числа).

Начнем теперь вводить обозначения для остальных ц.н.ч.

Шаг первый.

Возьмем какой-нибудь произвольный элемент w и рассмотрим множество $\{w\}$, т.е. такое множество, в котором кроме элемента w не содержится ничего. Это множество, очевидно, конечно.

Далее, рассмотрим класс всех конечных множеств, равномощных множеству $\{w\}$. Обозначим этот класс цифрой 1. Таким образом,

$$1 = \{\ \{w\}, \{a\}, \{\ \cdot\ \}, \{@\}, \ldots\}. \tag{1.32}$$

При этом в силу сказанного выше имеем:

$$0 < 1. \tag{1.33}$$

Шаг второй.

Двух числовых символов 0 и 1 нам достаточно, чтобы образовать множество

$$M = \{0;\ 1;\ 1 + 1;\ 1 + 1 + 1;\ \ldots\}. \tag{1.34}$$

В силу монотонности сложения, очевидно, имеем:

$$0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \ldots \tag{1.35}$$

Элементы множества М, очевидно, представляют собой различные ц.н.ч., строго упорядоченные по возрастанию.

Шаг третий. Теперь наша цель – доказать, что М = N_0. Для этого достаточно доказать, что каждое натуральное число представимо в виде конечной суммы 1 + 1 + 1 + … + 1. Итак, рассмотрим произвольное натуральное число

$$a = n(A),$$

где A – соответствующее конечное множество:

$$A = \{x, y, z, \ldots, w\}.$$

Представим множество A в виде объединения одноэлементных множеств:

$$A = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} \cup \ldots \cup \{w\};$$

переходя здесь к соответствующим численностям, имеем

$$n(A) = n(\{x\}) + n(\{y\}) + n(\{z\}) + \ldots + n(\{w\}),$$

т.е.

$$n(A) = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1,$$

что и требовалось установить.

Следствие. В силу антирефлексивности отношения «меньше» *между* элементами строго возрастающей последовательности (1.35) не может «поместиться» никакое ц.н.ч.

Замечание. С этого момента мы начинаем использовать наши привычные обозначения для натуральных чисел:

$$1;\ 1 + 1 = 2;\ 1 + 1 + 1 = 3;$$
$$1 + 1 + 1 + 1 = 4; \text{ и т.д.} \tag{1.36}$$

Отсюда легко следует, что

$$n(\{1\}) = 1,\ n(\{1;\ 2\}) = 2,\ n(\{1;\ 2;\ 3\}) = 3,\ \ldots,$$
$$n(\{1;\ 2;\ 3;\ldots;\ k\}) = k,\ \ldots \tag{1.37}$$

Замечание. Так как все количественные натуральные числа теперь упорядочены по возрастанию, то мы, очевидно, можем пользоваться ими же, как *номерами* при пересчете объектов. При этом *если последний сосчитанный объект будет иметь номер k, то это одновременно будет означать, что общее количество сосчитанных объектов равно k.*

1.11. УМНОЖЕНИЕ: КОММУТАТИВНОСТЬ И АССОЦИАТИВНОСТЬ

Наконец, мы переходим к действиям второй ступени. Теперь в нашем изложении место диаграмм Эйлера займут более подробные диаграммы, где будут изображены отдельные элементы рассматриваемых множеств.

Определение 1.7. Пусть a и b – числа из N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$. *Произведением* чисел a и b назовем численность декартова произведения множеств A и B:

$$a \cdot b = n(A \times B). \tag{1.38}$$

Замечание. Будем обозначать равномощность двух множеств с помощью символа ~. Нетрудно видеть, что если $A \sim A_1$, $B \sim B_1$, то $A \times B \sim A_1 \times B_1$. Поэтому введенное определение произведения чисел a и b не зависит от выбора конкретных множеств A и B.

С математической точки зрения определение 1.7 удобно тем, что оно выражается единой формулой, не требует отдельного рассмотрения каких-либо частных случаев. Однако за внешней красотой формулы (1.38) не так легко разглядеть смысл введенной операции умножения. Поэтому мы приведем еще одно определение, эквивалентное предыдущему, но при этом еще и объясняющее происхождение операции умножения.

Определение 1.8. Пусть a и b – числа из N_0. Положим по определению:

1) если $b > 1$, то
   $a \cdot b = a + a + a + \ldots + a$ (в сумме b слагаемых);
2) $a \cdot 1 = a;$
3) $a \cdot 0 = 0.$

Замечание. Таким образом, в определении 1.8 *умножение явным образом вводится как кратное сложение*. Для того, чтобы доказать, что оба приведенные выше определения экавивалентны, достаточно заметить, что $A \times \emptyset = \emptyset$.

Замечание. В дальнейшем, в случае, когда оба сомножителя обозначены не цифрами, а буквами, мы будем опускать точку в обозначении произведения.

Замечание. Из определения 1.8 легко следует, что произведение двух любых натуральных чисел также является натуральным числом (т.е. не равно нулю).

Теорема 1.20. (О коммутативности умножения). *Пусть a и b – числа из N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$. Тогда*

$$ab = ba. \tag{1.39}$$

Первое доказательство. (Опираемся на определение 1.7). Нетрудно видеть, что

$$A \times B \sim B \times A,$$

откуда в силу (1.38) имеем:

$$ab = n(A \times B) = n(B \times A) = ba.$$

Второе доказательство. (Опираемся на определение 1.8). Нам будет удобно провести доказательство на примере, когда $a = 4$, $b = 5$. Рассмотрим множество W, элементы которого расположим в 5 горизонтальных строк, по 4 элемента в каждой строке (см. рис. 1.3).

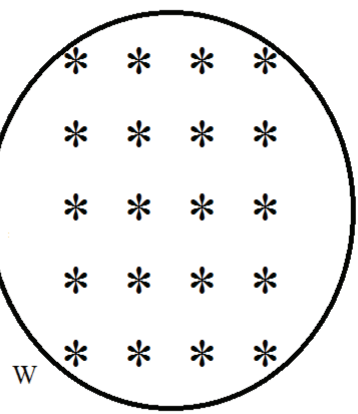


Рис. 1.3

Представим теперь множество W в виде объединений непересекающихся «подмножеств-строк» (см. рис. 1.4):

$$W = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \qquad (1.40)$$

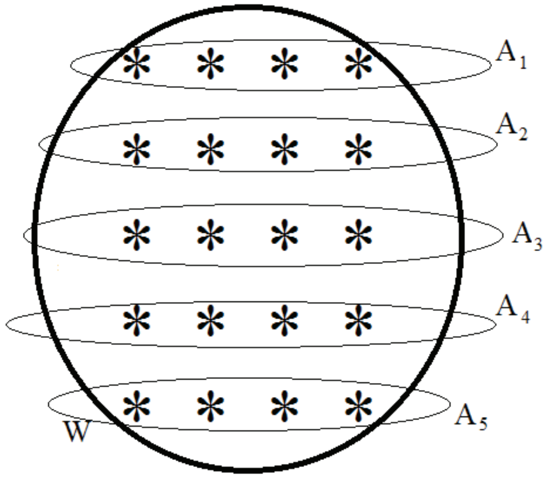


Рис. 1.4

Переходя в (1.40) к численностям соответствующих множеств, получаем:

$$n(W) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) =$$
$$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5) =$$
$$= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 5. \qquad (1.41)$$

Представляя аналогичным образом множество W в виде объединения непересекающихся «подмножеств-столбцов», без труда получим равенство, аналогичное (1.41):

$$n(W) = 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \cdot 4. \qquad (1.42)$$

Из двух последних равенств, очевидно, имеем

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4.$$

Общий случай рассматривается аналогично.

Теорема 1.21. (Об ассоциативности умножения). *Пусть a, b, c – числа из N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$. Тогда*

$$(ab)c = a(bc). \qquad (1.43)$$

Первое доказательство. (Опирающееся на определение 1.7). Очевидно, что

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C),$$

откуда имеем:

$$n[(A \times B) \times C] = n[A \times (B \times C)].$$

Из последнего равенства с учетом определения 1.7 и вытекает утверждение теоремы.

Второе доказательство. (Опирающееся на определение 1.8). Для определенности будем считать, что $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$. Нарисуем параллелепипед, составленный из единичных кубиков имеющий ширину a, глубину b и высоту c. Теперь подсчитаем количество кубиков в нашем параллелепипеде двумя различными способами. Один раз – по слоям, параллельным боковой стенке, другой раз – по слоям, параллельным передней стенке.

Приравнивая результаты и учитывая коммутативность умножения, получим искомое соотношение (1.43).

Третье доказательство. (См., например, [3]). Это доказательство (как и второе доказательство коммутативности умножения) удобно проводить на частном примере. Посчитаем двумя разными способами количество «плюсов» на рис. 1.5. Один раз – по строкам, а другой раз – по столбцам.

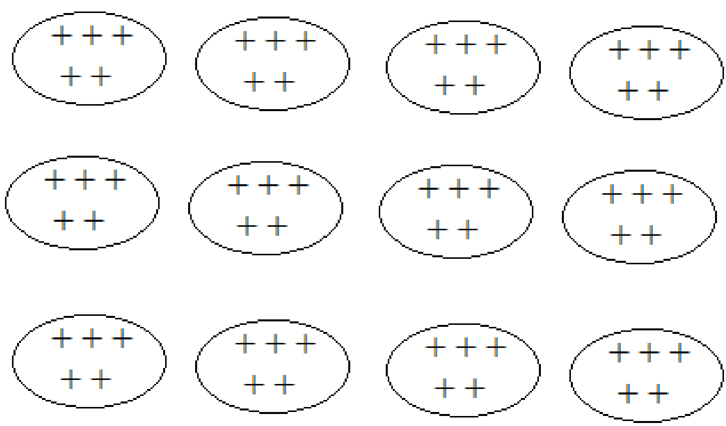


Рис. 1.5

В результате получим:

$$(5 \cdot 4) \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 4. \qquad (1.44)$$

Теперь придется призвать на помощь коммутативность умножения. Вначале преобразуем левую часть (1.44). Имеем

$$(5 \cdot 4) \cdot 3 = 3 \cdot (5 \cdot 4).$$

Далее, преобразуем правую часть (1.44):

$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = (3 \cdot 5) \cdot 4.$$

Приравнивая правые части двух последних равенств, получаем требуемый результат:

$$(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4).$$

Общий случай рассматривается аналогично.

1.12. УМНОЖЕНИЕ: ДИСТРИБУТИВНОСТЬ, МОНОТОННОСТЬ, СОКРАТИМОСТЬ

Перейдем теперь к доказательству дальнейших свойств умножения.

Теорема 1.22. (О дистрибутивности умножения относительно сложения). *Пусть a, b, c – числа из N_0; $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$. Тогда*

$$(a + b)c = ac + bc; \qquad (1.46)$$

$$c(a + b) = ca + cb. \qquad (1.47)$$

Замечание. Соотношение (1.46) называется *дистрибутивностью справа*, а соотношение (1.47) – *дистрибутивностью слева* умножения относительно сложения.

Первое доказательство теоремы 1.22. Прежде всего, заметим, что (1.47) вытекает из (1.46) в силу коммутативности умножения. Поэтому достаточно доказать соотношение (1.46).

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$A \cap B = \emptyset. \qquad (1.48)$$

Далее, имеем в силу дистрибутивности декартова произведения относительно объединения множеств:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C). \qquad (1.49)$$

Заметим, что в силу (1.48) справедливо соотношение

$$(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset. \qquad (1.50)$$

Переходя теперь в (1.49) к численностям соответствующих множеств, с учетом (1.48) и (1.50) получаем требуемый результат.

Второе доказательство теоремы 1.22. См. рис. 1.6 (доказательство проводится на примере, когда $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$).

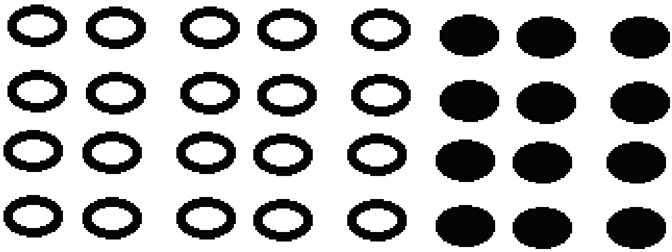


Рис. 1.6

Считаем численность множества, изображенного на рис. 1.6, двумя способами: один раз – «по строкам»; другой раз – отдельно подсчитываем количество белых и отдельно черных кружков, а результаты складываем.

Теорема 1.23. (О дистрибутивности умножения относительно вычитания). *Пусть a, b, c – числа из N_0*, причем $b \le a$. *Тогда*

$$(a - b)c = ac - bc; \qquad (1.51)$$

$$c(a - b) = ca - cb. \qquad (1.52)$$

Доказательство. Как и в случае теоремы 1.22, достаточно доказать только первое из двух вышеприведенных равенств. Итак, начнем доказывать (1.51). Иногда приходится слышать такой «совет»: *нужно раскрыть скобки в* (1.51), *и теорема будет доказана…*

«Совет» этот совершенно *неправильный*. Дело в том, что мы доказываем именно саму возможность раскрытия скобок в (1.51)!

Для установления (1.51) воспользуемся обратностью вычитания к сложению, а именно тем фактом, что имеют место следующие равносильности:

$$(a - b)c = ac - bc \ \Leftrightarrow\ (a - b)c + bc = ac \ \Leftrightarrow\ [(a - b) + b]c = \\ = ac \ \Leftrightarrow\ ac = ac,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 1.24. (О монотонности умножения). *Пусть a, b – числа из N_0*, причем $a < b$. *Тогда для любого $c \in N$ справедливо*

$$ac < bc \qquad (1.53)$$

Доказательство теоремы. Из условий теоремы (с учетом связи отношения «меньше» со сложением) следует, что найдется $d \in N$ такое, что

$$a + d = b.$$

Умножая это равенство на c и пользуясь дистрибутивностью умножения относительно сложения, получаем

$$ac + dc = bc.$$

Поскольку $dc \in N$, отсюда сразу следует (1.53).

Замечание о сократимости умножения.

Пусть a, b, c – числа из N_0, причем $c \neq 0$. Тогда если $ac = bc$, то $a = b$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть $ac = bc$, но $a \neq b$. Тогда либо $a < b$, либо $b < a$. В обоих случаях, пользуясь монотонностью умножения, получаем противоречие с предположением $ac = bc$.

Задачи. Пусть $a, b, c, d \in N_0$. Доказать, что:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$;

3) $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$;

4) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

1.13. ДЕЛЕНИЕ КАК ОПЕРАЦИЯ, ОБРАТНАЯ УМНОЖЕНИЮ

Определение 1.9. Пусть $a, b, c \in N_0$, причем $b \neq 0$. Скажем, что

$$a : b = c \tag{1.54}$$

тогда и только тогда, когда

$$a = cb. \tag{1.55}$$

Замечание. Запись (1.54) читается так: частное от *деления* a на b равно c. Число a в соотношении (1.54) называется *делимым*, число b – *делителем*, а число c (как уже было отмечено) – *частным*.

Замечание. Из определения 1.9 следует, что деление является обратной операцией по отношению к умножению.

Замечание. Деление $a : b$ (подобно вычитанию) выполнимо в N_0 не всегда. Например, операция $5 : 2$ в N_0 не выполнима. Действительно, предположим противное, а именно, что существует $c \in N_0$ такое, что

$$5 : 2 = c,$$

или, что то же самое,

$$5 = 2\,c. \tag{1.56}$$

Очевидно, что ни одно c из числового ряда $\{3; 4; 5; \ldots\}$ не может быть решением уравнения (1.56). Что касается остальных значений c, т.е. значений из начального отрезка ряда ц.н.ч.$\{0; 1; 2\}$, то их непригодность для решения (1.56) проверяется перебором.

Замечание. Деление на 0 запрещено в N_0 по следующей причине. Пусть $a \neq 0$. Тода из равенства $a : 0 = c$ следовало бы (из определения деления как операции, обратной умножению), что $a = c \cdot 0$, т.е. что $a = 0$. Тем самым мы пришли бы к противоречию.

Если же с самого начала взять $a = 0$, то мы видим, что равенство $0 = c \cdot 0$ оказывается справедливым при любом c из N_0, что нас тоже не устраивает, так как мы хотим, чтобы результат деления определялся однозначно.

Теорема 1.25. (О единственности деления). *Пусть* $a, b, c, d \in N_0$, *причем* $b \neq 0$. *Тогда, если*

$$a : b = c, \tag{1.57}$$

$$a : b = d, \tag{1.58}$$

то

$$c = d. \tag{1.59}$$

Доказательство. Предположим противное, а именно, что существуют такие a, $b \neq 0$, c, $d \in N_0$, для которых (1.57) и (1.58) выполнено, но

$$c \neq d. \tag{1.60}$$

Имеем тогда из (1.57) и (1.58):

$$a = cb,\ a = db,$$

откуда

$$cb = db.$$

Сокращая на b, получаем, что $c = d$, т.е. мы пришли к противоречию с предположением (1.60). Теорема доказана.

Теорема 1.26. *Пусть* $a, b, c \in N_0$, *причем* $b \neq 0$. *Тогда*

$$(ab) : b = a. \tag{1.61}$$

Кроме того, если частное $a : b$ *существует, то*

$$(a : b)\, b = a. \tag{1.62}$$

Доказательство. Докажем, например, соотношение (1.61). Из определения деления следует, что (1.61) равносильно соотношению

$$(ab) = ab,$$

которое, очевидно, справедливо для любых a и b.

Соотношение (1.62) доказывается аналогично.

В следующей теореме устанавливаются свойства деления в N_0, которым могут быть сопоставлены известные из школы правила действий с дробями.

Теорема 1.27. *Пусть a, b, c, $d \in N_0$. Тогда в предположении, что все встречающиеся разности и частные существуют в N_0, имеем:*

$$(a : b) \pm (c : d) = (ad \pm bc) : (bd); \tag{1.63}$$

$$(a : c) \cdot (b : d) = (ab) : (cd); \tag{1.64}$$

$$(a : b) : (c : d) = (ad) : (bc). \tag{1.65}$$

Доказательство. Докажем, например, соотношение (1.63) в случае верхних знаков. Имеем:

$$(a : b) + (c : d) = (ad + bc) : (bd)$$

$$\Updownarrow \text{ (\textit{обратность деления к умножению})}$$

$$[(a : b) + (c : d)](bd) = (ad + bc)$$

$$\Updownarrow \text{ (\textit{дистрибутивность умножения})}$$

$$(a : b)(bd) + (c : d)(bd) = (ad + bc)$$

$$\Updownarrow \text{ (\textit{коммутативность умножения})}$$

$$(a : b)(bd) + (c : d)(db) = (ad + bc)$$

$$\Updownarrow \text{ (\textit{ассоциативность умножения})}$$

$$[(a : b)b]d + [(c : d)d]b = (ad + bc)$$

$$\Updownarrow \text{ (\textit{обратность умножения к делению})}$$

$$ad + cb = (ad + bc)$$

$$\Updownarrow \text{ (\textit{коммутативность умножения})}$$

$$ad + bc = (ad + bc).$$

Тем самым справедливость соотношения (1.63) установлена.

Задачи. Пусть a, b, $c \in N_0$. В каких из приведенных ниже выражений можно раскрывать скобки? (Все встречающиеся разности и частные предполагаются существующими.)

1) $(a + b)c$;
2) $c(a + b)$;

3) $(a - b)c;$
4) $c(a - b);$
5) $(a + b) : c;$
6) $c : (a + b);$
7) $(a - b) : c;$
8) $c : (a - b).$

Задача. Пусть $a, b, c, d \in N_0$, причем $a < b$, $c > d > 0$. Доказать, что $a : c < b : d$. (Частные $a : c$ и $b : d$ предполагаются существующими в N_0.

1.14. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Определение 1.10. Пусть $a \in N_0$, $b \in N$**.** *Разделить a на b с остатком* – это значит представить a в виде

$$a = bq + r, \text{ где } r < b \tag{1.66}$$

(подразумевается, что q и $r \in N_0$). При этом число q называется *неполным частным,* а число r – *остатком.*

Прежде всего, заметим, что деление нацело, рассмотренное нами в предыдущем параграфе, есть частный случай деления с остатком.

Заметим, далее, что случай $b = 1$ неинтересен, поскольку для любого $a \in N_0$ имеем тогда:

$$a = 1 \cdot a + 0.$$

Особого упоминания заслуживает также случай, когда

$$a < b. \tag{1.67}$$

В этом случае (1.66), очевидно, превращается в равенство

$$a = b \cdot 0 + a \tag{1.68}$$

$$(\text{т.е. } q = 0,\ r = a).$$

Таким образом, для доказательства существования представления числа a в виде (1.66) нам достаточно ограничиться случаем, когда

$$a \geq b. \tag{1.69}$$

Считая условие (1.69) выполненным, будем теперь рассуждать следующим образом. Рассмотрим разность $a - b \equiv r_1$; если $r_1 < b$, то искомое представление числа a получено:

$$a = b + r_1.$$

В противном случае рассмотрим разность $a - 2b \equiv r_2$; если $r_2 < b$, то искомое представление числа a получено:

$$a = 2b + r_2.$$

В противном случае рассмотрим разность $a - 3 \equiv r_3$; если $r_3 < b$, то искомое представление числа a получено:

$$a = 3b + r_3.$$

И так далее. Рано или поздно, этот процесс закончится, и мы получим искомое представление числа a.

Итак, нами установлен следующий результат.

Теорема 1.28. (О существовании деления с остатком). *Пусть* $a \in N_0$, $b \in N$. *Тогда обязательно найдутся такие* q, $r \in N_0$, *что выполнено* (1.66).

Теорема 1.29. (О единственности деления с остатком). Пусть $a \in N_0$, $b \in N$. *Тогда если для некоторых ц.н.ч.* q, r, q_1, r_1 *выполнены равенства*

$$a = bq + r, \text{ где } r < b; \tag{1.70}$$

$$a = bq_1 + r_1, \text{ где } r_1 < b, \tag{1.71}$$

то

$$q = q_1, r = r_1. \tag{1.72}$$

Доказательство. Предположим противное, а именно, что существуют не совпадающие пары чисел из N_0:

$$(q, r) \neq (q_1, r_1) \tag{1.73}$$

такие, что (1.70) и (1.71) выполнены. Имеем тогда из (1.70), (1.71):

$$bq + r = bq_1 + r_1. \tag{1.74}$$

Рассмотрим теперь два случая.

Первый случай: $q \neq q_1$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $q > q_1$. Следовательно, мы можем переписать (1.74) в виде

$$b(q - q_1) + r = r_1.$$

Это равенство, очевидно, не может выполняться, так как левая часть здесь строго больше правой. (Подумайте почему!)

Второй случай: $q = q_1$. Но тогда (1.74) превращается в равенство $r = r_1$, и мы приходим к противоречию с предположением. Теорема доказана.

Задача. Пусть b – натуральное число, большее единицы. Сколько различных остатков существует при делении на b?

1.15. ДЕЛЕНИЕ НА РАВНЫЕ ЧАСТИ (С ОСТАТКОМ)

В отличие от остальных арифметических действий, операция деления (в том числе – деления с остатком) была введена выше без опоры на «язык множеств». Однако для будущего учителя начальных классов владение материальной интерпретацией деления, несомненно, необходимо.

В этом параграфе мы восполним вышеуказанный пробел, введя *интерпретацию деления* (*с остатком*) *как процедуры разделения конечного множества объектов на равные части.*

Для того, чтобы сделать наше изложение возможно менее громоздким, мы ограничимся рассмотрением конкретного примера (переход к общему случаю не вызывает затруднений).

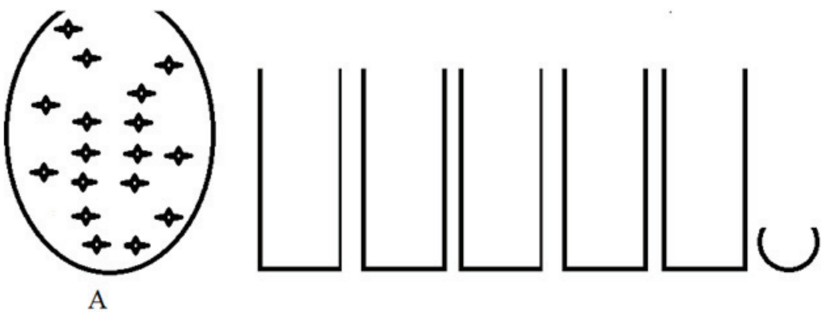


Рис. 1.7

Итак, рассмотрим множество *A*, представляющее собой совокупность 17 «крестиков» (см. рис. 1.7), и начнем раскладывать элементы этого множества по пяти ящикам. Раскладывание элементов по ящикам происходит так: кладем по очереди по одному элементу в каждый ящик (после пятого ящика возвращаемся снова к первому и т.д.). Мы поступаем так, рассчитывая в результате получить одно и то же количество элементов в каждом ящике. Однако два элемента оказываются «лишними» (см. рис. 1.8).

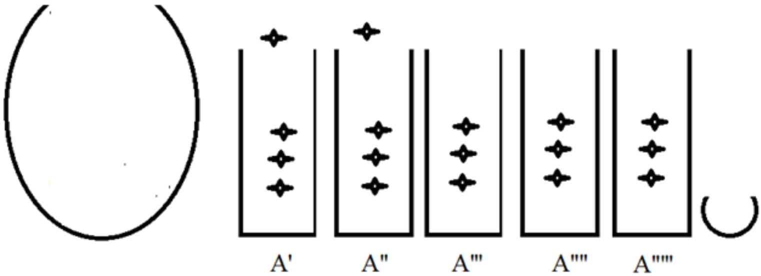


Рис. 1.8

Их мы кладем в маленькую корзинку, расположенную справа от ящиков (см. рис. 1.9).

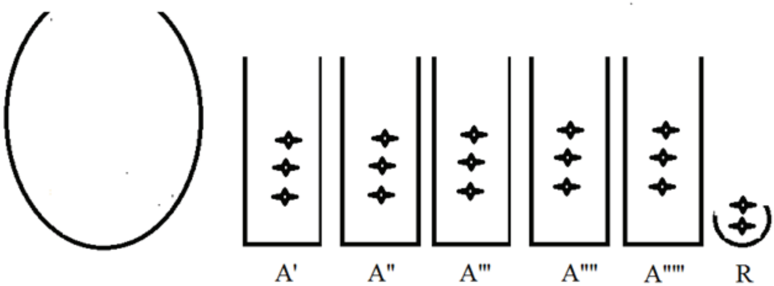


Рис. 1.9

В результате приходим к равенству для множеств:

$$A = A' \cup A'' \cup A''' \cup A'''' \cup A''''' \cup R. \qquad (1.75)$$

Так как все штрихованные множества в правой части (1.75) попарно равномощны и все множества в правой части (1.75) попарно не пересекаются друг с другом, то, переходя к численностям множеств в (1.75), имеем:

$$17 = 5n(A') + n(R). \qquad (1.76)$$

По своему построению, $n(R) < 5$. Поэтому (1.76) представляет собой не что иное, как результат деления 17 на 5 в смысле определения 1.10 из предыдущего параграфа. Однако, как было показано в теореме 1.29, деление с остатком определено единственным образом.

Поэтому нет ничего удивительного в том, что $n(A') = 3$ – это неполное частное от деления 17 на 5, а $n(R) = 2$ – это остаток от деления 17 на 5.

Нетрудно видеть, что описанная выше процедура без изменений переносится на общий случай и позволяет интерпретировать операцию деления с остатком при помощи предметных действий.

1.16. ДЕЛЕНИЕ ПО СОДЕРЖАНИЮ (С ОСТАТКОМ)

В этом параграфе мы рассмотрим еще одну интерпретацию операции деления с остатком при помощи предметных действий. Как и в предыдущем параграфе, мы ограничимся рассмотрением примера, поскольку перенос наших действий на общий случай не вызывает затруднений.

Пусть снова нам дано множество A, состоящее из 17 «крестиков» (см. рис. 15.1). Будем на этот раз откладывать элементы множества A в горизонтально расположенные «пакеты» B', B'', B'''…, *по пять штук* в каждый пакет. При этом у нас останутся «лишние» элементы, которые образуют *то же самое множество R*, что и в случае разделения множества *A на пять равных частей* (см. рис. 16.1).

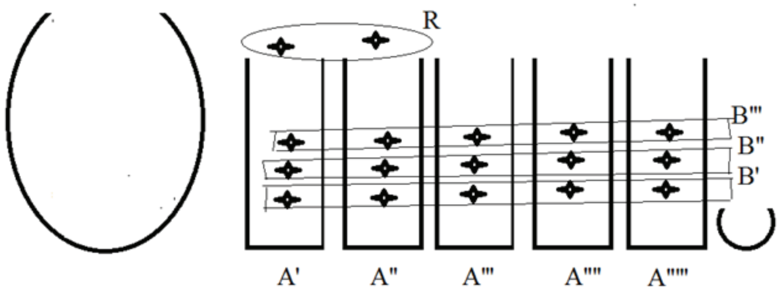


Рис. 1.10

Таким образом, имеем равенство для множеств:

$$A = B' \cup B'' \cup B''' \cup R. \tag{1.77}$$

Переходя в этом равенстве к численностям множеств из правой и левой частей получим:

$$17 = n(B') + n(B'') + n(B''') + n(R) \tag{1.78}$$

(мы учли, что все множества в правой части (1.77) попарно не пересекаются).

Временно обозначая количество горизонтальных пакетов через s и вспоминая, что численность каждого из них равна 5, перепишем (1.78) в виде:

$$17 = 5s + n(R), \tag{1.79}$$

где $n(R) < 5$ по построению. Но тогда, очевидно, что (1.79) представляет собой не что иное, как результат деления с остатком числа 17 на 5. Как и в предыдущем параграфе, в силу единственности деления с остатком не удивляемся, что $s = 3$ оказалось неполным частным, а $n(R)$ – остатком от деления 15 на 5.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

1. Пусть A – бесконечное множество (т.е. множество, не являющееся конечным). В силу определения, принадлежащего Дедекинду, это означает, что у множества A имеется равномощное A собственное подмножество B. Доказать, опираясь на определение Дедекинда, что множество B также бесконечно.

2. Проиллюстрировать на диаграмме Эйлера – Венна тождество, справедливое для произвольно взятых целых неотрицательных чисел:

$$(a + b) - (c - d) = (a - c) + (b + d)$$

(все разности предполагаются существующими в N_0). Доказать это тождество, опираясь на арифметические законы.

3. Проиллюстрировать на диаграмме Эйлера – Венна тождество, справедливое для произвольно взятых целых неотрицательных чисел:

$$(a + b) - (c - d) = (a + d) + (b - c)$$

(все разности предполагаются существующими в N_0). Доказать это тождество, опираясь на арифметические законы.

4. Проиллюстрировать на диаграмме Эйлера – Венна тождество, справедливое для произвольно взятых целых неотрицательных чисел:

$$(a - b) - (c - d) = (a - c) + (d - b)$$

(все разности предполагаются существующими в N_0). Доказать это тождество, опираясь на арифметические законы.

5. В каких ситуациях, связанных с предметными действиями, деление по содержанию может быть осуществлено быстрее, чем деление на равные части?

6. В каких ситуациях, связанных с предметными действиями, деление на равные части может быть осуществлено быстрее, чем деление на равные части?

7. Заменим в соотношениях из задач № 4–8 все плюсы на знаки умножения, а все минусы – на знаки деления. Получатся ли у нас верные тождества? (Все частные предполагаются существующими в N_0.)

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. М., 1998.
2. *Локшин А.А.* Целые числа и дроби: операторные интерпретации. М.: Вузовская книга, 2005.
3. *Белошистая А.В.* Методика обучения математике в начальной школе. М.: Владос, 2005.
4. *Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П.* Математика: учеб. пособие по специальности «Педагогика и методика начального обучения». М.: Просвещение, 1977.
5. *Аматова Г.М., Аматов М.А.* Математика. Кн. 1. М.: Академия, 2008.
6. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М.* Основы начального курса математики: учеб. пособие для учащихся педучилищ. М.: Просвещение, 1988.
7. *Локшин А.А., Бахтина О.В.* Какое число древнее – количественное или порядковое? // Аспирант и соискатель. 2015. № 3. С. 59–60.
8. *Локшин А.А., Иванова Е.А.* Какое число важнее: порядковое или количественное? // Школа будущего. 2017. № 4. С. 29–32.
9. *Добротворский А.С., Иванова Е.А., Локшин А.А.* Количественная теория натуральных чисел. М.: МАКС Пресс, 2017.

ГЛАВА 2.
ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Эта глава посвящена обоснованию базовых арифметических алгоритмов – сложения и вычитания столбиком, умножения столбиком и деления уголком. Обычно обоснование этих алгоритмов проводится не на «языке множеств», а чисто арифметически, с опорой на коммутативность и ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания и другие арифметические законы.

Такой подход представляется излишне громоздким и не вполне отвечающим существу дела, поскольку арифметические выкладки лишь приблизительно следуют за шагами упомянутых алгоритмов.

На наш взгляд, более полезным для педагога, более наглядным и убедительным является излагаемый ниже подход к обоснованию арифметических алгоритмов, опирающийся на элементарную («наивную») теорию множеств.

2.1. ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим какое-нибудь натуральное число в привычной нам десятичной записи. Например, число

$$457. \tag{2.1}$$

Такая, привычная нам, запись называется *краткой*. (В этой записи присутствует 7 единиц *первого разряда*, 5 единиц *второго разряда* и 4 единицы *третьего разряда*.)

Подробная десятичная запись этого же числа выглядит так:

$$4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0. \qquad (2.2)$$

Поскольку $10^0 = 1, 10^1 = 10$, вместо записи вида (2.2) используют обычно запись

$$4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7 \qquad (2.3)$$

(и эту запись тоже называют подробной).

В общем случае подробная десятичная запись натурального числа a выглядит так:

$$a = a_k 10^k + a_{k-1}\, 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0. \qquad (2.4)$$

Соответствующая краткая запись выглядит соответственно так:

$$a = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0} \qquad (2.5)$$

(черта над выражением в правой части (2.5) нужна для того, чтобы не перепутать это выражение с обозначением произведения).

Подчеркнем, что в (2.4) и (2.5) $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ – цифры, т.е. принадлежат множеству $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, причем $a_k \neq 0$.

2.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ЗАПИСИ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Вопрос о том, каждое ли натуральное число можно представить в десятичной записи, вполне правомерен. Сейчас мы получим на него утвердительный ответ, опираясь на коротко изложенную выше теорию натуральных чисел.

Итак, пусть a – произвольно взятое натуральное число. Как мы знаем, это число представляет собой численность некоторого конечного множества A, причем природа элементов множества A совершенно не важна.

Нам будет удобно считать, что множество A представляет собой совокупность счетных палочек (от этого наше рассмотрение не станет «более примитивным» и «менее строгим»).

Расположим теперь перед собой последовательность ящиков, под которыми будут (справа налево) подписаны их номера, начиная с нулевого номера.

Мы можем считать, что с самого начала (на нулевом этапе) наши счетные палочки все лежали в ящике № 0; см. рис. 2.1.

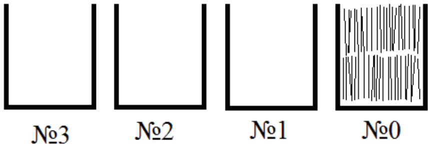


Рис. 2.1

Начнем теперь связывать эти счетные палочки *десятками* и перекладывать связанные десятки в ящик № 1. (Нетрудно видеть, что фактически мы осуществляем деление по 10 в смысле деления «по содержанию»; подробности см. в [1].) После того, как этот (первый) этап завершится, в ящике № 0 останется не больше 9 счетных палочек; мы обозначим число счетных палочек, оставшихся в ящике № 0, через a_0. Затем перейдем к ящику № 1 и повторим процедуру, связывая теперь десятки счетных палочек в *сотни*. После того, как этот (второй) этап закончится, число десятков счетных палочек, оставшихся в ящике № 1, не превысит 9. Обозначим это число через a_1. Затем перейдем к ящику № 2 и начнем связывать сотни палочек в тысячи. И так далее. В силу того, что множество A наших счетных палочек конечно, процесс на каком-то этапе (для определенности – на k-ом этапе) закончится.

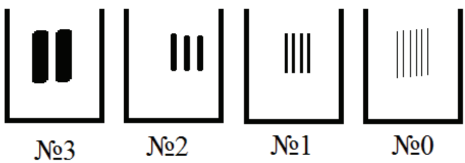


Рис. 2.2

Подсчитаем теперь количество a всех счетных палочек из множества A.

Из определения сложения сразу следует, что

a = *сумме численностей счетных палочек в каждом из ящиков.* (2.6)

Осталось сосчитать численность счетных палочек в каждом отдельно взятом ящике.

Для определенности рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2.2.

В нулевом ящике, как мы видим, находится 6 палочек.

В ящике № 1 имеется 4 *тонких связки* по 10 штук в каждой. Таким образом, общее количество палочек в этом ящике равно

$$10 + 10 + 10 + 10 = 10 \cdot 4 = 4 \cdot 10,$$

(мы воспользовались определением сложения, определением умножения как кратного сложения и коммутативностью умножения).

В ящике № 2 имеется 3 *толстых связки*, каждая из которых содержит по 10 тонких связок. Выясним, прежде всего, какова численность одной толстой связки. Пользуясь определением сложения, а также определением умножения как кратного сложения, получаем, что

$$\textit{численность толстой связки} =$$
$$= (\textit{численность тонкой связки}) \cdot 10 = 10 \cdot 10.$$

откуда для численности ящика № 2 имеем:

$$10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = (10 \cdot 10) \cdot 3 = 3 \cdot (10 \cdot 10) = 3 \cdot 10^2.$$

Аналогично вычисляем численность ящика № 3, в котором содержатся *очень толстые связки:*

$$10 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 \cdot 10 = (10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot 2 = 2 \cdot 10^3.$$

Таким образом, число счетных палочек на рис. 2.2 равно

$$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6 = 2346.$$

В общем случае, очевидно, мы приходим к равенству (2.4). Тем самым мы показали, что для произвольно взятого натурального числа a существует его десятичная запись.

2.3. СРАВНЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ДЕСЯТИЧНОЙ ЗАПИСИ

Пусть имеются два числа, заданные своими десятичными записями: число a (см. (2.4)) и число

$$b = b_p 10^p + b_{p-1} 10^{p-1} + \ldots + b_1 10 + b_0. \qquad (2.7)$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что в (2.7) $p = k$. Действительно, всегда можно более короткую из двух записей (2.4), (2.7) дополнить спереди нулями.

Итак, сравниваем два числа:

$$a = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0;$$

$$b = b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + b_1 10 + b_0. \qquad (2.8)$$

Начнем теперь сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях десятки, начиная со старших разрядов и продвигаясь слева направо (в сторону младших разрядов).

Пусть, например,

$$a_k = b_k,\ a_{k-1} = b_{k-1},\ \ldots,\ a_{s+1} = b_{s+1},\ a_s > b_s, \qquad (2.9)$$

т.е. *впервые*, при движении в сторону младших разрядов, разрядные слагаемые чисел a и b оказались не равны в s-ом разряде, причем соответствующее разрядное слагаемое в записи числа a оказалось больше.

Покажем, что из (2.9) следует, что

$$a > b. \qquad (2.10)$$

Для этого снова прибегнем к интерпретации чисел как численностей множеств счетных палочек.

Вначале рассмотрим число a. Обозначим через

$$A_k, A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots, A_{s+1}, A_s, \ldots, A_1, A_0$$

множества счетных палочек, оказавшихся в ящиках после завершения процедуры, описанной в п. 2.2. Таким образом, имеем:

$$\underset{k}{\overset{A_k}{|\_\_\_\_|}}\ \underset{k-1}{\overset{A_{k-1}}{|\_\_\_\_|}}\ \ldots\ \underset{s+1}{\overset{A_{s+1}}{|\_\_\_\_|}}\ \underset{s}{\overset{A_s}{|\_\_\_\_|}}\ \ldots\ \underset{1}{\overset{A_1}{|\_\_\_\_|}}\ \underset{0}{\overset{A_0}{|\_\_\_\_|}} \qquad (2.11)$$

Аналогично будем интерпретировать число b как численность множества B счетных палочек, с которыми проведем ту же процедуру, что и с палочками из множества A.

Обозначим через

$$B_k, B_{k-1}, B_{k-2}, \ldots, B_{s+1}, B_s, \ldots, B_1, B_0$$

множества счетных палочек, оказавшихся в соответствующих ящиках после завершения упомянутой процедуры. Таким образом, имеем:

$$\underset{k}{\overset{B_k}{|\_\_\_\_|}}\ \underset{k-1}{\overset{B_{k-1}}{|\_\_\_\_|}}\ \ldots\ \underset{s+1}{\overset{B_{s+1}}{|\_\_\_\_|}}\ \underset{s}{\overset{B_s}{|\_\_\_\_|}}\ \ldots\ \underset{1}{\overset{B_1}{|\_\_\_\_|}}\ \underset{0}{\overset{B_0}{|\_\_\_\_|}} \qquad (2.12)$$

Начиная с этого момента, ящики, в которых рассортировано множество A, будем называть «верхними», а аналогичные им ящики, по которым разложено множество B, – «нижними».

Учитывая соотношения (2.9), развяжем в множестве A_s *одну* связку, содержащую 10^s счетных палочек, и превратим эту связку в 10 связок, содержащих по 10^{s-1} счетных палочек. Все эти 10 связок перенесем в (верхний) ящик с номером $s – 1$. В (верхнем) ящике с номером $s – 1$ проделаем аналогичную процедуру: развяжем *одну* связку, содержащую 10^{s-1} счетных палочек, и превратим ее в 10 связок по 10^{s-2} счетных палочек в каждой. Затем все эти 10 связок перенесем в (верхний) ящик с номером $s – 2$. Продолжая процесс, без труда получим, что

1) в каждом верхнем ящике не меньше счетных палочек, чем в соответствующем нижнем ящике (т.е. в нижнем ящике с тем же номером);
2) в верхнем ящике с номером 0 не меньше десяти счетных палочек, в то время как в нижнем ящике с тем же номером счетных палочек не больше девяти.

В результате заключаем, что численность множества A строго больше численности множества B, т.е. (2.10) установлено.

2.4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ДЕСЯТИЧНОЙ ЗАПИСИ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Тот факт, что натуральное число может быть представлено в десятичной записи единственным образом, легко доказывается от противного. Действительно, предположим, что некоторое натуральное число a может быть представлено в десятичном виде двумя различными способами. Тогда в силу результатов предыдущего пункта мы, очевидно, должны были бы заключить, что $a > a$ (или, что то же самое, что $a < a$). Однако это противоречит свойствам отношения «меньше» (см. по этому поводу, например, [1]).

2.5. АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ СТОЛБИКОМ (ОБОСНОВАНИЕ «С ОПОРОЙ НА МНОЖЕСТВА»)

Теперь мы, наконец, подошли к цели всего нашего изложения – обоснованию важнейших арифметических алгоритмов.

Начнем с алгоритма сложения столбиком, обоснование которого проведем «с опорой на множества» на конкретном примере.

Пусть требуется вычислить сумму 247 + 365. Имеем, пользуясь алгоритмом сложения столбиком:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\;\;} \\ +\begin{array}{r} 247 \\ \underline{365} \end{array} \\ 612 \end{array} \qquad (2.13)$$

Для обоснования (2.13) вспомним определение сложения натуральных чисел. Рассмотрим два непересекающихся множества, состоящих из счетных палочек: множество *A*, принадлежащее классу 247, и множество *B*, принадлежащее классу 365. Суммой классов 247 и 365 будет класс, содержащий $A \cup B$. Численность множества $A \cup$ B (т.е. класс, которому принадлежит это множество) никак не зависит от того, наделили мы множества *A* и *B* какой-нибудь внутренней структурой или нет. Поэтому мы имеем полное право считать, что счетные палочки в множествах *A* и *B* связаны десятками, а десятки связаны тоже по десять штук (так что получились сотни, состоящие из связанных десятков); см. рис. 2.3.

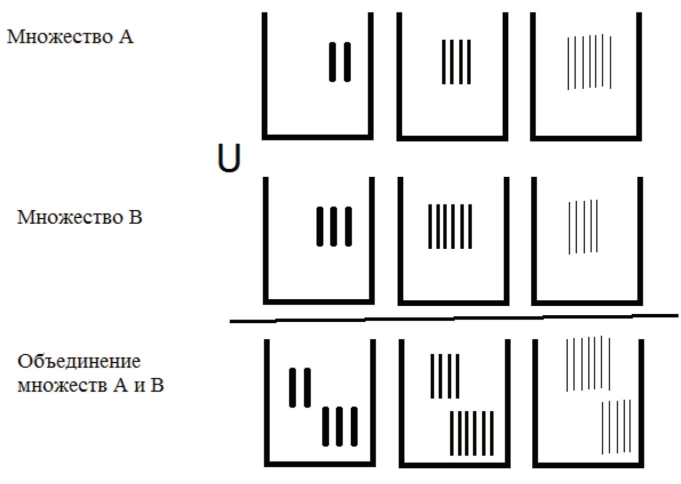


Рис. 2.3

Итак, множество $A \cup B$ мы расположили в трех нижних ящиках, изображенных на рис. 2.3. Рассмотрим теперь (в полном соответствии с алгоритмом сложения столбиком) счетные палочки в правом нижнем ящике; см. рис. 2.3.

Этих палочек, как мы видим, ровно двенадцать штук; свяжем 10 из них и перенесем получившуюся связку в средний нижний ящик. Таких связок в среднем нижнем ящике окажется тогда одиннадцать штук. В полном соответствии с алгоритмом сложения столбиком, свяжем 10 таких связок в одну сотню и перенесем полученную толстую связку в левый нижний ящик.

В результате множество $A \cup B$ окажется рассортированным по ящикам так, как это показано на рис. 2.4.

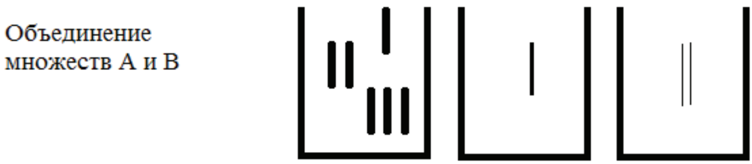


Рис. 2.4

(*Подчеркнем, что при процедурах связывания палочек и переноса полученных связок из одного ящика в другой численность множества $A \cup B$ никак не менялась.*)

Итак, из рис. 2.4 очевидно, что $n(A \cup B) = 612$.

Тем самым обоснование правила сложения столбиком в нашем конкретном примере завершено. При этом все наши действия со счетными палочками фактически представляли собой «опредмечивание» шагов алгоритма (2.13).

Нетрудно видеть также, что предложенный подход с тем же успехом работает в общем случае.

Замечание. Подчеркнем, что никакими свойствами арифметической операции сложения мы в проведенном обосновании не пользовались.

Замечание. Предложенный подход к обоснованию алгоритма сложения столбиком очевидным образом работает не только в случае десятичной системы счисления, но и в случае любой

p-ичной. Для остальных арифметических алгоритмов ситуация аналогична.

2.6. АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ СТОЛБИКОМ (АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ)

Попробуем теперь обосновать (2.13), опираясь исключительно на арифметические законы.

Имеем:

$247 + 365 = (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5) =$
$= [(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10)] + (7 + 5) =$
$= [(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10)] + (1 \cdot 10 + 2)) =$
$= \{[(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) + (3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10)] + 1 \cdot 10\} + 2 =$
$= \{(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + [(4 \cdot 10 + 6 \cdot 10) + 1 \cdot 10]\} + 2 =$
$= \{(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + [(4 + 6) \cdot 10) + 1 \cdot 10]\} + 2 =$
$= \{(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + [1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10]\} + 2 =$
$= \{(2 + 3 \cdot 10^2 + [1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10]\} + 2 =$
$= \{5 \cdot 10^2 + [1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10]\} + 2 =$
$= \{(5 + 1) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10\} + 2 =$
$= 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2 =$
$= 612.$

В ходе проведенных преобразований мы пользовались ассоциативностью и коммутативностью сложения, дистрибутивностью умножения относительно сложения, а также таблицей сложения однозначных чисел и правилом записи чисел в десятичной системе.

Нетрудно заметить, однако, что арифметическое обоснование (в отличие от обоснования «с опорой на множества») лишь приблизительно имитирует логику алгоритма сложения столбиком. Действительно, этот алгоритм большинством учеников воспринимается как естественный, но ни о какой дистрибутивности умножения относительно сложения при естественном восприятии этого алгоритма речи не идет. Иными словами, теоретико-множественное обоснование упомянутого алгоритма обладает, на наш взгляд, значительными преимуществами.

2.7. АЛГОРИТМ ВЫЧИТАНИЯ СТОЛБИКОМ (ОБОСНОВАНИЕ «С ОПОРОЙ НА МНОЖЕСТВА»)

Как и выше, мы ограничимся рассмотрением конкретного примера.

Пусть требуется вычислить разность 612–365. Имеем, пользуясь алгоритмом вычитания столбиком:

$$\begin{array}{r} \;\;\overset{10}{}\;\overset{10}{} \\ -\begin{array}{r} \dot{6}\,\dot{1}\,2 \\ 3\,6\,5 \\ \hline 2\,4\,7 \end{array} \end{array} \tag{2.15}$$

Мы будем действовать примерно так же, как в п. 2.5, привнеся в процедуру некоторые незначительные отличия. Итак, рассмотрим множество C такое, что $n(C) = 612$, и не пересекающееся с ним множество B_1 такое, что $n(B_1) = 365$. Оба множества будем считать состоящими из счетных палочек и структурированными описанным выше образом. (Единичные палочки связаны в десятки, десятки десятков связаны в сотни; все связки разложены в соответствующие ящики; см. рис. 2.5.)

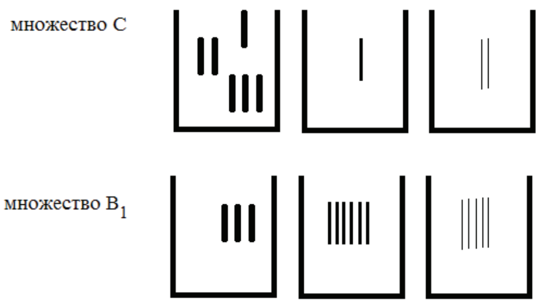


Рис. 2.5

Наша ближайшая цель – выделить в C подмножество, равномощное множеству B_1, причем сделать это таким образом, чтобы заодно стала ясна теоретико-множественная основа алгоритма (2.15). Совершенно очевидно, что нужно взять одну толстую связку из левого верхнего ящика, изображенного на рис. 2.5, перенести в средний верхний ящик, развязать на тонкие связки (десятки) и одну из тонких связок перенести в правый верхний ящик и там развязать. Результат изображен на рис. 2.6. (*Очевидно, что описанная процедура никак не повлияла на численность множества C.*)

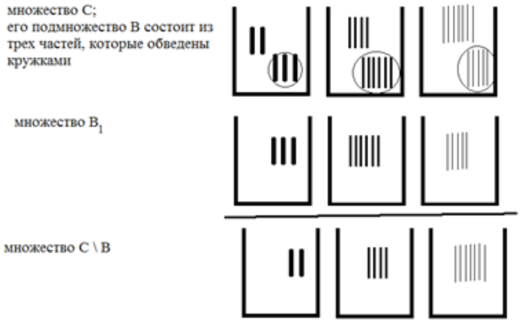


Рис. 2.6

Итак, численность множества $C \setminus B = 247$. Таким образом, вычисленная в строгом соответствии с определением вычитания разность 612–365 совпала со значением, вычисленным при помощи алгоритма вычитания столбиком. При этом мы фактически дали теоретико-множественное обоснование упомянутого алгоритма в рассмотренном примере. Перенос наших рассмотрений на общий случай не составляет труда.

Замечание. Арифметическое обоснование алгоритма вычитания столбиком оказывается еще более громоздким, чем аналогичная процедура для операции сложения. Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r} \cdot\,\dot{10}\,10 \\ -\,247 \\ 149 \\ \hline 98 \end{array}$$

Вот как выглядит арифметическое обоснование алгоритма вычитания столбиком на этом простом примере:

$247 - 149 = (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) - (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9) =$

$= [2 \cdot 10^2 + (3 + 1) \cdot 10 + 7] - [1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9] =$

$= [2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 7] - [1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9] =$

$= [(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10) + (1 \cdot 10 + 7)] – [(1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) + 9] =$
$= [(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10) + (1 \cdot 10 + 7)] – [9 + (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10)] =$
$= [(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10) + (1 \cdot 10 + 7)] – 9 – (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) =$
$= [(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10) + ((1 \cdot 10 + 7) – 9)] – (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) =$
$= [(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10) + 8] – (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) =$
$= [(2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10) – (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10)] + 8 =$
$= [(1 + 1) \cdot 10^2 + 3 \cdot 10)) – (1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10)] + 8 =$
$= [1 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 3) \cdot 10)) – (4 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2)] + 8 =$
$= [1 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 3) \cdot 10)) – (\cdot 10^2 + 4 \cdot 10)] + 8 =$
$= [1 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 3) \cdot 10)) – 4 \cdot 10 – 1 \cdot 10^2] + 8 =$
$= [1 \cdot 10^2 + \{(1 \cdot 10 + 3) \cdot 10 – 4 \cdot 10\} – 1 \cdot 10^2] + 8 =$
$= [\{1 \cdot 10^2 + (13 – 4) \cdot 10\} – 1 \cdot 10^2] + 8 =$
$= [\{1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10\} – 1 \cdot 10^2] + 8 = 9 \cdot 10 + 8 = 98.$

2.8. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА УМНОЖЕНИЯ СТОЛБИКОМ

2.8.1. Обоснование алгоритма умножения многозначного числа на однозначное

Теоретико-множественное обоснование этого алгоритма по существу ничем не отличается от теоретико-множественного обоснования алгоритма сложения столбиком (незначительное отличие заключается в использовании таблицы умножения в качестве вспомогательного средства).

Рассмотрим пример:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\ 2\ \ \\ \times\ 247 \\ 3 \\ \hline 741 \end{array} \tag{2.16}$$

Приведем обоснование процедуры (2.16) «с опорой на множества». Из определения умножения следует (см. (7.3)), что

$$247 \cdot 3 = n(A \cup B \cup C),$$

где множества A, B, C попарно не пересекаются и

$$n(A) = n(B) = n(C) = 247.$$

Выберем в качестве множеств A, B, C совокупности счетных палочек, соответствующим образом связанных в десятки и сотни.

Тогда объединение $A \cup B \cup C$, очевидно, будет иметь вид, представленный на рис. 2.7.

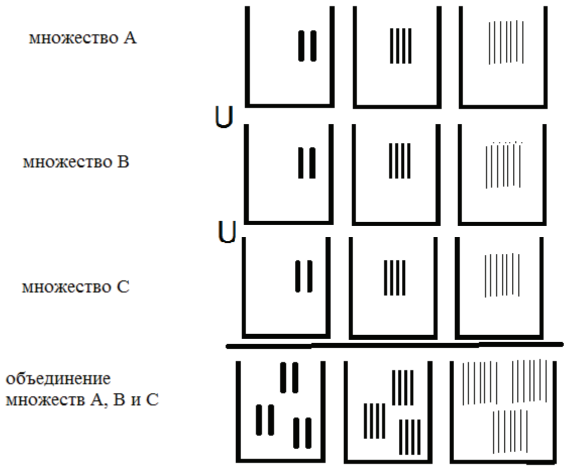


Рис. 2.7

Применяя стандартную процедуру связывания счетных палочек десятками и сотнями (десятками десятков) и перекладывая их в соответствующие ящики, легко получаем, что объединение множеств A, B, C может быть представлено в виде, изображенном на рис. 2.8. Итак, мы получили, что

$$n(A \cup B \cup C) = 741,$$

подтвердив тем самым результат из (2.16). Более того, наши предметные действия со счетными палочками фактически повторяли шаг за шагом алгоритм, использованный в (2.16). Тем самым этот алгоритм получил свое теоретико-множественное объяснение.

Переход от разобранного выше примера к общему случаю не составляет труда.

Замечание. Приведенный выше подход вовсе не будет громоздким, если позволить себе при связывании и перекладывании счетных палочек пользоваться таблицей умножения и таблицей сложения однозначных чисел.

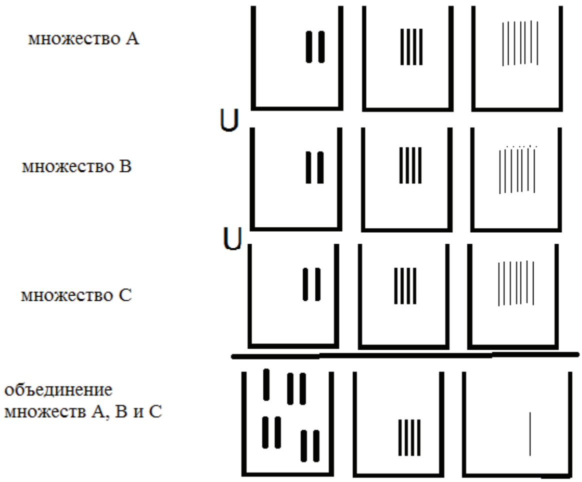


Рис. 2.8

Замечание. Что касается арифметического обоснования алгоритма (2.16), то оно опирается на коммутативность и ассоциативность сложения, на коммутативность и ассоциативность умножения, а также на дистрибутивность умножения относительно сложения (и, конечно, на таблицу умножения). Приведем соответствующие выкладки:

$$247 \cdot 3 = (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) \cdot 3 =$$
$$= (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) \cdot 3 + 7 \cdot 3 =$$
$$= (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) \cdot 3 + (2 \cdot 10 + 1) =$$
$$= [(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10) \cdot 3 + 2 \cdot 10] + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(4 \cdot 10) \cdot 3 + 2 \cdot 10]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [4 \cdot (10 \cdot 3) + 2 \cdot 10]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [4 \cdot (3 \cdot 10) + 2 \cdot 10]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(4 \cdot 3) \cdot 10 + 2 \cdot 10]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 2 \cdot 10]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(1 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 2 \cdot 10]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [(1 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 10) + 2 \cdot 10]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [1 \cdot 10 \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 2 \cdot 10)]\} + 1 =$$
$$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [1 \cdot 10 \cdot 10 + (2 + 2) \cdot 10)]\} + 1 =$$

$= \{(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + [1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10]\} + 1 =$
$= \{[(2 \cdot 10^2) \cdot 3 + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 =$
$= \{[2 \cdot (10^2 \cdot 3) + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 =$
$= \{[2 \cdot (3 \cdot 10^2) + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 =$
$= \{[(2 \cdot 3) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 =$
$= \{[6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2] + 4 \cdot 10\} + 1 =$
$= \{(6 + 1) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10\} + 1 =$
$= \{7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10\} + 1 = 741.$

2.8.2. Обоснование алгоритма умножения многозначного числа на 10^s (s – натуральное)

Покажем, что умножение натурального числа на 10^s сводится к приписыванию s нулей справа к краткой десятичной записи числа.

Это, кстати, единственный случай, когда арифметическое обоснование оказывается проще, чем обоснование «с опорой на множества».

Действительно, рассмотрим пример:

$$247 \cdot 10^3 = (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) \cdot 10^3 =$$
$$= 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 = = 247\,000.$$

Аналогично рассматривается общий случай.

Обоснование алгоритма умножения натурального числа на 10^s «с опорой на множества» также возможно; при этом удобно сначала ограничиться случаем, когда показатель степени $s = 1$, а затем перейти к случаю общего натурального s. Проведение соответствующих выкладок мы оставляем читателю.

2.8.3. Обоснование алгоритма умножения многозначного числа на многозначное

фактически не требуется, поскольку в силу дистрибутивности умножения относительно сложения этот алгоритм сводится к уже разобранным ранее алгоритмам умножения многозначного числа на однозначное и на 10^s, а также к алгоритму сложения многозначных чисел.

2.9. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА ДЕЛЕНИЯ УГОЛКОМ («С ОПОРОЙ НА МНОЖЕСТВА»)

Мы ограничимся случаем деления многозначного числа на однозначное и, как и выше, все наши рассмотрения будем проводить на конкретном примере.

Итак, пусть требуется поделить 217 на 5 (с остатком).

Имеем:

$$\begin{array}{r|l} -\overset{\frown}{21}7 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{20} & 43 \\ -17 & \\ \underline{15} & \\ 2 & \end{array} \qquad (2.17)$$

Перейдем теперь к обоснованию процедуры (2.17), а для этого вспомним определение деления как деления на равные части (с остатком).

Итак, рассмотрим множество A, $n(A) = 217$, состоящее из счетных палочек, связанных десятками и десятками десятков (сотнями); см. рис. 2.9.

Рис. 2.9

Теперь наша задача – разложить множество A по пяти ящикам поровну (с остатком).

Рассмотрим вначале сотни палочек; по пяти ящикам разложить их поровну, не развязывая, невозможно. Поэтому развяжем обе эти сотни, превратим их в 20 десятков; у нас окажется в результате 21 десяток счетных палочек. Вот их мы и начнем раскладывать поровну по пяти ящикам, в каждом из которых нам будет удобно иметь две полки – верхнюю для связанных десятками палочек, а нижнюю – для отдельных (одиночных) палочек. При этом, пользуясь таблицей умножения, мы можем сразу раскладывать по 4 десятка на верхние полки пяти двухъярусных ящиков.

Итак, мы получаем следующую картину (см. рис. 2.10).

Как видно из рис. 2.10, один связанный десяток счетных палочек оказался лишним. Развяжем его и, присоединив к одиночным счетным палочкам, изображенным на рис. 17.1, начнем раскладывать поровну на нижние полки пяти двухъярусных ящиков. Пользуясь, как и раньше, таблицей умножения, мы можем раскладывать сразу по 3 палочки на каждую из нижних полок.

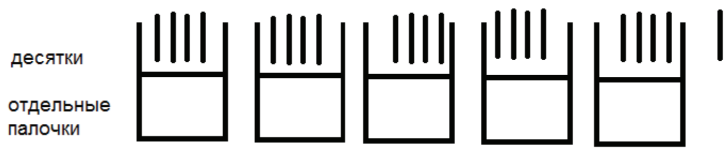


Рис. 2.10

В результате получим распределение счетных палочек по пяти двухъярусным ящикам, изображенное на рис. 2.11, где видно, что две отдельные палочки оказались «лишними».

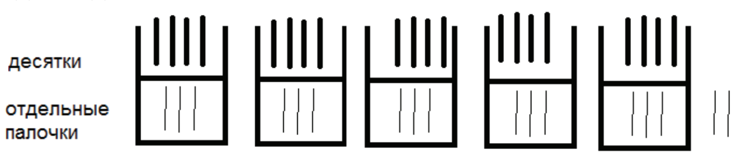


Рис. 2.11

В полном соответствии с определением деления с остатком, из рис. 2.11 следует, что

$$217 : 5 = 43\ (\textit{ост.}\ 2),$$

т.е. мы подтвердили результат, полученный при помощи алгоритма деления уголком в (2.17). Более того, наши предметные действия со счетными палочками фактически копировали процедуру, использованную в (2.17). Тем самым обоснование алгоритма деления уголком в рассматриваемом примере завершено. Переход к общему случаю не составляет труда.

Замечание. Одним из несомненных достоинств алгоритма деления уголком является то, что на каждом его шаге в неполном частном появляется цифра, а не какое-либо число с двумя или большим количеством знаков. Приведем обоснование этой важной особенности алгоритма деления уголком.

Итак, пусть требуется поделить уголком натуральное число a на некоторое натуральное D.

Обозначим через R остаток, возникающий на каком-либо шаге алгоритма; тогда обязательно

$$R < D. \tag{2.18}$$

Пусть, далее, r – очередная сносимая цифра делимого. Тогда на следующем шаге алгоритма нам нужно будет поделить (снова с остатком) число $10R + r$ на D. Покажем, что

$$10R + r < 10D, \tag{2.19}$$

откуда и будет следовать требуемое утверждение.

Нетрудно видеть, однако, что (2.19) равносильно неравенству

$$r < 10(D - R), \tag{2.20}$$

которое, очевидно, выполняется в силу (2.18) и того факта, что r – цифра.

2.10. ВЫВОДЫ

I. Алгоритм сложения столбиком. Теоретическое обоснование опирается:

1) на запись натурального числа в десятичной системе;
2) определение натурального числа как численности непустого конечного множества;
3) определение сложения в количественной теории (численность объединения непересекающихся множеств = сумме численностей);
4) независимость численности множества от группировки его элементов;
5) таблицу сложения однозначных чисел.

II. Алгоритм вычитания столбиком. Теоретическое обоснование опирается:

1) на запись натурального числа в десятичной системе;
2) определение натурального числа как численности непустого конечного множества;
3) определение разности в количественной теории (численность разности множества и его подмножества = разности численностей);
4) независимость численности множества от группировки его элементов;
5) таблицу сложения однозначных чисел.

III. Алгоритм умножения столбиком. Теоретическое обоснование опирается:

1) на запись натурального числа в десятичной системе;
2) определение натурального числа как численности непустого конечного множества;
3) определение умножения в количественной теории как кратного сложения;
4) независимость численности множества от группировки его элементов;
5) таблицу умножения и таблицу сложения однозначных чисел.

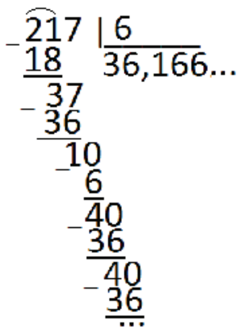
IV. Алгоритм деления уголком. Теоретическое обоснование опирается:

1) на запись натурального числа в десятичной системе;
2) определение натурального числа как численности непустого конечного множества;
3) определение деления на равные части в количественной теории; совпадение деления как операции, обратной умножению с операцией деления на равные части;
4) согласованность процедуры деления на равные части с *мультипликативным принципом* записи числа в десятичной системе (т.е. с соглашением о том, что единица каждого следующего разряда кратна единице предыдущего разряда);
5) таблицу умножения и таблицу сложения однозначных чисел.

2.11. ДОБАВЛЕНИЕ. О ПЕРЕВОДЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ В ДЕСЯТИЧНЫЕ

Алгоритм деления «уголком», переводящий обыкновенные дроби в десятичные, общеизвестен. Однако наглядное объяснение тождества исходной обыкновенной дроби и ее десятичного представления в учебниках обычно отсутствует. Здесь мы собираемся восполнить указанный пробел.

Итак, рассмотрим пример на деление 217 : 6. Теперь, в отличие от п. 2.9, мы не ограничимся получением неполного частного и остатка, а неограниченно продолжим процедуру деления уголком.



В результате остается некоторая неясность: *почему* обыкновенная неправильная дробь $\frac{217}{6}$ и полученная в (2.21) десятичная запись 36,166... – это одно и то же?

Будем вначале действовать, как в п. 2.9. Рассмотрим множество A, состоящее из 217 счетных палочек, связанных в десятки и сотни, и постараемся разложить их поровну в шесть одинаковых корзинок (в каждой из которых имеются две полки). Вначале развяжем сотни и разложим поровну (по 3 десятка) на вторые (считая снизу вверх) полки корзинок; при этом три десятка счетных палочек окажутся «лишними». Развяжем эти «лишние» десятки, присоединим к ним оставшиеся семь одиночных палочек и разложим поровну (по 6 штук) на первые полки корзинок; при этом одна счетная палочка окажется «лишней» (см. рис. 2.12).

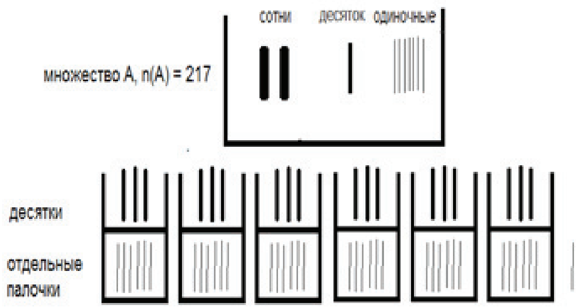


Рис. 2.12

Однако на этот раз (в отличие от наших действий в п. 2.9) мы не остановимся, согласившись с существованием «остаточного множества», состоящего из «лишней» счетной палочки, а продолжим нашу процедуру. С этой целью под каждой из шести корзинок устроим ведущую вниз последовательность нижних полок, которые будем нумеровать последовательно, считая теперь сверху вниз (первая нижняя полка, вторая нижняя полка и т.д.); см. рис. 2.13.

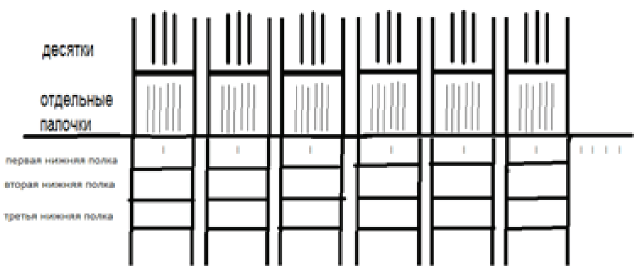


Рис. 2.13

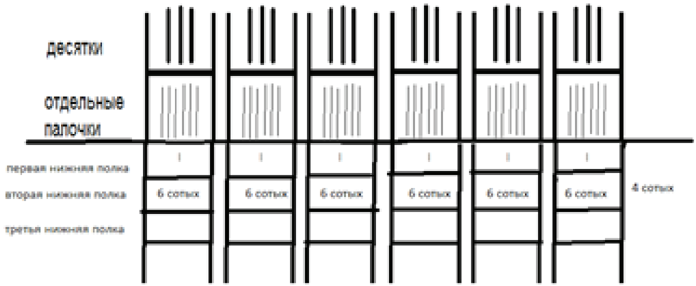


Рис. 2.14

Дальнейшие наши действия понятны из рис. 2.13 и 2.14. «Лишнюю» палочку мы разламываем на 10 одинаковых частей и эти десятые доли распределяем поровну (по одной штуке) на первые нижние полки; при этом 4 десятых доли окажутся «лишними» – их невозможно разложить поровну по шести вторым нижним полкам. Поэтому разламываем каждую из этих десятых долей еще раз на 10 частей, получаем 40 сотых долей, которые распределяем поровну (по шесть штук) по вторым нижним полкам; при этом 4 сотых доли остаются «лишними». Их снова разламываем и т.д.

Теперь становится геометрически очевидно, что содержимое любой из корзин (т.е. совокупность палочек на верхних полках и долей палочек на нижних полках) представляет собой в точности одну шестую от исходного количества палочек (т.е. от 217).

Итак, равенство

$$\frac{217}{6} = 36{,}166... \qquad (2.22)$$

получило свое геометрическое истолкование.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. *Добротворский А.С., Иванова Е.А., Локшин А.А.* Количественная теория натуральных чисел. М.: МАКС Пресс, 2017.
2. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. М., 1998.

3. *Локшин А.А., Иванова Е.А.* Множества и логика. М.: МАКС Пресс, 2017.
4. *Котов А.Я.* Вечера занимательной математики. М.: Просвещение, 1967. С. 76.
5. *Волков А.* Арифметические действия у древних римлян // Наука и жизнь. 1970. URL: http://lib.ru/NTL/ARTICLES/arifmetica.txt
6. *Локшин А.А., Иванова Е.А., Шилтова О.И.* Деление на равные части и римский способ деления (в печати).
7. *Локшин А.А., Иванова Е.А.* Множества и арифметические алгоритмы. М.: МАКС Пресс, 2019.

ГЛАВА 3.
СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

В предыдущих главах мы познакомили вас с количественной теорией целых неотрицательных чисел, которая была создана (на основе теории множеств) в конце XIX века и с теоретико-множественной основой хорошо известных нам алгоритмов арифметических действий в десятичной системе счисления. При этом мы вполне естественно считали, что общее представление об устройстве десятичной системы счисления и действующих в ней вычислительных арифметических алгоритмах у наших читателей имеется. Но изучение систем счисления заслуживает значительно большего внимания, так как знание истории возникновения и развития этого важнейшего арифметического понятия позволит будущему учителю уверенно ориентироваться как в целом ряде вопросов начального курса математики, так и в большом массиве задач занимательного и олимпиадного характера, идея которых базируется на принципах и особенностях той или иной системы счисления. Именно поэтому мы и включили в содержание нашей книги данную главу.

3.1. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

Одним из главных достижений количественной теории стало появление строгого определения целого неотрицательного числа (т.е. натурального числа или числа «ноль») с количественных позиций. До этого момента такого определения в математике не существовало, хотя само понятие натурального числа начало формироваться в сознании древних людей на рубеже позднего палеолита и неолита, т.е. около 10 тыс. лет тому назад (число «ноль» как понятие стало формироваться гораздо позднее). Во всяком случае, так считают авторитетные ученые, занимающиеся вопросами истории математики [8, 10]. При этом с высокой степенью вероятности можно предположить, что первым натуральным числом, изобретенным человеком, было число «один», что вполне естественно, так как первый шаг количественной дифференциации в человеческом сознании проходил между понятиями «один» («единственность») и «много» («множественность»), где «много» означает все, что больше, чем «один» (этот факт косвенно подтверждается существованием практически во всех современных языках таких понятий (грамматических категорий), как «единственное число» и «множественное число»). Другие варианты на этой ступени формирования количественных представлений вряд ли возможны. Более того, на этой ступени мы даже не можем говорить о формировании количественных представлений, так как «один» и «много» – это скорее качественные характеристики типа «белое» и «черное». Этот этап можно считать этапом зарождения количественных представлений, которые еще явно не проявились.

На следующем этапе (это можно предположить с большой вероятностью), должно было появиться число «два» как самостоятельная качественная характеристика пары предметов. Благо для этого существовало много предпосылок, так как с «парными» предметами человек сталкивался постоянно (пара рук, пара ног, пара глаз и т.д.). И эту мысль можно подтвердить, обратившись к особенностям некоторых языков, прежде всего, древних. Так в санскрите, древнегреческом, старославянском языках, кроме единственного и множественного числа, существовало еще и двойственное число. Это означало, что если какое-то слово находится в форме двойственного числа, то без употребления соответствующего числительного всем понятно, что речь идет о двух предметах. Интересно, что некоторые современные языки (например, арабский, словенский, исландский, иврит) сохранили в своей системе двойственное число. Но пара состоит из одного и еще одного. А вот такая трактовка – это уже количественный взгляд на число «два». А если к двум предметам добавить еще один, то появляется «новое» количество предметов, а именно «три». Вот мы и вышли на «прямую дорогу» развития количественных представлений, которая неминуемо должна была вывести древних людей на формирование понятия натурального числа как некоторого количества «единиц». В дальнейшем этот путь обязательно должен был привести и привел к формированию понятия натурального ряда чисел, где на первый план уже выходит порядковая сущность натурального числа.

Но сейчас нас интересует не вопрос возникновения натуральных чисел, а другой (хотя и напрямую с ним связанный) вопрос: когда люди научились называть и записывать натуральные числа и как они это делали? Ответ на вторую часть этого вопроса выводит нас на рассмотрение такого понятия как *система счисления*.

Определение. Системой счисления (письменной нумерации) называется совокупность приемов представления (записи) натуральных чисел.

Замечание. Некоторые авторы к понятию системы счисления относят еще и правила устной нумерации, а также алгоритмы выполнения арифметических действий над натуральными числами. Мы этого делать не будем по следующим причинам. Во-первых, сохранившаяся устная нумерация, как правило, имеет много несовпадений с соответствующей письменной нумерацией, а судить о древней устной нумерации очень сложно, так как в отличие от письменной, которая хоть как-то зафиксирована в древних памятниках, сохранившихся до наших дней, устная таким важным качеством не обладает (возможность записывать и воспроизводить устную речь человечество получило относительно недавно). Конечно, анализируя речь первобытных племен, которые сохранились в труднодоступных местах экваториальной Африки или Южной Америки, можно извлечь интересную информацию по этой проблеме, но ее очень трудно экстраполировать на системы счисления, изобретенные другими народами (цивилизациями). При этом разговор об особенностях устной нумерации в разных языках очень важен и интересен (в языке очень часто сохраняются слова, которые не соответствуют действующей письменной нумерации, а появились и использовались в другой (более древней) системе счисления). Поэтому мы обязательно будем об этом вести речь, но сделаем это чуть позже, в отдельном параграфе данной главы. Во-вторых, алгоритмы арифметических действий – это уже надстройка над нумерацией, которая без них может прекрасно существовать, и поэтому нет смысла изначально включать алгоритмы арифметических действий в определение понятия системы счисления.

Если вернуться к первой части поставленного выше вопроса, то возникновение письменной нумерации по времени не должно очень заметно отличаться от времени возникновением письменности у тех или иных народов. Если же к письменной нумерации относить, например, способ «записи» чисел с помощью зарубок на дереве или с помощью нанизанных ракушек, то такая «письменная» нумерация, очевидно, существенно старше, чем письменность, которая, по мнению историков, появилась у древних народов на рубеже V и IV тысячелетий до н.э.

Так с чего начинается возникновение системы счисления? Если вы заметили, то чуть выше мы уже ответили на этот вопрос. Система счисления начинается с введения особого знака для обозначения числа «один».

Замечание. Мы специально не используем сейчас цифровые обозначения, чтобы подчеркнуть тот факт, что привычная нам десятичная система не находится в особом положении, а является одной из многих систем счисления, которые были изобретены человечеством.

Итак, если мы научились записывать число «один» (зарубка, ракушка, камешек, черточка и т.д.), то другие натуральные числа можно записывать с помощью повторения этого знака (предмета) нужное количество раз. Из этой примитивной системы счисления берут свое начало все другие системы счисления. Поэтому мы ее можем назвать прасистемой для всех систем счисления. В ней есть только одно *узловое* число (т.е. число, для обозначения которого вводится специальный знак) – это число «один», а все другие числа (мы их будем называть *алгоритмическими*) получаются из узловых *аддитивным* способом (т.е. с помощью сложения узловых чисел). При этом насколько прасистема является простой и понятной, настолько же она громоздка и неудобна. Поэтому каждый народ, перед которым стояла проблема записи чисел, пытался усовершенствовать прасистему, идя по пути создания все более удобных и компактных записей чисел.

Один из возможных вариантов усовершенствования прасистемы достаточно очевиден: нужно какую-то группу «единиц» обозначить новым знаком, т.е. ввести в систему новое узловое число. Выбор нового узлового числа (кроме числа «один») является очень важным, так как он связан с тем, какую группу единиц в данной системе счисления принимают за основание счета. Если эта группа состоит из «десяти» единиц, то счет ведется десятками, а система называется *десятичной*. Если эта группа состоит из «двенадцати» единиц, то счет ведется дюжинами, а система называется *двенадцатеричной*. Так, в Древнем Египте кроме знака (иероглифа) для числа «один» были введены новые знаки (иероглифы) для обозначения чисел «десять», «сто», «тысяча» и т.д. (см. рис. 3.1), т.е. каждое следующее узловое число было в десять раз больше предыдущего. Это классический пример десятичной системы. При этом алгоритмические числа у египтян конструировались только на аддитивной основе [8].

1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
мерная палка	путы	мерная веревка	цветок лотоса	указательный палец	головастик	удивленный человек	солнце

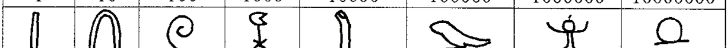


Рис. 3.1. Нумерация Древнего Египта

В Древнем Риме на роль узловых чисел были «назначены» следующие числа: «один», «пять», «десять», «пятьдесят», «сто», «пятьсот», «тысяча», а алгоритмические числа стали получать не только аддитивно, но и субтрактивно (на основе вычитания). Эту систему нельзя назвать десятичной в полном смысле этого термина. Она скорее десятично-пятеричная (см. рис. 3.2).

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Рис. 3.2. Нумерация Древнего Рима

В Древнем Вавилоне стали использовать только два знака: «простой» клин для обозначения числа «один» и «косой» клин для обозначения числа «десять». При этом вавилоняне не стали ничего менять в аддитивном способе записи алгоритмических чисел, зато догадались придавать одному и тому же знаку разные числовые значения в зависимости от того места (позиции), которое занимает данный знак в записи числа. А вот считали они не столько десятками, сколько «шестидесятками», поэтому их систему считают *шестидесятеричной* (см. рис. 3.3).

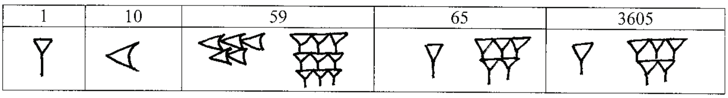


Рис. 3.3. Нумерация Древнего Вавилона

Древние греки с III века до н.э. стали массово использовать так называемую *ионийскую* систему счисления (она вытеснила более древнюю *аттическую* систему), в которой для обозначения узловых чисел служили буквы. При этом узловых чисел у них было существенно больше, чем у египтян или римлян (даже всех букв действующего алфавита им не хватило) (см. рис. 3.4). Древняя Русь, благодаря тесным связям с Византией, переняла у Древней Греции алфавитный способ записи чисел [8].

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{\alpha}$ альфа	$\overline{\beta}$ бета	$\overline{\gamma}$ гамма	$\overline{\delta}$ дельта	$\overline{\varepsilon}$ эпсилон	$\overline{\varsigma}$ вау	$\overline{\zeta}$ дзета	$\overline{\eta}$ эта	$\overline{\theta}$ тэта
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\overline{\iota}$ йота	$\overline{\kappa}$ каппа	$\overline{\lambda}$ лямбда	$\overline{\mu}$ мю	$\overline{\nu}$ ню	$\overline{\xi}$ кси	$\overline{o}$ омикрон	$\overline{\pi}$ пи	ϙ̄ коппа
100	200	300	400	500	600	700	800	900
$\overline{\rho}$ ро	$\overline{\sigma}$ сигма	$\overline{\tau}$ тау	$\overline{\upsilon}$ ипсилон	$\overline{\varphi}$ фи	$\overline{\chi}$ хи	$\overline{\psi}$ пси	$\overline{\omega}$ омега	ϡ̄ сампи

Рис. 3.4. Нумерация Древней Греции (ионийская)

Каждая из существовавших когда-то или существующих сейчас систем счисления интересна по-своему, и чуть позже мы проанализируем некоторые из них более подробно. Но все они могут быть разделены на две основные группы. Те народы, которые пошли по тому же пути, что и жители Древнего Египта, стали создавать системы счисления, получившие впоследствии название *непозиционных*. Кто же выбрал путь, реализованный (пусть и не в завершенном виде) в Древнем Вавилоне, стали создавать *позиционные* системы счисления. Со временем человечеству стало понятно, что второй путь имеет существенное преимущество над первым. Мы обязательно скажем о том, в чем оно заключается, но чуть позже. Пока предлагаем читателям поразмышлять на эту тему и сделать свои предположения.

3.2. НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Как мы уже сказали выше, к непозиционным системам счисления мы относим те, в которых *позиция знака* (*цифры*) *в записи числа не используется для передачи информации об этом числе*. В таких системах знаки, участвующие в записи данного числа, либо занимают заранее заданную позицию, которую изменять нельзя, либо позиция вообще может быть произвольной, а ее изменение не меняет записанного числа. В качестве примера «канонической» непозиционной системы счисления можно привести систему записи чисел, которая применялась в Древнем Египте в IV–II тысячелетии до н.э. В этой системе число представлялось как сумма узловых чисел при условии, что количество этих узловых чисел является минимальным из всех возможных. Например, если нужно было записать число «сто двадцать три», его представляли в виде суммы шести узловых чисел: «сто» + «десять» + «десять» + «один» + «один» + «один». Узловые числа записывались в порядке невозрастания слева направо. Если теперь каждое слагаемое обозначить соответствующим иероглифом, а знаки + опустить, то получится запись данного числа в системе счисления Древнего Египта. Аналогично записывались и другие числа (см. рис. 3.5).

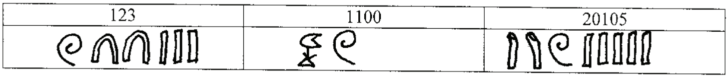


Рис. 3.5. Примеры записи чисел в Древнем Египте

Другим примером непозиционной системы счисления является система, применяемая в Древней Греции. Эта система носила алфавитный характер, т.е. в роли цифр выступали буквы древнегреческого алфавита. Эту идею греки сначала реализовали в аттической системе счисления, которая существовала до III века до н.э. В этой системе узловыми числами были числа «один», «пять», «десять», «сто», «тысяча», «десять тысяч», которые обозначались соответственно первыми буквами слов, являющихся их названиями, а алгоритмические числа строились по аддитивному способу. Особенностью этой системы было то, что использовались «промежуточные» узловые числа («пятьдесят», «пятьсот», «пять тысяч», «пятьдесят тысяч»), для обозначения которых использовалась комбинация знака для числа «пять» и знака, обозначающего соответствующее «основное» узловое число. Запись чисел в этой системе очень напоминает запись чисел римскими цифрами. Начиная с III века до н.э. в Древней Греции господствующей системой счисления становится ионийская. Согласно этой системе узловыми числами становятся числа «один», «два», …, «девять», «десять», «двадцать», …, «девяносто», «сто», «двести», …, «девятьсот», т.е. всего 27 чисел, которые обозначались соответствующими буквами действующего тогда греческого алфавита (24 буквы) и еще тремя устаревшими буквами. С помощью этих узловых чисел очень просто записываются натуральные числа от «одного» до «девятисот девяносто девяти». Для обозначения больших чисел использовались те же буквы, но снабженные дополнительными символами. Эта идея в чем-то близка идее использования позиции в записи для передачи нужной информации. Ионийской системой Древней Греции воспользовались в свое время создатели системы счисления Древней Руси, о которой речь пойдет в следующем пункте.

Рассмотрим еще один пример непозиционной системы счисления. Речь пойдет о системе счисления Древнего Рима. В ней узловые числа были выбраны аналогично тому, как это было сделано в аттической нумерации, т.е. имеются «основные» узловые числа: «один» (I), «десять» (X), «сто» (*C*), «тысяча» (*M*), а также «промежуточные» узловые числа: «пять» (V), «пятьдесят» (*L*), «пятьсот» (*D*), т.е. система является десятично-пятеричной. Эта система имеет две очень важные отличительные черты. Во-первых, она является единственной из древних систем счисления, которой мы продолжаем пользоваться и по сей день. Конечно, это использование осуществляется в очень специфических ситуациях (нумерация глав в книге, написание юбилейных дат, цифры на циферблате часов и т.д.), но оно продолжает быть, и знать азы этой нумерации бывает нужно с практической точки зрения. Во-вторых, римская нумерация, по нашему мнению, не является непозиционной (как это обычно принято считать) в полном смысле этого термина, а занимает некоторое промежуточное положение между непозиционными и позиционными системами счисления. Связано это с тем, что римляне догадались использовать позицию в записи числа для передачи информации об этом числе, но только не количественной (как это происходит в позиционных системах счисления), а операционной, указывающей на выбор операции (сложение или вычитание) для построения алгоритмического числа. Например, VI = V + I, а IV = V – I. Этот пример показывает, что с помощью одних и тех же цифр (I и V) можно записать два разных числа («шесть» и «четыре»), достаточно лишь учитывать место (позицию) цифр в записи числа.

3.3. СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ ДРЕВНЕЙ РУСИ

В то время как в странах Западной Европы пользовались римской системой счисления, в Древней Руси, находившейся, подобно другим славянским государствам, в тесном культурном и религиозном общении с Византией, получила распространение сходная с греческой алфавитная нумерация, в которой в качестве узловых чисел были взяты числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, …, 90, 100, 200, 300, …, 800, 900. При этом каждое из указанных двадцати семи чисел обозначалось своей буквой славянского алфавита, следуя, как правило, алфавитному порядку.

Замечание. Мы рассматриваем поздний вариант древнерусской нумерации, который базировался на «кириллице», введенной в IX веке. Нумерацию, основанную на «глаголице» мы затрагивать не будем.

Ниже представлена таблица, которая позволяет не только узнать, как на письме обозначалось то или иное узловое число, но и как называется соответствующая буква (написание букв приближено к современному виду).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
а҃ аз	в҃ веди	г҃ глаголь	д҃ добро	є҃ есть	ѕ҃ зело	з҃ земля	и҃ иже	ѳ҃ фита
10	20	30	40	50	60	70	80	90
і҃ и	к҃ како	л҃ люди	м҃ мыслете	н҃ наш	ѯ҃ кси	о҃ он	п҃ покой	ч҃ червь
100	200	300	400	500	600	700	800	900
р҃ рцы	с҃ слово	т҃ твердь	ѹ҃ (ѵ҃) ук	ф҃ ферт	х҃ хер	ѱ҃ пси	ѡ҃ омега	ц҃ цы

Рис. 3.6. Нумерация Древней Руси

Алфавитный порядок при обозначении узловых чисел не всегда соблюдался. Этому есть свои объяснения. Так, число 2 обозначалось не второй по порядку буквой «буки», а третьей – «веди», так как в греческом алфавите второе место занимает буква «бета» (византийская «вита»), а она по написанию и по звучанию соответствовала славянской букве «веди». Создатели древнерусской нумерации решили сохранить это соответствие.

Число 9 обозначалось буквой «фита», которая находилась в конце славянского алфавита, но эта буква ассоциировалась с греческой буквой «тета», которая и обозначала число 9.

Число 90 обозначалось буквой «червь», что также нарушало алфавитный порядок. Причиной тому стал тот факт, что в греческой нумерации это число обозначалось вышедшей из употребления буквой «коппа», которую нужно было заменить «дополнительной» (по сравнению с греческим алфавитом) буквой славянского алфавита (этой буквой и стала буква «червь»), чтобы далее можно было сохранить алфавитное соответствие в обозначении чисел. Так, следующее узловое число (100) обозначалось в греческой системе буквой «ро», а в славянской – буквой «рцы», которые соответствуют друг другу и графически, и фонетически.

Так как в славянском алфавите букв было больше двадцати семи, то некоторые из них не были задействованы в системе счисления. Например, буква «буки», причину отсутствия которой в списке букв, используемых для обозначения узловых чисел, мы объяснили выше.

Замечание. Чтобы на письме букву не перепутать с цифрой, использовался особый знак, который назывался «титло» и ставился над первой цифрой записи числа или над всей записью числа. Как выглядел этот знак, можно увидеть на рис. 3.6.

С помощью данных узловых чисел и их комбинаций можно было записать любое число в пределах от 1 до 999. Алгоритмические числа строились на аддитивной основе. Так числа второго десятка записывались с помощью буквы «и», которая обозначала число 10 («десяток») и соответствующей буквы, которая обозначала число единиц. При этом сначала записывалась цифра единиц, а потом цифра, обозначающая десяток. Такое написание чисел второго десятка сохранилось в устной нумерации, которой мы пользуемся и по сей день. Так, число «двенадцать» записывалось как «веди-и», а число «девятнадцать» – как «фита-и». Что же касается других алгоритмических чисел первой сотни, то для них порядок следования цифр, обозначающих число десятков и число единиц, был таким, которым мы пользуемся в современной десятичной системе счисления, т.е. сначала записывалась цифра десятков, а потом – цифра единиц. Например, число «тридцать три» записывалось как «люди-глаголь», а число «восемьдесят пять» – как «покой-есть» (см. рис. 3.7).

12	19	33	85
в҃і	ѳ҃і	л҃г	п҃є

Рис. 3.7. Примеры записи чисел в Древней Руси

Для обозначения чисел, начиная с числа «тысяча», применялись приемы, основанные, как и в греческой нумерации, на использовании дополнительных символов. Так, если к цифре «аз» внизу слева добавлялся символ, похожий на перечеркнутый знак равенства, то это означало, что записано число «одна тысяча» (или просто «тысяча»), а не число «один» (см. рис. 3.8). Аналогично обстоит дело, если мы добавим этот значок к любой цифре первой группы («группы единиц»). Например, «три тысячи» записывалось с помощью присоединения этого знака к цифре «глаголь».

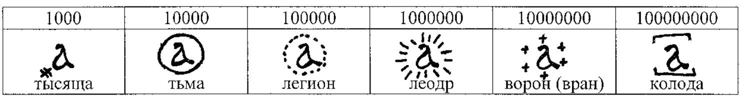


Рис. 3.8. Дополнительные знаки нумерации Древней Руси

Замечание. Значок, увеличивающий значение цифры в 1000 раз в особом случае можно было добавлять не только к цифрам группы единиц, но к другим цифрам. В этом случае используемая система называлась «великий счет». Такая система счета использовалась редко, в отличие от «малого счета», когда дополнительный значок можно было добавлять только к цифрам группы единиц.

Система «малого счета» позволяла расширить верхнюю границу записываемых чисел до числа 9999. Для обозначения больших чисел нужно было вводить новый дополнительный значок. Таким значком стал «кружок», в который заключали цифру группы единиц, что увеличивало ее значение в 10 000 раз. Например, цифра «аз в кружочке» обозначала число «десять тысяч» (см. рис. 3.8), а цифра «добро в кружочке» – «сорок тысяч». С помощью рассмотренных двух дополнительных значков самым большим числом, которое можно записать в системе «малого счета», является число 99 999.

Замечание. При «великом счете» дополнительный значок «кружок» увеличивал цифру, которая в нем заключена, уже не в 10 000 раз, а в 1 000 000 раз, так как верхняя граница «великого счета» с помощью первого дополнительного значка достигает числа 999 999.

Далее история повторяется. Нужно только вводить новые дополнительные значки. Такими значками стали: «кружочек из точек», «кружочек из лучиков», «кружочек из крестиков», «крышка в виде квадратной скобки». Смысл этих дополнительных значков описан в соответствующей таблице (см. рис. 3.8).

В этой же таблице мы можем прочитать и те названия, которые использовались в старославянском языке для называния соответствующих числительных. Так, числительное «тысяща» практически не отличается от современного числительного «тысяча», а числительное «тьма» обозначает «десять тысяч», т.е. такое большое число для жителей Древней Руси, что оно не подлежит конкретному пересчету, а обозначает что-то очень большое по количеству. В этом контексте становится понятным смысл фразы «собралось тьма народу».

В непозиционных системах счисления проблема записи достаточно больших чисел решалась за счет введения новых цифр (либо принципиально новых знаков, либо дополнительных значков к «старым» цифрам) – это простейшее решение проблемы, но далеко не самое рациональное. В этом случае увеличивать список знаков для записи чисел пришлось бы регулярно (по мере необходимости). Через какое-то время он стал бы таким большим, что пользоваться им было бы очень затруднительно. Нужен был другой способ решения проблемы. И он был найден. В результате возникла древнейшая позиционная система счисления. Причем случилось это приблизительно в тот же исторический период, когда в Древнем Египте формировалась одна из первых десятичных непозиционных систем счисления.

3.4. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

В позиционных системах счисления кроме используемых знаков (цифр) информация о числе «зашифрована» еще и в позиции каждого знака в записи. Причем в «настоящих» позиционных системах счисления позиция цифры несет в себе количественную информацию о данном числе, в отличие от систем, занимающих некоторое промежуточное положение, в которых позиция знаков несет информацию об операционном характере образования алгоритмических чисел. Римская нумерация как раз и является примером такой «промежуточной» системы. Достаточно вспомнить, как римскими цифрами записываются, например, числа 9 и 11 (9 = IX = X – I и 11 = XI = X + I), и станет понятно, что позиция цифр в записи играет важную роль, но не количественную, а операционную.

Одной из древнейших позиционных систем счисления является система, существовавшая в Древнем Вавилоне. Основы этой системы восходят к шумерийско-аккадской эпохе на территории Месопотамии (IV тысячелетие до н.э.). Шумеры употребляли в вычислениях систему, в основе которой лежало число 60, хотя в некоторых случаях пользовались и десятичной системой. Для записи чисел они пользовались двумя знаками: «простой» клин являлся обозначением числа 1, а знаком числа 10 был «косой» клин. Построение алгоритмических чисел осуществлялось на аддитивной основе. Например, чтобы написать число «пятнадцать», нужно было выдавить один «косой» клин и пять «простых» клиньев.

Замечание. Использование только двух знаков было продиктовано объективными причинами. В древней цивилизации Междуречья писали на глиняных табличках, выдавливая на них палочками клиновидные знаки двух видов, используя оба конца специально заточенной палочки. Добиться большого разнообразия в знаках в этих условиях было практически невозможно, в отличие, например, от того разнообразия, которое сложилось в письменности соседней цивилизации Древнего Египта, так как египтяне писали на папирусе, и им значительно проще было фантазировать с конфигурацией знаков (иероглифов).

Вначале для обозначения старших разрядов они пользовались знаками младших разрядов, которые записывались в увеличенном виде. Однако постепенно, с дальнейшим упрощением и установлением однотипности письма, разница между крупными и мелкими знаками стиралась и, в конце концов, остались лишь два указанных выше знака: «простой» клин и «косой» клин. Таким образом, тот факт, что различные узловые числа перестали записывать принципиально различными символами (знаками), привел к возникновению позиционной системы, сыгравшей величайшую роль в развитии человеческой культуры.

При помощи повторений только двух указанных знаков вавилоняне производили запись любого числа. Если говорить о числах в пределах от 1 до 59, то записывались они с помощью соответствующего числа «клиньев-десятков» и числа «клиньев-единиц». Например, запись числа 38 состояла из трех «косых» клиньев и восьми «простых» клиньев. Позднее вавилоняне, подобно египтянам, стали группировать знаки, но не по четыре, а по три. Запись числа 59 приведена в соответствующей таблице (см. рис. 3.3).

А теперь о самом важном и интересном изобретении вавилонян. Для обозначения числа 60 они стали использовать один «простой» клин, т.е. знак, который привычно применялся для обозначения числа 1, а не шестикратное повторение «косого» клина. Вне контекста отличить записи числа 1 и числа 60 было невозможно, так как нельзя было определить, на каком месте (в какой позиции) стоит этот знак: на месте единиц или на месте шестидесятков. Но если говорить, например, о записи числа 65, то разночтений было меньше, хотя и в этом случае нельзя говорить о полной однозначности трактовки записи числа (см. рис. 3.3).

Таким образом, эта система не была окончательно сформирована, так как без специального знака, обозначающего пропуск позиции (разряда), нет однозначного прочтения чисел без уточнения их количественных границ из контекста. К сожалению, вавилоняне не додумались до введения «нуля», хотя некий аналог нуля они в поздних текстах стали использовать. Это был знак, который ставился в конце предложения (аналог современной точки), но обязательным и систематическим это нововведение не стало.

Несмотря на отмеченные недостатки, шестидесятеричная позиционная система шумеров и вавилонян была очень выгодна для вычислений в отличие от непозиционных систем счисления. А деление часа на 60 минут и минуты на 60 секунд – это примеры того, что мы унаследовали от этой древней цивилизации. И это далеко не единственные примеры.

Когда же человечество додумалось до систематического использования «нуля» и кто это сделал? Это нам хорошо известно: сделали это индийские математики в VI–VII веках н.э. Именно они создали систему, в которой была полностью реализована идея позиционного способа записи чисел, в основание которого было положено число 10. Для этого им понадобилось ввести девять цифр для обозначения первых девяти натуральных чисел и особый знак для обозначения пропуска позиции (разряда) – цифру «ноль». Используя цифру для обозначения числа «один» и знак пропуска разряда (цифру «ноль»), можно было записать основание системы счисления, т.е. число «десять». Именно изобретение «нуля» и стало величайшим достижением индийских математиков, позволившим им создать такую систему счисления, в которой любое число может быть однозначно записано с помощью использования всего десяти различных знаков (цифр), при условии, что знаки в записи можно повторять любое число раз. Другими словами, они создали позиционную десятичную систему счисления, которая со временем вытеснила все другие системы, превратившись в общепринятую мировую систему счисления, хорошо знакомую всем нам.

В настоящее время достоверно известно, что в VII веке н.э. десятичная система, основанная на использовании девяти «значащих» цифр, позиционном принципе и особом знаке (знаке «ноль») для обозначения пропуска позиции (разряда), полностью сформировалась.

Уже в середине VII века сведения об индийской нумерации стали распространяться на Запад. В это время есть факты упоминания индийской системы в Сирии. В конце VIII века она становится известной в Багдаде. Арабские ученые быстро оценили достоинства новой системы. Подробное описание этой системы на арабском языке было сделано выдающимся среднеазиатским ученым ал-Хорезми (Абу Абдаллы Мухаммеда ибн Муса ал-Хорезми ал-Маджуси (около 780–850 гг.)). Сочинение ал-Хорезми по арифметике дошло до нас только в латинском переводе. Этот перевод восходит к середине XII века. Благодаря этой книге в Европе детально познакомились с индийской системой счисления, а к XIV веку она стала повсеместно использоваться в странах Западной Европы.

В России распространение десятичной системы счисления произошло в эпоху царствования Петра I, а способствовала тому книга Л.Ф. Магницкого (1669–1739) «Арифметика, сиречь наука числительная», вышедшая в 1703 году на славянском языке. Все записи чисел и вычисления в ней производятся при помощи цифр индийской нумерации, а также приводятся таблицы, которые позволяют сопоставлять записи чисел в древнерусской нумерации и в новой десятичной системе. Отметим, что для нумерации страниц книги используется алфавитная древнерусская система счисления. Интересен и такой факт. Л.Ф. Магницкий использовал совершенно однотипные названия для «круглых» чисел первой сотни: «десят», «двадесят», «тридесят», «четыредесят», «пятьдесят», «шестьдесят», «семьдесят», «восемьдесят», «девятьдесят». Мы можем сравнить эти названия с современными и понять, какие из них сохранились, какие частично изменились, а какие совсем не прижились. Эта книга сыграла очень важную роль в развитии преподавания математики в России. «Арифметика» Магницкого – первый печатный отечественный учебник математики!

Мы познакомили вас с краткой историей возникновения и распространения десятичной позиционной системы счисления. Интересные особенности ее устройства были описаны в предыдущей главе.

3.5. НЕДЕСЯТИЧНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Прежде всего, еще раз обратим внимание на то, что в силу необходимости при изучении недесятичных позиционных систем счисления мы будем пользоваться устной и письменной десятичной нумерацией как вспомогательным средством, так как этот «язык» понятен всем.

Определение. Записью натурального числа n в p-ичной системе счисления (в системе счисления с основанием p, где p – натуральное число и $p \neq 1$) называется его представление в виде

$$n = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot p + n_0, \qquad (3.1)$$

где коэффициенты n_k, n_{k-1}, …, n_1, n_0 принимают целые значения от 0 до $p - 1$ включительно, причем $n_k \neq 0$.

Сумму в правой части равенства (3.1) принято называть подробной p-ичной записью числа n. Каждое слагаемое этой записи принято называть разрядным слагаемым. Все разрядные слагаемые от $n_k \cdot p^k$ до $n_0 \cdot p^0 = n_0$ должны в этой записи присутствовать. Выполнить это требование нельзя, если не использовать в качестве возможных коэффициентов число 0 (в этой записи 0 – это не только знак пропуска разряда, но и цифра для обозначения полноценного целого числа – числа «ноль»). Подробную запись можно заменить краткой записью этого же числа, в которой явно сохраняются только коэффициенты n_k, n_{k-1}, …, n_1, n_0, причем записываются они друг за другом в строчку без пробелов и запятых, а множители p^k, …, p^0 явно не записываются, но без проблем восстанавливаются по той позиции, которую занимает соответствующая цифра в записи числа, считая справа налево. Также в конце записи в виде индекса в скобках указывается основание системы счисления:

$$n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_{0\,(p)}. \qquad (3.2)$$

Замечание. Чтобы при записи в буквенном виде не возникало путаницы между краткой записью числа и произведением нескольких множителей, обозначенных буквами, над краткой записью принято писать горизонтальную черту:

$$\overline{n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_{0\,(p)}} \qquad (3.3)$$

Очень важно, что от подробной записи, в которой, как мы уже отмечали, должны присутствовать разрядные слагаемые по порядку без пропусков, можно однозначно перейти к краткой записи, а от краткой – к подробной. При этом подробная запись (а значит, и краткая) для любого натурального числа в системе с любым основанием существует и является единственной. Доказательство этого важного факта на примере десятичной системы было рассмотрено в предыдущей главе.

Сколько же требуется различных знаков (цифр), чтобы записать любое число в p-ичной позиционной системе счисления? Ответ на этот вопрос очевиден: всего нужно p цифр, которые требуются для обозначения коэффициентов подробной записи, т.е. для обозначения чисел 0, 1, …, $p - 1$.

Как же целесообразно решать проблему введения своих цифр для различных систем счисления? Есть очень простой и понятный способ ее решения. Прежде всего, все такие системы следует разделить на две группы в зависимости от того, будет ли основание системы меньше десяти ($p < 10$), либо оно будет больше десяти ($p > 10$).

В первом случае возникает совсем простая и понятная ситуация (различных цифр требуется меньше десяти), когда мы можем использовать знакомые всем цифры общепринятой десятичной системы счисления, но не все, а только первые p из имеющихся, т.е. цифры, с помощью которых мы обозначаем однозначные числа от 0 до $p - 1$. Например, в пятеричной системе счисления требуется пять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, а в двоичной – всего две: 0 и 1.

Во втором случае ситуация сложнее, так как в таких системах счисления нужно иметь больше десяти цифр, а следовательно, нам не обойтись без введения дополнительных цифр. Возможные пути решения этой проблемы рассмотрим на примере двенадцатеричной системы счисления. В этой системе (а счет в ней ведется дюжинами) нужно иметь двенадцать различных цифр. Десять цифр у нас есть. Это 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нужны еще две цифры, которые будут обозначать число, следующее сразу за числом 9, и число, которое следует сразу за только что указанным числом. Это могут быть любые два знака. Например, две первые буквы греческого алфавита: α, β. Но этот подход нельзя признать удачным. Если новых цифр потребуется существенно больше, то букв алфавита может просто не хватить, но даже если мы привлечем буквы другого алфавита или какие-то еще знаки, то возникнет проблема с запоминанием числового смысла новых знаков (без такого запоминания системой счисления пользоваться не очень удобно). Решается эта проблема очень простым способом: в качестве новых цифр следует взять нужное количество десятичных записей чисел после числа 9, которые снабжены некоторым специальным значком, что позволит отличить цифру от записи соответствующего многозначного числа. Так, в двенадцатиричной системе счисления можно использовать две новые цифры: (10), (11). Вместо скобок можно использовать какие-то значки над десятичной записью. Например, ^ или ~.

Замечание. Напомним, что в алфавитной нумерации Древней Руси использовался надстрочный знак, который назывался «титло». С его помощью буквы «превращались» в цифры. Нечто похожее делаем и мы, когда предлагаем с помощью дополнительного знака «превратить» привычную цифровую десятичную запись многозначного числа в цифру, обозначающую однозначное число в недесятичной позиционной системе счисления с основанием больше десяти.

При таком подходе нет никаких ограничений в количестве введения новых цифр, а также нет проблем с запоминанием числового смысла каждой новой цифры. Предположим, что нам нужно договориться, как мы будем записывать (в порядке возрастания) однозначные числа в двадцатеричной позиционной системе счисления. Следуя описанному выше подходу, эта договоренность может быть реализована следующим образом: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19) – все цифры данной системы счисления. При этом не требуется никаких дополнительных разъяснений относительно местоположения каждого из обозначаемых этими цифрами двадцати однозначных чисел в данном ряду: не составляет никакого труда записать числа, между которыми расположено, например, число (16), или какое число следует сразу за числом 9.

Замечание. Для понимания принципов записи чисел в различных позиционных системах счисления важно обратить внимание на следующий факт: после наибольшего однозначного числа сразу следует наименьшее двузначное число, которое во всех таких системах счисления записывается как 10. Только в десятичной системе 10 обозначает «десяток», в двенадцатеричной – «дюжину», а в двоичной – «пару», т.е. обозначает основание данной системы счисления.

3.6. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ В НЕДЕСЯТИЧНЫХ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Рассматривая вопрос о письменных алгоритмах арифметических действий в недесятичных позиционных системах счисления, следует сразу обратить внимание на тот факт, что можно использовать алгоритмы, которые полностью аналогичны по своему устройству общеизвестным алгоритмам сложения, вычитания, умножения и деления «столбиком», которые применяются в десятичной системе счисления. Отличие состоит лишь в том, что при выполнении указанного алгоритма мы должны пользоваться соответствующей таблицей сложения (для алгоритмов сложения и вычитания) или таблицей умножения (для алгоритмов умножения и деления) однозначных чисел.

Замечание. Напомним, что алгоритмы умножения и деления «столбиком» устроены таким образом, что при их выполнении требуется умение выполнять алгоритмы сложения и вычитания. Так, в алгоритм умножения «столбиком» многозначных чисел «встроен» алгоритм сложения «столбиком» многозначных чисел, причем обобщенный вариант этого алгоритма, когда число слагаемых может быть больше двух. Алгоритм деления «столбиком» (часто этот алгоритм называют «деление уголком») требует не только знания таблицы умножения однозначных чисел, но и умения умножать однозначное число на многозначное («в строчку»), а также вычитать «столбиком» многозначные числа. Но все указанные особенности алгоритмов имеют место в позиционной системе счисления с любым основанием.

Итак, нам нужно разобраться, как устроены таблицы сложения и умножения однозначных чисел в различных недесятичных позиционных системах счисления. Для этого рассмотрим два примера. Пусть это будут пятеричная система счисления ($p < 10$) и двенадцатеричная система счисления ($p > 10$).

В пятеричной системе счисления мы используем следующие цифры: 0, 1, 2, 3, 4. Если в этой системе записать по порядку первые шестнадцать натуральных чисел, то это будет выглядеть так: 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31. Используя этот отрезок натурального ряда чисел, записанных в пятеричной системе счисления и хорошо известные свойства сложения и умножения (коммутативность, дистрибутивность), мы можем легко заполнить соответствующие таблицы (см. табл. 3.1 и 3.2).

Таблица 3.1

Таблица сложения однозначных чисел в пятеричной системе счисления

b / *a*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Далее приведена таблица умножения однозначных чисел в пятеричной системе счисления.

Таблица 3.2

Таблица умножения однозначных чисел в пятеричной системе счисления

b / *a*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Покажем, как работает эта таблица при поразрядном способе сложения, вычитания, умножения и деления многозначных чисел в пятеричной системе счисления (см. рис. 3.9).

Сложение	Вычитание
$+\begin{array}{r} 2314_{(5)} \\ \underline{1223_{(5)}} \\ 4042_{(5)} \end{array}$	$-\begin{array}{r} 4142_{(5)} \\ \underline{2313_{(5)}} \\ 1324_{(5)} \end{array}$
Умножение	**Деление**
$\times\begin{array}{r} 423_{(5)} \\ \underline{32_{(5)}} \\ +\,1401 \\ \underline{2324} \\ 30141_{(5)} \end{array}$	$\begin{array}{l\|l} -2324_{(5)} & 3_{(5)} \\ \underline{22} & 423_{(5)} \\ -12 & \\ \underline{11} & \\ -14 & \\ \underline{14} & \\ 0 & \end{array}$

Рис. 3.9. Примеры письменных вычислений в пятеричной системе счисления

Теперь рассмотрим аналогичные вопросы, но применительно к двенадцатеричной системе счисления. Сначала покажем, как выглядят таблицы сложения и умножения однозначных чисел в этой системе (см. табл. 3.3 и 3.4).

Таблица 3.3

Таблица сложения однозначных чисел в двенадцатеричной системе счисления

b / *a*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**(10)**	**(11)**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	(10)	(11)	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	(10)	(11)	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	(10)	(11)	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	(10)	(11)	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	(10)	(11)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
(10)	(10)	(11)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
(11)	(11)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1(10)

Таблица 3.4

Таблица умножения однозначных чисел в двенадцатеричной системе счисления

b / *a*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**(10)**	**(11)**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)	(11)
2	0	2	4	6	8	(10)	10	12	14	16	18	1(10)
3	0	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	0	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	0	5	(10)	13	18	21	26	2(11)	34	39	42	47
6	0	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	0	7	12	19	24	2(11)	36	41	48	53	5(10)	65
8	0	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	0	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
(10)	0	(10)	18	26	34	42	50	5(10)	68	76	84	92
(11)	0	(11)	1(10)	29	38	47	56	65	74	83	92	(10)1

Ниже приведены примеры выполнения письменных алгоритмов сложения, вычитания, умножения и деления «столбиком» в двенадцатеричной системе счисления (см. рис. 3.10).

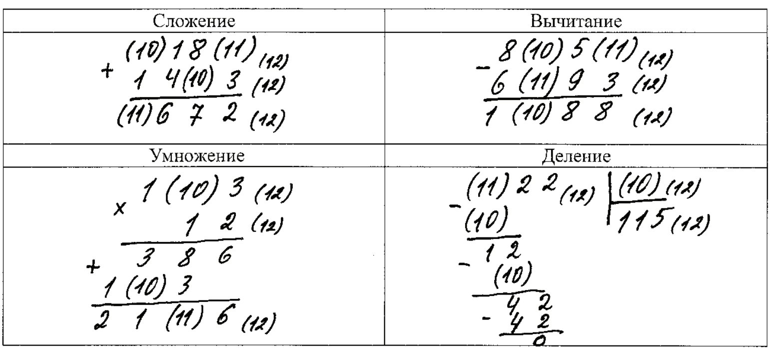


Рис. 3.10. Примеры письменных вычислений в двенадцатеричной системе счисления

3.7. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ К ДРУГОЙ

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос перевода записи данного числа, сделанной в позиционной системе с одним основанием, в запись этого же числа в позиционной системе с другим основанием.

Начнем с самого простого случая, а именно со случая перевода из недесятичной позиционной системы счисления в десятичную. Для осуществления такого перевода достаточно знать, какое «десятичное» число обозначает каждая цифра рассматриваемой недесятичной системы счисления, а также знать основание этой системы счисления и уметь выполнять сложение и умножение (возведение в степень) в десятичной системе счисления. Что касается количественного смысла цифр, то его установить очень просто, учитывая тот способ введения «новых» цифр, который мы предложили. Если цифра «старая» (например, 7), то ее количественный смысл остается неизменным, а если цифра «новая» (например, (12)), то ее количественный смысл устанавливается простым отбрасыванием скобок: (12) в двадцатеричной системе имеет тот же смысл, что и 12 в десятичной. Покажем, как перевести в десятичную систему числа, записанные в других позиционных системах счисления:

а) $1234_{(5)} = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 125 + 50 + 15 + 4 = 194$;

б) $2(10)(11)_{(12)} = 2 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + 11 = 2 \cdot 144 + 120 + 11 = 419$.

Теперь рассмотри более сложный случай – перевод из десятичной системы счисления в недесятичную. Предположим, что нам нужно некоторое число **a** (для которого есть десятичная запись) записать в p-ичной системе счисления ($p \neq 10$). Это означает, что число **a** должно быть представлено в следующем виде:

$$\mathbf{a} = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot p + n_0,$$

где коэффициенты $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_1, n_0$ принимают целые значения от 0 до $p - 1$ включительно, причем $n_k \neq 0$ (см. (3.1)).

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\mathbf{a} = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot p + n_0 =$$
$$= (n_k \cdot p^{k-1} + n_{k-1} \cdot p^{k-2} + \ldots + n_1) \cdot p + n_0 = q \cdot p + n_0,$$

где $n_0 < p$.

Это означает, что мы разделили **a** на р с остатком в десятичной системе (р должно быть записано в десятичном виде). При этом число n_0 является остатком в этом делении, а число $q = n_k \cdot p^{k-1} + n_{k-1} \cdot p^{k-2} + \ldots + n_1$ – неполным частным. Записав остаток n_0 в р-ичном виде, мы получим последнюю цифру искомой р-ичной записи. Теперь можем найти предпоследнюю цифру искомой р-ичной записи, а именно цифру n_1. Сделать это можно аналогичным образом, разделив с остатком число q на число р. Остатком в этом делении будет n_1, т.е. предпоследняя цифра искомой р-ичной записи (если для остатка мы используем соответствующую запись). Действуя таким же образом, мы постепенно найдем все цифры искомой р-ичной записи (см. рис. 3.11). Эту процедуру можно записывать, используя повторяющееся деление «столбиком».

В двоичную систему	В пятнадцатеричную систему
25:2=12 (ост.1) 12:2=6 (ост. 0) 6:2=3 (ост. 0) 3:2=1 (ост. 1) 1:2=0 (ост. 1) $25=11001_{(2)}$	3287:15=219 (ост. 2) 219:15=14 (ост. 9) 14:15=0 (ост. 14) $3287=(14)92_{(15)}$

Рис. 3.11. Примеры перевода записи чисел в недесятичные системы счисления

Нам осталось рассмотреть самый сложный случай – перевод из недесятичной системы счисления в недесятичную. Этот случай действительно является самым сложным, если не использовать десятичную систему. В указанных ограничениях для перевода из недесятичной системы с основанием p_1 в недесятичную систему с основанием p_2 нужно уметь выполнять (правильно и достаточно быстро) деление данного числа **a** на число p_2 с остатком в системе с основанием p_1. Это не совсем простая задача, хотя и решаемая при определенной тренировке. Мы не будем уделять внимание этому непосредственному способу перевода, а покажем, как решить ту же задачу по переводу, используя «обходной» путь, который основан на использовании десятичной системы счисления. Суть этого способа состоит в следующем. Сначала нужно перевести запись данного числа из недесятичной системы с основанием p_1 в десятичную систему, а потом полученную десятичную запись данного числа перевести в недесятичную с основанием p_2 (как осуществить эти два вида перевода, мы подробно рассказали чуть выше).

3.8. ОСОБЕННОСТИ УСТНОЙ НУМЕРАЦИИ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

В заключительном параграфе данной главы поговорим более подробно об устной нумерации. И начнем мы с устной нумерации, которая существует в современном русском языке. Это для нас близко и наиболее интересно.

Прежде всего, нужно определить, какие числительные в русском языке выпадают из общей схемы письменной десятичной нумерации, а потом проанализировать эти ситуации.

Начнем с чисел первого десятка. Однозначные натуральные числа имеют специальные знаки для их записи, поэтому в устной нумерации они должны иметь самостоятельные названия. При этом название одного однозначного числа не должно быть связано по смыслу с названиями других однозначных чисел. Именно такую картину мы и наблюдаем в русском языке. Поэтому на данном числовом отрезке противоречия не возникают.

Замечание (о цифрах). В математике существуют понятия «число» и «цифра», которые принципиально отличаются друг от друга, но в терминологии, к сожалению, такого отличия не сложилось. Мы говорим, что у нас есть число «три» (три коня, три сына, три яблока и т.д.). Но в каких-то случаях за термином «три» может скрываться соответствующая цифра (в записи данного числа встречается «три», напиши в углу страницы «три» и т.д.). Было бы очень хорошо избавиться от этой путаницы. Сделать это можно, например, введя в общее употребление для цифр свои термины. Такая возможность имеется, если привычные термины «один», «два» и т.д. оставить для однозначных чисел, а цифры называть так: «единица», «двойка», «тройка», …, «девятка». Но что-то этому мешает. Скорее всего, пресловутая инерция (языка и мышления). Других серьезных причин не видно. Учителю начальных классов очень часто приходится иметь дело с ситуациями, когда очень важно правильно использовать понятия «число» и «цифра».

Например, сказать, что «мы к данному числу справа приписали число 0», это значит, допустить грубую понятийно-терминологическую ошибку. Правильно было бы сказать так: «к записи данного числа справа приписали цифру 0». Вообще, мы предлагаем учителям всегда в подобных ситуациях руководствоваться одним простым правилом: *пишем* мы цифры, а с их помощью *записываем* числа.

Число «десять», которое является основанием системы счисления и обозначается как 10 (во всех позиционных системах основание системы обозначается именно так) должно иметь самостоятельное название, что и наблюдается в русском языке (и не только в нем). Таким образом, первый десяток мы проанализировали.

Теперь рассмотрим числа второго десятка. Десятичная запись таких чисел (не учитывая числа, состоящего их двух десятков) строится следующим образом: сначала записывается цифра 1, которая обозначает число десятков, а потом цифра, которая обозначает число единиц. Если обратиться к соответствующим числительным, то они устроены совсем по-другому. Вот мы и столкнулись с первыми несоответствиями. Должно быть так: «десять один», «десять два», …, «десять девять». А у нас: «одиннадцать», «двенадцать», …, «девятнадцать». В этих числительных мы легко можем найти «десяток» – слово «дцать», найти соответствующее слово для числа единиц («один», «две», «три» и т.д.) и соединительную связку-предлог «на». Мы ничего не имеем против того, что все эти части в каждом случае образовали одно слово, но почему порядок вхождения частей в единое слово не соответствует порядку, который имеет место в письменной записи. Объяснить это можно одной причиной – рассматриваемые числительные в русском языке возникли гораздо раньше, чем на Руси стали использовать десятичную систему счисления. Это числительные, которые полностью соответствуют порядку записи чисел второго десятка в алфавитной нумерации Древней Руси (там сначала писалась буква, которая обозначала числа единиц, а потом буква, обозначающая десяток). Данные числительные не затронул переход к десятичной системе счисления, который происходил в нашей стране в начале XVIII века. Они благополучно сохранились в языке до настоящего времени.

Если двигаться дальше по натуральному ряду чисел, то следующая «остановка» должна произойти на числительном «сорок». Это особенное числительное, в котором при всем желании нельзя найти никаких признаков отсылки к четырем десяткам. Существуют разные гипотезы, которые объясняют происхождение этого числительного, но достоверность их невозможно подтвердить. Наиболее распространенное объяснение заключается в следующем: словом «сорок» называлась связка из четырех десятков собольих шкур, которая служила стандартной единицей при торговле мехами. Постепенно это слово и заняло место соответствующего числительного. На наш взгляд, более красивой является следующая версия: слово «сорок» созвучно слову «срок», которое обозначает очень значимый (по разным причинам) временной промежуток. Случайно ли наиболее важные для человека сроки представляют собой временные промежутки в четыре десятка дней, четыре десятка недель, четыре десятка лет? Ответ на этот вопрос мы предлагаем дать нашим читателям, привлекая различные библейские сюжеты и биологические закономерности.

При дальнейшем движении по натуральному ряду мы очень быстро столкнемся еще с одним несоответствием. Речь идет о числительном, которое обозначает девять десятков. Почему это «девяносто», а не «девятьдесят»? Если к числительному «девять» в слове «девяносто» есть хоть какая-то отсылка (первые четыре буквы), то указания на десятки нет никакого. Более того, есть упоминание числительного «сто», о котором пока еще (следуя письменной нумерации) говорить рано. Попытки объяснить смысл этого числительного так же предпринимались. Кто-то пытался это связать со счетом девятками, опираясь на устоявшиеся в устной речи словосочетания «в тридевятом царстве», «за тридевять земель». Кто-то искал связь с девятью десятками или девятым десятком, кто-то рассматривал конструкцию «девять до ста», но все эти варианты выглядят не очень убедительно, поэтому мы не будем больше развивать данную тему. Отметим только, что числительное «девятьдесят» существовало в русском языке до XIV века, а потом было вытеснено числительным «девяносто». В начале XVIII века в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого была предпринята попытка вернуть числительное «девятьдесят» и использовать аналогичные числительные для «круглых» чисел первой сотни: «двадесят», «тридесят», «четыредесят» и т.д., но она не увенчалась успехом.

Завершая разговор об особенностях устной нумерации в русском языке, мы хотим обратить внимание еще на одно «несоответствие», а именно: на появление термина «миллиард» в ряду числительных «миллион», «миллиард», «триллион», «квадриллион», «квинтиллион», «секстиллион» и т.д. Не составляет труда понять, что «миллиард» занимает место «биллиона» (термин «биллион» знаком нам по использованию этого числительного в других языках), но в чем причина такой замены. Этому есть простое и достоверное объяснение. Дело в том, что существуют две шкалы названия трехразрядных классов – длинная и короткая. В короткой шкале пользуются такими числительными: «тысяча» (10^3), «миллион» (10^6), «биллион» (10^9), «триллион» (10^{12}), «квадриллион» (10^{15}) и т.д. В длинной шкале появляются дополнительные термины: «тысяча» (10^3), «миллион» (10^6), «миллиард» (10^9), «биллион» (10^{12}), «биллиард» (10^{15}) и т.д. В разных странах в разное время использовались разные шкалы, поэтому нужно быть очень внимательным при использовании этих терминов. В России был период использования длинной шкалы (начало XVIII века), потом под влиянием французских математиков (конец XVIII века) был осуществлен переход на короткую шкалу, но термин «миллиард» перешел из длинной шкалы в короткую, вытеснив «биллион», благо обозначали они одно и то же число (10^9), но в разных шкалах.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 3

1. Запишите числа 9, 23, 145, 2369, 10 537 в системе счисления Древнего Египта.

2. Запишите числа 7, 32, 543, 1659, 20 635 в системе счисления Древнего Вавилона.

3. Запишите числа 9, 45, 368, 2987 в системе счисления Древнего Рима (римскими цифрами).

4. Запишите числа 5, 17, 256, 1637, 23 589 в системе счисления Древней Руси.

5. Выполните сложение в пятеричной системе счисления: $1243_{(5)} + 2334_{(5)}$.

6. Выполните вычитание в пятеричной системе счисления: $41\,021_{(5)} - 34\,233_{(5)}$.

7. Выполните умножение в пятеричной системе счисления: $214_{(5)} \cdot 32_{(5)}$.

8. Выполните деление в пятеричной системе счисления: $30\,141_{(5)} : 423_{(5)}$.

9. Составьте таблицу сложения однозначных чисел в восьмеричной системе счисления и вычислите в ней значение следующего выражения: $4623_{(8)} + 237_{(8)} - 3657_{(8)}$.

10. Составьте таблицу умножения однозначных чисел в восьмеричной системе счисления и вычислите в ней значение следующего выражения: $2651_{(8)} : 25_{(8)} \cdot 3064_{(8)}$.

11. Выполните сложение в двенадцатеричной системе счисления: $5(10)69_{(12)} + 95(11)8_{(12)}$.

12. Выполните вычитание в двенадцатеричной системе счисления: $10(10)5_{(12)} - 999_{(12)}$.

13. Выполните умножение в двенадцатеричной системе счисления: $(11)579_{(12)} \cdot 5(10)3_{(12)}$.

14. Выполните деление в двенадцатеричной системе счисления: $504\,319_{(12)} : (10)3_{(12)}$.

15. Составьте таблицу сложения однозначных чисел в двадцатеричной системе счисления и вычислите в ней значение следующего выражения: $9(15)7(19)4_{(20)} + 2(17)(10)3_{(20)} - (18)(18)1(19)_{(20)}$.

16. Составьте таблицу умножения однозначных чисел в двадцатеричной системе счисления и вычислите значение следующего выражения: $1(10)5_{(20)} : 15_{(20)} \cdot 2(15)5_{(20)}$.

17. Данные числа запишите в десятичной системе счисления: $10\,110\,011_{(2)}$, $20\,121_{(3)}$, $4102_{(5)}$, $7472_{(8)}$, $(11)1(10)_{(12)}$, $9(19)5_{(20)}$.

18. Данные числа запишите в двоичной системе счисления: 145, 258, 1111.

19. Данные числа запишите в семеричной системе счисления: 346, 2048, 11 237.

20. Данные числа запишите в пятнадцатеричной системе счисления: 186, 4056, 12 355.

21. Данные числа запишите в троичной системе счисления: $1234_{(5)}$, $(10)(10)10_{(12)}$.

22. Найдите основание системы счисления, в которой справедливы равенства:

а) $24_{(p)} + 32_{(p)} = 100_{(p)}$

б) $342_{(p)} + 144_{(p)} = 1041_{(p)}$

в) $365_{(p)} + 254_{(p)} = 652_{(p)}$

23. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде алгебраической суммы различных степеней числа 3. (Указание: воспользуйтесь записью числа в троичной системе счисления и равенством $2 \cdot 3^k = 3^{k+1} - 3^k$.)

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3

1. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. М., 1998.
2. *Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П.* Математика: учеб. пособие по специальности «Педагогика и методика начального обучения». М.: Просвещение, 1977.
3. *Аматова Г.М., Аматов М.А.* Математика. Кн. 1. М.: Академия, 2008.
4. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М.* Основы начального курса математики: учеб. пособие для учащихся педучилищ. М.: Просвещение, 1988.
5. *Локшин А.А., Бахтина О.В.* Какое число древнее – количественное или порядковое? // Аспирант и соискатель. 2015. № 3. С. 59–60.
6. *Депман И.Я.* История арифметики. М., 1965.
7. *Фомин С.В.* Системы счисления. М., 1987.
8. *Кольман Э.* История математики в древности. М., 1961.
9. *Юшкевич А.П.* История математики в средние века. М., 1961.
10. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.

ГЛАВА 4. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

4.1. ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

На множестве целых неотрицательных чисел можно определить отношение «делимости» (или «кратности») следующим образом.

Определение 4.1. Целое неотрицательное число a делится на натуральное число b (обозначается $a \vdots b$), если существует такое целое неотрицательное число c, что $a = b \cdot c$. В этом случае принято также говорить, что a кратно b или b является делителем (делит) a. Для обозначения того, что b делит a используется вертикальная черта ($b|a$).

Отношение делимости обладает рядом свойств. Остановимся сначала на простейших свойствах этого отношения.

1. Любое целое неотрицательное число делится на число1.
2. Любое натуральное число делится на себя.
3. Число 0 делится на любое натуральное число.
4. Если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c (для любого целого неотрицательного числа a и любых натуральных чисел b и c).
5. Если a делится на b, а b делится на a, то $a = b$ (для любых натуральных чисел a и b).

Провести доказательства этих свойств не составляет особого труда. Требуется только привлечь определение отношения делимости (см. определение 4.1) и сделать очевидные умозаключения. Для доказательства свойства 5 потребуется еще привлечение соответствующих свойств неравенств. Предлагаем провести эти доказательства самостоятельно!

Некоторые из перечисленных свойств хорошо узнаваемы. Так свойство 2 является свойством рефлексивности отношения делимости на множестве натуральных чисел, а свойство 5 – свойством антисимметричности этого отношения на том же множестве. Если в свойстве 4 число a брать из множества натуральных чисел, т.е. исключить случай $a = 0$, то данное свойство будет являться свойством транзитивности отношения делимости на множестве натуральных чисел.

4.2. ДЕЛИМОСТЬ СУММЫ, РАЗНОСТИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим теперь другие свойства отношения делимости целых неотрицательных чисел.

Теорема 4.1. (Первая теорема о делимости суммы).

Если a делится на c и b делится на c, то $a + b$ делится на c (для любых целых неотрицательных чисел a и b и любого натурального числа c).

Доказательство. Так как по условию a делится на c, то существует такое целое неотрицательное число k, что $a = c \cdot k$. Так как по условию b делится на c, то существует такое целое неотрицательное число m, что $b = c \cdot m$. Из этого следует, что $a + b = c \cdot k + c \cdot m = c(k + m)$, где $k + m$ – это некоторое целое неотрицательное число (при сложении любых целых неотрицательных чисел обязательно получается какое-то целое неотрицательное число). Опираясь на определение 4.1, получаем, что сумма $a + b$ делится на число c.

Замечание. Теорему о делимости суммы можно обобщить на произвольное число слагаемых. В этом случае нужно говорить о том, что делимость каждого слагаемого суммы целых неотрицательных чисел на произвольное натуральное число гарантирует делимость всей суммы на это число.

Теорема 4.2. (Первая теорема о делимости разности).

Если a делится на c, b делится на c и $a \geq b$, то $a - b$ делится на c (для любых целых неотрицательных чисел a и b и любого натурального числа c).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1. Дополнительно нужно только провести рассуждения, подтверждающие существование в целых неотрицательных числах разности $k - m$ при условии, что разность $a - b$ существует в целых неотрицательных числах.

Теорема 4.3. (Первая теорема о делимости произведения).

Если a делится на c или b делится на c, то $a \cdot b$ делится на c (для любых целых неотрицательных чисел a и b и любого натурального числа c).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1. Дополнительно нужно только вспомнить о существовании ассоциативного закона умножения и о том, что произведение любых целых неотрицательных чисел является некоторым целым неотрицательным числом.

Замечание. Теорему о делимости произведения можно обобщить на произвольное число множителей. В этом случае нужно говорить о том, что делимость хотя бы одного множителя произведения целых неотрицательных чисел на произвольное натуральное число гарантирует делимость всего произведения на это число.

4.3. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ И ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ

В этом параграфе мы покажем, как делимость целых неотрицательных чисел связана с остатками от деления целых неотрицательных чисел на натуральные числа. Сначала напомним, что разделить целое неотрицательное число a на натуральное число b с остатком означает найти целые неотрицательные числа q и r такие, что $a = bq + r$, где $r < b$. При этом число q называется неполным частным, а число r – остатком. Сопоставляя это определение и определение 4.1, можно установить следующее: если остаток $r = 0$, то число a находится в отношении делимости с числом b.

В этом случае еще принято говорить, что число a делится на число b нацело.

Остатки от деления двух целых неотрицательных чисел на данное натуральное число позволяют легко установить наличие или отсутствие делимости на данное число суммы или разности этих чисел.

Пусть мы разделили произвольные целые неотрицательные числа a и b на произвольное натуральное число c с остатком, т.е. имеют место следующие равенства:

$$a = cq_1 + r_1,\ где\ r_1 < c, \tag{4.1}$$

$$b = cq_2 + r_2,\ где\ r_2 < c. \tag{4.2}$$

Тогда, если сумма остатков $r_1 + r_2$ равна 0 или равна c, то сумма $a + b$ делится на c. При этом обратное утверждение также верно, т.е. если сумма целых неотрицательных чисел $a + b$ делится на натуральное число c, то сумма остатков $r_1 + r_2$ равна 0 или равна c. Таким образом, речь идет о другой теореме о делимости суммы, которая является обобщением теоремы 4.1.

Теорема 4.4. (Вторая теорема о делимости суммы).

Сумма $a + b$ делится на c тогда и только тогда, когда сумма остатков $r_1 + r_2$ делится на c, т.е. сумма остатков $r_1 + r_2$ равна 0 или равна c (для любых целых неотрицательных чисел a и b и любого натурального числа c).

Доказательство этого утверждения основано на применении теорем о делимости суммы, разности и произведения, а также на том очевидном факте, что для суммы остатков $r_1 + r_2$ справедливо двойное неравенство:

$$0 \le r_1 + r_2 < 2c. \tag{4.3}$$

Замечание. Вторая теорема о делимости суммы легко обобщается на произвольное число слагаемых.

Аналогичным образом можно вывести обобщенные теоремы о делимости разности и о делимости произведения.

Теорема 4.5. (Вторая теорема о делимости разности).

Разность a-b делится на c тогда и только тогда, когда разность остатков r_1-r_2 равна 0, т.е. $r_1 = r_2$ (для любых целых неотрицательных чисел a и b таких, что $a \ge b$, и любого натурального числа c).

Теорема 4.6. (Вторая теорема о делимости произведения).

Произведение $a \cdot b$ делится на c тогда и только тогда, когда произведение остатков $r_1 \cdot r_2$ делится на c (для любых целых неотрицательных чисел a и b и любого натурального числа c).

Замечание. Вторая теорема о делимости произведения легко обобщается на произвольное число множителей.

4.4. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

В математике и в реальной жизни мы можем столкнуться с ситуацией, когда нам нужно узнать, делится ли некоторое натуральное число a на некоторое натуральное число b**.** (Например, нужно быстро решить вопрос о возможности расселения 117 участников школьной олимпиады в трехместные комнаты таким образом, чтобы свободных мест не осталось.) Понятно, что ответить на этот вопрос можно, если выполнить деление с остатком a на b. Но это не всегда можно быстро сделать, если нет под рукой калькулятора. На помощь в этом случае приходят признаки делимости. Это обычная ситуация, так как теоремы-признаки и нужны нам для того, чтобы заменить определения, которыми в данной ситуации трудно (или даже невозможно) воспользоваться.

4.4.1. Признаки делимости на 2, 5 и 10

Рассмотрим подробную десятичную запись произвольного натурального числа и преобразуем ее, как представлено в (4.4):

$$a = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot 10 + n_0 =$$
$$= (n_k \cdot 10^{k-1} + n_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \ldots + n_1) \cdot 10 + n_0 = q \cdot 10 + n_0. \quad (4.4)$$

Последнее выражение из (4.4), а также теоремы о делимости суммы и произведения дают возможность утверждать, что делимость числа a на числа 2, 5, и 10 полностью совпадает с делимостью на эти числа однозначного числа n_0, которое записывается с помощью последней цифры десятичной записи числа a. Другими словами, если мы хотим узнать, как ведет себя число a в отношении делимости на числа 2, 5 и 10, то следует посмотреть на последнюю цифру n_0 десятичной записи этого числа. Для делимости на 2 эта цифра должна быть четной (0, 2, 4, 6, 8), для делимости на 5 запись числа *a* должна оканчиваться либо цифрой 0, либо цифрой 5, для делимости на 10 запись числа *a* должна оканчиваться на 0.

4.4.2. Признаки делимости на 4, 25 и 100

Рассмотрим подробную десятичную запись произвольного натурального числа и преобразуем ее, как представлено в (4.5):

$$a = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10 + n_0 =$$
$$= (n_k \cdot 10^{k-2} + n_{k-1} \cdot 10^{k-3} + \ldots + n_2) \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10 + n_0 =$$
$$= q \cdot 100 + (n_1 \cdot 10 + n_0). \qquad (4.5)$$

Последнее выражение из (4.5), а также теоремы о делимости суммы и произведения дают возможность утверждать, что делимость числа *a* на числа 4, 25, и 100 полностью совпадает с делимостью на эти числа суммы ($n_1 \cdot 10 + n_0$), которая при $n_1 \neq 0$ представляет собой подробную десятичную запись двузначного числа с помощью двух последних цифр записи данного числа, а при $n_1 = 0$ может рассматриваться как однозначное число n_0. Другими словами, если мы хотим узнать, как ведет себя число *a* в отношении делимости на числа 4, 25 и 100, то следует посмотреть на две последние цифры n_1 и n_0 десятичной записи этого числа. Для делимости на 4 эти цифры должны образовывать запись числа (двузначного или однозначного), которое делится на 4, для делимости на 25 запись числа *a* должна оканчиваться либо на 00, либо на 25, либо на 50, либо на 75, для делимости на 100 запись числа *a* должна оканчиваться на 00, т.е. на два нуля.

4.4.3. Признаки делимости на 3 и 9

Для того, чтобы вывести признаки делимости на 3 и на 9, преобразуем подробную десятичную запись натурального числа *a* следующим образом:

$$a = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + n_2 \cdot 10^2 + n_1 \cdot 10 + n_0 =$$
$$= n_k \cdot (10^k - 1) + n_{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1) + \ldots + n_2 \cdot (10^2 - 1) + n_1 \cdot (10 - 1) +$$
$$+ (n_k + n_{k-1} + \ldots + n_2 + n_1 + n_0). \qquad (4.6)$$

Последняя скобка в этом выражении представляет собой сумму однозначных чисел, записанных соответствующими цифрами краткой десятичной записи данного натурального числа *a*.

Для краткости эту сумму принято называть «суммой цифр числа *а*». От этой суммы и будет зависеть делимость данного числа на 3 и на 9. Обосновать это не составляет особого труда. Достаточно обратить внимание на то, что разности $10 - 1$, $10^2 - 1$, $10^3 - 1$ и т.д. являются числами 9, 99, 999 и т.д. Очевидно, эти числа делятся на 9 и на 3. Остается привлечь теоремы о делимости произведения и делимости суммы (первые теоремы), чтобы доказать, что выражение $n_k \cdot (10^k - 1) + n_{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1) + \ldots + n_2 \cdot$ $\cdot (10^2 - 1) + n_1 \cdot (10 - 1)$ всегда делится на 3 и на 9. Теперь, опираясь на первую теорему о делимости разности, получаем, что делимость натурального числа *а* на 3 (на 9) напрямую зависит (полностью совпадает) от делимости (с делимостью) на 3 (на 9) суммы цифр числа *а*.

4.5. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Хорошо известно (см. простейшие свойства делимости), что любое натуральное число делится на число 1 и на само себя. Таким образом, любое натуральное число *а*, которое больше числа 1, имеет два натуральных делителя: 1 и *а*. При этом есть числа, которые других натуральных делителей не имеют. Например, числа 5, 13, 23. А есть и другие числа, которые имеют больше двух натуральных делителей. Например, 4, 9, 21. Об этом свойстве натуральных чисел было известно еще математикам древности. По числу наличия различных натуральных делителей все натуральные числа разбиваются на три класса. В первый класс попадает число 1. У него ровно один натуральный делитель – это число 1. Больше таких натуральных чисел нет. Этот класс не получил никакого названия. Второй класс составляют натуральные числа, которые имеют ровно два различных натуральных делителя. Такие числа называют *простыми*. К классу простых чисел относятся числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, … (Вопросы о способе нахождения простых чисел и о конечности или бесконечности множества простых чисел будут рассмотрены в следующих двух параграфах.) Все остальные натуральные числа (не попавшие ни в первый, ни во второй классы) образуют класс *составных* чисел. В качестве примера составного числа можно привести любое четное натуральное число, кроме числа 2. Не составляет труда привести и другие примеры составных чисел. Так, если перемножить любые два натуральных числа, которые больше числа 1, то их произведение, очевидно, будет составным числом. Любое составное число имеет больше двух различных натуральных делителей. Отсюда следует, что у любого составного числа есть хотя бы один нетривиальный натуральный делитель, т.е. натуральный делитель, который отличен от этого числа и числа 1. А это, в свою очередь, означает, что у любого составного числа есть хотя бы один натуральный делитель, который меньше этого числа и не равен 1. Выведенный только что факт позволяет легко доказать очень важную теорему.

Теорема 4.7. У любого натурального числа (кроме числа 1) есть хотя бы один простой делитель.

Доказательство. Рассмотрим произвольное натуральное число a, которое отлично от числа 1. Если оно простое, то теорема доказана, так как любое натуральное число делится на себя. Если оно составное, то у него есть делитель a_1, который меньше числа a, но больше числа 1 (этот факт мы только что установили). Если число a_1 простое, то теорема доказана, если же оно составное (а третьего варианта быть не может), то к нему можно применить те же самые рассуждения, что и к числу a. Учитывая, что отношение делимости обладает свойством транзитивности (делитель делителя данного числа сам является делителем этого числа), а также конечность описанного выше процесса (переход от a к a_1, от a_1 к a_2 и т.д. не может не закончиться, так как эти натуральные числа строго убывают, но остаются больше, чем число 1), мы можем утверждать, что теорема доказана.

В заключение этого параграфа сформулируем еще одну теорему, доказательство которой мы предлагаем читателю провести самостоятельно.

Теорема 4.8. Наименьший простой делитель данного произвольного составного числа не превосходит квадратного корня из этого числа.

4.6. РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

Как отличить простое число от составного? Ответ на этот вопрос в одних случаях не составляет никакого труда, а в других случаях это сделать совсем не просто. Если составное число делится на 2, или на 3, или на 5, то установить этот факт помогают признаки делимости, о которых речь шла выше. Если натуральное число не очень большое (например, в пределах первой сотни), то найти все его натуральные делители можно как с помощью признаков делимости, так и выполняя непосредственное деление с остатком (например, столбиком) на возможные делители. Для достаточно больших чисел это уже сделать технически сложно и осуществлять такую проверку каждый раз, когда возникает соответствующий вопрос, не очень разумно. Поэтому некоторые математики, взяв на себя эту трудоемкую техническую работу, занимались расширением таблицы простых чисел, все дальше отодвигая верхнюю границу известных простых чисел. Чтобы как-то автоматизировать этот процесс, нужен некоторый разумный алгоритм, позволяющий распознавать простые (соответственно составные) числа. С появлением ЭВМ были созданы программы, которые позволили за последние 70 лет очень существенно отодвинуть верхнюю границу известных простых чисел. Так, в 2018 году П. Ларошем было найдено простое число, которое в своей десятичной записи содержало 24 862 048 цифр (вот его запись с помощью степени: $2^{82589933} - 1$). Это интересное математическое соревнование, но оно не имеет серьезной практической значимости. Составление таблицы простых чисел (т.е. таблицы, в которой перечислены все простые числа до определенной верхней границы) – это более полезная для теории чисел «вещь». Очень удачный алгоритм составления такой таблицы был предложен еще выдающимся древнегреческим ученым Эратосфеном в III веке до н.э. Этот метод получил название «Решето Эратосфена». Смысл названия станет понятен тогда, когда мы изложим суть этого метода на простом примере.

Итак, пусть нам нужно найти все простые числа в первой сотне натуральных чисел. Для удобства расположим эти числа в виде квадратной таблицы.

Таблица 4.1

Первая сотня натуральных чисел

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Наша цель – оставить в этой таблице только простые числа, т.е. исключить все числа, не являющиеся простыми. Начнем действовать по порядку (в порядке возрастания). Число 1 не является простым, поэтому мы его вычеркиваем. Далее идет число 2. Оно простое, поэтому мы его подчеркиваем. Далее нужно вычеркнуть все числа после числа 2, которые делятся на 2, так как они будут составными (это каждое второе число после числа 2). После завершения этой процедуры вычеркивания первое не вычеркнутое (и не подчеркнутое) число будет простым. Это число 3. Мы его подчеркиваем. Далее вычеркиваем все числа после числа 3, которые делятся на 3, так как они будут составными (это каждое третье число после числа 3). После завершения этой процедуры вычеркивания первое не вычеркнутое (и не подчеркнутое) число будет простым. Это число 5. Мы его подчеркиваем. Далее мы продолжаем поступать аналогичным образом до тех пор, пока не получим (не подчеркнем) все простые числа первой сотни. В результате у нас должна получиться следующая таблица.

Таблица 4.2

Нахождение простых чисел методом решета Эратосфена

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Итак, в первой сотне натуральных чисел оказалось 25 простых чисел.

Замечание. Во-первых, обращаем ваше внимание на то обстоятельство, что если при очередной процедуре вычеркивания нужно вычеркнуть число, которое уже раньше было вычеркнуто, то повторное вычеркивание ничего нового для этого числа не означает: оно так и остается вычеркнутым числом, сколько бы раз мы это не повторили. Во-вторых, процедуру вычеркивания достаточно провести до чисел, кратных числу 7. Когда мы будем вычеркивать числа, которые делятся на 11, на 13 и т.д., то мы не вычеркнем ни одного нового числа (т.е. все вычеркиваемые на этих этапах числа были уже ранее вычеркнуты). Попробуйте дать объяснение этому факту (обратите внимание на теорему 4.8).

А вот теперь мы вполне можем поговорить о смысле названия этого метода. Суть процедуры, которую мы проводили, заключается в том, чтобы исключить из множества всех данных чисел те числа, которые не являются простыми («плохие» числа нужно отсеить от «хороших»). В реальной жизни что-то похожее происходит, когда с помощью решета (сита) отсеивают инородные включения, которые могут присутствовать, например, в муке. Таким образом, появление слова «решето» в названии этого метода вполне оправдано. Есть и другое объяснение. Во времена Эратосфена писали на пластинах, покрытых воском. Применяя описанный метод, «лишние» числа не вычеркивали, а выкалывали. После многочисленных выкалываний восковая пластинка превращалась в решето с большим количеством отверстий.

Замечание. Последователи Эратосфена развивали и совершенствовали этот метод. Особые успехи в этом направлении были достигнуты в XX веке благодаря трудам норвежских математиков В. Бруна (1885–1978) и его ученика А. Сельберга (1917–2007). Среди отечественных математиков можно отметить в этой области труды профессора А.А. Бухштаба (1905–1990), который долгие годы преподавал в МГПИ им. В.И. Ленина (ныне МПГУ).

4.7. БЕСКОНЕЧНОСТЬ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Рассматривая вопрос о составлении таблиц простых чисел, о нахождении наибольшего известного простого числа, мы ничего пока не сказали о том, является ли множество простых чисел бесконечным, либо оно конечно. Это один из основополагающих фактов, который нужно знать в плане изучения натуральных чисел. Если воспользоваться индуктивными соображения (в первой сотне натуральных чисел имеется 25 простых чисел, во второй – 21, в третьей – 16), то можно предположить, что далее простые числа будут встречаться все реже и реже и, в какой-то момент, вообще закончатся. Но это предположение ошибочно! Уже математики Древней Греции знали, что простых чисел бесконечно много и умели это строго доказывать. Приведем доказательство из знаменитого труда Евклида «Начала» (III век до н.э.). Если отнестись к доказательству Евклида предельно строго, то он доказал несколько иную теорему, из которой уже с очевидностью следовало, что простых чисел бесконечно много.

Итак, теорема Евклида на современном математическом языке формулируется и доказывается следующим образом.

Теорема 4.9. (Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел). Для любого конечного множества простых чисел существует простое число, которое ему не принадлежит.

Доказательство. Пусть имеется конечное множество простых чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Обозначим через P произведение всех этих простых чисел. Далее рассмотрим число $M = P + 1$. Это число не совпадает ни с одним простым числом из рассматриваемого множества, так как больше любого такого числа. Если оно простое, то теорема доказана. Если оно составное, то (см. теорему 4.7) у него есть простой делитель. Но этот простой делитель не может совпадать ни с одним простым числом из рассматриваемого множества, так как при делении числа M на любое простое число из рассматриваемого множества в остатке получается число 1. Таким образом, и в этом (заключительном) случае мы убедились в существовании простого числа, которое не принадлежит рассматриваемому множеству простых чисел. Теорема доказана.

4.8. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Пусть у нас имеется произвольное фиксированное составное число a. Как мы уже знаем, у любого составного числа обязательно есть натуральный делитель, который отличен от числа 1 и от самого числа a. Это означает, что число a можно представить в виде произведения двух нетривиальных множителей, каждый из которых больше числа 1, но меньше числа a, т.е. $a = b \cdot c$, где $1 < b < a$ и $1 < c < a$. Если числа b и c являются простыми, то мы получили разложение числа a на простые множители. Если какое-то из этих чисел (а может быть сразу оба) является составным (являются составными), то к каждому составному числу можно применить рассуждения, проведенные выше. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока все множители не окажутся простыми. Гарантией окончания этого процесса служит то, что при разложении составного числа на два нетривиальных множителя, каждый из этих множителей меньше данного составного числа, а процесс уменьшения натуральных чисел не может продолжаться бесконечно.

Итак, мы доказали следующую очень важную теорему.

Теорема 4.10. (Теорема о существовании разложения на простые множители).

Любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей.

Представление составного числа в виде произведения простых множителей принято называть разложением на простые множители. Если все простые множители, на которые раскладывается данное составное число, расположить в порядке не убывания, а потом произведения одинаковых множителей (если они есть) записать в виде степени, то мы получим *каноническое представление* данного числа. Для простого числа его каноническим представлением является само это число.

Покажем на примере, как получить каноническое представление из произвольного разложения на простые множители. Пусть у нас имеется некоторое разложение на простые множители числа 9 809 800 (вопрос о способах разложения натурального числа на простые множители мы обсудим чуть позже), которое выглядит следующим образом:

$$9\,809\,800 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13.$$

Последнее произведение в этой цепочке равенств и есть каноническое представление (разложение) числа 9 809 800.

В общем виде каноническое представление данного числа a выглядит следующим образом:

$$a = p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot \ldots \cdot r^{\gamma}, \tag{4.7}$$

где $p, q, \ldots, r$ – простые числа, причем $p < q < \ldots < r$,

а показатели $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ – натуральные числа.

Ответим теперь на вопрос, каким образом можно разложить натуральное число на простые множители. Для этого можно действовать следующим образом. Сначала получить в свое распоряжение таблицу простых чисел до верхней границы, которая превосходит данное число. Если данное число простое, то задача решена. Если это число составное, то с помощью деления последовательно выделяют из него простые множители, начиная с самого маленького. При этом нужно выделить (с помощью деления) рассматриваемый множитель максимально возможное число раз (для этого удобно использовать калькулятор, а для решения вопроса о делимости – соответствующий признак делимости). Далее переходят к следующему простому множителю и т.д. До тех пор, пока не получается интересующее нас разложение. Приведем в качестве примера нахождение разложения на простые множители числа 2940 (в правом столбике располагаем простые множители, на которые осуществляем деление, а в левом столбике под данным числом – соответствующие частные).

$$\begin{array}{r|l} 2940 & 2 \\ 1470 & 2 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом, $2940 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Когда мы научились для произвольного натурального числа находить его разложение на простые множители, то возникает естественный вопрос: будет ли это разложение единственным? Понятно, что мы не имеем в виду перестановку множителей, а говорим о принципиально ином (по набору простых множителей) разложении. Если допустить, что для одного и того же числа существует два различных разложения на простые множители, то эти разложения должны отличаться, по крайней мере, одним простым множителем p, т.е. с одной стороны это число делится на p, а с другой стороны – не делится на p (так как можно доказать, что любое произведение других простых множителей не может обеспечить делимость на p). Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.11. (Теорема о единственности разложения на простые множители).

Если не учитывать порядок следования множителей, то разложение любого составного числа на простые множители является единственным.

Замечание. Строгое доказательство теоремы 4.11 мы приводить не будем, так как оно сложное, а для нашей аудитории вполне достаточно интуитивного понимания данного факта.

Из теорем 4.10 и 4.11 следует очень важная теорема, которая получила название основной теоремы арифметики.

Теорема 4.12. (Основная теорема арифметики).

Для любого натурального числа, которое отлично от числа 1, существует его каноническое представление (разложение) и оно единственно.

Замечание. Теорема 4.12 не случайно получила такое название. Действительно, сформулированное в этой теореме знание о мультипликативном строении натуральных чисел лежит в основе большого количества свойств этих чисел, а простые числа выступают в роли своеобразных «кирпичиков», из которых построено все грандиозное «здание арифметики».

4.9. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА ДЕЛИТЕЛЯ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Рассмотрим произвольное натуральное число вместе с его каноническим разложением. Следуя формуле (4.7), можем записать, что

$$a = p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot \ldots \cdot r^{\gamma}.$$

Если число b является делителем числа a, то это означает, что существует некоторое натуральное число c такое, что $a = b \cdot c$. Если разложить на простые множители числа b и c, а потом из этих множителей построить одно общее каноническое разложение правой части равенства, то в силу основной теоремы арифметики это каноническое разложение будет полностью совпадать с каноническим разложением для числа a, которое мы записали выше. Это означает, что разложение на простые множители числа b (это же относится и к числу c) не может включать какие-либо другие простые множители кроме множителей из канонического разложения числа a, т.е. простых чисел p, q, …, r. При этом каждый простой множитель не может входить в состав делителя b большее число раз, чем он входит в состав данного числа a, а это число совпадает с соответствующим показателем в исходном каноническом разложении числа a. Пусть, например, $a = 3^2 \cdot 7^3 \cdot 11$. Тогда делитель b этого числа должен иметь следующую мультипликативную структуру: $b = 3^k \cdot 7^m \cdot 11^n$, где $0 \le k \le 2$, $0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 1$. Используя эту структуру, можно без особого труда выписать все делители числа $33957 = 3^2 \cdot 7^3 \cdot 11$. Для этого достаточно выбрать возможный набор показателей k, m, n (границы изменения этих чисел нам известны). После этого вычислить соответствующий делитель. Например, если $k = 2$, $m = 0$, $n = 1$, то получается делитель $3^2 \cdot 7^0 \cdot 11^1 = 99$. Всего возможных комбинаций показателей будет $(2 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (1 + 1) = 24$. Это означает, что у числа 33 957 имеется 24 различных натуральных делителя (тривиальные делители 1 и 33 957 включены в это число).

Без особого труда можно вывести общую формулу для произвольного делителя натурального числа по его каноническому разложению, а также формулу для вычисления числа натуральных делителей у данного натурального числа. Мы предлагаем читателю сделать это самостоятельно. Если возникнут затруднения, то можно обратиться к пункту 10.27 работы [1].

4.10. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Рассмотрим два натуральных числа. Для примера возьмем числа 36 и 60. Далее найдем все натуральные делители каждого из этих чисел. Так как числа не очень большие, то такой поиск можно осуществить с помощью непосредственной проверки на делимость всех чисел, которые могут выступать в этой роли. Пусть A – это множество всех натуральных делителей числа 36, а B – числа 60. Тогда получим, что $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Найдем множество общих натуральных делителей для чисел 36 и 60. Это будет пересечение множеств A и B: $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Итак, у чисел 36 и 60 оказалось шесть общих делителей. Понятно, что множество общих натуральных делителей двух любых натуральных чисел не может оказаться пустым, так как в этом множестве обязательно будет число 1. Кроме того, это множество не может быть бесконечным, так как множество делителей любого натурального числа конечно. Имея в распоряжении эти два факта о множестве общих делителей двух любых натуральных чисел, мы можем утверждать, что в этом множестве есть наибольший элемент. Наибольший элемент множества общих делителей двух натуральных чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* натуральных чисел a и b и обозначается НОД (a, b). В нашем примере НОД (36, 60) = 12.

Рассмотрим теперь некоторые свойства НОД (a, b). Начнем с простейших.

Теорема 4.13. Для любого натурального числа a НОД (a, a) = a.

Теорема 4.14. Для любого натурального числа a НОД (a, 1) = 1.

Теорема 4.15. Для любых натуральных чисел a и b, если $a \vdots b$, то НОД (a, b) = b.

Доказательство этих теорем мы предлагаем провести читателю самостоятельно в качестве упражнения.

В теореме 4.14 мы рассмотрели случай, когда наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1. Такая ситуация возможна и не только в тех случаях, когда одно из чисел равно 1. Например, если рассмотреть два различных простых числа p и q, то НОД (p, q) = 1. Доказать это не составляет большого труда. Достаточно вспомнить, какие натуральные делители есть у простого числа. Но можно привести пример и составных чисел, наибольший общий делитель которых равен числу 1. Так, легко установить, что НОД (8, 9) = 1. Пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен числу 1, называются *взаимно простыми*. В теории делимости они играют очень важную роль. Приведем такой пример. Если некоторое натуральное число делится на числа 3 и 4, то это число обязательно делится на их произведение – число 12. Если некоторое натуральное число делится на числа 2 и 6, то это число не обязано делиться на их произведение – число 12. Почему при очень похожих условиях выводы получаются принципиально различные. Все дело в том, что числа 3 и 4 являются взаимно простыми, а числа 2 и 6 взаимно простыми не являются. Попробуйте объяснить, почему наличие того, что числа являются взаимно простыми, оказывает такое влияние на делимость.

В заключение этого параграфа приведем еще одну очень важную теорему.

Теорема 4.16. Если НОД (a, b) = d, то НОД (a**:**d, b**:**d) = 1 (для любых натуральных чисел a и b).

Примем эту теорему без доказательства. При желании с доказательством можно ознакомиться в п. 10.30 работы [1]. А вот один из примеров ее применения приведем. Школьникам хорошо известна такая задача: сократите данную обыкновенную дробь a / b до несократимой. Чтобы это сделать, достаточно (согласно теореме 4.16) разделить числитель и знаменатель этой дроби на НОД (a, b).

4.11. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Рассмотрим два натуральных числа. Для примера возьмем числа 4 и 7. Далее найдем все натуральные кратные этих чисел. Пусть A – это множество всех натуральных кратных числа 4, а B – множество всех натуральных кратных числа 7. Легко понять, что во множество A будут входить числа 4, 8, 12, 16, 20 и т.д., т.е. все натуральные числа вида $4n$, где n – произвольное натуральное число. Аналогично во множество В будут входить числа 7, 14, 21, 28, 35 и т.д., т.е. все натуральные числа вида $7k$, где k – произвольное натуральное число. Найдем теперь все общие кратные чисел 4 и 7. Для этого нам нужно найти пересечение множеств C и D. Так как множества C и D являются бесконечными, то описать сразу их пересечение не такая простая задача, как задача по описанию множества общих делителей из предыдущего параграфа. Но указать одно общее кратное мы сможем без особого труда. Хорошо известно, что произведение двух чисел всегда делится на каждый свой множитель. Поэтому число 28 ($4 \cdot 7 = 28$) является общим кратным чисел 4 и 7, т.е. число 28 – это элемент множества $C \cap D$. Легко понять, что числа вида $28 \cdot m$, где m – произвольное натуральное число, также являются общими кратными чисел 4 и 7. С помощью этого примера мы фактически доказали, что множество общих кратных любых двух натуральных чисел не может быть пустым. А это означает, что в таком множестве есть наименьший элемент (любое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент). Этот наименьший элемент и называется *наименьшим общим кратным* двух данных натуральных чисел a и b. Обозначается это число с помощью соответствующей аббревиатуры: НОК (a, b).

Понятие наименьшего общего кратного двух натуральных чисел знакомо всем школьникам в виде наименьшего общего знаменателя при сложении или вычитании обыкновенных дробей.

Рассмотрим простейшие свойства НОК (a, b).

Теорема 4.17. Для любого натурального числа a НОК (a, a) = a.

Теорема 4.18. Для любого натурального числа a НОК (a, 1) = a.

Теорема 4.19. Для любых натуральных чисел a и b, если $a \vdots b$, то НОК (a, b) = a.

4.12. НАХОЖДЕНИЕ НОД И НОК ДВУХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Если мы знаем каноническое разложение двух данных чисел, то это очень упрощает решение вопроса о нахождении НОД и НОК этих чисел. Покажем это на примере.

Пусть нам известны канонические разложения чисел 6600 и 24 500. Запишем эти канонические разложения и сконструируем с их помощью НОД и НОК чисел 6600 и 24 500.

Итак, $6600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ и $24\,500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$. Сконструируем сначала НОД (6600, 24 500). Так как мы хотим построить общий делитель, то в его разложение должны входить только те простые множители, которые являются общими для двух данных разложений, т.е. это множители 2 и 5 (другие простые множители входить не могут, так как тогда нарушится делимость хотя бы одного из двух данных чисел на это число). Теперь нужно понять, с какими показателями должны войти эти множители в каноническое разложение НОД (6600, 24 500). Так как в первое число множитель 2 входит с показателем 3, а во второе – с показателем 2, то в искомый НОД множитель 2 должен входить с показателем, который не превышает эти два показателя и является максимально возможным с таким ограничением. Этому требованию удовлетворяет минимальный из двух имеющихся показателей, т.е. показатель 2 ($min(3; 2) = 2$). Аналогично решается вопрос и для множителя 5. Этот множитель входит с показателем $min(2, 3) = 2$. Таким образом, НОД (6600, 24 500) = $2^2 \cdot 5^2 = 100$.

Сконструируем теперь НОК (6600, 24 500). Прежде всего, обратим внимание на тот факт, что в каноническое разложение любого общего кратного обязательно должны входить все простые множители, которые присутствуют в разложении как одного числа, так и другого (если какой-то из этих множителей будет отсутствовать, то нарушится требование делимости этого числа на хотя бы одно из двух данных чисел). При этом показатель степени данного простого множителя не может быть меньше показателя степени этого простого множителя, с которым он входит в разложение хотя бы в одно из данных чисел. Очевидно, что в разложение общего кратного могут «дополнительно» входить другие простые множители, но при конструировании наименьшего общего кратного они нам не потребуются, так как будут противоречить идее минимальности. Таким образом, нам стало понятно, что в каноническое разложение НОК (6600, 24 500) должны входить простые множители 2, 3, 5, 7, 11. Теперь разберемся с показателями степени для этих множителей. Множитель 2 входит в каноническое разложение числа 6600 с показателем 3, а в каноническое разложение числа 24 500 – с показателем 2. Это означает, что в каноническое разложение НОК этих чисел множитель 2 должен входить с показателем 3, т.е. с максимальным показателем из двух имеющихся ($max(3; 2) = 3$). Аналогичным образом находятся показатели для других простых множителей. В итоге получается, что НОК (6600, 24 500) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 1\,617\,000$.

4.13. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НОД И НОК ДВУХ ЧИСЕЛ

В этом параграфе мы установим связь между произвольным общим делителем и наибольшим общим делителем двух данных чисел, а также между произвольным общим кратным и наименьшим общим кратным двух данных чисел.

Теорема 4.20. Наибольший общий делитель любых двух натуральных чисел a и b делится на любой их общий делитель d.

Доказательство. Для доказательства достаточно сопоставить мультипликативную структуру НОД (a, b) и произвольного общего делителя этих чисел числа d. В предыдущем параграфе мы установили, что любой общий делитель двух данных чисел в своем разложении не должен иметь других простых множителей, кроме общих для канонического разложения этих чисел. Пусть это будут простые множители $p, q, \ldots, r$. Тогда любой общий делитель может быть записан в виде $p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot \ldots \cdot r^{\gamma}$. При этом НОД ($a$, b) получается тогда, когда каждый из показателей $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ принимает максимально возможное значение. Значит, у произвольного общего делителя d ни один показатель не может превысить соответствующего максимального значения, которое имеется у этого показателя в НОД (a, b). По определению отношения делимости получаем, что НОД (a, b) делится на d. Теорема доказана.

Пример. В п. 4.10 мы установили множество общих делителей для чисел 36 и 60. Это числа 1, 2, 3, 4, 6, 12. При этом НОД (36; 60) = 12. Очевидно, что НОД (36; 60) делится на любой общий делитель.

Теорема 4.21. Любое общее кратное k любых двух натуральных чисел a и b делится на наименьшее общее кратное этих чисел.

Замечание. Доказательство теоремы 4.21 можно провести аналогично тому, как мы провели доказательство теоремы 4.20. Но есть и другое доказательство этой теоремы, которое мы хотели бы привести.

Доказательство. Разделим с остатком общее кратное k на НОК (a, b). Обозначим получившийся остаток через r. По определению деления с остатком выполняется двойное неравенство $0 \leq r <$ НОК (a, b). Учитывая, что числа k и НОК (a, b) делятся и на a, и на b, легко установить (опираясь на теоремы о делимости произведения и о делимости разности), что на числа a и b делится число r. Это означает, что число r является общим кратным (не обязательно натуральным) для чисел a и b. Но натуральное общее кратное чисел a и b не может быть меньше, чем наименьшее общее кратное этих чисел (а выше мы установили, что $r <$ НОК (a, b)). Поэтому число r не является натуральным, т.е. $r = 0$. Таким образом, мы доказали, что k делится на НОК (a, b) нацело. Теорема доказана.

4.14. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО НОД И НОК ДВУХ ЧИСЕЛ

В этом параграфе мы рассмотрим свойство, которое связывает между собой наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух данных чисел. При доказательстве соответствующей теоремы мы будем опираться на основную теорему арифметики, которая позволяет из канонических разложений множителей легко получить каноническое разложение произведения. Например, если

$a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$ и $b = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 17^2$,

то $a \cdot b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{2+3} \cdot 11^{1+1} \cdot 17^2 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 11^2 \cdot 17^2$.

Теорема 4.22. (Основное свойство НОД и НОК двух чисел).

Для любых двух натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$a \cdot b = НОД\,(a, b) \cdot НОК\,(a, b). \qquad (4.8)$$

Доказательство. Пусть у нас имеется два произвольных натуральных числа a и b, и мы знаем их канонические разложения. Перечислим все простые множители, которые входят хотя бы в одно из этих канонических разложений, обозначив их следующим образом: $p, q, \ldots, r$. Рассмотрим один из этих множителей. Например, множитель p. Для этого множителя справедливо одно и только одно утверждение из двух, приведенных ниже:

1) простой множитель p входит в состав канонического разложения только одного из двух данных чисел a или b;
2) простой множитель p входит в состав канонического разложения сразу двух данных чисел a и b.

В первом случае множитель p будет входить с некоторым натуральным показателем α не только в состав канонического разложения только одного из чисел a или b, но и в состав канонического разложения их произведения. Другими словами, в каноническое разложение левой части равенства (4.8) будет входить множитель p^α. Если теперь обратиться к содержанию п. 4.12, то мы можем сказать, что в каноническое разложение НОД (a, b) простой множитель p входить не будет, а в каноническое разложение НОК (a, b) будет входить с показателем α. Это означает, что в состав канонического разложения и правой части равенства (4.8) будет входить множитель p^α.

Во втором случае множитель p будет входить с некоторым натуральным показателем α в состав канонического разложения одного из чисел a или b, а с натуральным показателем β – в состав канонического разложения другого из этих чисел. Поэтому в каноническое разложение левой части равенства (4.8) будет входить множитель $p^{\alpha+\beta}$. Если теперь опять обратиться к содержанию п. 4.12, то мы можем сказать, что в каноническое разложение НОД (a, b) простой множитель p будет входить с показателем $min(\alpha, \beta)$, а в каноническое разложение НОК (a, b) – с показателем $max(\alpha, \beta)$. Таким образом, в каноническое разложение и правой части равенства (4.8) будет входить тот же множитель: $p^{min(\alpha,\beta)+max(\alpha,\beta)} = p^{\alpha+\beta}$.

Итак, мы установили, что в канонических разложениях левой и правой частей равенства (4.8) имеет место полное совпадение той составляющей, которая определяется простым множителем p. Аналогично можно доказать, что такое же совпадение имеет место и для других простых множителей q, …, r. Таким образом, канонические разложения левой и правой частей равенства (4.8) полностью совпадают. Значит, равенство (4.8) является верным. Теорема доказана.

Замечание. В формуле (4.8) участвуют четыре натуральных числа: a, b, НОД (a, b) и НОК (a, b). Если нам известны три из этих четырех чисел, то с помощью формулы (4.8) не составляет труда вычислить четвертое число. В частности, это означает, что искать решение двух разных задач (нахождения НОД (a, b) и нахождения НОК (a, b)) совсем не обязательно. Достаточно уметь решать одну из них. Тогда решение второй можно найти по формуле (4.8). В следующем параграфе мы рассмотрим алгоритм, который позволяет достаточно быстро и просто находить НОД (a, b). А значит, и при нахождении НОК (a, b) мы сначала можем воспользоваться этим алгоритмом, а уже потом формулой (4.8).

Замечание. Из формулы (4.8) следует, что для взаимно простых чисел a и b их наименьшее общее кратное равно их произведению (НОК (a, b) = $a \cdot b$). А этот факт позволяет обосновать следующее утверждение: если некоторое число делится на два числа, которые являются взаимно простыми, то это число делится и на их произведение. Например, если некоторое число делится на 3 и на 4 (числа 3 и 4 являются взаимно простыми), то оно делится на их произведение, т.е. на 12. Для обоснования этого утверждения нужно еще вспомнить, что любое общее кратное двух чисел делится на их наименьшее общее кратное. (Строгое доказательство этого утверждения мы предлагаем провести самостоятельно.) С помощью рассмотренного в этом замечании утверждения можно конструировать признаки делимости на некоторые составные числа. Например, признак делимости на 18 можно сформулировать следующим образом: если последняя цифра десятичной записи данного числа является четной, а сумма цифр этой десятичной записи делится на 9, то данное число делится на 18 (учитывая, что числа 2 и 9 являются взаимно простыми, мы получаем возможность соединить в признаке делимости на 18 признаки делимости на 2 и на 9).

4.15. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА НАХОЖДЕНИЯ НОД ДВУХ ЧИСЕЛ

В заключительном параграфе данной главы мы рассмотрим алгоритм, который позволяет находить наибольший общий делитель двух произвольных натуральных чисел, не прибегая к разложению на простые множители. Этот алгоритм основан на делении с остатком и носит имя уже неоднократно упомянутого нами величайшего древнегреческого математика Евклида.

Для обоснования этого алгоритма нам потребуется два утверждения. Во-первых, это свойство НОД двух чисел, сформулированное в теореме 4.15. Во-вторых, лемма, которую мы сейчас докажем.

Лемма 4.1. Пусть при делении с остатком натурального числа a на натуральное число b получается ненулевой остаток r. Тогда НОД (a, b) = НОД (b, r).

Доказательство. По условию $a = b \cdot q + r$, где q и r – целые неотрицательные числа, причем $0 < r < b$. Из записанного выше равенства и свойств делимости (делимость суммы, разности и произведения) следует, что любой общий делитель чисел a и b будет также общим делителем чисел b и r. И наоборот, любой общий делитель чисел b и r будет общим делителем чисел a и b. Таким образом, мы установили, что множество общих делителей чисел a и b равно множеству общих делителей чисел b и r. А это, в свою очередь, означает, что равны наибольшие элементы этих множеств (если говорить строго, то речь идет об одном и том же множестве). Поэтому НОД (a, b) = НОД (b, r). Лемма доказана.

Сформулируем теперь сам алгоритм Евклида нахождения НОД (a, b).

Пусть нам даны два натуральных числа a и b, для которых нужно найти их наибольший общий делитель. Для решения этой задачи будем действовать следующим образом.

1. Разделим число a на число b с остатком. Пусть в остатке получается число r.

Если $r = 0$, то по теореме 4.15 получаем, что НОД (a, b) = b. Задача решена.

Если $r > 0$, то по лемме 4.1 получаем, что НОД (a, b) = НОД (b, r).

2. Разделим число b на число r с остатком. Пусть в остатке получается число r_1.

Если $r_1 = 0$, то по теореме 4.15 получаем, что НОД (b, r) = r. А с учетом пункта 1 данного алгоритма НОД (a, b) = r. Задача решена.

Если $r_1 > 0$, то рассуждаем как в соответствующем случае пункта 1 данного алгоритма и получаем, что НОД (a, b) = = НОД (b, r) = НОД (r, r_1).

3. Повторяем все, что мы делали в пункте 2 для чисел b и r, уже для чисел r и r_1, потом (если потребуется) для чисел r_1 и r_2 и т.д. Этот процесс обязательно завершится результативно, так как целые неотрицательные числа b, r, r_1, r_2, … строго убывают, что гарантирует появление числа 0 среди остатков от деления на определенном шаге (может быть уже на первом). А появление нулевого остатка останавливает выполнение алгоритма, так как задача становится решенной.

Приведем пример применения алгоритма Евклида для нахождения НОД (2093, 1265).

2093 : 1265 = 1 (*ост.* 828)
1265 : 828 = 1 (*ост.* 437)
828 : 437 = 1 (*ост.* 391)
437 : 391 = 1 (*ост.* 46)
391 : 46 = 8 (*ост.* 23)
46 : 23 = 2 (*ост* 0)

Последний ненулевой остаток и есть искомый наибольший общий делитель, т.е. НОД (2093, 1265) = 23.

Замечание. При выполнении алгоритма Евклида можно использовать привычную запись деления столбиком (уголком).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 4

1. Докажите свойства 1) – 5) из п. 4.1.

2. Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$, при условии, что a, b, n – произвольные натуральные числа, причем $a > b$.

3. Докажите, что $a^n + b^n$ делится на $a + b$, при условии, что a, b, n – произвольные натуральные числа, причем n – нечетное число.

4. Докажите, что при любом натуральном числе n число n^3-n делится на 6.

5. Докажите, что при любом нечетном натуральном числе n число n^3-n делится на 24.

6. Докажите, что при любом нечетном натуральном числе n число $n^2 - 1$ делится на 8.

7. Докажите, что сумма квадратов двух произвольных натуральных чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел делится на 3.

8. Делится ли число $11^{10} - 1$ на 10?

9. Докажите, что модуль разности между любым натуральным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.

10. Докажите, что любое трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.

11. Докажите, что если $ab + cd$ делится на $a + c$, то $ad + bc$ делится на $a + c$, где a, b, c, d – произвольные натуральные числа.

12. Докажите, что сумма $222^{777} + 777^{222}$ делится на 37.

13. Докажите, что число $26^{26} - 1$ делится на 5.

14. Запишите число 1000 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых делится на 13, а второе – на 53.

15. Докажите, что если из данного натурального числа вычесть сумму цифр этого числа, то получится число, которое делится на 9.

16. Докажите, что если у двух натуральных чисел сумма цифр одинаковая, то модуль разности этих чисел делится на 9.

17. Выведите признаки делимости на 2, на 3, на 4 и на 6 в двенадцатеричной системе счисления.

18. Установите, является ли число 353 простым.

19. Какие из чисел, находящихся между числами 3 628 802 и 3 628 810 являются простыми?

20. Доказать, что сумма квадратов двух взаимно простых чисел не делится на 3.

21. Укажите десять последовательных натуральных составных чисел.

22. Докажите, что если число n является составным, то число $2^n - 1$ также является составным.

23. Доказать, что никакое простое число не может быть представлено в виде суммы любого числа последовательных нечетных чисел.

24. Докажите, что если произведение двух чисел делится на простое число, то хотя бы один из множителей этого произведения делится на данное простое число.

25. Доказать, что любое простое число, которое больше числа 3, можно записать в виде $6n + 1$ или $6n - 1$, где n – натуральное число.

26. Доказать, что если простое число больше, чем 3, то его квадрат при делении на 24 дает в остатке 1.

27. Доказать, что простых чисел вида $6n - 1$ (где n – натуральное число) бесконечно много.

28. Найдите наименьшее общее кратное всех однозначных чисел.

29. Докажите, что наименьшее общее кратное двух любых натуральных чисел делится на их наибольший общий делитель.

30. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 1800, наибольший общий делитель этих же чисел равен 75. Найдите одно из этих чисел, если другое равно 225.

31. Найдите два натуральных числа, если наибольший общий делитель этих чисел равен 24, а их наименьшее общее кратное равно 2496. Укажите все варианты ответа.

32. Найдите два натуральных числа, если их произведение равно 12 600, а их наименьшее общее кратное равно 6300.

33. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 100 белых и 80 красных гвоздик? (Гвоздики одного цвета друг от друга не отличаются.)

34. Даны числа 14, 18, 21, 36, 45, 60, 78, 99. Составьте из этих чисел всевозможные пары взаимно простых чисел.

35. При каких натуральных значениях n числа вида $2n + 3$ и $n + 1$ будут взаимно простыми?

36. Найдите натуральное число, которое больше числа 1 и которое при делении на числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 дает в остатке число 1.

37. Доказать, что если число вида $2^n + 1$ является простым, то n является степенью числа 2.

38. Доказать, что если два числа являются взаимно простыми, то взаимно простыми будут их сумма и произведение.

39. Доказать, что любое простое число, которое больше числа 2, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел, притом единственным образом.

40. Вычислите с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель чисел 16 484 и 42 282.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 4

1. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. М., 1998.
2. *Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П.* Математика: учеб. пособие по специальности «Педагогика и методика начального обучения». М.: Просвещение, 1977.
3. *Аматова Г.М., Аматов М.А.* Математика. Кн. 1. М.: Академия, 2008.
4. *Стойлова Л.П., Пышкало А.М.* Основы начального курса математики: учеб. пособие для учащихся педучилищ. М.: Просвещение, 1988.

ГЛАВА 5.
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА КАК ОПЕРАТОРЫ

В педагогической литературе практически не используется интерпретация числа (натурального, целого, рационального, вещественного, комплексного) как оператора, предложенная в [1]. Тем самым не только упускается возможность изложить единую точку зрения на число, но и возможность сделать это изложение кратким. В этой главе мы сосредоточимся на применении операторного подхода к построению множества Q_+ положительных рациональных чисел (глава представляет собой расширенное и переработанное изложение заметки [5]).

5.1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА КАК ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СИСТЕМЕ НАПРАВЛЕННЫХ ОТРЕЗКОВ

Пусть E – совокупность всех таких направленных отрезков на числовой прямой, начало которых совпадает с точкой O (т.е. с началом координат).

Суммой двух направленных отрезков OA и OB будем считать отрезок OC, получающийся в результате следующего построения. Нужно отрезок OB переместить вдоль числовой прямой так, чтобы новое положение его начальной точки совпало с точкой A, тогда новое положение его концевой точки будет концом направленного отрезка OC.

Будем рассматривать произвольное натуральное число n как *оператор*, который удлиняет направленные отрезки (векторы) из E в n раз. Далее, каждому натуральному числу p сопоставим также оператор p^{-1}, укорачивающий вектора из E в p раз.

Результат применения операторов n и p^{-1} к произвольно взятому вектору e из Е будем обозначать так:

$$ne;\ p^{-1}e. \tag{5.1}$$

Записи вида npe, $np^{-1}e$, ... мы будем понимать как результат последовательного применения соответствующих операторов к вектору e.

А именно,

$$npe = n(pe),\ np^{-1}e = n(p^{-1}e).$$

Определение 5.1. Пусть T и S – два действующих на E оператора. Скажем, что эти операторы *равны* ($T = S$), если для любого вектора e из E $Te = Se$.

Лемма 5.1. *Для любых натуральных n и p справедливы операторные равенства*:

$$np = pn = (pn); \tag{5.2}$$

$$np^{-1} = p^{-1}n; \tag{5.3}$$

$$n^{-1}p^{-1} = p^{-1}n^{-1} = (pn)^{-1}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Равенства (5.2) геометрически очевидны. Докажем, например, соотношение (5.3). Нетрудно видеть, что равенство

$$np^{-1}e = p^{-1}ne$$

равносильно равенству

$$pnp^{-1}e = pp^{-1}ne.$$

Однако в силу (5.2) предыдущее равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$npp^{-1}e = pp^{-1}ne,$$

или, что то же самое,

$$ne = ne.$$

Так как последнее равенство, очевидно, верно всегда, то тем самым доказано и соотношение (5.3).

Теорема 5.1. *Пусть k, p, t, n – произвольные натуральные числа, понимаемые как операторы, действующие на E. Тогда:*

$$kp^{-1} = tn^{-1} \text{ тогда и только тогда, когда } kn = pt. \tag{5.5}$$

Доказательство. Равенство $kp^{-1} = tn^{-1}$ означает в точности, что для любого e из E должно быть

$$kp^{-1}e = tn^{-1}e. \tag{5.6}$$

При каждом фиксированном e равенство (5.6) – это равенство двух направленных отрезков, принадлежащих системе E. Растянув эти направленные отрезки в np раз, мы, очевидно, получим новое равенство

$$npkp^{-1}e = nptn^{-1}e, \tag{5.6′}$$

равносильное (5.6). В силу леммы все операторы в обеих частях равенства (5.6′) перестановочны между собой. Поэтому в левой части (5.6′) можно сократить операторы p и $p^{-1,}$ а в правой части (5.6′) – сократить n и $n^{-1.}$ Таким образом, (5.6′) оказывается равносильным следующему равенству векторов:

$$kne = pte,$$

которое, очевидно, возможно тогда и только тогда, когда

$$kn = pt.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В школьной математике не говорят об операторах, действующих на вектора, а говорят так: *«дробь k / p выражает длину рассматриваемого отрезка при заданной единице длины e»*. Соотношение (5.5) в школьных обозначениях, очевидно, будет выглядеть так:

$$k / p = t / n \textit{ тогда и только тогда, когда } kn = pt. \tag{5.5′}$$

Замечание 2. Каждый оператор вида kp^{-1} (или, что то же самое, вида k / p) мы будем называть *дробью*. Доказанная выше теорема 5.1 позволяет нам ввести в рассмотрение класс *равных* дробей, такой класс мы будем называть *положительным рациональным числом*. Совокупность всех положительных рациональных чисел будем обозначать через Q_+.

Замечание 3. Опираясь на теорему о существовании и единственности разложения натурального числа на простые множители, покажем, что каждое рациональное число из Q_+ может быть представлено одной и только одной несократимой дробью, числитель и знаменатель которой – натуральные числа. Докажем вначале *единственность*, предположив противное. А именно, допустим, что найдутся такие натуральные k, p, t, n, что:

А) $k / p = t / n$,

Б) обе дроби k / p и t / n несократимы,

В) $k \neq t$ или $p \neq n$.

Тогда в силу условия *А*) справедливо равенство из правой части (5.5′). Но так как дробь k / p несократима, то никакие простые множители числа k не могут входить в разложение на простые множители числа p. Следовательно, в силу равенства из правой части (5.5′) все эти множители (взятые в соответствующих степенях) содержатся в разложении числа t. Аналогичное рассуждение, опирающееся на несократимость дроби t / n, позволяет заключить, что все простые множители числа t (взятые в соответствующих степенях) входят в разложение числа k. Отсюда, очевидно, следует, что

$$k = t.$$

Сокращая теперь в правой части (5.5′) на k, получаем

$$n = p.$$

Последние два равенства противоречат предположению *B*). Тем самым единственность несократимой дроби в классе равных дробей доказана.

Существование несократимой дроби в классе равных дробей очевидным образом следует из теоремы о существовании и единственности разложения натурального числа на простые множители.

5.2. СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ И СЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть $\frac{k}{p}$ и $\frac{t}{n}$ – две дроби. Пусть, далее, e – произвольный вектор из E.

Тогда $\frac{k}{p}e$ и $\frac{t}{n}e$ – два вектора, также принадлежащих E. Поэтому сумма этих векторов, очевидно, определена и принадлежит E.

Остается лишь выяснить, при помощи какого оператора эта сумма выражается непосредственно через e.

Имеем в силу доказанного выше Утверждения:

$$\frac{k}{p}e + \frac{t}{n}e = \frac{kn}{pn}e + \frac{pt}{pn}e,$$

откуда геометрически очевидно, что

$$\frac{k}{p}e + \frac{t}{n}e = \frac{kn+pt}{pn}e. \tag{5.7}$$

Так как вектор e из системы E был взят произвольным, то (5.7) задает соответствие между множеством упорядоченных пар дробей и множеством дробей:

$$\left(\frac{k}{p}; \frac{t}{n}\right) \to \frac{kn+pt}{pn}. \tag{5.8}$$

Это соответствие принято называть *правилом сложения дробей* и записывать в виде:

$$\frac{k}{p}+\frac{t}{n}=\frac{kn+pt}{pn}. \tag{5.8′}$$

Замечание 1. Существенно, что мы не вводим волевым образом операцию сложения дробей, а всего лишь даем название соответствию (5.8), которое возникает само естественным образом.

Замечание 2. Хотя в (5.8′) формально участвуют дроби, а не классы равных дробей, фактически (5.8′) представляет собой правило сложения рациональных чисел, заключающееся в следующем.

Чтобы сложить два положительных рациональных числа, нужно в каждом из соответствующих классов равных между собой дробей выбрать по одной дроби и воспользоваться правилом (5.8′).

Заметим, что проверять корректность этого определения, т.е. независимость результирующего оператора от выбора конкретных дробей из соответствующих классов *не нужно*. Действительно, замена дробей в левой части (5.7) на любые равные им дроби, очевидно, не меняет результирующего вектора. Следовательно, результирующая дробь в правой части (5.7) обязана замениться при этом на дробь, равную $(kn + pt) / pn$.

Замечание 3. Пусть p / n – произвольно взятая дробь. Нам будет удобно ввести обозначение $\{p / n\}$для соответствующего класса равных между собой дробей, т.е. для соответствующего числа из Q_+. В этих обозначениях правило сложения положительных рациональных чисел запишется в виде:

$$\left\{\frac{k}{p}\right\}+\left\{\frac{t}{n}\right\}=\left\{\frac{kn+pt}{pn}\right\}. \tag{5.8″}$$

5.3. ОТНОШЕНИЕ «МЕНЬШЕ» НА МНОЖЕСТВЕ Q_+

Определение 5.2. Пусть k / p и t / n – две дроби. *Скажем, что*

$$k / p < t / n, \tag{5.9}$$

если для произвольно взятого вектора е

$$kp^{-1}e \text{ короче, чем } tn^{-1}e. \tag{5.10}$$

Попробуем выяснить, при каких условиях на *k*, *p*, *t*, *n* справедливо соотношение (5.10). Нетрудно видеть, однако, что (5.10) равносильно соотношению

$$pnkp^{-1}e \text{ короче, чем } pntn^{-1}e. \qquad (5.11)$$

В силу перестановочности операторов растяжения и сжатия, в левой части (5.11) сокращаются операторы p и p^{-1}, а в правой части (5.11) сокращаются операторы n и n^{-1}. В результате (5.10) оказывается равносильным соотношению

$$kne \text{ короче, чем } pte. \qquad (5.12)$$

Однако (5.12), очевидно, выполняется в том и только том случае, когда $kn < pt$.

Итак, мы получили следующий результат:

$$k / p < t / n \text{ тогда и только тогда, когда } kn < pt. \qquad (5.13)$$

Замечание. Определение отношения меньше очевидным образом переносится с дробей на рациональные числа. При этом (5.13) приобретает вид:

$$\{k / p\} < \{t / n\} \text{ тогда и только тогда, когда } kn < pt. \qquad (5.13')$$

5.4. ВЫЧИТАНИЕ В Q_+

Пусть a, b, c – произвольные числа из Q_+ такие, что $b < a$. Определим в Q_+ вычитание как операцию, обратную сложению. А именно, положим по определению:

$$a - b = c \text{ тогда и только тогда, когда } a = c + b.$$

Пусть $\{k / p\} < \{t / n\}$. Тогда из приведенного выше определения нетрудно вывести, что

$$\{\frac{t}{n}\} - \{\frac{k}{p}\} = \{\frac{tp-kn}{pn}\}. \qquad (5.14)$$

5.5. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ И УМНОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим вектор из E, получающийся в результате последовательного применения дробей $\frac{k}{p}$ и $\frac{t}{n}$ к вектору e. Опираясь на доказанную выше теорему 5.1, легко получаем, что

$$\frac{k}{p}\left(\frac{t}{n}e\right) = \frac{kt}{pn}e. \tag{5.15}$$

Поскольку вектор e в (5.15) произволен, заключаем, что равенство (5.15) задает соответствие между множеством упорядоченных пар дробей и множеством дробей:

$$\left(\frac{k}{p}; \frac{t}{n}\right) \to \frac{kt}{pn}. \tag{5.16}$$

Это соответствие принято называть *правилом умножения дробей* и записывать в виде:

$$\frac{k}{p} \cdot \frac{t}{n} = \frac{kt}{pn}. \tag{5.17}$$

Как и в случае сложения, *полученное соотношение фактически задает правило умножения положительных рациональных чисел:*

$$\left\{\frac{k}{p}\right\} \cdot \left\{\frac{t}{n}\right\} = \left\{\frac{kt}{pn}\right\}. \tag{5.17$'$}$$

Корректность этого правила (т.е. независимость получающегося оператора от выбора конкретных дробей из соответствующих классов) доказывается точно так же, как в случае сложения.

Замечание. Как и в случае сложения, мы не вводим операцию умножения дробей волевым образом, а всего лишь даем название объективно существующему соответствию (5.16).

5.6. ДЕЛЕНИЕ В Q_+

Пусть a, b, c – произвольные числа из Q_+. Определим в Q_+ деление как операцию, обратную умножению. А именно, положим по определению:

$a : b = c$ тогда и только тогда, когда $a = cb$.

Из приведенного выше определения нетрудно вывести, что

$$\left\{\frac{t}{n}\right\} : \left\{\frac{k}{p}\right\} = \left\{\frac{tp}{kn}\right\}. \tag{5.18}$$

Из (5.18) и (5.17′) следует, что деление в Q_+ фактически сводится к умножению:

$$\{\frac{t}{n}\} : \{\frac{k}{p}\} = \{\frac{t}{n}\} \cdot \{\frac{p}{k}\}.$$

Замечание. После того, как операции в Q_+ введены, множество положительных рациональных чисел можно считать построенным. Возникает, однако, вопрос: как связано множество натуральных чисел N с только что построенным множеством Q_+?

Ответ на этот вопрос таков: сопоставим взаимно-однозначным образом каждому натуральному числу n положительное рациональное число $\{n / 1\}$. Нетрудно убедиться в том, что при таком сопоставлении операции в N оказываются согласованы с операциями в Q_+. Например, сумме натуральных чисел $n + m$, очевидно, должно быть сопоставлено рациональное число $\{(n + m) / 1\}$, т.е. сумма рациональных чисел $\{n / 1\} + \{m / 1\}$. Аналогичным образом доказывается согласованность остальных арифметических операций в N с соответствующими операциями в Q_+.

Теперь мы можем просто-напросто отождествить множество натуральных чисел N с подмножеством множества Q_+, состоящим из рациональных чисел вида $\{n / 1\}$.

5.7. СОИЗМЕРИМОСТЬ И НЕСОИЗМЕРИМОСТЬ

Пусть e и f – два отрезка из системы E. Говорят, что эти отрезки *соизмеримы*, если существуют такие натуральные t и n, что

$$te = nf. \tag{5.19}$$

Соотношение (5.19) можно переписать также в следующем эквивалентном виде:

$$f = \frac{t}{n} e. \tag{5.19′}$$

Будем считать отрезок e единичным (т.е. будем использовать его в качестве *мерки*), тогда (5.19′) можно прочесть следующим образом: *мера длины отрезка f при единице измерения e равна t / n*. Это утверждение записывают также в виде формулы:

$$m_e(f) = t / n,$$

или, в более общем виде,

$$m_e(f) = \{t / n\}. \qquad (5.19'')$$

Замечание 1. Мы будем говорить также о соизмеримости отрезков e' и f', не принадлежащих системе E, если в системе E найдутся соответственно равные им отрезки e и f, для которых выполнено соотношение (5.19). При этом мы сможем говорить, например, о мере отрезка f' при единице измерения e'.

Замечание 2. Далеко не все отрезки соизмеримы между собой. Например, *диагональ квадрата не соизмерима с его стороной*.

Для простоты, рассмотрим единичный квадрат. (Среди отрезков системы E, очевидно, найдутся отрезки, равные соответственно стороне этого квадрата и его диагонали.) Будем рассуждать от противного и предположим, что мера длины диагонали этого квадрата выражается рациональной дробью p / q. Тогда по теореме Пифагора должно быть

$$1^2 + 1^2 = (p / q)^2,$$

или, что то же самое,

$$2q^2 = p^2. \qquad (5.20)$$

Однако в разложение на простые множители числа $2q^2$ двойка, очевидно, входит в нечетной степени, тогда как в разложение числа p^2 двойка входит в четной степени. Следовательно, равенство (5.20) невозможно. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение.

5.8. АДДИТИВНОСТЬ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ МЕРЫ В Q_+

Пусть a и b – два отрезка, соизмеримые с отрезком e (все отрезки считаем принадлежащими системе E):

$$a = \{\frac{k}{p}\}e,\ b = \{\frac{t}{n}\}e,$$

или, что то же самое,

$$m_e(a) = \{\frac{k}{p}\},\ m_e(b) = \{\frac{t}{n}\}.$$

Тогда из (5.7) и (5.8), очевидно, следует, что

$$m_e(a+b) = \{\frac{kn+pt}{pn}\} = \{\frac{k}{p}\} + \{\frac{t}{n}\},$$

т.е.

$$m_e(a+b) = m_e(a) + m_e(b). \qquad (5.21)$$

Свойство (5.21) называется, как мы знаем, *аддитивностью меры.*

Аналогичным образом доказывается *мультипликативность* введенной в Q_+ меры. А именно, для произвольных соизмеримых друг с другом отрезков a, e, f из системы E имеет место равенство:

$$m_f(a) = m_e(a)m_f(e). \qquad (5.22)$$

5.9. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

5.9.1. Конечные десятичные дроби

Конечная десятичная дробь – это дробь, знаменатель которой представляет собой степень числа 10. Например,

$$\frac{381}{10000}, \text{ или } \frac{4287}{1000}, \text{ или } \frac{9}{10}.$$

Каждая конечная десятичная дробь может быть записана «в строчку» *с* использованием запятой, отделяющей дробную часть числа от целой. Например:

$$\frac{4287}{1000} = (4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7) / 10^3 =$$
$$= 4 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000} = 4{,}287.$$

Запись (конечной) десятичной дроби «в строчку» с использованием запятой мы будем называть *стандартной.*

Нетрудно видеть, что в стандартной записи конечной десятичной дроби запятая отделяет от правого края столько знаков, какова степень десяти в знаменателе исходной обыкновенной дроби.

Нетрудно показать, *что сложение и вычитание конечных десятичных дробей могут производиться по хорошо известным нам из главы 2 алгоритмам сложения* (*и, соответственно,* *вычитания) столбиком. При этом соответствующие десятичные стандартные записи должны выравниваться не по правому краю (как в случае натуральных чисел), а по запятой.* Рассмотрим, для определенности, случай сложения. Складывая две обыкновенные десятичные дроби по правилу сложения дробей, мы должны привести их к общему знаменателю, а затем сложить числители (пользуясь алгоритмом сложения «столбиком» для натуральных чисел). Отсюда легко следует сформулированное выше правило.

Случай вычитания рассматривается аналогично.

Что касается умножения конечных десятичных дробей, то оно устроено очень просто.

Пусть $A / 10^n$ и $B / 10^k$ – две конечные десятичные дроби. Чтобы получить их произведение в стандартной записи, нужно перемножить «уголком» числители, а затем в произведении AB отделить запятой $n + k$ последних цифр (при необходимости дописывая спереди нужное число нулей).

Пример. Умножим дробь 6 / 1000 = 0,006 на 17 / 100 = 0,17. Имеем:

$$6 \cdot 17 = 102;$$
$$0{,}006 \cdot 0{,}17 = 0{,}00102.$$

Замечание. Зададим следующий естественный вопрос: какие несократимые обыкновенные дроби могут быть представлены в виде конечных десятичных дробей?

Ответ на этот вопрос таков: *для того, чтобы несократимая дробь M / N могла быть представлена в виде конечной десятичной дроби, необходимо и достаточно, чтобы в разложение на простые множители знаменателя N этой дроби не входили никакие простые числа, отличные от* 2 *и* 5.

Например, дробь 3 / 7 не может быть представлена в виде конечной десятичной дроби.

Действительно, предположим противное, а именно, что

$$3 / 7 = A / 10^n,$$

где A и n – натуральные числа. Тогда должно было бы выполняться равенство

$$3 \cdot 2^n \cdot 5^n = 7 \cdot A,$$

однако последнее равенство невозможно, так как 7 не входит в разложение левой части на простые множители. (В общем случае доказательство сделанного утверждения аналогично.)

В то же время, например,

$$3 / 8 = 3 \cdot 5^3 / 2^3 \cdot 5^3 = 375 / 1000.$$

Заметим, что, в отличие от рассмотренных выше операций, деление одной конечной десятичной дроби на другую, вообще говоря, выводит нас за рамки класса конечных десятичных дробей.

Например,

$$3 / 10 : 7 / 10 = 3 / 7.$$

5.9.2. Бесконечные периодические десятичные дроби

Рассмотрим теперь в качестве примера процедуру, переводящую обыкновенную дробь 3 / 7 в бесконечную десятичную.

Имеем, последовательно производя деление с остатком:

$$\begin{gathered} 3 \cdot 10 = 7 \cdot 4 + 2; \\ 2 \cdot 10 = 7 \cdot 2 + 6; \\ 6 \cdot 10 = 7 \cdot 8 + 4; \\ 4 \cdot 10 = 7 \cdot 5 + 5; \\ 5 \cdot 10 = 7 \cdot 7 + 1; \\ 1 \cdot 10 = 7 \cdot 1 + 3; \\ 3 \cdot 10 = 7 \cdot 4 + 2. \end{gathered} \tag{5.23}$$

Поскольку число различных остатков при делении на 7 конечно, рассмотренная процедура, очевидно, оказывается периодической: седьмая строчка совпала с первой, поэтому восьмая строчка обязательно совпадет со второй, и т.д.

Разделим теперь первую строчку (5.23) на 10, вторую – на 100, третью – на 1000 и т.д., а затем сложим. В результате получим после сокращений и приведения подобных:

$$3 = 7 \cdot \left(\frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000} + \frac{1}{1000000} + \ldots\right);$$

отсюда имеем:

$$3 / 7 = 0{,}428571428571\ldots = 0,(428571). \tag{5.24}$$

(В правой части (5.24) скобками обозначен период получившейся бесконечной десятичной дроби.)

Теперь нетрудно видеть, что частное от деления конечной десятичной дроби $A / 10^n$ на конечную десятичную дробь $B / 10^k$ может быть представлено в виде стандартной десятичной записи в результате следующей процедуры. Вначале находим стандартное десятичное представление обыкновенной дроби A / B, а затем сдвигаем запятую на $n - k$ позиций (влево, если $n - k > 0$, и вправо, если $n - k < 0$).

Замечание 1. В главе 2 мы уже познакомились с предметной интерпретацией алгоритма деления «уголком», переводящего обыкновенную дробь в стандартную десятичную запись. В рассмотренном выше примере этот алгоритм получил теперь чисто арифметическое обоснование.

Замечание 2. *Пусть A / B – произвольно взятая обыкновенная дробь. Нетрудно показать, что длина периода ее стандартной десятичной записи не превышает* $B - 1$. Действительно, будем для определенности считать, что A / B – правильная дробь. Как мы знаем, всего различных остатков при делении на B существует ровно B (а именно: 0, 1, 2, ..., $B - 1$). Если на одном из шагов алгоритма деления «уголком», переводящего обыкновенную дробь A / B в стандартную десятичную запись, встречается остаток 0, то соответствующая десятичная дробь оказывается конечной (поскольку все последующие остатки, появляющиеся в этом алгоритме, также будут нулевыми).

Нас же интересуют сейчас бесконечные периодические десятичные дроби. Но если из A / B получается бесконечная десятичная дробь, различными остатками, появляющимися в алгоритме деления «уголком», могут быть только 1, 2, ..., $B - 1$. Отсюда сразу следует вышеприведенное утверждение.

Замечание 3. При переводе обыкновенной дроби в стандартную десятичную запись период может начинаться не сразу после запятой. В таких случаях говорят о наличии *предпериодической части* в стандартной десятичной записи. Например:

$$1 / 6 = 0{,}1666666\ldots = 0{,}1(5.6);$$
$$4 / 15 = 0{,}2666666\ldots = 0{,}2(5.6).$$

Можно показать, что предпериодическая часть возникает в том и только том случае, когда знаменатель несократимой дроби A / B содержит в качестве множителя 2 или 5.

Замечание 4. Покажем на примере, каким образом из стандартной десятичной записи можно получить соответствующую обыкновенную дробь.

Рассмотрим бесконечную периодическую десятичную дробь, содержащую предпериодическую часть:

$$w = 0{,}123(4567) = 0{,}12345674567... \qquad (5.25)$$

Прежде всего, умножим w на 10^3 (здесь 3 – длина предпериодической части дроби w), получим:

$$10^3 w = 123{,}45674567... \qquad (5.26)$$

Затем умножим (5.26) на 10^4 (здесь 4 – длина периода дроби w), получим:

$$10^7 w = 1\,234\,567{,}45674567... \qquad (5.27)$$

Вычитая теперь (5.26) из (5.27), имеем:

$$(10^7 - 10^3)w = 1\,234\,567 - 123;$$

отсюда

$$w = 1\,234\,444\,/\,9\,999\,000. \qquad (5.28)$$

Замечание 5. Обратимся в заключение к вопросу о том, единственна ли периодическая десятичная запись для (несократимой) рациональной дроби. Прежде всего, заметим, что алгоритм деления «уголком» определяет однозначно вид десятичной записи для любой обыкновенной дроби. Однако существуют бесконечные периодические десятичные записи, которые не могут быть получены при помощи алгоритма деления «уголком» и которые должны быть отброшены для установления взаимно однозначного соответствия между обыкновенными (несократимыми) дробями и их периодическими десятичными записями.

Речь идет о десятичных записях, в которых присутствует период, образованный цифрой 9. Такие записи следует заменить конечными десятичными дробями.

Действительно, суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем 1 / 10, нетрудно убедиться в том, что

$$0{,}999999..... = 0{,}(9) = 1;$$

$$0{,}123999999... = 0{,}123(9) = 0{,}124;$$

$$17{,}45999999... = 17{,}46.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 5

1. Доказать, что сложение в Q_+ коммутативно.

2. Доказать, что сложение в Q_+ ассоциативно.

3. Доказать, что отношение «меньше» в Q_+ является отношением строгого линейного порядка.

4. Доказать, что в Q_+ не существует наименьшего элемента и не существует наибольшего элемента.

5. Доказать, что между двумя любыми элементами из Q_+ всегда найдется еще один элемент из Q_+.

6. Доказать, что сложение в Q_+ сократимо и монотонно.

7. Доказать, что вычитание в Q_+ определено корректно, т.е. разность двух элементов из Q_+ не зависит от того, какие конкретно дроби из соответствующих классов мы выбираем для вычислений.

8. Как связано в Q_+ отношение «меньше» с операцией сложения?

9. Доказать, что умножение в Q_+ коммутативно и ассоциативно.

10. Доказать, что умножение в Q_+ дистрибутивно относительно сложения и вычитания.

11. Доказать, что умножение в Q_+ сократимо и монотонно.

12. Доказать, что деление в Q_+ определено корректно, т.е. частное двух элементов из Q_+ не зависит от того, какие конкретно дроби из соответствующих классов мы выбираем для вычислений.

13. Отождествим натуральные числа с элементами из Q_+ вида $\{n / 1\}$. Доказать, что при этом отождествлении отношение «меньше», определенное для натуральных чисел, перейдет в отношение «меньше» на множестве Q_+, связывающее элементы вида $\{n / 1\}$.

14. Трое друзей купили попугая. Первый внес $2 / 7$ от той суммы, что внесли остальные. Второй внес $3 / 8$ от той суммы, что внесли остальные. А третий внес 1000 рублей. Сколько стоил попугай?

15. Расположить в порядке возрастания дроби

$33 / 35$, $11 / 13$, $5 / 7$, $101 / 103$.

16. Доказать, что уравнение $x^2 = 3$ не имеет решений в множестве Q_+

17. Доказать, что в классе равных дробей $\{1 / 2\}$ единственной несократимой дробью является ½.

18. Расположить в порядке убывания дроби

$(10^{10} + 1) / (10^{20} + 1)$; $(10^{10} + 2) / (10^{20} + 2)$; $(10^{10} – 1) / (10^{20} – 1)$.

19. У Васи было 11 лепешек, а у Пети – 4. К ним подошел незнакомец и попросил накормить его. Все ели поровну. Уходя, незнакомец оставил 100 рублей. Как эти деньги должны поделить между собой Вася и Петя?

20. Требуется разделить 19 яблок поровну между 90 детьми. При этом ни одно яблоко не должно быть разрезано больше, чем на 10 частей. Как это сделать?

21. Трое друзей купили лодку. Первый заплатил 2 / 5 от того, что заплатил второй. А третий заплатил 1 / 7 от того, что заплатили первый и второй вместе. Лодка стоила 8000 рублей. Сколько заплатил каждый?

22. Требуется разделить 5 груш поровну между шестью детьми. При этом ни одна груша не должна быть разрезана больше, чем на две части. Как это сделать?

23. Требуется разделить 7 картофелин поровну между шестью детьми. При этом ни одна картофелина не должна быть разрезана больше, чем на две части. Как это сделать?

24. Несколько рыбаков отправились на рыбалку. Тот, кто поймал наибольшее количество рыб, добыл половину общего улова. Тот, кто поймал наименьшее количество рыб, добыл 1 / 5 общего улова. Сколько было рыбаков?

25. Четверо студентов отправились за грибами. Иван собрал столько же, сколько все остальные, Петр собрал 1 / 5 от того, что собрали все остальные. Все собрали разное количество грибов. «Кто-то собрал еще меньше, чем я», – сказал Петр. Был ли он прав?

26. Вокруг Южного полюса бегали пингвины. На первый айсберг соскочили ¾ от числа всех пингвинов и еще четверть пингвина, а остальные побежали дальше. Затем на второй айсберг соскочили ¾ оставшихся пингвинов и еще четверть пингвина, а остальные побежали дальше. Наконец, на третий айсберг соскочили ¾ оставшихся пингвинов и еще четверть пингвина, после чего выяснилось, что все пингвины разместились на трех айсбергах. Сколько было пингвинов?

27. Найти хотя бы одну дробь со знаменателем 29, заключенную между дробями 13 / 14 и 14 / 15.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 5

1. *Локшин А.А.* Целые числа и дроби. Операторные интерпретации. М.: Вузовская книга, 2005. 80 с.
2. *Виленкин Н.Я.* Математика. М.: Просвещение, 1977. 352 с.
3. *Аматова Г.М., Аматов М.А.* Математика. Кн. 2. М.: Академия, 2008. 238 с.
4. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. М., 1998. 438 с.
5. *Локшин А.А., Сагомонян Е.А.* Положительные рациональные числа (операторная интерпретация) // Научный форум: Педагогика и психология: сб. ст. по материалам XXV междунар. науч.-практ. конф. № 1 (25). М.: Изд-во МЦНМО, 2019. С. 33–39.
6. *Буфеев С.В.* Коллекция задач по арифметике целых чисел. М.: ЛЕНАНД, 2018. 272 с.

ГЛАВА 6.
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА КАК ОПЕРАТОРЫ

Мы уже отмечали в главе 5, посвященной построению множества положительных рациональных чисел, что в педагогической литературе практически не используется интерпретация числа как оператора, действующего на пространстве векторов (см. [1]). Этот подход пригодится нам и сейчас, при построении множества Z целых чисел.

Заметим теперь следующее. Хотя в начальной школе отрицательные числа не изучаются, современному учителю начальных классов необходимо, на наш взгляд, иметь ясное представление о построении множества Z и интерпретации арифметических действий на этом множестве. В частности, учителю важно понимать, что ряд важнейших арифметических правил начальной школы (правило вычитания суммы из числа, числа из суммы, разности из числа, числа из разности, разности из суммы, суммы из разности) оказывается ненужным уже в средней школе, после ознакомления детей с отрицательными числами и соответствующими арифметическими законами.

Таким образом, встает неизбежный вопрос о том, с какой интерпретацией целых чисел следует знакомить будущего учителя начальных классов. Таких интерпретаций существует несколько. Например, древние индусы понимали отрицательное число как «долг». В простейших примерах эта интерпретация прекрасно работает. Но почему, например,

долг (долга в 100 рублей) = 100 рублей,

понять трудно.

Другая интерпретация множества Z основана на расширении множества натуральных чисел таким образом, чтобы операция вычитания сделалась всегда выполнимой (при одновременном сохранении важнейших арифметических законов, действующих на множестве N натуральных чисел).

Именно этот подход реализован в большинстве современных пособий.

Этот подход математически безупречен, однако он представляется нам чересчур громоздким. К его недостаткам можно отнести также отсутствие единой точки зрения на пополнение множества натуральных чисел рациональными и целыми отрицательными.

Этих недостатков лишена предлагаемая ниже операторная интерпретация множества *Z*.

6.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СОГЛАШЕНИЯ

Пусть *E* – совокупность всех таких направленных отрезков на числовой прямой, начало которых совпадает с точкой *O* (т.е. с началом координат). Подчеркнем, что рассматриваемые направленные отрезки могут быть направлены как вправо, так и влево относительно начала координат.

Мы присоединяем к системе *E* также *нулевой направленный отрезок* ОО, у которого начало и конец совпадают.

Как и в главе 5, *суммой* двух направленных отрезков *OA* и *OB* будем считать отрезок *OC*, получающийся в результате следующего построения. Нужно отрезок *OB* переместить вдоль числовой прямой так, чтобы новое положение его начальной точки совпало с точкой *A*, тогда новое положение его концевой точки будет концом направленного отрезка *OC*. Таким образом, суммой двух равных по величине и противоположно направленных отрезков будет нулевой отрезок ОО.

Снова будем рассматривать произвольное натуральное число *n* как *оператор*, который удлиняет направленные отрезки (векторы) из *E* в *n* раз.

6.2. ОПЕРАТОР «НОЛЬ» И ОПЕРАТОР «–1»

Введем теперь в рассмотрение еще два оператора, с помощью которых расширим множество натуральных чисел *N* (понимаемых как операторы, действующие на *E*) до множества *Z* целых чисел.

Оператор «0» по определению действует на произвольный направленный отрезок E из множества E следующим образом:

$$0\mathbf{e} = OO$$

(т.е. оператор «0» превращает любой направленный отрезок в нулевой).

Что касается оператора «-1», то он по определению меняет направление любого отрезка e из E на противоположное.

6.3. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

По общепринятому в математике соглашению, произведение операторов – это их последовательное применение. Таким образом, для любого оператора $n \in N$ имеем:

$$0n = 0.$$

Для произведения $(-1)n$ мы для краткости письма введем специальное обозначение «$-n$». Таким образом, для любого оператора $n \in N$ имеем:

$$-n = (-1)n.$$

Числа n и $(-n)$ мы будем называть *противоположными*.

Нетрудно видеть также, что для любого n из N

$$(-1)(-1)n = n.$$

Обозначим теперь совокупность операторов $\{–1, –2, –3, \ldots\}$ через N_- и определим, наконец, множество Z целых чисел как совокупность операторов, действующих на множестве Е:

$$Z = N_- \cup \{0\} \cup N.$$

Замечание. Два оператора p и q, действующие на направленные отрезки из системы E, мы считаем *равными* (и пишем $p = q$), если для любого $e \in E$ справедливо $pe = qe$.

6.4. УМНОЖЕНИЕ В *Z*

Нетрудно видеть, что умножение в Z (понимаемое как последовательное применение операторов) определено однозначно.

Геометрически очевидно также, что умножение в Z коммутативно. Что касается ассоциативности умножения в Z, то, как мы уже отмечали выше, она имеет место в силу ассоциативности умножения вообще любых операторов (если умножение понимается как их последовательное применение).

Отсюда сразу же следует важный результат.

Теорема 6.1. (О важнейших свойствах операции умножения в Z).

Пусть m и n – произвольные натуральные числа. Тогда:

1) $(–m)n = m(–n) = –mn$;
2) $(–m)(–n) = mn$;
3) $0m = 0(–m) = 0$.

Следующий результат важен для доказательства единственности деления в Z.

Теорема 6.2. (О сократимости умножения в Z). *Пусть e – произвольный, ненулевой отрезок из E; p, q и r – произвольные целые числа (понимаемые как операторы), причем $p \neq 0$. Тогда если*

$$p(qe) = p(re),$$

то

$$qe = re, \text{ или, что то же самое, } q = r.$$

Доказательство геометрически очевидно.

6.5. ДЕЛЕНИЕ В Z

Сейчас нам будет удобно ввести понятие *модуля* целого числа (обозначается при помощи двух вертикальных черточек).

Пусть $n \in N$. Тогда по определению

$$|n| = n;$$
$$|-n| = n;$$

кроме того, по определению считаем, что

$$|0| = 0.$$

Что касается операции деления в Z, то она вводится как операция, обратная умножению. Можно показать, что справедлива следующая

Теорема 6.3. (О свойствах деления в Z). *Пусть p и q – ненулевые элементы из Z. Тогда модуль их частного (вычисленного в Z) равен частному от деления их модулей (вычисленному в N), т.е.*

$$|p : q| = |p| : |q|$$

(*предполагается, что частное в правой части последней формулы существует в* N).

При этом знак частного $p:q$ *будет положителен, если знаки* p *и* q *одинаковы, и отрицателен, если знаки* p *и* q *разные.*

Для произвольного ненулевого $p \in Z$

$$0 : p = 0.$$

Делить на 0 *нельзя* (*деление на ноль не определено*).

Замечание. Из сократимости умножения сразу же следует единственность частного в Z (если это частное существует). Подчеркнем, что (вычисленное в Z) частное $p : q$ существует тогда и только тогда, когда существует вычисленное в N частное $|p| : |q|$.

6.6. СЛОЖЕНИЕ В Z

Прежде всего, заметим, что операция сложения направленных отрезков в E коммутативна и ассоциативна (докажите!).

Пусть теперь **e –** произвольный направленный отрезок из системы E; m и n – произвольные целые числа (т.е. операторы из Z). Нетрудно видеть, что сумма отрезков m**e** + n**e** всегда представима в виде s**e**, где $s \in Z$. Число s мы будем называть *суммой* чисел m и n и писать:

$$s = m + n.$$

Итак, мы определили операцию сложения для чисел из Z.

Замечание. Из коммутативности и ассоциативности сложения направленных отрезков системы E сразу следует *коммутативность и ассоциативность сложения в* Z (докажите!).

Справедлива следующая

Теорема 6.4. (О свойствах сложения в Z). *Пусть* m *и* n *– произвольные натуральные числа. Тогда*

1) *сумма* $m + n$*, вычисленная в* Z*, совпадает с суммой* $m + n$*, вычисленной в* N*;*
2) $m + (-n) = m - n$*, если* $m > n$ (*при этом разность* $m - n$ *понимается как разность натуральных чисел;*
3) $m + (-m) = 0$*;*
4) $m + (-n) = -(n - m)$*, если* $m < n$ (*разность* $n - m$ *понимается как разность натуральных чисел*)*;*

5) *сложение с нулем произвольного целого числа не изменяет этого числа;*
6) *сложение в Z сократимо, т.е. для любых трех целых чисел p, q, r из равенства $p + q = p + r$ следует, что $q = r$.*

Доказательство этой теоремы геометрически очевидно, и мы его предоставляем читателю.

6.7. ВЫЧИТАНИЕ В *Z*

Вычитание в Z мы определим как операцию, обратную сложению. Иными словами, разность целых чисел p и q равна r тогда и только тогда, когда

$$p = r + q.$$

Нетрудно проверить, что разность чисел p и q равна $p + (-q)$. Действительно, нетрудно проверить, опираясь на свойства сложения в Z, что

$$p = [p + (-q)] + q.$$

Замечание. Итак, операция вычитания в Z свелась к сложению с противоположным числом:

$$p - q = p + (-q).$$

Это замечание позволяет (с опорой на коммутативность и ассоциативность сложения) существенно упростить многие выкладки. Например, не проводя никаких вычислений, мы можем сразу сказать, что

$$123\ 456\ 789 + 987\ 654\ 321 - 123\ 456\ 789 - 987\ 654\ 321 = 0.$$

6.8. ДИСТРИБУТИВНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛОЖЕНИЯ

Опираясь на теоремы 6.1 и 6.4, а также на дистрибутивность умножения относительно сложения и вычитания для натуральных чисел, нетрудно показать, что для любых p, q, $r \in Z$ справедливо соотношение

$$r(p + q) = rp + rq.$$

В силу сказанного в предыдущем пункте, дистрибутивность умножения относительно вычитания доказывать не нужно.

Подчеркнем, что знание закона дистрибутивности умножения относительно сложения в Z позволяет в некоторых числовых примерах мгновенно получать ответ, избегая громоздких вычислений. Например, очевидно, что
$12\,345\,678\,900 - 98\,765\,432\,100 - 25 \cdot (123\,456\,789 - 987\,654\,321) \cdot 4 = 0.$

6.9. ОТНОШЕНИЕ «МЕНЬШЕ» НА МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. СВЯЗЬ СО СЛОЖЕНИЕМ

Пусть p и q – два целых числа. Скажем, что *p меньше*, чем q, и будем записывать это в виде

$$p < q,$$

если существует такое натуральное r, что

$$p + r = q.$$

Можно показать, что введенное таким образом отношение «меньше» на множестве Z отношением строгого линейного порядка.

Справедливо также следующее легко доказываемое утверждение.

Пусть p и q – два целых числа, причем $p < q$. Тогда, каково бы ни было $s \in Z$, будет справедливо неравенство

$$p + s < q + s$$

(сформулированное свойство называют *монотонностью сложения*).

6.10. ОТНОШЕНИЕ «МЕНЬШЕ» НА МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. СВЯЗЬ С УМНОЖЕНИЕМ

Справедливо следующее утверждение. *Пусть p и q – два целых числа, причем $p < q$. Тогда, если $s \in N$, то*

$$sp < sq$$

и

$$(-s)q < (-s)p.$$

Доказательство. Докажем, например, справедливость последнего неравенства при сделанных предположениях. В силу определения отношения «меньше» неравенство $p < q$ означает, что должно существовать натуральное r такое, что

$$p + r = q.$$

Умножая обе части последнего соотношения на (-s) и пользуясь дистрибутивностью умножения относительно сложения, получаем:

$$(–s)p + (–s)r = (–s)q.$$

Прибавляя к обеим частям полученного равенства произведение sr и снова пользуясь дистрибутивностью умножения относительно сложения, получаем:

$$(–s)p = (–s)q + sr,$$

откуда и следует, что $(–s)q < (–s)p$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6

1. Вдоль горизонтальной прямой линии через равные промежутки расположены кочки. Все кочки занумерованы по порядку. А именно: кочки, расположенные правее кочки с номером 0, имеют номера 1, 2, 3, ... ; кочки, расположенные левее нулевой кочки, имеют номера –1, –2, –3, ... На нулевой кочке сидит заяц. Вначале он прыгает 10 раз направо (каждый раз на соседнюю кочку), потом 30 раз налево, после чего еще 50 раз направо. На кочке с каким номером окажется заяц в результате?

2. Вдоль горизонтальной прямой расположены кочки. Однако на этот раз расстояния между соседними кочками все различны и кочки не занумерованы. Заяц, сидящий на некоторой выделенной кочке *A*, прыгает сначала 47 раз налево (каждый раз на соседнюю кочку), а затем 100 раз направо (тоже каждый раз на соседнюю кочку). В результате заяц оказывается на некоторой кочке, которую обозначим через *B*.

После чего заяц возвращается на исходную кочку *A* и прыгает сначала 100 раз направо, а затем 47 раз налево. Обязательно ли заяц окажется в результате снова на кочке *B*?

3. На плоскости вдоль большой окружности расположены кочки. Расстояния между соседними кочками все различны. Заяц, сидящий на некоторой выделенной кочке *A*, прыгает сначала 47 раз по часовой стрелке (каждый раз на соседнюю кочку), а затем 100 раз против часовой стрелки (тоже каждый раз на соседнюю

кочку). В результате заяц оказывается на некоторой кочке, которую обозначим через *B*.

После чего заяц возвращается на исходную кочку *A* и прыгает сначала 100 раз против часовой стрелки, а затем 47 раз по часовой стрелке. Обязательно ли заяц окажется в результате снова на кочке *B*?

4. Вдоль горизонтальной прямой линии через равные промежутки расположены кочки. Все кочки занумерованы целыми числами (см. задачу № 1). На нулевой кочке сидит заяц. Вначале он прыгает 10 раз направо (каждый раз перепрыгивая через одну кочку), потом 30 раз налево (каждый раз перепрыгивая через две кочки). На кочке с каким номером окажется заяц в результате?

5. Вдоль горизонтальной прямой расположены кочки. Расстояния между соседними кочками все различны и кочки не занумерованы. Заяц, сидящий на некоторой выделенной кочке *A*, прыгает иногда налево (каждый раз на соседнюю кочку), а иногда направо (тоже каждый раз на соседнюю кочку). В результате выяснилось, что заяц 57 раз прыгал направо и 113 раз налево. Можно ли, опираясь только на эти сведения, однозначно определить кочку, на которой в результате оказался заяц?

6. Попробуйте придать смысл выражению «долг долга в 100 рублей».

7. Велосипедист с раннего утра едет со скоростью 40 км/ч по прямолинейной дороге, проходящей мимо деревни Кукуево. В 3 часа дня он уже успел проехать мимо этой деревни и оказался на расстоянии 50 км от нее. На каком расстоянии от деревни Кукуево находился велосипедист в 7 часов утра?

8. Каждый час температура воздуха повышалась на 3 градуса по Цельсию. В 6 часов вечера температура воздуха оказалась равной 12 градусам. Какова была температура воздуха в 7 часов утра?

9. Горизонтально расположенная дорога имеет форму окружности. Протяженность дороги 11 км. Человек идет по этой дороге со скоростью 6 км/ч. Недавно он миновал автобусную остановку, расположенную рядом с дорогой, и сейчас находится на расстоянии 1 км от этой остановки. На каком расстоянии от автобусной остановки находился человек 9 часов тому назад?

10. Упростить:

$1 - 3 + 2 - 9 + 4 - 27 + 8 - ... + 2^{100} - 3^{101}$.

11. Упростить:

$1 - 5 + 2 - 25 + 3 - 125 + 4 - 625 + 5 - ... + 100 - 5^{100}$.

12. Вдоль горизонтальной прямой линии через равные промежутки расположены кочки, занумерованные целыми числами (см. задачу № 1). На нулевой кочке сидит заяц, который время от времени прыгает либо влево через две кочки, либо вправо через пять кочек. Может ли заяц в результате оказаться на кочке с номером 7?

13. На циферблате часовая стрелка указывает на 12. Пете необходимо перевести часовую стрелку на одно часовое деление вперед. Но по условию задачи ему разрешается переводить часовую стрелку либо на три часовых деления назад, либо на пять часовых делений вперед. Сможет ли Петя решить поставленную задачу?

14. Контора «Рога и копыта» задолжала коммерческому банку «Утешительный» 4 миллиона рублей. При этом банк принимает платежи только купюрами по 1 миллиону. Остап Бендер, как руководитель конторы, решил распределить долг поровну между тремя рядовыми сотрудниками конторы путем деления долга на три равные части с остатком, а остатком от деления справиться самому. Сможет ли Остап, не нарушая законов математики, заработать в результате вышеописанного перераспределения долга? *Указание:* Остап Бендер может воспользоваться общепринятым определением деления с остатком целого отрицательного числа на натуральное. А именно, пусть $a \in N_{-}$, $b \in N$; тогда по определению поделить a на b с остатком – это представить целое отрицательное число a в виде

$a = bq + r$, где q и r – целые, причем $0 \le r < b$.

15. Три приятеля заняли в банке деньги и купили на эти деньги лодку. Первый занял 1 / 6 от того, что заняли остальные, второй занял 2 / 5 от того, что заняли остальные, а третий занял в банке 100 рублей. Какую сумму должны будут банку все три приятеля вместе?

16. Портос занял у Атоса 100 луидоров, Арамис занял у Портоса 200 луидоров, а Атос занял у Арамиса 300 луидоров.

Кто кому и сколько остался в результате должен?

17. В большой вазе лежат красные карточки, на каждой из которых написано натуральное число «5», а в маленькой вазе – зеленые карточки, на каждой из которых написано целое отрицательное число «–3». Всего карточек 100, а общая сумма написанных на них чисел равна 92. Сколько было карточек каждого типа?

18. Имеются три обруча и семь карточек, с написанными на них числами. На шести карточках написано число «1», а на одной «–3». Расположить обручи и карточки на плоскости так, чтобы все карточки оказались внутри обручей, причем сумма чисел внутри каждого обруча равнялась нулю.

19. Имеются три обруча и семь карточек с написанными на них числами. На четырех карточках написано число «1», а на трех «–1». Расположить обручи и карточки на плоскости так, чтобы все карточки оказались внутри обручей, а сумма чисел внутри каждого обруча равнялась нулю.

20. Имеются три обруча и шесть карточек с написанными на них числами. На трех карточках написано число «1», а на трех других «–1». Расположить обручи и карточки на плоскости так, чтобы одновременно были выполнены условия: а) все карточки оказались внутри обручей; б) произведение чисел внутри каждого обруча равнялось минус единице; в) сумма чисел внутри каждого обруча равнялась минус единице.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 6

1. *Локшин А.А.* Целые числа и дроби. Операторные интерпретации. М.: Вузовская книга, 2005. 80 с.
2. *Виленкин Н.Я.* Математика. М.: Просвещение, 1977. 352 с.
3. *Аматова Г.М.*, *Аматов М.А.* Математика. Кн. 2. М.: Академия, 2008. 238 с.
4. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. М., 1998. 438 с.
5. *Локшин А.А., Сагомонян Е.А.* Положительные рациональные числа (операторная интерпретация) // Научный форум:

Педагогика и психология: сб. ст. по материалам XXV междунар. науч.-практ. конф. № 1 (25). М.: Изд-во МЦНМО, 2019. С. 33–39.

6. *Буфеев С.В.* Коллекция задач по арифметике целых чисел. М.: ЛЕНАНД, 2018. 272 с.
7. *Локшин А.А., Иванова Е.А., Бахтина О.В.* Диаграммы Эйлера в комбинаторных и логических задачах. М.: МАКС Пресс, 2017. 88 с.

ГЛАВА 7.
ВЫРАЖЕНИЯ, РАВЕНСТВА, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

Математический язык так же, как и естественный язык, имеет свой алфавит. В алгебре он включает следующие группы знаков (символов):

- цифры (для записи чисел);
- буквы латинского алфавита (для обозначения постоянных и переменных величин);
- знаки операций (для выполнения действий над числами и буквами);
- знаки отношений (для записи равенств, уравнений и неравенств);
- скобки (технические знаки, играющие роль знаков препинания).

Подобно тому, как в естественном языке из букв образуются слова, а из слов – предложения, в алгебре из перечисленных выше знаков можно образовывать выражения и равенства или неравенства.

Заметим, что не любая последовательность символов имеет смысл (например, 3 **+** 5 **:** или 4 **–**), и договоримся в дальнейшем такие записи не рассматривать.

7.1. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Определение 7.1. Запись, содержащую лишь числа и операции над ними и, возможно, скобки, будем называть *числовым выражением.*

Например, 3 + 7 и 40 – 18 числовые выражения.

Замечание. Каждое число является числовым выражением.

Замечание. Если выражение содержит несколько операций, то оно может содержать скобки, указывающие на последовательность выполнения операций. Например, (3 + 5) · 9 или 3 + (5 · 9). Скобки обязательно должны быть парными.

Замечание. Знаки *отношений* (> , < , = и др.) *не могут быть* использованы при записи *числовых выражений*.

Определение 7.2. Число, полученное в результате последовательного выполнения операций, содержащихся в выражении, называется *значением числового выражения*.

Так, значением выражения (34 + 6) · 2 является число 80, а значением выражения 45 – 23 · 2 является число (–1).

Не всякое числовое выражение имеет значение. Примерами числовых выражений, не имеющих значения на множестве действительных чисел являются: 3 : (4 – 4) и $\sqrt{-4}$.

Одно и то же числовое выражение может иметь значение на одном множестве и не иметь на другом. Например, выражение 3 – 4 имеет значение на множестве целых чисел, но не имеет значения на множестве натуральных чисел.

Для числовых выражений, содержащих знаки нескольких операций, порядок вычисления их значений таков:

1. Если в числовом выражении *нет скобок* и содержатся *знаки действий только одной ступени* (сложения и вычитания или умножения и деления), то принято выполнять операции по порядку слева направо. Например, в выражении 60 : 3 · 5 сначала выполняется деление, а потом умножение. Значение данного выражения равно 100.
2. Если в выражении содержатся *знаки действий разных ступеней* (например, сложения и деления), но *нет скобок*, то сначала выполняются действия второй ступени, а потом – первой. Например, при нахождении значения выражения 12 + 48 : 8 сначала выполняется деление, а потом сложение. Значение этого выражения есть число 18.
3. Если в выражении *содержатся скобки*, то сначала выполняются действия в скобках, потом (в соответствии с п. 1, 2) действия 2-й ступени и в последнюю очередь – действия 1-й ступени.

Так, в выражении 128 – (43 + 12) + 144 : (6 · 8) сначала складываем числа в скобках, затем умножаем, потом делим, а далее слева направо выполняем действия первой ступени (вычитание и сложение). Значением данного выражения является число 76.

Замечание. Если выражение содержит скобки внутри скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках и постепенно продвигаются к внешним.

Пример. Найти значение выражения

(14 + (48 − (34 – 16 : 8)) − 4) – 1.

Решение. Сначала находим значение выражения (34 – 16 : 8), находящегося во внутренних скобках; оно равно 32. Затем находим значение следующего выражения в скобках (48 – 32); это число 16. И, наконец, переходим к выражению, содержащему только одни внешние скобки:

(14 + 16 – 4) – 1. Его значением является число 25.

(14 + (48 − (34 – 16 : 8)) − 4) − 1 = (14 + (48 − 32) − 4) – 1 =

= (14 + 16 − 4) – 1 = 25.

Замечание. *Название выражения*, содержащего несколько различных операций, зависит от того, какая *операция* выполняется *последней*. Так, выражение (5 + 3) · 4 называют произведением, а выражение 5 + 3 · 4 – суммой.

Замечание. Для *упрощения записи* выражений договорились опускать лишние скобки. Например, в выражении ((37 – 15) · 8) можно опустить внешние скобки, а выражение (99 : 9) + 41 записать вообще без скобок, так как действие деления и так будет выполняться первым.

Определение 7.3. Два числовых выражения считаются *равными*, если их значения равны.

В начальной школе учащиеся знакомятся с числовыми выражениями, находят их значения и решают текстовые задачи, оформляя решение в виде числовых выражений.

7.2. ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА

Определение 7.4. Если соединить два числовых выражения знаком «=», то получится *числовое равенство*.

Определение 7.5. *Числовое равенство* считается *истинным*, если значения выражений слева и справа совпадают, и *ложным* в противном случае.

Например, числовое равенство 124 + 16 = 280 : 2 – истинно, так как значения выражений слева и справа равны числу 140, а числовое равенство 34 – 16 = 12 + 18 – ложно, так как значения выражений слева и справа не совпадают.

Из сказанного выше вытекает, что числовые равенства можно рассматривать как высказывания вида $a = b$, где a и b – числовые выражения.

В начальной школе числовые равенства рассматриваются именно с этой точки зрения. Свидетельством этого являются формулировки заданий: «Какие числовые равенства являются верными, а какие – неверными?»

Числовые равенства обладают рядом свойств. Рассмотрим их ниже.

1. Если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же число, то получится истинное числовое равенство.

2. Если из обеих частей истинного числового равенства вычесть одно и то же число, то получится истинное числовое равенство.

Замечание. К обеим частям истинного числового равенства можно прибавить (вычесть) не только число, но и числовое выражение, определенное на рассматриваемом множестве.

3. Если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же число, то получится истинное числовое равенство.

4. Если обе части истинного числового равенства разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится истинное числовое равенство.

(*Предоставляем читателю самостоятельно сформулировать условие, при котором обе части истинного числового равенства можно умножить* (*разделить*) *на одно и то же числовое выражение.*)

5. Истинные числовые равенства можно почленно складывать, т.е. *если* $a = b$ и $c = d$, *то* $a + c = b + d$.

6. Истинные числовые равенства можно почленно вычитать, т.е. *если* $a = b$ и $c = d$, *то* $a - c = b - d$.

7. Истинные числовые равенства можно почленно перемножать, т.е.

если $a = b$ и $c = d$, *то* $ac = bd$.

7.3. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Определение 7.6. Если соединить два числовых выражения знаком « > » или « < », то получится *числовое неравенство*.

Примерами числовых неравенств являются: $4 < 8$; $45 : 5 > 13 + 4$; $12 < 4$.

Числовое *неравенство* является *истинным*, если это неравенство справедливо для значений соответствующих числовых выражений.

С точки зрения логики *числовые неравенства*, так же как и *числовые равенства*, являются *высказываниями*. Соответственно, над ними можно выполнять логические операции.

Дизъюнкцию неравенства $a > b$ ($a < b$) и равенства $a = b$ принято записывать в виде $a \geq b$ ($a \leq b$) и называть *нестрогим неравенством*, а конъюнкцию неравенств $a < b$ и $b < c$ записывать в виде $a < b < c$ и называть *двойным неравенством*.

Пример. Определить значение истинности следующих неравенств:

а) $32 - 28 < 45:15$; б) $4 \geq 4$; в) $6 < 9 < 8$.

Решение. Высказывание а) ложно, так как значение выражения слева больше значения выражения справа ($4 > 3$).

Высказывание б) истинно, так как истинно равенство $4 = 4$, а высказывание в) ложно, так как ложно неравенство $9 < 8$.

Числовые неравенства обладают рядом свойств. Рассмотрим их ниже.

Свойства числовых неравенств

1–2. Свойства 1 и 2 числовых неравенств аналогичны свойствам числовых равенств.

(*Предоставляем читателю возможность сформулировать их самостоятельно.*)

3. Если обе части истинного числового неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число и сохранить знак неравенства, то получится истинное неравенство.

4. Если обе части истинного числового неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число и поменять знак неравенства на противоположный, то получится истинное числовое неравенство.

Аналогичные утверждения справедливы в случае умножения (деления) числового неравенства на числовое выражение, имеющее значение.

Пример. Умножить обе части неравенства $3 < 12$ на число: а) 5; б) –7.

Решение. а) Так как число $5 > 0$, то при умножении на него знак неравенства сохраняется. В результате получаем: $15 < 60$.

б) Так как число $-7 < 0$, то при умножении на него знак неравенства меняется. В результате получаем: $-21 > -84$.

7.4. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ. ТОЖДЕСТВЕННО РАВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

В математике помимо числовых выражений встречаются также *буквенные выражения*. Например, $a + 3$; $x - 2y$; $(t + 1) : 5$ и др.

Если для каждой буквы указано множество числовых значений, которые она может принимать, то ее называют *переменной*, а буквенное выражение – *выражением с переменной*.

При подстановке вместо переменной ее значений выражение с переменной обращается в числовое выражение. Например, выражение $x - 5$ при $x = 7$ обращается в числовое выражение $7 - 2$.

Определение 7.7. Множество значений переменной $x \in X$, при которых выражение $f(x)$ имеет значение, называется *областью определения выражения* $f(x)$.

Замечание. Если при подстановке значения $x = a$ выражение с переменной $f(x)$ обращается в числовое выражение, не имеющее значения, то говорят также, что при $x = a$ выражение $f(x)$ не имеет смысла.

Замечание. Если специально не указано, значения из какого множества может принимать переменная, то обычно имеют в виду множество всех действительных чисел.

Например, областью определения выражения $3x - 4$ является множество всех действительных чисел, а область определения выражения $\frac{5}{x-2}$ состоит из всех действительных чисел, отличных от числа 2, так как при $x = 2$ получается числовое выражение $\frac{5}{2-2}$, не имеющее значения.

Замечание. В некоторых случаях область определения может быть ограничена условиями задачи. Например, если буквой ***x*** обозначено количество тетрадей или количество учеников в классе, то значениями переменной ***x*** являются только натуральные числа.

Замечание. Если буквенное выражение содержит не одну, а несколько букв (например, ***x*** и ***y***), то его область определения состоит из всевозможных пар чисел (a, *b*), при подстановке которых вместо переменных ***x*** и ***y*** соответственно, получится числовое выражение, имеющее значение.

Например, область определения выражения $2x - y$ состоит их всех пар действительных чисел, а область определения выражения $\frac{2x}{x-y}$ – из всех пар чисел (a, b), где $a \neq b$.

Существуют выражения, принимающие одни и те же значения при всех допустимых значениях входящих в них букв, например $x + 3$ и $3 + x$.

Определение 7.8. Два *выражения* с одними и теми же переменными и общей областью определения называют *тождественно равными*, если при *любых* значениях переменных их соответствующие значения *равны*.

Пример. Выяснить, являются ли тождественно равными выражения:

а) $(x + y)(x - y)$ и $x^2 - y^2$; *б*) $\frac{x}{6}$ и $\frac{x(x-1)}{6(x-1)}$; *в*) $y - 1$ и $x - 1$.

Решение. а) Выражения $(x + y)(x - y)$ и $x^2 - y^2$ являются тождественно равными, так как они содержат одни и те же переменные, имеют одну и ту же область определения (R x R) и все их соответствующие значения равны (в силу равенства $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$).

б) Выражения $\frac{x}{6}$ и $\frac{x(x-1)}{6(x-1)}$ имеют разные области определения. Первое выражение определено при любом значении x, а второе выражение не имеет значения при $x = 1$, поэтому сначала надо выделить их общую область определения. Это множество всех действительных чисел, отличных от 1. На этом множестве выполняется равенство $\frac{x}{6} = \frac{x(x-1)}{6(x-1)}$, а значит, выражения $\frac{x}{6}$ и $\frac{x(x-1)}{6(x-1)}$ тождественно равны.

Данный пример показывает, что выражения, тождественно равные на одном множестве, могут не быть тождественно равными на другом.

в) Выражения $y - 1$ и $x - 1$ не являются тождественно равными, так как они содержат разные переменные.

Определение 7.9. Утверждение о тождественном равенстве двух выражений называется *тождеством*, а замена одного выражения тождественно равным ему называется *тождественным преобразованием выражений*.

Замечание. С точки зрения логики тождество является высказыванием с квантором общности. Например, $(\forall x \in R)\ (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Однако квантор общности часто опускают и пишут: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Примерами тождеств являются свойства сложения и умножения, формулы сокращенного умножения и т.д.

Замечание. Истинные числовые равенства являются тождествами.

В начальном курсе математики выполняются тождественные преобразования только числовых выражений. Они проводятся на основе свойств арифметических операций, изучаемых младшими школьниками. Например, $(59 + 47) + 3 = 59 + (47 + 3)$ или $48 - (20 + 8) = (48 - 8) - 20$.

7.5. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение 7.10. Если два выражения, из которых хотя бы одно содержит переменную, соединить знаком «=», то получится *уравнение с одной переменной.*

С точки зрения логики *уравнения* с одной переменной являются предикатами вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – выражения с переменной.

Замечание. Множества истинности этих предикатов в алгебре называют *множеством решений уравнений*.

Определение 7.11. *Решением уравнения* с одной переменной называется всякое значение переменной из области определения уравнения, при котором это уравнение обращается в истинное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти его множество решений.

Определение 7.12. Уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными* на множестве X, если множества их решений на нем совпадают, т.е. $T_1 = T_2$.

Например, уравнения $3x - 6 = 0$ и $\frac{x+1}{3} = 1$ равносильны на множестве действительных чисел.

Замечание. Уравнения, которые *не имеют решения* на заданном множестве, считаются *равносильными*.

Замечание. Уравнения могут быть равносильными и в случае, если их области определения не совпадают.

Например, уравнения $2(x + 1) = 0$ и $x + \frac{1}{x+2} = 0$ имеют разные области определения, но одно и то же множество решений: $T_1 = T_2 = \{-1\}$.

(*Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.*)

В процессе решения уравнений мы преобразуем их, переходя от более сложных к более простым уравнениям, однако при этом важно, чтобы в процессе этих преобразований множества их решений не изменялись.

Рассмотрим далее, какие преобразования уравнений можно выполнять, не нарушая их равносильность.

Свойства равносильных уравнений

Свойство 1. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ (1) задано на множестве X и $t(x)$ **–** выражение, имеющее значение на всей области определения. Тогда уравнение $f(x) + t(x) = g(x) + t(x)$ (2) равносильно уравнению (1) на множестве X.

Замечание. Это свойство можно прочитать так: к обеим частям уравнения можно прибавлять одно и то же выражение, имеющее значение на всей области определения.

Доказательство.

Для того, чтобы доказать, что $T_1 = T_2$, достаточно убедиться в том, что

$$T_1 \subset T_2 \text{ и } T_2 \subset T_1.$$

1. Пусть $a \in X$ является решением уравнения (1). Тогда при подстановке этого значения переменной в уравнение (1) получим верное числовое равенство $f(a) = g(a)$. (*)

Так как выражение $t(x)$ – имеет значение на всей области определения, то $t(a)$ есть некоторое число. Следовательно, по свойству 1 числовых равенств имеем, что $f(a) + t(a) = g(a) + t(a)$ также есть верное числовое равенство. А это означает, что число $a \in X$ является решением уравнения (2) и, следовательно, $T_1 \subset T_2$, ч.т.д.

2. Докажем теперь, что $T_2 \subset T_1$.

Пусть $a \in X$ является решением уравнения (2).

Тогда $f(a) + t(a) = g(a) + t(a)$ также есть верное числовое равенство. Вычтем из обеих частей этого равенства выражение $t(a)$. В соответствии со свойством 2 числовых равенств получаем, что

$f(a) = g(a)$ есть истинное числовое равенство. А это означает, что число ***a*** является решением уравнения (1) и, следовательно, $T_2 \subset T_1$, ч.т.д.

Следствие 1. К обеим частям уравнения можно прибавлять одно и то же число.

Следствие 2. Любое слагаемое, входящее в уравнение, можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком. (*Докажите это!*)

Свойство 2. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ (1) задано на множестве X и $t(x)$ – выражение, имеющее значение на всей области определения и не обращающееся на нем в нуль. Тогда уравнение $f(x) \cdot t(x) = g(x) \cdot t(x)$ (2) равносильно уравнению (1) на множестве X.

Следствие. Обе части уравнения можно умножить на одно и то же число, отличное от нуля.

Свойство 3. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ (1) задано на множестве X и $t(x)$ – выражение, имеющее значение на всей области определения и не обращающееся на нем в нуль. Тогда уравнение $f(x) : t(x) = g(x) : t(x)$ (2) равносильно уравнению (1) на множестве X.

Следствие. Обе части уравнения можно разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Пример. Решить уравнение $(3x + 7) : 2 = 17$.

Решение. Умножим обе части уравнения на число 2 (следствие из свойства 2): $3x + 7 = 34$.

Перенесем число 7 в правую часть уравнения с противоположным знаком (следствие 2 из свойства 1): $3x = 27$.

Разделим обе части уравнения на число 3: $x = 9$ (следствие из свойства 2).

$$(3x + 7) : 2 = 17 \Leftrightarrow 3x + 7 = 34 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow x = 9.$$

Решением последнего уравнения, а значит, и исходного (в силу равносильности сделанных преобразований), является число 9.

Замечание. ***В начальной школе*** уравнение, как правило, рассматривается как истинное высказывание, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, и решается на основе взаимосвязи между компонентами и результатами действий.

При решении рассмотренной выше задачи ученик будет рассуждать так. Неизвестное число находится в делимом; чтобы его найти, умножим частное (17) на делитель (2). Получим $3x + 7 = 34$.

Теперь неизвестное число находится в первом слагаемом; чтобы его найти, вычтем из суммы (34) второе слагаемое (7). Тогда $3x = 27$.

В этом уравнении неизвестное число является вторым множителем; найдем его, разделив произведение (27) на известный множитель (3). Получаем, что

$$x = 9.$$

Пример. Решить уравнение $ax - 5 = 2a + 3x$ относительно переменной $\boldsymbol{x}$.

Решение. Перенесем в левую часть члены, содержащие переменную $\boldsymbol{x}$, а в правую – не содержащие $\boldsymbol{x}$. Получим: $ax - 3x = 2a + 5$. После вынесения $\boldsymbol{x}$ за скобку уравнение пример вид: $x \cdot (a - 3) = 2a + 5$.

Рассмотрим 2 случая, когда $a - 3 \neq 0$ и когда $a - 3 = 0$.

1) Если $a - 3 \neq 0$ (т.е. $a \neq 3$), то обе части уравнения можно разделить на $a - 3$. Отсюда $x = \frac{2a+5}{a-3}$.

2) Если $a - 3 = 0$ (т.е. $a = 3$), то уравнение примет вид: $x \cdot 0 = 2 \cdot 3 + 5$, или $0 = 11$. Так как это равенство ложно, то при данном значении параметра a исходное уравнение не имеет решения.

Ответ: Если $a \neq 3$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2a+5}{a-3}$;

если $a = 3$, то уравнение решения не имеет.

7.6. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

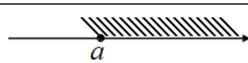
Определение 7.13. Предикаты вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – выражения с переменной, называются *неравенствами с одной переменной.*

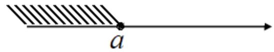
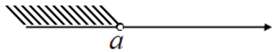
Определение 7.14. Число $a \in X$ называется *решением неравенства* $f(x) > g(x)$, если при $x = a$ данное неравенство обращается в истинное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество его решений.

Множество решений простейших неравенств вида $a < x < b$, $x \geq a$ и др. часто изображают на числовой прямой (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1

Вид неравенства	**Обозначение**	**Название**	**Изображение числового промежутка на числовой прямой**
	числового промежутка		
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	числовой отрезок	
$a < x < b$	$(a; b)$	числовой интервал	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	числовой полу-интервал	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	числовой полу-интервал	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	числовой луч	

Вид неравенства	Обозначение	Название	Изображение числового промежутка на числовой прямой
	числового промежутка		
$x \le a$	$(-\infty; a]$	числовой луч	
$x > a$	$(a; +\infty)$	открытый числовой луч	
$x < a$	$(-\infty; a)$	открытый числовой луч	

Определение 7.15. Два неравенства *равносильны* на множестве X, если множества их решений на нем совпадают.

Свойства равносильных неравенств

Свойство 1. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $t(x)$ – выражение, имеющее значение при *всех* $x \in X$. Тогда неравенство $f(x) + t(x) > g(x) + t(x)$ равносильно исходному на множестве X.

Замечание. Это свойство можно прочитать и так: к обеим частям неравенства можно прибавлять (из обеих частей неравенства можно вычитать) одно и то же выражение с переменной, имеющее значение на всей области определения.

Следствие 1. К обеим частям неравенства можно прибавлять (из обеих частей неравенства можно вычитать) одно и то же число.

Следствие 2. Любое слагаемое, входящее в неравенство, можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком.

Свойство 2. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $t(x)$ – выражение, имеющее значение при *всех* $x \in X$ и удовлетворяющее условию $(\forall x \in X)\ t(x) > 0$. Тогда неравенство $f(x) \cdot t(x) > g(x) \cdot t(x)$ равносильно исходному на множестве X.

Это свойство можно прочитать и так: Обе части неравенства можно умножать (делить) на одно и то же выражение с переменной, принимающее *положительное* значение на *всей* области определения.

Следствие. Обе части неравенства можно умножить (разделить) на одно и то же положительное число.

Свойство 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $t(x)$ выражение, имеющее значение при *всех* $x \in X$ и удовлетворяющее условию $(\forall x \in X)\ t(x) < 0$. Тогда неравенство $f(x) \cdot t(x) < g(x) \cdot t(x)$ равносильно исходному на множестве X.

Иначе говоря, обе части неравенства можно умножать на одно и то же выражение с переменной, принимающее *отрицательные* значения на *всей* области определения, *поменяв* при этом *знак неравенства* на *противоположный*.

Следствие. Обе части неравенства можно умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, поменяв при этом знак неравенства на противоположный.

Замечание. Доказательство свойств равносильных неравенств проводится аналогично доказательству свойств равносильных уравнений и опирается на свойства истинных числовых неравенств.

Пример. Решить неравенство: $\frac{3-2x}{7} \geq x - 6$.

Решение. Опираясь на свойства равносильных неравенств, выполним следующие преобразования:

- умножим обе части неравенства на число 7 (большее 0): $3 - 2x \geq 7x - 42$;
- перенесем 3 и $7x$ из одной части неравенства в другую с противоположным знаком: $-2x - 7x \geq -42 - 3$ и приведем подобные члены: $-9x \geq -45$;
- разделим обе части неравенства на отрицательное число -9 и поменяем знак неравенства: $x \leq 5$;
- изобразим множество решений последнего неравенства на числовой прямой (см. рис. 7.1).

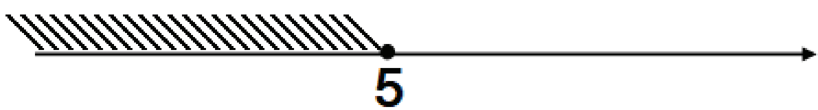


Рис. 7.1

Ответ: $T = (-\infty; 5]$.

7.7. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение 7.16. Пусть даны уравнения: $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$.

Говорят, что уравнения образуют *систему*, если ставится задача отыскания таких значений переменной, которые обращают *каждое* из уравнений в верное числовое равенство.

Система уравнений обозначается так: $\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) = g_2(x) \end{cases}$

Аналогичным образом определяется и система неравенств. (*Предлагаем сделать это читателю самостоятельно.*)

Из сказанного следует, что с логической точки зрения *система* уравнений (неравенств) есть *конъюнкция предикатов*, а множество решений системы есть *пересечение* множеств решений входящих в нее уравнений (неравенств).

Пример. Найти множество решений системы:

$$\begin{cases} 8x + 17 > 7x + 19 \\ 17 - 4x \geq x - 13 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем неравенства системы, заменяя их равносильными.

$$\begin{cases} 8x + 17 > 7x + 19 \\ 17 - 4x \geq x - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -5x \geq -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Множеством решений неравенства $x > 2$ является промежуток $(2; \infty)$, а множество решений неравенства $x \leq 6$ есть промежуток $(-\infty; 6]$.

Изобразим эти множества на числовой прямой и найдем их пересечение (см. рис. 7.2):

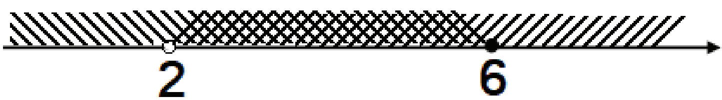


Рис. 7.2

$$T = T_1 \cap T_2 = (2; \infty) \cap (-\infty; 6] = (2; 6].$$

Ответ: (2; 6].

Определение 7.17. Говорят, что уравнения (неравенства) образуют *совокупность*, если ставится задача отыскания таких значений переменных, которые являются решением *хотя бы одного* из них.

Для обозначения совокупности используют квадратную скобку.

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{array}\right.$$

С точки зрения логики *совокупность* уравнений (неравенств) есть *дизъюнкция*. Соответственно, множество решений совокупности есть *объединение* множеств решений уравнений (неравенств), входящих в нее.

К совокупностям уравнений сводятся, например, уравнения вида:

$$(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) = 0 \text{ и } |x| = a.$$

Действительно,

$$(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - a_1 = 0) \vee (x - a_2 = 0) \vee \dots \vee (x - a_n = 0);$$

$$|x| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$$

Примеры совокупности неравенств: $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right.$

Примеры систем уравнений и неравенств:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Пример. Найти множество решений совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{r} 12 + 9x < 4x + 37 \\ 7 - 4x \le 4 - x. \end{array}\right.$$

Решение.

$$\left[\begin{array}{r} 12 + 9x < 4x + 37 \\ 7 - 4x \le 4 - x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x < 25 \\ -3x \le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 5 \\ x \ge 1 \end{array}\right.$$

Изобразим множества решений этих неравенств на числовой прямой и найдем их объединение (см. рис. 7.3):

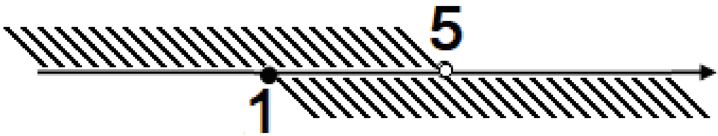


Рис. 7.3

$$T = T_1 \cup T_2 = (-\infty;\ 5) \cup [1;\ \infty) = (-\infty;\ \infty).$$

Ответ: $(-\infty;\ \infty)$.

7.8. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Определение. Предикат вида $f(x, y) = g(x, y)$, где $x \in X$ и $y \in Y$, называется *уравнением с двумя переменными*.

Решением такого уравнения является пара чисел (x_0, y_0) из области определения, при которых уравнение обращается в истинное числовое равенство.

Например, пара чисел (5; 7) является решением уравнения $x + y = 12$, так как $5 + 7 = 12$ верное равенство, а пара чисел (4; 9) – решением не является, так как $4 + 9 \neq 12$.

Замечание. Как правило, уравнение с двумя переменными имеет бесконечно много решений, но это не значит (как мы видели выше), что любая пара чисел является ее решением.

В начальной школе учащиеся встречаются с заданиями, в которых (в неявном виде) идет речь о нахождении множества решений уравнений с двумя переменными. Например, им предлагается перечислить все пары (целых неотрицательных) чисел, сумма или произведение которых равно некоторому числу.

Понятие системы уравнений, введенное в п. 7.7 как конъюнкция уравнений, сохраняется и для уравнений с двумя переменными.

Решением такой системы является любая пара чисел $(a;\ b)$, при подстановке которой *в каждое* уравнение системы получаются истинные числовые равенства.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 4x = 20 + y \end{cases}$$

Решение.

1. Сначала решим данную систему уравнений *методом подстановки*. Для этого выразим **y** из 2-го уравнения

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ y = 4x - 20 \end{cases}.$$

и подставим выражение $4x - 20$ в первое уравнение вместо **y.** Получаем систему:

$$\begin{cases} 5x - 2(4x - 20) = 4 \\ \quad y = 4x - 20 \end{cases}.$$

Решая первое уравнение, находим, что $x = 12$. Отсюда $y = 4 \cdot 12 - 20$, т.е. $y = 28$. Таким образом, решением системы является пара чисел (12; 28).

2. Теперь решим эту же систему *методом алгебраического сложения*, для чего преобразуем 2-е уравнение к виду:

$$4x - y = 20.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 4x - y = 20 \end{cases}.$$

Умножим обе части 2-го уравнения системы на (–2), чтобы коэффициенты при **y** стали противоположными числами

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -8x + 2y = -40, \end{cases}$$

и сложим почленно левую и правую части уравнений.

В результате получим уравнение с одной переменной: $-3x = -36$, откуда $x = 12$. Подставив это значение **x** в любое из уравнений системы, получаем, что $y = 28$. Значит, решением системы является (уже найденная выше) пара чисел (12; 28).

7.9. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМ

Изображение множества истинности предиката $f(x, y) = g(x, y)$ на координатной плоскости называется *графиком уравнения* $f(x, y) = g(x, y)$. Иначе говоря, график уравнения с двумя переменными есть множество точек плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Графиком уравнения $ax + by + c = 0$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$, является прямая линия; графиком уравнения $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) – парабола; графиком уравнения $xy = k$ ($k \neq 0$) – гипербола, а графиком уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – окружность радиуса R с центром в точке C (a, b).

Чтобы решить систему уравнений графически, надо построить линии, заданные уравнениями системы, и найти координаты точек пересечения этих линий.

Пример. Решить графически систему уравнений.

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Решение.

Уравнение $y - x = 2$ задает прямую. Чтобы ее построить, возьмем две точки. Если $x = 0$, то $y = 2$, а если $y = 0$, то $x = –2$.

Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ задает окружность с центром в точке O (0, 0) и радиусом 2.

Из построенных графиков (см. рис. 7.4) видно, что точки пересечения прямой и окружности имеют координаты (0; 2) и (–2; 0).

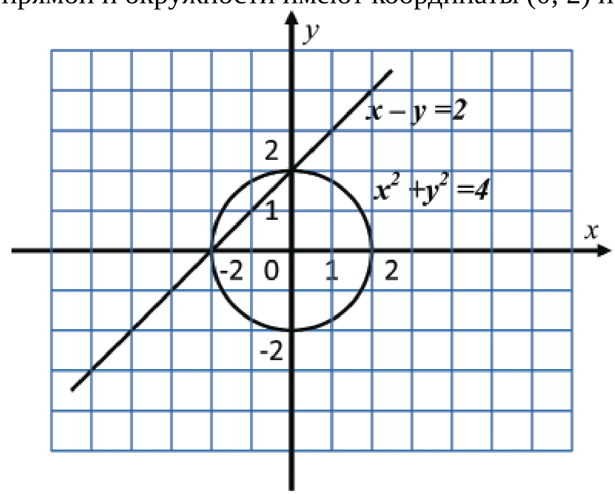


Рис. 7.4

Таким образом, T = {(0; 2), (–2; 0)}.

Пример. Решить графически неравенство $2x + 2y \geq 0$.

Решение. Для удобства выразим y и получим неравенство: $y \geq -x$.

Сначала надо найти границу области. Для этого заменим знак неравенства на знак равенства и построим график уравнения $y = -x$. Это прямая, проходящая через начало координат и точку с координатами (1; –1).

Далее выберем область, где выполняется неравенство $y \geq -x$. Возьмем какую-нибудь точку, например $A(1;1)$, и подставим ее координаты в неравенство $y \geq -x$. Так как полученное неравенство $1 \geq -1$ истинно, то и во всех точках над прямой это неравенство будет выполняться (см. рис. 7.5).

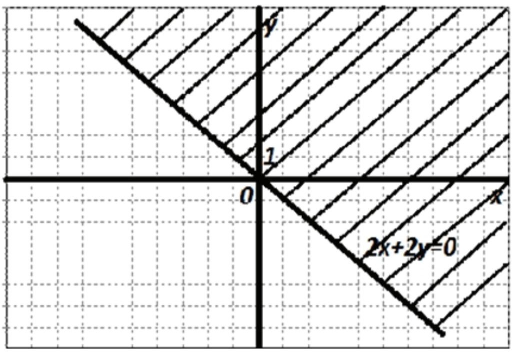


Рис. 7.5

Пример. Решить графически систему неравенств.

$$\begin{cases} y > -3x + 1 \\ y \leq x - 3 \end{cases}$$

Решение. Сначала построим в одной системе координат графики уравнений $y = -3x + 1$ и $y = x - 3$.

Нетрудно убедиться в том, что решением неравенства

$$y > -3x + 1$$

является множество пар координат точек, расположенных выше прямой $y = -3x + 1$, а решением неравенства $y \leq x - 3$ – множество пар координат точек, расположенных ниже прямой $y = x - 3$ или на ней (*предлагаем читателю сделать это самостоятельно*).

Тогда решениями системы неравенств будут пары координат точек дважды заштрихованной области (см. рис. 7.6).

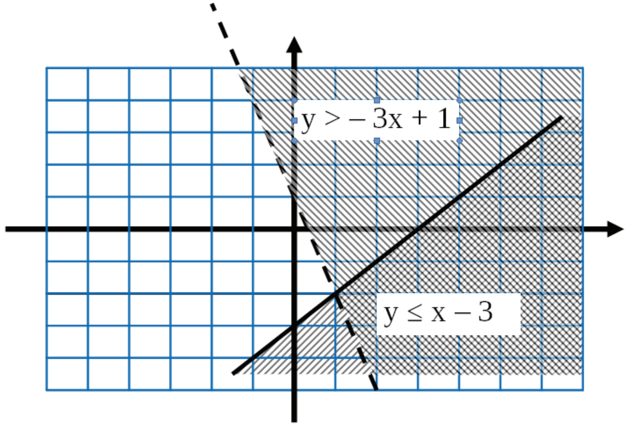


Рис. 7.6

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 7

К параграфам 7.1–7.4

1. Какие из следующих записей не являются числовыми выражениями?

а) ((18 : 6 + 4) · 3; б) (+ + 24 – 7); в) (64 + – 12) : 19; г) 144 + 28.

2. Какие из следующих записей являются числовыми выражениями?

а) 24 : 3 + 7; б) 47 > 12; в) (120 + x) : 4; г) 125; д) 38 – 14 = 7; е) $5^2 + 3^2$; ж) $\sqrt{49} + 12$; з) $x + y - 25$.

3. Существуют ли числовые значения у следующих выражений, если в качестве допустимых результатов операций рассматривать: 1) целые неотрицательные числа; 2) целые числа; 3) действительные числа?

а) (3 · 5 + (14 – 15))(17 – 13); б) (48 : 24 + 32 : 4) · 5;
в) ((19 + 2) : 14) · 28; г) 36 : 10 + 24 : 60;
д) 19 : 5 + 66 : 30 + 5; е) 204 : 12 – 15 · 2 + 7;
ж) 125 – (170 – 35) + 10.

4. Верно ли, что:

а) всякое число является числовым выражением;

б) ни одно числовое выражение не содержит знаков отношений > , < , =;

в) каждое числовое выражение содержит хотя бы один знак действия;

г) любое числовое выражение содержит скобки;

д) все числовые выражения имеют значение.

5. Какие из следующих выражений можно упростить, убрав скобки?

а) $45 - (24 \cdot 5)$;

б) $(39 : 3) - 7$;

в) $100 : (5 \cdot 10)$;

г) $(38 - (12 + 6) + (3 \cdot 8) : 2)$;

д) $(24 : 3) \cdot 2 + (148 : (64 : 16))$;

е) $125 - (70 - 35) + 13$.

6. Прочитайте следующие выражения и найдите их значения:

а) $3 \cdot 24 + 12$;

б) $128 : 4 - 16 \cdot 2$;

в) $144 \cdot (17 - 9)$;

г) $136 : (64 : 8)$;

д) $(181^2 - 61^2) : 22$;

е) $135 : 3 - 7 \cdot 8$.

7. Запишите следующие выражения с помощью математических символов и найдите их значения:

а) разность числа 56 и суммы 23 и 4;

б) частное суммы чисел 128 и 52 и разности чисел 78 и 33;

в) произведение суммы чисел 47 и 18 и частного 48 и 12;

г) сумма частного чисел 154 и 7 и разности числа 31 и произведения 2 и 4.

8. Выполните действия:

а) из частного чисел 180 и 12 вычесть разность чисел 36 и 29;

б) к произведению числа 2 и суммы чисел 20 и 18 прибавить частное числа 63 и разности чисел 11 и 2.

9. Найдите значения выражений, не пользуясь калькулятором:

а) $100 - (37 + 32 : 8 \cdot 2) : 3 \cdot 5 + 58$;

б) $720 : 8 \cdot 9 - (3 \cdot 9 - 7 \cdot 2) \cdot 3$;

в) $840 - 440 : (7 \cdot 8 - 5 \cdot 9 - 3) \cdot 5 - (38 - 8 \cdot 4)$;

г) $(3 \cdot 7 + 3 \cdot 13) : (6 \cdot 5 - 12 \cdot 2) \cdot 10$;

д) $5{,}9 - 1\frac{8}{11} - (4 - 3{,}7)$;

е) $4{,}2 : 0{,}2 - 9{,}8 - 7{,}84$;

ж) $0{,}51 \cdot 0{,}36 : \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{3} : 1{,}7 : (1{,}8 + \frac{3}{5})$;

з) $(1\frac{2}{7} - \frac{30}{49}) \cdot 6\frac{15}{22} + 3{,}75 : 1\frac{1}{12}$;

и) $2{,}4 : (0{,}425 + \frac{3}{5} - 0{,}005) \cdot 1{,}7$.

10. Расставьте скобки в выражении так, чтобы получились разные ответы:

а) 24 + 12 : 6 : 2; б) 2000 – 1000 – 500 : 25 : 5.

11. В данном выражении вместо знаков * расставьте знаки четырех арифметических действий так, чтобы 100 являлось значением получившегося числового выражения: 42 * 2 * 56 * 7 * 9 * 8 * 1.

Задачи № 12–18 решите, составив числовые выражения.

12. Из двух городов, расстояние между которыми 700 км, одновременно навстречу друг другу выехали автомобиль со скоростью 60 км в час и мотоцикл со скоростью 80 км в час. Через сколько часов они встретятся?

13. За 7 ч мастер изготовляет 56 деталей, а ученик изготовляет такое же количество деталей за 14 ч. Сколько деталей изготовят мастер и ученик за 4 ч?

14. За 5 кг огурцов и 3 кг помидоров заплатили 660 руб. Цена 1 кг огурцов – 60 руб. Сколько стоит 1 кг помидоров?

15. Один тракторист может вспахать участок земли за 1 ч, а другой за 75 % этого времени. Оба тракториста начали работу одновременно и проработали вместе 20 мин, после чего первый тракторист прекратил работу. Сколько нужно времени, чтобы второй тракторист закончил работу один?

16. Вкладчик взял из сберкассы сначала $\frac{1}{4}$ своих денег, а потом еще 64 руб. После этого у него осталось на сберкнижке $\frac{7}{20}$ всех денег. Каков был вклад?

17. Цену костюма сначала снизили на 10 %, а затем произвели снижение еще на 5 %. На сколько процентов снизили первоначальную цену костюма?

18. Петя прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал $\frac{1}{5}$ часть всей книги и еще 60 страниц, во второй день – $\frac{1}{4}$ часть всей книги и еще 20 страниц, а в третий день – $\frac{23}{80}$ всей книги и оставшиеся 25 страниц. Сколько страниц было в книге?

19. У двух товарищей вместе 70 руб. Если первый отдал бы второму 12,5 % своей суммы, то денег у них стало бы поровну. Сколько денег у каждого товарища?

20. В магазин привезли 24 кг конфет по цене 320 руб за 1 кг и 12 кг конфет по цене 550 руб за 1 кг.

К данному условию поставьте вопрос так, чтобы его решением было выражение:

а) $320 \cdot 24 + 550 \cdot 12$; б) $320 \cdot 24 – 550 \cdot 12$; в) $(320 \cdot 24) : (550 \cdot 12)$.

21. Придумайте задачи, решением которых являются числовые выражения:

а) $300 : (60 + 40)$; б) $127 – (13 \cdot 3 + 12 \cdot 5)$; в) $1 – (0{,}36 + 0{,}75 \cdot 0{,}36)$;

г) $120 : 2 \cdot 5$.

22. Какие из записей являются высказываниями:

а) $(2 + 3 \cdot 7) : 4$; б) $23 – 8 < 14 + 6$; в) $2 + 48 = 32 + 7$; г) $137 – 38 = 99$; д) $13 : (7 – 7)$?

23. Сравните значения числовых выражений и поставьте один из знаков = , > , < так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) $4{,}5 \cdot 1\frac{2}{3} – 6{,}75$ и $16\frac{1}{2} – 13\frac{7}{9} – 2{,}5$;

б) $1{,}2 : 0{,}375 – 0{,}2$ и $(7 – 6{,}25) \cdot 4$;

в) $10{,}3 \cdot 0{,}21 – 15\frac{3}{20} : 7{,}5$ и $0{,}95 : 5 – 15\frac{2}{5} : 6\frac{4}{25} + \frac{1}{2}$

24. Найдите значения истинности следующих высказываний:

а) $(6\frac{1}{7} – 5\frac{3}{4}) : 1\frac{9}{10} < 3\frac{1}{18} – 2\frac{7}{12}$;

б) $4{,}3 – (– 6{,}1) + 2{,}4 = 4{,}3 – 6{,}1 + 2{,}4$;

в) $3{,}9 \cdot 0{,}24 : 0{,}6 > (4{,}06 – 2\frac{1}{2}) \cdot 0{,}8 – 4\frac{4}{5}$;

г) $3{,}1 – 0{,}04 – \frac{17}{20} < \frac{9}{28} + \frac{3}{7} – 2\frac{2}{21}$.

25. Какие из следующих высказываний можно записать с помощью знака равенства, а какие – с помощью знака неравенства?

а) число 63 меньше 82 на 19;

б) число 55 больше 13;

в) число 5 больше 3 на 2;

г) число 81 меньше 162 в 2 раза;

д) число31 меньше 45;

е) число 63 больше 7 в 9 раз;

ж) число 99 меньше 100.

26. Известно, что неравенство $a > b$ истинно. При каких значениях c истинны неравенства?

а) $ac > bc$; б) $a + c > b + c$; в) $ac < bc$; г) $a : c > b : c$; д) $a : c < b : c$.

27. Из следующих пар высказываний образуйте дизъюнкцию высказываний и определите ее значение истинности; истинные дизъюнкции запишите в виде нестрогого неравенства:

а) $1 < 3$; $1 = 3$; б) $8 = 9$; $8 > 9$;
в) $5 > 7$; $5 = 7$; г) $14 > 14$; $14 = 14$;
д) $13 = 13$; $13 < 13$; е) $27 > 11$; $27 = 11$.

28. Даны неравенства:

а) $23 \geq 40$; б) $7 \leq 7$;
в) $22 \geq 14$; г) $5 \leq 8$;
д) $62 \geq 60$; е) $35 \geq 35$.

Прочитайте каждое из них двумя способами:

1) используя союз «или»;

2) с помощью слова «не больше» или «не меньше» и определите их значения истинности.

29. Вместо * поставьте один из знаков $\leq$ или $\geq$ так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) $(12^2 – 9^2) : 21 * (52 \cdot 13 – 42 \cdot 13) : 5$;
в) $3,2 \cdot 2,4 – 0,7 \cdot 0,8 * 14,8 : 4 + 3 \cdot 1,14$;
г) $0,25 \cdot 1,12 + 4 \cdot 0,35 * 12,3 : 4,1 – 1,7$;
д) $245 : 5 + 56,8 : 7,1 * 8^2 – 7^2 + 13^2$;
е) $(3,23^3 – 3,03^2) : 0,2 * 3,36 : 0,8 + 0,2 \cdot 10,3$.

30. Из следующих пар высказываний образуйте конъюнкцию высказываний и определите ее значение истинности; истинные конъюнкции запишите в виде двойного неравенства:

а) $42 < 53$; $53 < 64$; б) $– 2,1 < – 2,4$; $– 2,4 < – 2$;
в) $– 5 > – 3$; $– 3 > 4$; г) $5 > 1$; $12 > 5$.

31. Прочитайте следующие неравенства и определите их значения истинности:

а) $4 \leq 9$; б) $1 < 2 < 4$; в) $17 \geq 28$; г) $29 \geq 29$; д) $5 \leq 7 \leq 7$.

32. Какие из знаков $>$, $<$, $=$, $\leq$, $\geq$ можно поставить вместо *, чтобы получилось истинное высказывание?

а) 3 * 4; б) 3 * 3; в) 2 * 7 * 9; г) 27 * 27.

(Рассмотрите все возможные случаи.)

33. Сформулируйте отрицания следующих высказываний (сделайте символические записи):

а) $28 < 30$; б) $12 \geq 8$; в) $150 \leq 210$; г) $27 > 19$ и найдите их значения истинности.

34. Проверьте истинность равенств:

а) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;

б) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$;

в) $8833 = 88^2 + 33^2$;

г) $9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$;

д) $1972 = (1 + 9 + 7 + 2)(1^2 + 9^2 + 7^2 + 2^2) – 197 \cdot 2 – (197 + 2)$;

е) $1972 = 19 \cdot 72 + 197 \cdot 2 + (197 – 2) + (1 + 9 + 7 – 2)$;

ж) $675 + 872 = (6^3 + 7^3 + 5^3) + (8^3 + 7^3 + 2^3)$;

з) $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$.

35. Какие из записей являются выражениями с переменной:

а) $3x + 7$; б) $t^2 – 1{,}24t + 2$; в) $y + 4 = 13$; г) $x \cdot y$; д) $24 – (48 – 15)$;

е) $2x$; ж) $3y < 6$?

36. Найдите значения выражений при заданных значениях переменных:

а) $x^2 – 3x + 7$, при $x = –3$; б) $(x – 2)\,x + 1{,}3$, при $x = 12$; в) $\frac{xy}{x+y}$ при $x = 0{,}5$ и $y = – 4$; г) $\frac{m}{m^2-1}$ при $m = – 1$.

37. Напишите выражение с переменной, которое не имеет значения:

а) при $x = 5$;	б) при $y = – 1$;	в) при $x = 0$ и $x = 2$;
г) $x = – 3$ и $y = 3$;	д) при $x < – 3{,}2$;	е) при $y \geq 5$;
ж) при $x = y$.		

38. Найдите область определения выражений:

а) $2y – 7$;	б) $\frac{3x-6}{2x-4}$;	в) $\frac{3x-5}{1+x^2}$;	г) $\frac{x-1}{1-x^2}$;
д) $\frac{x-1}{1+2x+x^2}$;	е) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}$;	ж) $\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}$;	з) $\sqrt{\frac{4-x}{2x-3}}$;
и) $\sqrt{x+1+x^2}$;	к) $\frac{x-1}{1-x^2}$;	л) $\frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$.	

39. При каких значениях переменной следующие выражения не имеют числового значения?

а) $\frac{y+3}{y-5}$; б) $\frac{x^2+3}{x^2-1}$; в) $\sqrt{x-3}$; г) $\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}$; д) $\frac{y+5}{y}$; е) $\frac{x^2-3}{x^2-5x+6}$

40. Докажите следующие тождества:

а) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax – by)^2 + (bx + ay)^2$;

б) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$;

в) $\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0$;

г) $\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-z)(y-x)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)} = 0$.

41. При каких значениях x являются тождествами следующие равенства:

а) $8x + 9 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-4} = 8x + 9$;

б) $\frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x + 2$;

в) $\frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x}$?

42. Является ли тождеством равенство $(\sqrt{x})^2 = x$? Истинно ли оно при $x = -4$?

43. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $(x + y)(x - y)$ и $x^2 - y^2$;

б) $\frac{x}{6}$ и $\frac{x(x-1)}{6(x-1)}$;

в) $x - 1$ и $y - 1$?

К параграфам 7.5–7.9

44. На множестве N всех натуральных чисел задано уравнение

$3x^2 - 15x = 0$. Объясните, почему число 5 является решением данного уравнения, а числа 7 и 0 не являются его решениями.

45. Вместо многоточия вставьте слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) для того, чтобы $x = a$ являлось корнем уравнения $f(x) = 0$, …, чтобы a принадлежало множеству определения этого уравнения;

б) для того, чтобы $x = a$ являлось корнем уравнения $f(x) = 0$, …, чтобы $f(a)$ было истинным высказыванием;

в) для того, чтобы $x = a$ являлось корнем уравнения $f(x) = 0$, …, чтобы a принадлежало множеству определения этого уравнения и $f(a)$ было истинным высказыванием.

46. Даны пары уравнений:

а) $x^2 - 4 = 0$ и $x - 2 = 0$;

б) $5x - 3 = 2x + 6$ и $3x - 9 = 0$;

в) $(x - 3)(x - 4) = 0$ и $x^2 + 12 = 7x$;

г) $2x - 5 = 3x - 18$ и $x - 13 = 0$;

д) $x^2 + 18 = 1$ и $x^2 + 6x + 21 = 5$.

Какие из этих уравнений равносильны:

а) на множестве всех действительных чисел;

б) на множестве всех целых чисел;

в) на множестве всех целых неотрицательных чисел;

г) на множестве всех натуральных чисел?

47. Не решая уравнений, определите, какие из преобразований могут привести к нарушению равносильности, если уравнения заданы:

а) на множестве действительных чисел;

б) на множестве целых неотрицательных чисел.

	Исходное уравнение	Выполненное преобразование	Полученное уравнение
1	$9x - 7 = 5x - 1$	К обеим частям уравнения прибавили выражение $7 - 5x$	$4x = 6$
2	$x^2 + 2x = 0$	Обе части уравнения разделили на выражение x	$x + 2 = 0$
3	$(x + 1)5 = x^2 + x$	Обе части уравнения разделили на выражение $x + 1$	$5 = x$

48. Решите следующие уравнения и объясните, где и каким свойством равносильных уравнений вы пользовались:

а) $3x - 14 = 2x + 9$;

б) $3(x - 5) = 0{,}5x(2x - 7)$;

в) $\frac{3}{4}(2 - x) + 5 = \frac{x}{2} - 1\frac{1}{4}$.

49. Известно, что уравнения $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ равносильны на множестве натуральных чисел. Можно ли утверждать, что они равносильны и на множестве действительных чисел? Ответ подтвердите примером. Верно ли обратное?

50. Даны уравнения:

а) $3x - 20 = 19$; б) $210 - 5x = 55$; в) $32 \cdot (3 - x) = 64$;

г) $7x + 41 = 83$; д) $240 : (x - 2) = 8$; е) $(9x + 7) : 2 = 35$.

Решите эти уравнения: 1) на основе зависимости между результатом и компонентами действий; 2) используя свойства равносильных уравнений, и сравните эти способы решения.

51. При объяснении решения уравнения $(x-3)(x+2)=0$ были получены следующие ответы:

Учащийся А. Если произведение равно нулю, то оба множителя равны нулю. Следовательно, $x-3=0$ и $x+2=0$, откуда $x=3$ и $x=-2$.

Учащийся Б. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, $x-3=0$ или $x+2=0$. Отсюда $x=3$ или $x=-2$.

Учащийся В. Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, $x-3=0$ или $x+2=0$. Отсюда $x=3$ или $x=-2$.

Учащийся Г. Произведение равно нулю только в том случае, когда первый множитель равен нулю или второй множитель равен нулю. Следовательно, $x-3=0$ или $x+2=0$. Откуда $x=3$ или $x=-2$.

Кто из учащихся рассуждал правильно?

52. Для каждого из следующих уравнений найдите область определения и множество решений:

а) $\frac{12x+1}{2(1-3x)}-\frac{5-9x}{3x+1}=\frac{36x^2-108x+9}{4(9x^2-1)}$;

б) $\frac{3x}{2x-2}+\frac{x}{1-x}=\frac{9}{2x+2}$;

в) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{(x^2-4)-8x}{x^2-4}$;

г) $\frac{6}{x^2-4x+3}-\frac{13-7x}{1-x}=\frac{3}{x-3}$.

53. Существует ли такое значение t, при котором сумма дробей $\frac{t-5}{5-3t}$ и $\frac{t-1}{4t+1}$ равна их произведению?

54. Турист за 3 дня прошел 48 км. В первый день он прошел на 6 км меньше, чем во второй, а в третий день 0,7 пути, пройденного во второй день. Сколько километров проходил турист в каждый из трех дней?

55. Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 1056. Найдите эти числа.

56. Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 149. Найдите эти числа.

57. Квадрат суммы двух последовательных четных натуральных чисел равен 2116. Найдите эти числа.

58. Числитель дроби на 2 больше знаменателя, а значение разности этой дроби и обратной ей равно $\frac{24}{35}$. Найдите эту дробь.

59. Одна бригада выполняла задание в течение 3,5 дней, а затем она была заменена второй, которая закончила работу за 6 дней. За сколько дней каждая бригада в отдельности выполнила бы задание, если известно, что второй бригаде для этого нужно на 5 дней больше, чем первой?

60. Ученик прочитал книгу в 480 страниц, ежедневно читая одинаковое количество страниц. Если бы он читал каждый день на 16 страниц больше, то он прочитал бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней ученик читал книгу?

61. Поезд должен был пройти 240 км за определенное время. После трех часов пути он был задержан на 30 мин, и чтобы прибыть на место назначения без опоздания, ему пришлось увеличить скорость на $3\frac{1}{3}$ км в час. Какова была первоначальная скорость поезда?

62. Моторная лодка прошла по течению реки 39 км, а затем против течения 35 км. Вся поездка продолжалась 10 ч, причем на остановки в пути было затрачено 2 ч. Найдите собственную скорость моторной лодки, если скорость течения реки равна 3 км в час.

63. Решите уравнения с параметром b:

а) $bx = 5$; б) $1 – bx = x$; в) $bx – 2x = 5b – 10$.

64. Запишите неравенство, множеством решений которого является числовой промежуток: а) $(– \infty; 5]$; б) $(–2,4; \infty)$; в) $[2; 14]$; г) $(–3; 15,8)$; д) $(–12; 0]$.

65. Найдите множество решений неравенства:

а) $– 2 < x < 5$; б) $0 \le x \le 6,1$; в) $2 \le x \le 3$ при условии, что

1) $x \in R$; 2) $x \in Z$; 3) $x \in N_0$; 4) $x \in N$.

Для каждого случая дайте графическую иллюстрацию на числовой прямой.

66. Определите, какое неравенство следует из какого, и запишите этот факт, используя символ $\Longrightarrow$: а) $x < 2$; $x < 5$; б) $x > 3$; $x > 7$; в) $x \geq 4$; $x > 4$; г) $x \geq 7$; $x > 6$. (Считайте, что x – действительное число.)

67. Равносильны ли неравенства:

а) $3x < 16$ и $4x \leq 20$; б) $0 < x \leq 6$ и $-2 < x < 7$;
в) $x > 12$ и $3x > 36$; г) $x^2 < 0$ и $x^2 \leq 0$;
д) $x^2 > 0$ и $x > 0$; если 1) $x \in N$; 2) $x \in R$?

68. Не решая неравенств, определите, какие преобразования могут привести к нарушению равносильности на множестве действительных чисел:

	Исходное неравенство	Выполненное преобразование	Полученное неравенство
1	$9x + 2 < 7$	Из обеих частей неравенства вычли число 2	$9x < 5$
2	$-5x > 10$	Обе части неравенства разделили на -5	$x < -2$
3	$\frac{1}{3}x - 4 > \frac{1}{5}$	Обе части неравенства умножили на 15	$5x - 60 > 3$
4	$\frac{4x-1}{x+3} < 2$	Обе части неравенства умножили на $x + 3$	$4x - 1 < 2(x + 3)$

69. Решите следующие неравенства, объясняя, где и каким свойством равносильных неравенств пользовались:

а) $3(2x - 1) + 5x < 8$; б) $\frac{1}{3}x - \frac{x}{4} > \frac{1}{5}$; в) $12(3 - \frac{1}{3}x) > \frac{1+2x}{4}$.

70. Укажите множество, на котором неравенства $\frac{3-x}{x-4} > 5$ и $3 - x < 5(x - 4)$ будут равносильны.

71. При каких значениях $\boldsymbol{x}$ значение разности выражений $\frac{5x-3}{6}$ и $\frac{8x+3}{4}$ – положительно?

72. а) Докажите, что при любом натуральном $\boldsymbol{p}$ значение суммы выражений
$\frac{3p-12}{5}$ и $\frac{p+7}{3}$ – положительно.

б) Останется ли это утверждение верным, если: 1) p – целое неотрицательное число; 2) p – положительное действительное число?

73. Найдите множество целых значений $\boldsymbol{y}$**,** являющихся решением неравенства $\frac{3y-4}{4} + 1 < \frac{2y}{3}$.

74. Докажите, что множество действительных решений следующих неравенств пусто:

а) $5 \cdot (1{,}4 + 1{,}3y) > 13\,(0{,}5y + 1) + 0{,}9$;

б) $7x + 4 \cdot (x + 2) < 4\,(3x + 1) - (x + 1)$;

в) $\frac{2t-5}{6} > \frac{t}{3} - \frac{1-t^2}{5}$.

75. Докажите, что следующие неравенства справедливы для всех натуральных значений $\boldsymbol{x}$:

а) $12(3x + 4) - 14x > 11(2x - 5)$;

б) $\frac{3x+5}{4} < \frac{9x-2}{3}$;

в) $(3x + 7)x + 4 > 3(x + 1)^2$.

76. Какие из неравенств в задании № 75 справедливы для всех действительных значениях $\boldsymbol{x}$?

77. Решите задачи, составив неравенства:

а) Одна из сторон участка прямоугольной формы равна 14 м. Какой должна быть другая сторона, чтобы периметр участка был меньше его площади?

б) Из города *А* в город Б выехал автомобилист со скоростью 60 км/ч, а спустя 2 часа вслед за ним выехал мотоциклист. С какой скоростью должен ехать мотоциклист, чтобы прибыть к месту назначения первым, если расстояние между городами 420 км?

78. Решите неравенства относительно переменной $\boldsymbol{x}$:

а) $a(x + 1) < 2x + 3$; б) $2ax + 3 < a + 6x$; в) $ax + 3 > 2x - 7$.

79. Вместо многоточия вставьте союз «и», либо «или», чтобы получилось истинное высказывание:

а) $xy = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \ldots y = 0$;

б) $xy \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \ldots y \neq 0$;

в) $\frac{x}{y} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \ldots y \neq 0$.

80. Представьте следующие уравнения в виде дизъюнкции и найдите их множества действительных решений:

а) $(x - 4{,}5)(x + 9) = 0$; б) $5(3x - 1)(2x + 17) = 0$;

в) $x(x - 2{,}8)(x + 1) = 0$; г) $-2\,(1 + x)(12x + 4) = 0$;

д) $|x| = 2,8$; е) $|7 - 8x| = 4$;
ж) $|x - 1| = 5,3$; з) $|3x + 4| = 1$;
и) $(x + 3)(x - 2)^2 = 0$; к) $(x - 8)^3(x + 2)^2 = 0$.

81. Представьте следующие уравнения в виде конъюнкции и найдите их множества действительных решений:

а) $\frac{13x+26}{2-x} = 0$; б) $\frac{(3x-15)(x+7)}{x-3} = 0$;

в) $\frac{x^2(x-2)+2(x^2-4)}{x-2} = 0$.

82. Какие из чисел 3; –1; $1\frac{1}{3}$ являются решением: а) системы; б) совокупности неравенств $2x - 3 > x - 1$ и $4x + 3 > 8 - x$?

83. Решите системы и совокупности неравенств:

а) $\begin{cases} 0,3(x+4) - 1,2(x-5) > 0 \\ 1,4(2-x) + 7(3+x) < 6 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 13(x-4) + 5(x+3) > 1,2 \\ 4(x+1,2) - (8+x) < 6,4 \end{cases}$;

в) $\left[\begin{array}{l} 0,3(x^2-4) < (3x-2)\cdot 0,1x \\ \frac{1}{3}(2x+11) - \frac{1}{4}(x+12) \le 3 \end{array}\right.$;

г) $\left[\begin{array}{c} 2 - \frac{x-3}{3} + \frac{x+8}{8} \le 1 \\ 7(0,1-x) + x(7x+8) < 3x^2 + 4x(x-1) \end{array}\right.$;

д) $\begin{cases} 0,3(x+4) - 1,2(x-5) > 0 \\ 1,4(2-x) + 7(3+x) < 6. \end{cases}$.

84. Найдите множество действительных решений неравенства:
а) $|x| < 7$; б) $|x| > 4,3$; в) $|x - 1| \le 5$;
г) $|1 - x| \ge 8,5$; д) $|x + 5| \ge 0$; е) $|x + 4| < 0$;
ж) $x^2 - 4 \le 0$; з) $x^2 - 5x + 6 \ge 0$; и) $x^2 - 2x + 7 \ge 0$;
к) $2x^2 + 9x - 7 < 0$; л) $x^2 - x + 9 < 0$; м) $(x + 3)(x - 2)^2 < 0$;
н) $(x - 7)x^2 > 0$; о) $(x - 2)^2(x - 3) \le 0$.

85. Закончите утверждение так, чтобы оно было истинным:
а) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0$ и $y > 0)$ или …
б) $xy < 0 \Leftrightarrow (x > 0$ и $y < 0)$ или …
в) $\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ и $y > 0$ …
г) $\frac{x}{y} < 0 \Leftrightarrow x > 0$ и $y < 0$ …

86. Решите неравенства:

а) $\frac{x-2}{x+2} > 0$; б) $\frac{3x-1}{x+1} < 0$; в) $\frac{1-2y}{y} \geq 0$; г) $\frac{5-2y}{y+5} \leq 0$;

д) $\frac{x-4}{x+4} > 1$; е) $\frac{2x-3}{x+2} < 5$; ж) $\frac{x-7}{2x+7} \leq 2$; з) $\frac{4-x}{2x+7} \leq \frac{1}{3}$;

и) $\frac{4-x}{2x+7} \geq 1\frac{1}{3}$.

87. Является ли пара чисел (–2; 11) решением уравнения $2x - y = 7$? А пара (–2; –11)?

88. Путем подбора найдите несколько решений уравнения $3x + y = 5$. Можно ли сказать, что:

а) уравнение имеет бесконечно много решений;

б) любая пара действительных чисел является решением данного уравнения?

89. При каком значении $\boldsymbol{a}$ пара чисел (a, 6) является решением уравнения

$x - 3y = 0$?

90. При каком значении b пара чисел (3, b) является решением уравнения

$2x - y = 0$?

91. Запишите уравнение с двумя переменными $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, решением которого является пара чисел: а) (–2; 1); б) (1; –2); в) (0; 0).

92. Запишите по 3 решения каждого из уравнений:

а) $xy = 0$; б) $x(y + 1) = 0$; в) $(x + 2)(y - 4) = 0$.

93. Миша получил сдачи 70 руб монетами достоинством в 2 руб и 5 руб. Сколько монет каждого достоинства мог получить мальчик?

94. Даны 2 уравнения: $x + y = 8$ и $x - y = 6$. Найдите пару чисел, которая:

а) является решением первого уравнения, но не является решением второго;

б) является решением второго уравнения, но не является решением первого;

в) является решением первого и второго уравнений;

г) является решением первого или второго уравнения;

д) не является решением ни первого, ни второго уравнения.

95. Выясните, равносильны ли на множестве *R* – действительных чисел системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (x^2 + 1)(x - y) = 2(x^2 + 1) \\ 6x - 4y = 18 \end{cases}.$$

96. Решите следующие системы уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} 9x - 2y = 3 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 7x - 5y = 6 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x + 9y + 6 = 0 \\ 3(x - 2) + y = 5(x + 2y) \end{cases}$.

97. Решите следующие системы уравнений методом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x - 3y + 12 = 0 \\ 1 - 4y = -2x \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x + 5(y - 2x) + 3 = 4 \\ 8x - 5y = 3. \end{cases}$.

98. Бригада должна была выполнить заказ за 12 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 25 %, за10 дней работы она не только выполнила заказ, но еще и изготовила сверх нормы 42 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?

99. Два поезда выехали навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми равно 400 км. Через 4 часа расстояние между ними сократилось до 40 км. Если бы один из поездов вышел на 1 час раньше, то их встреча произошла бы на середине пути. Определите скорости поездов.

100. За 24 дня две бригады строителей, работая совместно, сдали в эксплуатацию 5 однотипных объектов. Сколько дней понадобится каждой из бригад на постройку одного такого объекта, если известно, что одна из них может сдать его в эксплуатацию на 4 дня раньше, чем другая?

101. Не решая уравнения $3x - 1 = y - 2$, определите, какие из точек *A*(3, 10), *B*(–3; 1) и *C*(–4, –11) принадлежат, а какие – не принадлежат его графику.

102. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $2x - y + 7 = 0$;
г) $y = 4 - x^2$;
б) $x^2 + y^2 > 9$;
д) $3y + x + 5 \leq 0$;
в) $y = x^2 + 3$;
е) $y < (x - 3)^2$.

103. Решите следующие уравнения и неравенства графически:

а) $x^2 - y = 1$;
д) $x^2 + y^2 = 0$;
б) $4x - 3y < 3$;
е) $x \cdot y = -2$;
в) $x - y - 5 \geq 0$;
ж) $x^2 + (y - 1)^2 > 16$;
г) $y < \frac{4}{x}$;
з) $x^2 + y^2 > 0$.

104. Изобразите множество решений следующих систем уравнений и неравенств на координатной плоскости:

а) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$;
б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x - 2y < 8 \\ 4x + y > 7 \end{cases}$;
г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x^2 - y \geq 3 \\ 4x + y < 5 \end{cases}$;
е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} y > x^2 + 8x + 12 \\ y + x + 2 < 0 \end{cases}$;
з) $\begin{cases} x^2 - y \geq 3 \\ x^2 + y < 5 \end{cases}$.

ГЛАВА 8.
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

8.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВА

Напомним (см. [1]), что *биекцией* между множествами A и B или взаимно однозначным отображением множества A на множество B называется любое соответствие f между A и B, при котором каждому элементу a из множества A соответствует единственный образ b в B, и у каждого элемента из B во множестве A имеется единственный прообраз. Особенность графа биекции: из каждой точки множества A выходит единственная стрелка, и к каждой точке множества B подходит единственная стрелка.

Если на графе биекции f развернуть все стрелки, то получим граф так называемого обратного соответствия f^{-1}, которое, очевидно, тоже будет биекцией (между B и A) – так называемой *обратной биекцией* f^{-1}.

Замечание. Если A и B – конечные множества и между ними установлена биекция, то они должны состоять из одинакового числа элементов.

Пусть f – биекция между множествами A и B, g – биекция между множествами B и C. *Композицией биекций* f и g назовем соответствие $f \circ g$ между множествами A и C по закону

$$(f \circ g)(a) = g(f(a)).$$

В соответствии с этим определением на графе замыкаются все цепочки $a\, f\, b$, $b\, g\, c$:

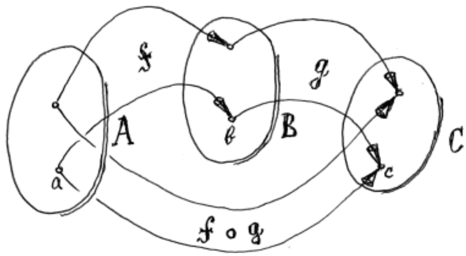


Рис. 8.1

в результате чего получается граф биекции $f\ o\ g$ между множествами A и C.

Граф помогает понять, что всегда $(f\ o\ g)^{-1} = g^{-1}\ o\ f^{-1}$ (для этого достаточно просто развернуть все стрелки!), а также что всегда $f\ o\ f^{-1} = id_A$, $f^{-1}\ o\ f = id_B$. Здесь id_A (от англ. *identity*) – *тождественная биекция* между A и A, которая каждую точку множества A оставляет на месте (аналогичный смысл имеет id_B). Граф id_A:

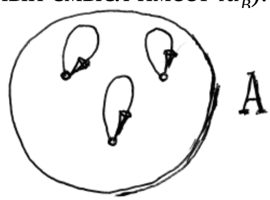


Рис. 8.2

Из

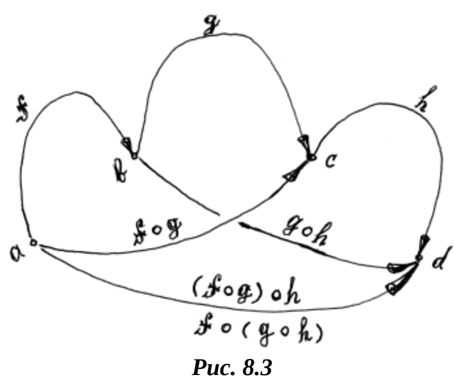


Рис. 8.3

можно понять, что *композиция биекций ассоциативна*, т.е. всегда $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Определение 8.1. *Преобразованием множества M* (M ≠ ∅) называется любая биекция или взаимно однозначное отображение *f* этого множества на себя.

Примеры: 1) *Подстановки* (из *n*) – преобразования конечного множества $M = \{1, 2, ..., n\}$.

При $n = 3$ имеем 3! = 6 подстановок, которые обозначают (123), (231), (312), (213), (132), (321). В каждой из этих записей указываются последовательно образы элементов 1, 2, 3. Подстановку (123), при которой 1 переходит в 1, 2 переходит в 2, 3 переходит в 3, называют тождественной и обозначают *id* или p_0. Остальные подстановки обозначим соответственно p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

Найдем, к примеру, композицию подстановок p_1 и p_3: $p_1 \circ p_3 = (231) \circ (213) = (132) = p_4$, а также композицию $p_3 \circ p_1 = (213) \circ (231) = (321) = p_5$. Видим, что $p_1 \circ p_3 \neq p_3 \circ p_1$, т.е. не всегда $f \circ g = g \circ f$, а, следовательно, композиция подстановок не коммутативна.

Роль нейтрального элемента некоммутативной бинарной алгебраической операции о (см. [1], с. 55) выполняет, очевидно, подстановка $p_0 = id$. Это означает, что для любой подстановки *f* $f \circ id = id \circ f = f$. Для каждой из 6 подстановок $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ можно найти обратную подстановку (обратную биекцию!). Например, для $p_1 = (231)$ обратной будет $(312) = p_2$, т.е. $(231)^{-1} = (312)$. Проверьте, что $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = id$, а также догадайтесь, как можно легко находить обратную подстановку. (Указываются номера мест, которые занимают 1, 2, 3 в данной подстановке!)

Вопросы: 1) В чем заключается особенность графа (матрицы) подстановки?

2) Как по графу (по матрице) подстановки можно находить обратную ей подстановку?

3) Укажите граф каждой из шести подстановок $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$:

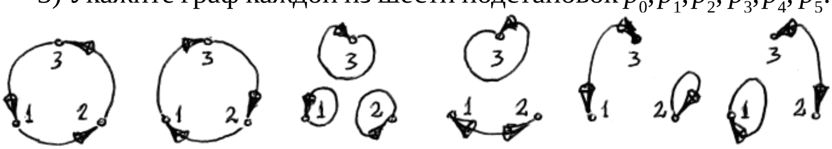


Рис. 8.4

Какие три из них вы бы назвали *циклическими* (круговыми)?

Составим таблицы Пифагора для бинарной алгебраической операции о и для унарной алгебраической операции «нахождение обратной подстановки» (обе эти операции определены на множестве $G = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ из 6 подстановок):

o	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_2	p_0	p_4	p_5	p_3
p_2	p_2	p_0	p_1	p_5	p_3	p_4
p_3	p_3	p_5	p_4	p_0	p_2	p_1
p_4	p_4	p_3	p_5	p_1	p_0	p_2
p_5	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

p	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p^{-1}	p_0	p_2	p_1	p_3	p_4	p_5

Рис. 8.5

Вопросы: 1) Как вторую таблицу можно получить из первой? Что мы увидим, если ко второй таблице добавим строку $(p^{-1})^{-1}$?

2) Симметрична ли первая таблица относительно главной диагонали (той, что спускается из верхнего левого угла в нижний правый)? Что это означает?

Обратите внимание на то, что в каждой из 6 строк и в каждом из 6 столбцов первой таблицы представлены все 6 подстановок p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, поэтому любое уравнение p_i *о* $x = p_j$ и y *о* $p_i = p_j$ имеет в G единственное решение, которое легко может быть найдено при помощи первой таблицы Пифагора (попробуйте объяснить, как это делается).

Решая уравнение p_2 *о* $x = p_5$, мы в строке p_2 находим p_5 и видим, что $x = p_3$. Если же мы решаем уравнение y *о* $p_5 = p_2$, то мы должны в столбце p_5 найти p_2 и прочитать ответ $y = p_4$. Таким образом, на множестве G из 6 подстановок $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ мы имеем бинарную алгебраическую операцию о, которая ассоциативна (почему?), имеет нейтральный элемент (его роль выполняет тождественная подстановка $id = p_0$, ибо всегда p_i *о* $id = id$ *о* $p_i = p_i$), вместе с каждой из 6 подстановок G содержит обратную. Все это позволяет говорить, что G – некоммутативная *группа преобразований множества* $M = \{1, 2, 3\}$ ([2]). Это – конечная группа, в ней всего 6 элементов (подстановок).

Из таблиц Пифагора можно увидеть, что в G есть подмножества, содержащие тождественную подстановку id, замкнутые относительно групповой операции о и операции нахождения обратной подстановки, а, значит, сами являющиеся группами преобразований – *подгруппами* группы G, – это $\{id\}$ (такая минимальная подгруппа есть у любой группы преобразований!) и $\{p_0, p_1, p_2\}$ (эти подстановки называются *циклическими*, т.е. круговыми – почему?).

Задача 8.1. Решите уравнения: 1) $x^2 = x$; 2) $x^2 = p_0$; 3) $x^2 = p_1$; 4) $x^2 = p_5$; 5) $x \circ y = p_0$.

Здесь $x^2 = x \circ x$.

2) *Группа преобразований подобия плоскости*. Из школьного курса геометрии известно, что подобие – это преобразование (!) множества точек плоскости, при котором все расстояния изменяются в фиксированное число k раз. Положительное число k называется *коэффициентом подобия*.

Что такое композиция подобий $f \circ g$? – Результат последовательного выполнения этих преобразований. Она ассоциативна как композиция любых биекций; имеет нейтральный элемент – тождественное преобразование плоскости id, когда каждая точка переходит сама в себя (здесь $k = 1$); обратное преобразование f^{-1} для подобия f с коэффициентом k – это тоже подобие, но с коэффициентом k^{-1}. Сказанное означает, что все подобия плоскости образуют группу преобразований.

Эта группа – подгруппа *группы всех преобразований плоскости*, среди которых, например, преобразование h, которое одну фиксированную точку A переводит в другую фиксированную точку B, точку B – в точку A, а все остальные точки оставляет на месте. Попробуйте объяснить, что это преобразование h не является подобием.

Определение 8.2. *Стационарной подгруппой геометрической фигуры Ф* (любого множества точек плоскости) называется множество всех преобразований плоскости, переводящих точки фигуры *Ф* в точки фигуры *Ф*, т.е. сохраняющих фигуру *Ф* *инвариантной* (неизменной).

Можно рассматривать стационарные подгруппы одноточечного множества, множества точек некоторой прямой, окружности, а также любой другой геометрической фигуры *Ф*.

В свою очередь, у группы всех подобий имеется много собственных подгрупп, отличных от простейшей $\{id\}$. Например, все подобия с коэффициентом $k = 1$ (так называемые *движения* плоскости), все повороты R_C^{φ} (нем. *Rotation*) с фиксированным центром *C*, все параллельные переносы $T_{\vec{a}}$ (*Translation*), осевая симметрия S_d (*Symmetrie*) вместе с тождественным преобразованием плоскости *id*, центральная симметрия Z_C (*Zentrum*) с *id* и т.д.

3) *Группа симметрий правильного многоугольника*. Можно проверить, что множество $G_Ф$ всех движений плоскости, оставляющих данную фигуру Ф на месте, является группой – подгруппой группы движений плоскости. Каждое движение, переводящее точки фигуры Ф в точки фигуры Ф, называется *симметрией геометрической фигуры* Ф, а группа $G_Ф$ – группой симметрий этой фигуры. О фигуре Ф, для которой эта группа сводится к простейшей $\{id\}$, принято говорить, что она не обладает симметриями.

Например, для квадрата *ABCD* с центром *O* группа симметрий состоит из четырех осевых симметрий (найдите оси!) и четырех поворотов R_O^{φ}, где $\varphi = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$.

Вопрос. А где здесь тождественное преобразование *id*, присутствие которого является обязательным для любой группы преобразований?

4) Если взять «плоскость» *M*, состоящую всего из трех точек 1, 2, 3, и назвать прямыми любые двухточечные подмножества множества $M = \{1, 2, 3\}$

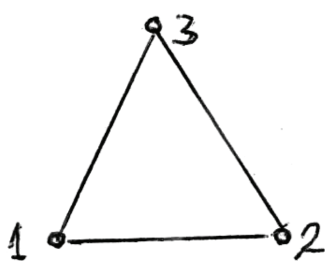


Рис. 8.6

то любое из шести преобразований (см. пример 1) такой плоскости *M* прямые всегда будет переводить в прямые.

Если же «плоскость» *M* состоит из 7 точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 7 «прямых» {1, 2, 7}, {4, 3, 7}, ..., {5, 6, 7} (см. рис. 8.7, здесь через любые две точки проходит единственная прямая, любые две прямые пересекаются в точке, на каждой прямой лежит ровно три точки и через каждую точку проходит ровно три прямых):

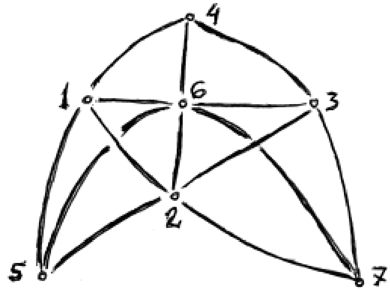


Рис. 8.7

то среди преобразований такой плоскости можно увидеть как преобразования, которые любые прямые переводят в прямые, так и преобразования, не обладающие этим свойством: к первым относится, например, подстановка (3214765), чем-то напоминающая осевую симметрию с осью {2, 4, 6}, ко вторым – подстановка (2345671), которая прямую {4, 3, 7} переводит в прямую {5, 4, 1}, но прямую {1, 3, 6} переводит в фигуру {2, 4, 7}, не являющуюся прямой.

Задача 8.2. *a*) Найдите образ каждой из 7 «прямых» при преобразовании (3214765). *b*) Найдите еще хотя бы одно преобразование этой «плоскости» *M*, отличное от *id*, при котором сохраняется *коллинеарность* точек, т.е. точки, лежащие на одной прямой, оно переводит в точки, лежащие на одной прямой. В какие точки такие преобразования переводят точки, которые не лежат на одной прямой?

Задача 8.3. Найдите инвариантные точки и инвариантные прямые преобразования (3214765) и обратного ему преобразования плоскости *M* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Будут ли «треугольники»

{1, 2, 3}, {1, 2, 4} и «четырехугольники» {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 5, 6} инвариантными фигурами преобразования (3 2 1 4 7 6 5) и обратного ему преобразования?

Задача 8.4. Сколько всего преобразований у плоскости *M* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}? Сколько преобразований содержит стационарная подгруппа фигуры *Ф*, если: *a*) *Ф* = {1} – это одноточечное множество; *b*) *Ф* = {2, 3, 4, 5, 6, 7}; *c*) *Ф* – это «прямая» {1, 2, 7}; *d*) *Ф* – это «треугольник» {1, 2, 3}; *e*) *Ф* – «четырехугольник» {1, 2, 3, 4}?

Укажите хотя бы по одному преобразованию каждой из этих стационарных подгрупп. Совпадают ли стационарные подгруппы фигур Ф из заданий *a*) и *b*)? из заданий *d*) и *e*)?

Задача 8.5. Для какого числа преобразований «прямая» {1, 2, 7} будет «прямой» инвариантных точек? Приведите пример хотя бы одного такого преобразования, отличного от *id*. Для какого числа преобразований «прямая» {1, 2, 7} была инвариантной «прямой»? (см. задачу 8.4*c*).

Задача 8.6. Верно ли, что если при некотором преобразовании плоскости М = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} две точки прямой инвариантны, то инвариантной будет и третья точка этой прямой? Каким будет ответ, если в качестве такого преобразования мы возьмем преобразование (3214765)?

8.2. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

В курсе школьной математики происходит знакомство с *прямоугольной декартовой системой координат x O y* на плоскости, которая вполне определяется своей начальной точкой О и парой единичных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$; последние задают направление и масштаб на каждой из координатных осей *Ox* (ось абсцисс) и *Oy* (ось ординат).

Если *радиус-вектор* $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки М плоскости разложить по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, т.е. представить $\overrightarrow{OM}$ в виде

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

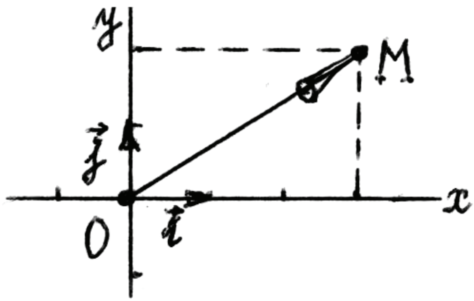


Рис. 8.8

то это разложение единственно, а его коэффициенты *x*, *y* называются *координатами* (прямоугольными декартовыми) точки *M* в системе координат *x O y*. Пишут: *M* (*x*, *y*) и называют первую координату *x абсциссой,* а вторую *y – ординатой* точки *M*. Между координатами *x*, *y* мы будем ставить запятую, а не точку с запятой, так как последний знак следует использовать только тогда, когда в роли координат используются десятичные дроби. Пару векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ (порядок важен!) принято называть *ортонормированным базисом.*

Замечание. При помощи системы координат *x O y* устанавливается биекция между множеством точек плоскости и декартовым квадратом $R \times R$ множества действительных чисел *R*.

В школе эта система координат имела ограниченное применение в геометрии (что, на наш взгляд, даже хорошо). В частности, рассматривались уравнение прямой, уравнение окружности и некоторые вопросы, связанные с этими геометрическими фигурами.

Обобщением для евклидовой плоскости прямоугольной декартовой системы координат $O\,\vec{i}\,\vec{j}$ является *общая декартова* или *аффинная система координат* $O\,\vec{a}\,\vec{b}$. Здесь $\vec{a}$, $\vec{b}$ – упорядоченная пара *неколлинеарных* (не параллельных) векторов, которые задают направление и масштаб на *оси абсцисс Ox* и *оси ординат Oy*.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки *M* единственным образом раскладывается по базисным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ (вектор $\overrightarrow{OM}$ мы представляем в виде суммы двух векторов, соответственно коллинеарных векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$)

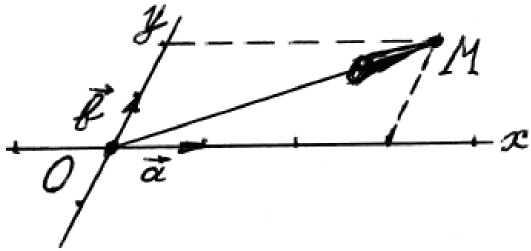


Рис. 8.9

а коэффициенты *x* и *y* разложения $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$ называются *аффинными* (*общими декартовыми*) *координатами* (*x* – *абсциссой*, *y* – *ординатой*) точки *M* относительно системы координат $O\,\vec{a}\,\vec{b}$.

Саму систему координат $O\,\vec{a}\,\vec{b}$ будем далее называть *аффинным ре́пером* и обозначать *R* (от франц. *repère* – метка).

Так как сумма векторов находится по правилу параллелограмма или по так называемому правилу треугольника, которое в некотором смысле более универсальное, так как позволяет складывать коллинеарные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$

Рис. 8.10

то практическое нахождение координат точки *M* в аффинном репере *R* сводится к проведению через точку M прямых, параллельных осям *Ox* и *Oy*, до пересечения с осями *Oy* и *Ox* соответственно и последующему определению коэффициентов *x*, *y* разложения $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$.

Можно заметить, что все точки оси абсцисс *Ox* (и только они!) имеют нулевую ординату *y*, а точки оси ординат *Oy* характеризуется условием $x = 0$. Начало координат – точка *O* (здесь *O* – буква, а не число 0! – от лат. *Original*) – обе ее координаты равны нулю: *O* (0, 0).

В прямоугольной декартовой системе координат $O\,\vec{i}\,\vec{j}$, которая изучалась в школе и которую мы будем также называть *ортонормированным репером,* выполнялись на самом деле аналогичные построения, хотя вместо слова параллельно и звучало слово перпендикулярно.

Если на плоскости помимо репера $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$ задан еще один аффинный репер $\tilde{R} = \tilde{O}\,\vec{p}\,\vec{q}$, то у каждой точки М к старым координатам x, y в репере R добавляются новые $\tilde{x}, \tilde{y}$ в репере $\tilde{R}$.

Пусть известны координаты нового начала $\tilde{O}\,(x_0, y_0)$ в старом репере R, а также координаты базисных векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ нового репера $\tilde{R}$ относительно старого базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$: $\vec{p}\,(p_1, p_2)$, $\vec{q}\,(q_1, q_2)$. Тогда $\overrightarrow{O\tilde{O}} =$ $= x_0\vec{a} + y_0\vec{b}$, $\vec{p} = p_1\vec{a} + p_2\vec{b}$, $\vec{q} = q_1\vec{a} + q_2\vec{b}$.

Найдем зависимость между старыми x, y и новыми $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ координатами точки M:

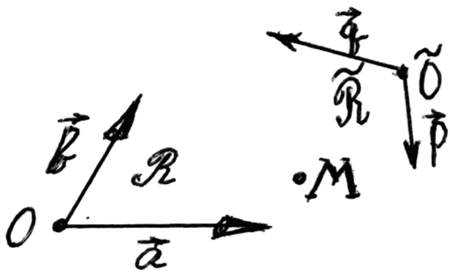


Рис. 8.11

Из рисунка видим, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}M}$ или $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\tilde{O}M} + \overrightarrow{O\tilde{O}}$, поэтому

$$x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = (\tilde{x}\,\vec{p} + \tilde{y}\,\vec{q}) + (x_0\vec{a} + y_0\vec{b}),$$
$$x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = (\tilde{x}\,(p_1\vec{a} + p_2\vec{b}) + \tilde{y}\,(q_1\vec{a} + q_2\,\vec{b})) + (x_0\vec{a} + y_0\,\vec{b}),$$
$$x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = (p_1\tilde{x} + q_1\tilde{y} + x_0)\,\vec{a} + (p_2\tilde{x} + q_2\tilde{y} + y_0)\,\vec{b}.$$

Поскольку координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ определены однозначно, то

$$\begin{aligned} x &= p_1\tilde{x} + q_1\tilde{y} + x_0, \\ y &= p_2\tilde{x} + q_2\,\tilde{y} + y_0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Формулы (8.1) выражают *зависимость старых аффинных координат x, y точки M от ее новых координат $\tilde{x}$, $\tilde{y}$.* Заметим что столбец коэффициентов при $\tilde{x}$ в правой части формул (8.1) – это координаты вектора $\vec{p}$, столбец коэффициентов при $\tilde{y}$ – координаты вектора $\vec{q}$, а столбец свободных членов – координаты начала $\tilde{O}$ нового репера $\tilde{R}$.

В том случае, когда реперы R и $\tilde{R}$ отличаются только началом, т.е. $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$, $\tilde{R} = \tilde{O}\,\vec{a}\,\vec{b}$,

формулы (8.1) принимают совсем простой вид

$$x = \tilde{x} + x_0,$$
$$y = \tilde{y} + y_0 \qquad (8.2)$$

так называемых *формул переноса начала координат.*

Определение 8.3. *Уравнением геометрической фигуры* Ф (любого множества точек плоскости) в аффинном репере R называется уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x, y каждой точки этой фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих фигуре Ф.

Если $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ – уравнение окружности с центром в точке $C(-3, 5)$ и радиусом 4, записанное в ортонормированном репере $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$, то в ортономированном репере $R = C\,\vec{i}\,\vec{j}$ уравнением этой окружности будет $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 16$.

Аналогично поступали в школе с уравнениями $y - 5 = (x + 3)^2$, $y - 5 = \sin(x + 3)$ и т.д.

Так как векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ не коллинеарны, то их координаты не пропорциональны. Это позволяет разрешить систему (8.1) относительно $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и из полученных формул

$$\tilde{x} = a_1 x + b_1 y + \tilde{x}_0,$$
$$\tilde{y} = a_2 x + b_2 y + \tilde{y}_0,$$

выражающих зависимость между новыми $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и старыми x, y координатами точки M, определить координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ старого базиса относительно нового базиса $\vec{p}$, $\vec{q}$, а также координаты старого начала O в новом репере $\tilde{R} = \tilde{O}\,\vec{p}\,\vec{q}$.

Например, если положение нового репера $\tilde{R}$ относительно старого R задано так:

$$\tilde{O}(1, -1),\ \vec{p}(2, 1),\ \vec{q}(1, 1),$$

то старые координаты x, y выражаются через новые $\tilde{x}, \tilde{y}$ по формулам

$$x = 2\tilde{x} + \tilde{y} + 1,$$
$$y = \tilde{x} + \tilde{y} - 1,$$

а новые через старые (проделайте выкладки самостоятельно!) – по формулам

$$\tilde{x} = x - y - 2,$$
$$\tilde{y} = -x + 2y + 3.$$

Отсюда заключаем, что O (– 2, 3) в новом репере $\tilde{R}$, а $\vec{a}$ (1, – 1), $\vec{b}$ (– 1, 2) в новом базисе $\vec{p}, \vec{q}$.

Попробуйте аккуратно изобразить исходный (произвольный!) аффинный репер R, затем – $\tilde{R}$ (учитывая данные в условии координаты нового начала и новых базисных векторов), а также «увидеть» на этом чертеже то, что мы нашли выше алгебраическим способом.

Переход от одного аффинного репера к другому (замену координат) используют при решении самых разных задач, в том числе и достаточно трудных (примером может служить задача о приведении общего уравнения линии второго порядка, записанного в ортонормированном репере, к так называемому каноническому виду). Мы же проиллюстрируем сказанное на более простых примерах.

1) В школьных учебниках, где, напомним, используется прямоугольная декартова система координат (ортонормированный репер $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$), рассматривают, в частности, такую задачу: что определяет уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 35 = 0$?

Выделяя полный квадрат, уравнение геометрической фигуры записывают в виде $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ и узнают в этом уравнении уравнение окружности с центром в точке C (1, – 3) и радиусом 5. Мы же говорим, что в новом репере $\tilde{R} = \mathrm{C}\,\vec{i}\,\vec{j}$ уравнение записывается как $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 25$, а формулы $\tilde{x} = x - 1$, $\tilde{y} = y + 3$ или, скорее, $x = \tilde{x} + 1$, $y = \tilde{y} - 3$ определяют переход к этому реперу $\tilde{R} = C\,\vec{i}\,\vec{j}$.

2) Что в прямоугольной декартовой системе координат определяется следующим уравнением:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 35 + |\, x^2 + y^2 - 2x + 6y - 35 \,| = 0?$$

После переноса начала координат в точку C (– 1, 3) это уравнение примет более простой вид

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 25 + |\, \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 25 \,| = 0.$$

Если $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \le 25$, т.е. точка M $(\tilde{x}, \tilde{y})$ принадлежит кругу с центром C и радиусом 5, то последнее уравнение обращается в тождество. Если же $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^{\,2} > 25$, т.е. точка M $(\tilde{x}, \tilde{y})$ лежит вне этого круга, то это уравнение обращается в неверное числовое равенство. Таким образом, данное уравнение является *уравнением круга* с центром C $(-1, 3)$ и радиусом 5.

Вопрос. Что определяет уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 35 - | x^2 + y^2 - 2x + 6y - 35 | = 0$? Система координат – прямоугольная декартова.

Рассмотрим хорошо известное школьное уравнение гиперболы $x \cdot y = 1$ и сделаем замену координат

$$x = \tilde{x} - \tilde{y},$$
$$y = \tilde{x} + \tilde{y},$$

т.е. перейдем от ортонормированного репера $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ к ортогональному $\hat{R} = O\,\vec{m}\,\vec{n}$, где начальная точка O – та же, а векторы $\vec{m}$ $(1, 1)$ и $\vec{n}$ $(-1, 1)$ имеют одинаковую длину $\sqrt{2}$ и взаимно перпендикулярны. В новом репере уравнение гиперболы примет вид

$$\hat{x}^2 - \hat{y}^2 = 1.$$

Если же векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ длины $\sqrt{2}$ заменить их *ортами*, т.е. векторами того же направления, но единичной длины: $\vec{p}$ $(1 / \sqrt{2}, 1 / \sqrt{2})$, $\vec{q}$ $(-1 / \sqrt{2}, 1 / \sqrt{2})$ и, таким образом, от ортогонального репера $\hat{R}$ перейти к ортонормированному реперу $\tilde{R} = O\,\vec{p}\,\vec{q}$, то в нем мы получим уравнение гиперболы вида

$$(\tilde{x} / \sqrt{2})^2 - (\tilde{y} / \sqrt{2})^2 = 1:$$

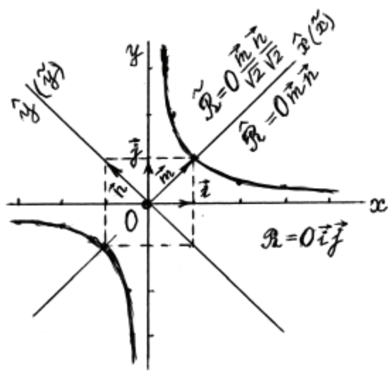


Рис. 8.12

Формулы перехода от промежуточного репера $\hat{R}$ к ортонормированному реперу $\tilde{R}$ имеют вид

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x},$$
$$\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}.$$

Вопросы: 1) Как получить формулы перехода от исходного репера R к реперу $\tilde{R}$?

2)* Верно ли, что в любом аффинном репере уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 1? Каким должен быть репер, чтобы это уравнение было: *a*) уравнением окружности; *b*) уравнением окружности радиуса 1?

Пусть теперь $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$ – произвольный аффинный репер или общая декартова система координат $x\,O\,y$, а $A\,x + B\,y + C = 0$ – линейное уравнение (здесь A, B, C – действительные числа, причем $A^2 + B^2 > 0$, т.е. хотя бы один из старших коэффициентов A, B отличен от нуля). Если $A \neq 0$, то заменой

$$\tilde{x} = A\,x + B\,y + C,$$
$$\tilde{y} = y$$

мы приводим линейное уравнение $A\,x + B\,y + C = 0$ к виду $\tilde{x} = 0$. Выразим x, y через $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ получим:

$$x = \frac{1}{A}\tilde{x} - \frac{B}{A}\tilde{y} - \frac{C}{A},$$
$$y = \tilde{y}.$$

Эти равенства означают (см. (8.1)), что мы от исходного аффинного репера R = $O\,\vec{a}\,\vec{b}$ перешли к новому $\tilde{R} = \tilde{O}\,\vec{p}\,\vec{q}$, где

$$\tilde{O}\,(-C/A,\ 0),\ \vec{p}\,(1/A,\ 0),\ \vec{q}\,(-B/A,\ 1).$$

Выше говорилось, что $\tilde{x} = 0$ – уравнение оси ординат репера $\tilde{R}$. Таким образом, линейное уравнение $A\,x + B\,y + C = 0$ в аффинном репере R определяет прямую d с *направляющим вектором* $\vec{m}\,(-B, A)$. Здесь для простоты вместо направляющего вектора $\vec{q}$ оси ординат репера $\tilde{R}$ мы берем коллинеарный ему вектор $\vec{m}\,(-B, A)$.

При $B \neq 0$ (если $A = 0$) приходим к такому же результату, только вместо рассмотренной выше замены мы используем другую:

$$\tilde{x} = x,$$
$$\tilde{y} = A x + B y + C.$$

При изучении теории и при решении задач, связанных с прямыми, которые в аффинном репере задаются уравнениями первого порядка $A x + B y + C = 0$, стараются использовать наиболее удобный репер. То же относится и к линиям второго порядка, общее уравнение которых в аффинном репере имеет вид

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

(среди старших коэффициентов A, B, C по крайней мере один должен быть отличным от нуля!).

Если в *общее уравнение прямой* $A x + B y + C = 0$ или в общее уравнение линии второго порядка $A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$ вместо x и y подставить их выражения (8.1), получим уравнение геометрической фигуры в новом аффинном репере $\tilde{R}$. После приведения подобных членов становится понятным, что степень уравнения не повысилась. Но она не может и понизиться, так как тогда при обратном переходе от $\tilde{R}$ к R мы бы не вернулись к исходному уравнению. Поэтому *порядок* линии (первый, второй и т.д.) не зависит от выбора аффинного репера.

Линии первого порядка – прямые. С теорией линий второго порядка можно ознакомиться, например, по любому учебному пособию по геометрии для студентов математических факультетов педагогических вузов: это – эллипсы, гиперболы, параболы и еще 6 видов линий.

Вопрос. Почему эллипсы, гиперболы и параболы называют *коническими сечениями?*

Задача. В аффинном репере заданы уравнения: 1) $x - y + 1 = 0$; 2) $(x + 2y + 3)^2 + (4x + 5y + 6)^2 = 7$; 3) $(x + 1)(18x + 3y) = 1951$; 4) $\pi x + e y = 1872$; 5) $(18x + y + 2)^2 - x - y = 0$; 6) $(3x + 9y + 1)(x - 2y + 6) = 0$; 7) $y - 26 = (x + 7y)^3$; 8) $(x + 26y - 11)(9x + 11y + 1950) = 0$; 9) $|x + y| + |x - y| = 0$; 10) $|x^2 - y^2| = 1$; 11) $x^2 + y^2 = -1$; 12) $(x - 18)^2 + (y - 3)^2 = 0$.

Найдите среди уравнений 1–12 уравнения прямых и для каждой из них укажите точку и направляющий вектор. Попробуйте также понять, что определяют остальные уравнения.

8.3. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ В АФФИННОМ РЕПЕРЕ

1) Если *прямая d* (фр. *droite*) *задана точкой P* (нем. *Punkt*) *и направляющим вектором* $\vec{m}$ ($\vec{m} \neq \vec{0}$), то точка $M \in d$ *iff* (*iff* означает *if and only if*, т.е. *если и только если* – мы будем пользоваться этим удобным сокращением; французский вариант, если кому-то не нравится американский, *ssi – si et seulement si*)

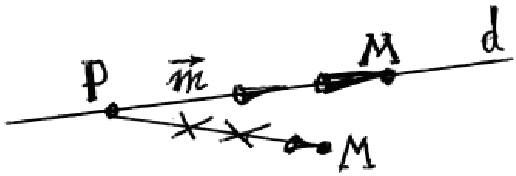


Рис. 8.13

$$\overrightarrow{PM} \parallel \vec{m} \text{ iff}$$
$$\overrightarrow{PM} = t\,\vec{m}, \tag{8.3}$$

где t – некоторое действительное число.

Уравнение (8.3) называется *векторным параметрическим уравнением прямой d* (t – параметр). Отметим тот факт, что для этого уравнения не нужен аффинный репер.

Задача 8.7. Пусть прямая d задана точкой P и направляющим вектором $\vec{m}$ (см. рис.) Постройте точки M прямой d, соответствующие значениям параметра $t = 0$, $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\frac{1}{3}, \sqrt{2}$.

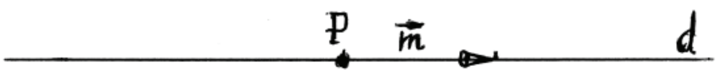


Рис. 8.14

2) Пусть на плоскости задан аффинный репер R = $O\,\vec{a}\,\vec{b}$. Если в этом репере точка P (p_1, p_2), а точка M (x, y), то $\overrightarrow{PM}$ ($x - p_1$, $y - p_2$), так как он равен разности радиус-векторов точек M и P. Если направляющий вектор $\vec{m}$ (m_1, m_2), то векторное параметрическое уравнение (8.3) в координатах примет вид $(x - p_1, y - p_2) = t\,(m_1, m_2)$, откуда следует, что $x - p_1 = t\,m_1$,

$y - p_2 = t\, m_2$ или

$$x = m_1 t + p_1,$$
$$y = m_2 t + p_2. \qquad (8.4)$$

Уравнения (8.4) называются *параметрическими уравнениями прямой d*. Здесь первый столбец – координаты текущей точки M прямой d, столбец коэффициентов при параметре t – координаты направляющего вектора $\vec{m}$, столбец свободных членов – координаты начальной точки P этой прямой.

Задача 8.8. Запишите параметрические уравнения следующих прямых: *a*) оси абсцисс; *b*) оси ординат; *c*) прямой, проходящей через начало координат O, с направляющим вектором $\vec{m}$ (1, 1); *d*) прямой d с начальной точкой P (2, 5) и направляющим вектором $\vec{m}$ (–3, 1).

Вопрос. Проходит ли прямая из задания *d*) через начало координат?

3) Из системы (8.4), где $m_1^2 + m_2^2 > 0$ (почему?), можно исключить параметр t и получить зависимость между координатами x, y текущей точки M этой прямой. Например, пусть параметрические уравнения прямой d имеют вид:

$$x = 3t + 1,$$
$$y = 4t + 5.$$

Домножим обе части первого уравнения на 4, второго – на (–3). Сложение левых и правых частей полученных уравнений дает $4x -$ $- 3y = - 11$ или $4x - 3y + 11 = 0$.

Заметим, что в полученном общем уравнении $A\,x + B\,y + C = 0$ прямой d $(-B, A)$ – координаты направляющего вектора $\vec{m}$ этой прямой.

В аффинном репере R любое *линейное уравнение* $A\,x + B\,y +$ $+ C = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$ определяет прямую с направляющим вектором $\vec{m}$ $(- B, A)$. На самом деле, если составить параметрические уравнения прямой d с направляющим вектором $\vec{m}$ $(- B, A)$, проходящей через некоторую точку P (p_1, p_2), координаты которой удовлетворяют уравнению $A\,x + B\,y + C = 0$ $(A\,p_1 + B\,p_2 + C = 0$ – верное числовое равенство), получим:

$$x = -B \quad t \quad + \quad p_1,$$
$$y = \;\; A \quad t \quad + \quad p_2.$$

Домножая обе части первого уравнения на A, второго – на B и почленно складывая полученные уравнения, мы исключаем параметр t и приходим к уравнению $A\,x + B\,y = A\,p_1 + B\,p_2$, которое совпадает с исходным уравнением $A\,x + B\,y + C = 0$ в силу того, что $A\,p_1 + B\,p_2 = -C$.

Линейное уравнение

$$A\,x + B\,y + C = 0 \tag{8.5}$$

называется *общим уравнением прямой.*

Задача 8.9. Докажите, что прямая d с общим уравнением $A\,x + B\,y + C = 0$: *a*) параллельна оси абсцисс Ox *iff* $A = 0$; *b*) параллельна оси ординат Oy *iff* $B = 0$; *c*) проходит через начало координат точку O *iff* $C = 0$. Параллельность прямых здесь понимается, конечно, в широком смысле (когда любая прямая считается также параллельной самой себе).

4) *Уравнение любой прямой, проходящей через точку* $P\,(p_1, p_2)$, может быть записано в виде

$$A\,(x - p_1) + B\,(y - p_2) = 0 \ (A^2 + B^2 > 0). \tag{8.6}$$

Действительно, прямая с общим уравнением $A\,x + B\,y + C = 0$ проходит через точку $P\,(p_1,\ p)$ *iff* справедливо равенство $A\,p_1 + B\,p_2 + C = 0$ *iff* (подставьте в общее уравнение $C = -A\,p_1 - B\,p_2$!) $A\,(x - p_1) + B\,(y - p_2) = 0$.

5) Уравнение прямой d, не проходящей через начало координат и пересекающей ось абсцисс в точке $X\,(a, 0)$, а ось ординат – в точке $Y\,(0, b)$, может быть записано в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{8.7}$$

и называется *уравнением прямой в отрезках.* Как получается уравнение (8.7)? Можно взять уравнение (8.6) любой прямой d, проходящей через точку $X\,(a, 0)$, и потребовать, чтобы d проходила через точку $Y\,(0, b)$. Из $A\,(0 - a) + B\,(b - 0) = 0$ получим: $A\,a = B\,b$. Уравнение $A\,(x - a) + B\,(y - 0) = 0$ перепишется в виде $A\,x + B\,y = A\,a$.

Так как рассматриваемая нами прямая d не параллельна ни одной из осей координат, то в данном случае старшие коэффициенты A и B оба отличны от нуля. Поскольку прямая d не проходит через начало координат, то обе координаты a и b также не нули. Поэтому последнее уравнение можно разделить на $A\ a$ ($= B\ b$). В результате мы и получим уравнение (8.7).

Задача 8.10. Прямая d проходит через точку P (4, 3) и отсекает на осях координат отрезки равной длины. Найти уравнение этой прямой, если: a) координатные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ репера R имеют равные длины, т.е. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; b)* $|\vec{a}| = 2\,|\vec{b}|$.

Решение. В обоих случаях одной из искомых прямых будет прямая OP, проходящая через начало координат O (0, 0). Ее уравнение: $3x - 4y = 0$ (Почему?) Как найти другие решения? a) Если $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то точками X, Y пересечения d с осями абсцисс и ординат могут быть

$X\,(z, 0)$, $Y\,(0, z)$ или $X\,(z, 0)$, $Y\,(0, -z)$. Уравнение прямой в отрезках в первом случае записывается в виде $x / z + y / z = 1$, во втором – в виде $x / z + y / (-z) = 1$.

Прямая d проходит через данную точку P (4, 3) при $z = 7$ в первом случае и при $z = 1$ – во втором. Мы нашли три прямые, удовлетворяющие всем требованиям задачи. Их уравнения: $3x - 4y = 0$, $x + y = 7$ и $x - y = 1$.

b) Если же $|\vec{a}| = 2\,|\vec{b}|$, то точки X и Y пересечения прямой d с осями координат будут такими:

$X\,(z, 0)$, $Y\,(0, 2z)$ или X $(z, 0)$, $Y\,(0, -2z)$. Уравнение искомой прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{2z} = 1 \text{ или } \frac{x}{z} + \frac{y}{-2z} = 1.$$

Подставляя в каждое из этих уравнений координаты данной точки P (4, 3), находим соответствующие значения z: $11 / 2$ и $5 / 2$. И в этом случае три прямые удовлетворяют всем требованиям задачи. Их уравнениями будут: $3x - 4y = 0$, $2x + y = 11$ и $2x - y = 5$.

6) Пусть прямая d на евклидовой плоскости задана точкой P и вектором $\vec{n}$, перпендикулярным прямой d (его называют *вектором нормали* прямой d, а *нормалью* – любую прямую n, которая перпендикулярна d). Тогда точка $M \in d$

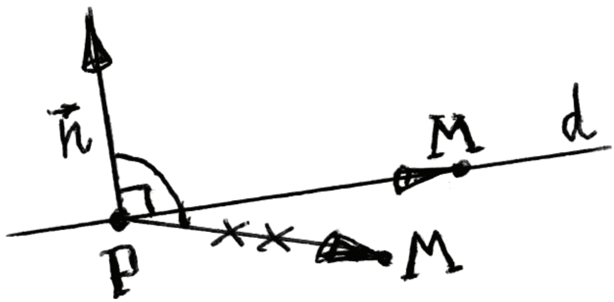


Рис. 8.15

iff $\overline{PM} \perp \vec{n}$ *iff* скалярное произведение $\overline{PM} \cdot \vec{n}$ равно нулю. Уравнение прямой *d*, таким образом, записывается в виде

$$\overline{PM} \cdot \vec{n} = 0. \tag{8.8}$$

Это – еще одно векторное уравнение прямой. Оно так же, как векторное параметрическое уравнение прямой (8.3), не требует введения на плоскости какой-либо системы координат.

Замечание. Рассмотренными нами видами уравнений прямой (есть и другие!) можно, естественно, пользоваться и в ортонормированном репере, т.е. в прямоугольной декартовой системе координат. Для этого частного, но весьма важного случая, мы рассмотрим еще несколько видов уравнений прямой.

7) Пусть на евклидовой плоскости задан ортонормированный репер $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$, в котором точка $P\,(p_1, p_2)$, текущая точка прямой *d* $M\,(x, y)$, а вектор нормали $\vec{n}\,(n_1, n_2)$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}$. Так как $\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP}$, то этот вектор $\overline{PM}\,(x - p_1, y - p_2)$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}$. Векторное уравнение (8.8) прямой *d* в координатах запишется так:

$$n_1 (x - p_1) + n_2 (y - p_2) = 0. \tag{8.9}$$

Если это уравнение переписать в виде $n_1 x + n_2 y - (n_1 p_1 + n_2 p_2) = 0$, то можно заметить, что коэффициентами при *x* и *y* в общем уравнении прямой *d*, записанном в ортонормированном (!) репере, служат координаты вектора нормали прямой *d*, т.е. вектор $\vec{n}\,(A, B)$ перпендикулярен прямой *d* с общим уравнением $A\,x + B\,y + C = 0$. Напомним, что вектор $\vec{m}\,(-B, A)$ – направляющий вектор прямой *d*. Последнее справедливо в любом (!) аффинном репере, в том числе и в ортонормированном.

Задача 8.11. На прямой $x + 2y – 1 = 0$ и на осях прямоугольной декартовой системы координат найти точки, равноудаленные от точек A (– 2, 5) и B (0, 1).

Задача 8.12. Написать уравнения всех сторон квадрата $ABCD$, вписанного в окружность $x^2 + y^2 = 169$, если известны координаты одной вершины A (5, –12). Система координат – прямоугольная декартова.

Задача 8.13. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку A (8, 6) и образует с осями прямоугольной декартовой системы координат треугольник, площадь которого равна 12.

Задача 8.14. Доказать, что угол φ между прямыми d и $\bar{d}$, которые заданы своими общими уравнениями в ортонормированном репере: $A x + B y + C = 0$, $\bar{A} x + \bar{B} y + \bar{C} = 0$, может быть найден по формуле

$$\cos\varphi = |A\bar{A} + B\bar{B}| / (\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}). \qquad (8.10)$$

Указание. Воспользуйтесь координатами векторов нормалей этих прямых.

Отсюда, в частности, следует, что прямые d и $\bar{d}$ будут перпендикулярны *iff* $A\bar{A} + B\bar{B} = 0$.

Задача 8.15.* Доказать, что в ортонормированном репере расстояние от точки W (u, v) до прямой d: $A x + B y + C = 0$ можно находить по формуле

$$\rho\,(\mathrm{W}, d) = |\mathrm{A}\,u + \mathrm{B}\,v + \mathrm{C}| / \sqrt{A^2 + B^2}. \qquad (8.11)$$

Задача 8.16. Записать уравнение прямой d, которая проходит через точку P (5, 2) и пересекает прямую m: $x = y$ под углом 60°. Система координат – прямоугольная декартова.

Решение основано на применении формулы (8.10). Ищем уравнение прямой d в виде (8.9), т.е. в виде $n_1(x – 5) + n_2(y – 2) = 0$.

Так как $\vec{m}$ (1, –1) является вектором нормали прямой m, то угол между этим вектором и вектором нормали $\vec{n}$ (n_1, n_2) искомой прямой d равен 60°. По формуле (8.10)

$$\frac{1}{2} = |n_1 – n_2| / (\sqrt{2} \cdot (n_1^2 + n_2^2)^{½}).$$

Из квадратного уравнения $n_1^{\,2} - 4n_1 n_2 + n_2^{\,2} = 0$, полагая, для удобства, $n_1 = 1$, находим два вектора нормали $\vec{n}$ с координатами $(1, 2 - \sqrt{3})$ и $(1, 2 + \sqrt{3})$ соответственно. Получим две прямые d, уравнения которых имеют вид $x - 5 + (2 - \sqrt{3})(y - 2) = 0$ и $x - 5 + (2 + \sqrt{3})(y - 2) = 0$. Можно раскрыть скобки и привести подобные члены, но стоит ли это делать в данном случае?

Задача 8.17. *Найти геометрическое место точек* (ГМТ) плоскости, удаленных от прямой d: $x - y = 0$ на расстояние, равное 1. Система координат – прямоугольная декартова.

Решение основано на применении формулы (8.11).

$M(x, y) \in$ ГМТ *iff* $\rho(M, d) = 1$ *iff*

iff $|x - y| = \sqrt{2}$ *iff* $x - y = \pm\sqrt{2}$ *iff* $x - y \mp \sqrt{2} = 0$. Искомым ГМТ оказалась пара прямых, параллельных прямой d. Их уравнениями будут $x - y - \sqrt{2} = 0$ и $x - y + \sqrt{2} = 0$:

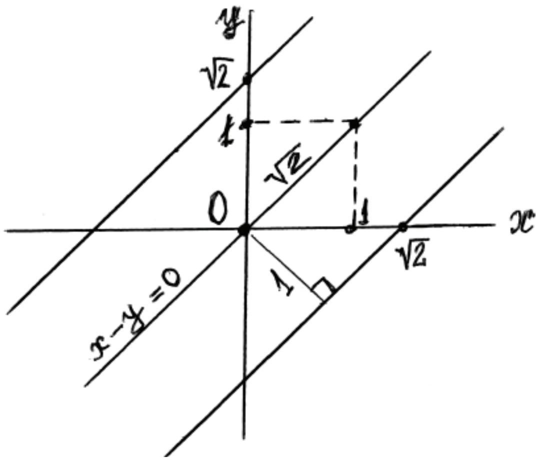


Рис. 8.16

Задача 8.18. Найти ГМТ, равноудаленных от прямых m и n, которые в ортонормированном репере заданы уравнениями: *a*) $x - y + 3 = 0$, $x - y + 5 = 0$; *b*) $3x + 4y - 7 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$.

Решение этой задачи также основано на применении формулы (8.11). $M(x, y) \in$ ГМТ *iff* $\rho(M, m) = \rho(M, n)$ *iff* *a*) $| x – y – 3 | / \sqrt{2} = | x – y – 5 | / \sqrt{2}$ *iff* $x – y – 3 = \pm (x – y – 5)$ *iff* $x – y – 4 = 0$ (серединная прямая, которая является осью симметрии заданных в условии параллельных прямых):

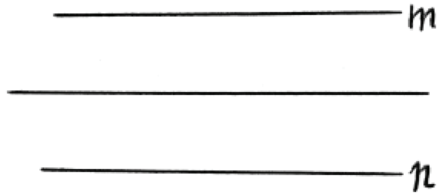


Рис. 8.17

b) $| 3x + 4y – 7 | / \sqrt{25} = | 3x – 4y + 1 | / \sqrt{25}$ *iff* $3x + 4y – 7 = \pm (3x –$ $– 4y + 1)$ *iff*

$y – 1 = 0$ или $x – 1 = 0$ (взаимно перпендикулярные прямые, которые являются осями симметрии пары пересекающихся прямых *m* и *n*):

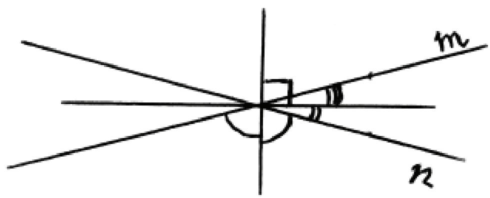


Рис. 8.18

Задача 8.19. Написать уравнение окружности, концентрической с окружностью $x^2 + y^2 – 4x + 6y – 17 = 0$, которая касается прямой $3x – 4y + 7 = 0$. Система координат – прямоугольная декартова.

Задача 8.20. Найти расстояние между прямыми: *a*) $x – y = 0$ и $x – y + 2 = 0$; *b*) $3x – 4y + 5 = 0$ и $6x – 8y + 5 = 0$; *c*) $x – y + 2 = 0$ и $3x – 4y + 5 = 0$.

Замечание. Что понимается под расстоянием между двумя плоскими геометрическими фигурами *Ф* и *Ф**? Если *Ф* = {*A*} и *Ф** = {*B*} – одноточечные множества, то ρ (Ф, Ф*) = *AB* – это расстояние между точками *A* и *B*. Если Ф = {*A*}, а Ф* – прямая *d* (множество точек прямой *d*), то ρ (*Ф*, *Ф**) – длина перпендикуляра *AH*, проведенного из точки *A* к прямой *d*. А что такое расстояние между двумя параллельными прямыми m и n (множествами Ф и Ф* точек прямых m и n)? А если m и n пересекаются? Что такое расстояние от точки до окружности? между двумя окружностями? Можно сказать, что это – наименьшее из расстояний между точками M и M^*, где $M \in Ф$, а $M^* \in Ф^*$. Но чему равно расстояние между гиперболой Ф: $x \cdot y = 1$ и фигурой Ф*: $x \cdot y = 0$ (множеством точек координатных осей $O\,x$ и $O\,y$)? Интуитивно понятно, что здесь ρ (Ф, Ф*) = 0, но ведь у этой гиперболы и координатных осей нет общих точек (так же, как и у гипербол $x \cdot y = 1$ и $x \cdot y = -1$). Здесь определение расстояния более сложно – оно использует понятие точной нижней грани расстояний между точками этих фигур, и мы его рассматривать не будем.

Задача 8.21. Найти расстояние между геометрическими фигурами Ф и Ф*, заданными в прямоугольной декартовой системе координат своими уравнениями: 1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ и $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$; 2) $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 96 = 0$; 3) $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y + 3 = 0$; 4) $x^2 + y^2 = 200$ и $x^2 + y^2 - 20x + 20y + 198 = 0$; 5) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$; 6) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 29 = 0$ и $x - y = 0$.

8.4. ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Определение 8.4. Говорят, что точка M делит направленный отрезок AB в отношении λ ($\lambda \in R$, $\lambda \neq -1$) и пишут $\lambda = (AB, M)$, если

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}. \tag{8.12}$$

Число λ называют *отношением трех* (коллинеарных!) *точек* A, B, M.

Пусть точки D, A, M, B, E делят отрезок CF на 6 равных частей:

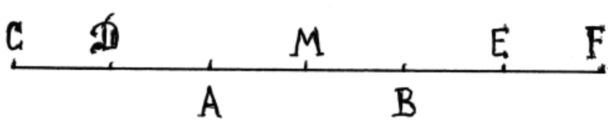


Рис. 8.19

Найдем отношение λ, в котором каждая из точек A, B, C, D, E, F, M делит направленный отрезок AB. Для этого в определяющее соотношение (8.12) вместо M подставляем поочередно точки A, B, C, D, E, F, M. Получим:

$\overrightarrow{AA} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} = \lambda\, \overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda\, \overrightarrow{CB}$, ..., $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{MB}$,

откуда следует, что в первом случае λ равно нулю, во втором – такого числа λ не существует, а остальные пять значений λ соответственно равны – 1 / 2, – 1 / 3, – 3, – 2, 1.

Вопросы: 1) Верно ли, что точка M лежит между точками A и B *iff* $(AB, M) > 0$?

2) Где расположена точка M, если о числе $\lambda = (AB, M)$ *известно следующее:* *a*) $\lambda \in (-\infty, -1)$; *b*) $\lambda \in (-1, 0)$; *c*) $\lambda \to 0$; *d*) $\lambda \to 1$; *e*) $\lambda \to +\infty$; *f*) $\lambda \to -\infty$; *g*) $\lambda \to -1$ *слева;* *h*) $\lambda \to -1$ *справа?*

3) Верно ли, что каждому действительному значению $\lambda = (AB, M)$ соответствует единственная точка M прямой AB?

Выведем формулы, выражающие координаты точки M, которая делит направленный отрезок AB в данном отношении λ, через координаты точек A и B.

Пусть на плоскости задан аффинный репер $R = O\, \vec{a}\, \vec{b}$, тогда $A\, (a_1, a_2)$, $B\, (b_1, b_2)$, $M\, (x, y)$. Так как $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$, то равенство (8.12) может быть записано в виде $\overrightarrow{AM} = \lambda\, (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\,)$, откуда следует, что $(1 + \lambda)\, \overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$, а так как $1 + \lambda \neq 0$ $(\lambda \neq -1)$, то

$\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\, \overrightarrow{AB}$.

В координатах:

$$(x - a_1, y - a_2) = \frac{\lambda}{1+\lambda}\,(b_1 - a_1, b_2 - a_2),$$

откуда мы и находим выражения координат точки M через координаты точек A, B и отношение λ:

$$x = a_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,(b_1 - a_1),$$

$$y = a_2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,(b_2 - a_2),$$

или

$$x = \frac{\lambda}{1+\lambda}\, a_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\, b_1,$$

$$y = \frac{\lambda}{1+\lambda}\, a_2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\, b_2, \qquad (8.13)$$

При $\lambda = 1$ получим знакомые вам из школы (там – в прямоугольной декартовой системе координат!) формулы

$$x = \frac{1}{2}(a_1 + b_1),$$

$$y = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \tag{8.14}$$

по которым находятся координаты середины отрезка AB (направленного?).

При $\lambda = 0$ получаются координаты точки A: $x = a_1$, $y = a_2$.

Вопрос. Существует ли значение λ, при котором формулы (8.13) дают координаты точки B?

Рассмотрим несколько примеров, показывающих, как используются эти формулы.

Задача 8.22. Выразить координаты центра тяжести М треугольника ABC (М – точка пересечения медиан треугольника ABC) через координаты вершин треугольника.

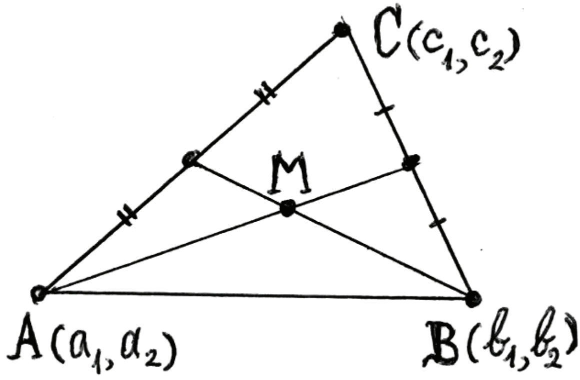


Рис. 8.20

Попробуйте решить эту задачу самостоятельно.

Задача 8.23. Доказать, что середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон любой трапеции коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой.

Для доказательства свяжем с трапецией удобный аффинный репер $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$ (см. рис. 8.21):

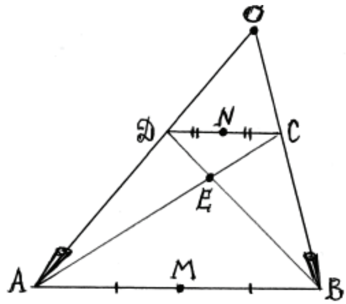


Рис. 8.21

базисные векторы которого $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Так как треугольники *ODC* и *OAB* гомотетичны, то $\overrightarrow{OD} = k\,\vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = k\,\vec{b}$, где k – коэффициент гомотетии ($0 < k < 1$). Тогда $O\ (0,\ 0)$, $A\ (1,\ 0)$, $B\ (0,\ 1)$, $C\ (0,\ k)$, $D\ (k,\ 0)$.

Так как *M* и *N* – середины оснований *AB* и *CD*, то по (8.14): $M\ (½,\ ½)$, $N\ (k / 2,\ k / 2)$.

Треугольники *ECD* и *EAB* гомотетичны с отрицательным коэффициентом гомотетии ($-\ k$). Поскольку $DE / BE = k$, то точка *E* делит направленный отрезок *DB* в отношении $\lambda = k$ ($\overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{EB}$!).

По формулам (8.13) выражаем координаты точки *E* через координаты точек *D* и *B*:

$$x = \frac{1}{1+k} \cdot k + \frac{k}{1+k} \cdot 0,$$

$$y = \frac{1}{1+k} \cdot 0 + \frac{k}{1+k} \cdot 1.$$

Четыре точки $M\ (½,\ ½)$, $N\ (k / 2,\ k / 2)$, $E\ (\frac{k}{1+k},\ \frac{k}{1+k})$ и $O\ (0,\ 0)$, о которых говорится в условии задачи, коллинеарны, так как все они лежат на прямой с уравнением $x = y$.

Попробуйте решить эту задачу при помощи векторов, без использования аффинного репера.

Задача 8.24. Найти и построить точку М отрезка *AB*, для которой выполнено следующее условие:

$$AB : AM = AM : MB. \qquad (8.15)$$

Пусть $(AB,\ M) = \lambda$, тогда $\lambda > 0$ *(почему?)*, $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$ и поэтому $AM = \lambda\ MB$. Так как $AB = AM + MB = (\lambda + 1)\ MB$, то в силу условия (8.15)

$$\frac{\lambda+1}{\lambda} = \frac{\lambda}{1} \text{ или } \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Положительным корнем этого уравнения будет число $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Подумайте, как, используя соотношение $AM = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,MB$, теоремы Пифагора и Фале́са, можно построить точку М.

Замечание. Прямоугольник со сторонами MB и $AM = \frac{1+\sqrt{5}}{2}MB$ подобен банковской и другим пластиковым картам и имеет форму так называемого золотого прямоугольника или Божественного сечения (пропорции) (см., например, книгу «Золотое сечение» популярной серии «Мир математики», М., 2013).

Задача 8.25. Точка M делит сторону AB параллелограмма $ABCD$ в отношении λ, $\lambda > 0$. Найти отношение, в котором отрезок DM делит диагональ AC.

Решение. Из школьного курса геометрии известен вариант этой задачи с числом λ, равным 1, т.е. когда M – середина стороны AB. Для нее ответ может быть получен при помощи красивого дополнительного построения и теоремы Фалеса. Мы же свяжем, на этот раз с параллелограммом, удобный аффинный репер $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$, где $O = A$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$:

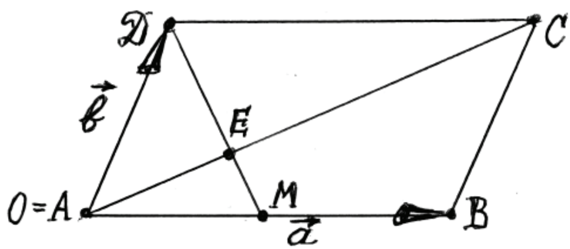


Рис. 8.22

Тогда A (0, 0), B (1, 0), D (0, 1), C (1, 1). С учетом (8.13) $M\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, 0\right)$.

Обозначим искомое отношение (AC, E) буквой μ: $\overrightarrow{AE} = \mu\,\overrightarrow{EC}$. В силу (8.13) $E\left(\frac{\mu}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}\right)$. Прямая DM пересекает оси абсцисс и ординат в точках $M\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, 0\right)$ и D (0, 1) соответственно, а поэтому ее уравнение может быть записано в виде (см. (8.7))

$$\frac{x}{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)} + \frac{y}{1} = 1.$$

Так как *E* – точка прямой *DM*, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Обозначим отношение $\frac{\mu}{1+\mu}$ буквой *v*, тогда *v* может быть найдено из уравнения

$$(\lambda + 1)\, v + \lambda\, v = \lambda.$$

Так как $v \cdot (2\lambda + 1) = \lambda$, то $v = \frac{\lambda}{2\lambda+1}$. Осталось найти μ из уравнения $\frac{\mu}{1+\mu} = \frac{\lambda}{2\lambda+1}$. Получим $\mu = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Замечание. При $\lambda = 1$, т.е. когда *M* – середина стороны *AB*, получим $\mu = 1 / 2$, так что в этом случае *DM* будет отсекать треть диагонали *AC*.

Если же точка *M* делит сторону *AB* в отношении 1 : 9 ($\lambda = 1 / 9$), отрезок *DM* будет делить диагональ *AC* в отношении 1 : 10 ($\mu = 1 / 10$).

8.5. МЕТОД КООРДИНАТ И НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК (ГМТ)

В школьной программе по геометрии рассматриваются такие геометрические места точек (ГМТ) плоскости как серединный перпендикуляр (множество всех точек плоскости, равноудаленных от данных точек *A* и *B*), окружность (множество всех точек плоскости, удаленных от данной точки *C* на данное расстояние *r*) и некоторые другие. Их, в частности, используют при решении различных геометрических задач на построение циркулем и линейкой.

Познакомимся еще с некоторыми ГМТ плоскости, которые оказываются полезными при решении достаточно сложных задач на построение, а также с геометрическим свойствами линий второго порядка, графики которых вы часто строили на уроках математики (параболы и гиперболы).

Задача 8.26. Найти ГМТ плоскости, сумма квадратов расстояний которых до заданных точек *A* и *B* есть величина постоянная, равная квадрату данного отрезка *m*.

Решение. Введем ортонормированный репер $R = O\vec{i}\,\vec{j}$, где O – середина отрезка AB, а $\vec{i}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{AB}$:

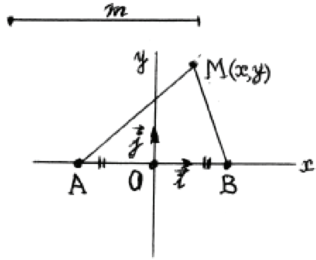


Рис. 8.23

Если длина отрезка AB равна $2c$, то $A\,(-c,\, 0)$, $B\,(c,\, 0)$. Тогда

$$M \in ГМТ \text{ iff } AM^2 + BM^2 = m^2 \text{ iff } [\,(x + c)^2 + y^2\,] + [\,(x - c)^2 + \\ + y^2\,] = m^2 \text{ iff } x^2 + y^2 = \frac{1}{2}m^2 - c^2.$$

(Мы воспользовались формулой, выражающий расстояние между двумя точками в ортонормированном репере.) Видим, что искомое ГМТ – это окружность с центром O и радиусом r ($r^2 = \frac{1}{2}(m^2 - 2c^2)$), если $m^2 > 2c^2$ ($m > \sqrt{2}\,c$); точка O, если $m^2 = 2c^2$, т.е. $m = \sqrt{2}\,c$; пустое множество $\emptyset$, если $m^2 < 2c^2$ ($m < \sqrt{2}\,c$).

Вопрос. Как построить это ГМТ?

Задача 8.27. Найти ГМТ плоскости, отношение расстояний которых до заданных точек A и B равно отношению данных отрезков m и n, где $m > n$.

Решение. Пусть ортонормированный репер $R = O\vec{i}\,\vec{j}$ выбран так, что его начало O помещено в точку A, а вектор $\vec{i}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{AB}$:

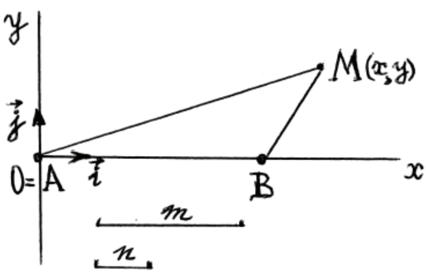


Рис. 8.24

Если $AB = c$, то A (0, 0), B (c, 0). Тогда

$M \in$ ГМТ *iff* $AM / BM = m / n$ *iff* $AM^2 / BM^2 = m^2 / n^2$ *iff* $n^2\ AM^2 = m^2\ BM^2$ *iff*

$n^2\ [x^2 + y^2] = m^2\ [(x - c)^2 + y^2]$ *iff* $(m^2 - n^2)(x^2 + y^2) - 2m^2\, c\, x + m^2c^2 = 0$ *iff*

(делим обе части уравнения на $m^2 - n^2 > 0$ и вводим обозначения для громоздких коэффициентов) *iff* $(x - k)^2 + y^2 = k^2 - l^2$.

Что определяет это уравнение в ортонормированном репере? Это будет окружность с центром в точке K (k, 0), если $k^2 - l^2 > 0$; точка K (k, 0) – при $k^2 - l^2 = 0$; пустое множество $\emptyset$ – при $k^2 - l^2 < 0$.

Так как ГМТ симметрично относительно прямой AB, а на этой прямой всегда есть две точки нашего ГМТ (см. рис., на котором эти точки C и D делят отрезок AB в данном отношении m / n внутренним и внешним образом: $AC / BC = m / n$ и $AD / BD = m / n$):

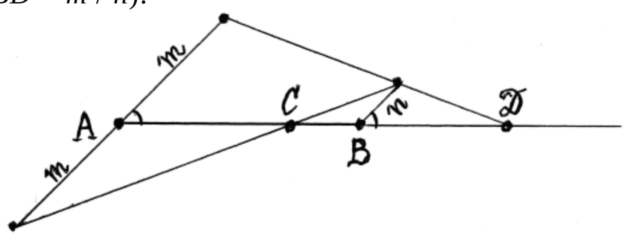


Рис. 8.25

то рассматриваемое ГМТ на самом деле всегда представляет собой окружность с диаметром CD. Последний рисунок показывает нам простой способ построения данного ГМТ, известного под названием окружности Аполлония (III век до н.э.).

Вопрос. Что происходит с окружностью Аполлония, если: 1) отношение m / n стремится к 1; 2) отношение m / n стремится к бесконечности?

Указание. Зафиксируйте на рисунке отрезок m, изменяйте n и следите за поведением точек C и D.

Замечание. Радиус окружности Аполлония r_A выражается через длины отрезков AB, m и n по формуле

$$r_A = (mn / (m^2 - n^2)) \cdot AB.$$

Попробуйте доказать это самостоятельно, основываясь либо на уравнении окружности Аполлония, либо на последнем чертеже, где строится диаметр окружности Аполлония.

Задача 8.28. Найти ГМТ плоскости, равноудаленных от данной прямой *d* и не лежащей на ней точки *F*.

Решение. Совместим начало ортонормированного репера $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ с серединой перпендикуляра *FH*, опущенного из точки *F* на прямую *d*, а вектор $\vec{j}$ направим по лучу *OF*:

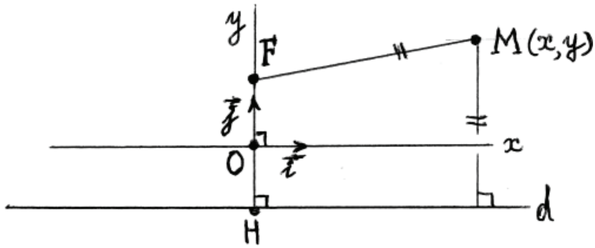


Рис. 8.26

Ясно, что точка O ∈ ГМТ (см. рис.). Пусть $FH = 2p$ – расстояние от точки *F* до прямой *d*. Тогда $F\ (0,\ p)$, прямая *d* имеет уравнение $y = -\,p$ или $y + p = 0$, и

$M \in$ ГМТ *iff* $\rho\ (M,\ d) = OM$ (здесь $\rho\ (M,\ d)$ – расстояние от точки $M\ (x,\ y)$ до прямой d: $y + p = 0$) *iff* $\rho^2\ (M,\ d) = OM^{\,2}$ *iff* (см. (8.11))

$|\ y + p\ |^{\,2} = x^{\,2} + (y - p)^{\,2}$ *iff* $y^{\,2} + 2p\,y + p^{\,2} = x^{\,2} + y^{\,2} - 2p\,y + p^{\,2}$ *iff* $4p \cdot y = x^2$.

Видим, что ГМТ – это парабола $y = \frac{1}{4p}x^2$ с вершиной *O*, симметричная относительно прямой *FH*. Точка *F* называется *фокусом*, а прямая *d – директрисой параболы.*

Об одном интересном оптическом свойства параболы (это – одно из так называемых конических сечений) можно почитать в учебниках по геометрии, в истории об Архимеде и даже в художественной литературе («Гиперболоид (!?) инженера Гарина» А.Н. Толстого).

Аналогично могут быть получены уравнения еще двух конических сечений: эллипса (ГМТ плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек *A* и *B* есть величина постоянная, большая AB) и гиперболы (ГМТ плоскости, модуль разности расстояний которых до двух заданных точек A и B есть положительная постоянная величина, меньшая расстояния между точками A и B). Эти уравнения в удобных ортонормированных реперах имеют, соответственно, следующий вид: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ (a и b – большая и малая полуоси эллипса) и $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$ (см. рис. (8.12)!).

8.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК

Решение задачи на построение обычно состоит из четырех этапов: *анализа* (задача предполагается решенной; от руки выполняется более-менее правдоподобный чертеж и ведется поиск отношений между данными в задаче фигурами и искомой, которые позволили бы выполнить построение последней данными в этой задаче инструментами – обычно это циркуль и односторонняя без делений линейка); *построения* (данные фигуры предполагаются уже построенными; затем выполняются и описываются построения, цепочка которых приводит нас к искомой фигуре; основные построения цепочки желательно нумеровать, чтобы удобнее было записывать заключительные два этапа решения задачи); *доказательства* (доказываем, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи; этот этап необходим, поскольку на первом этапе можно предположить и «изобразить» то, чего на самом деле и не существует); *исследования* (выясняем, когда и сколько решений имеет данная задача; для этого обычно просматриваются и анализируются на наличие и число промежуточных результатов все звенья цепочки построений).

Для проведения исследования полезно помнить что прямая d и окружность (O, r) не имеют общих точек, если расстояние от центра O окружности до данной прямой d больше радиуса r окружности ($\rho\ (O,\ d) > r$); имеют одну (две совпавших) общую точку, если это расстояние равно радиусу ($\rho\ (O,\ d) = r$) – прямая касается окружности; имеют две точки пересечения, если оно меньше радиуса этой окружности ($\rho\ (O,\ d) < r$) – прямая пересекает окружность:

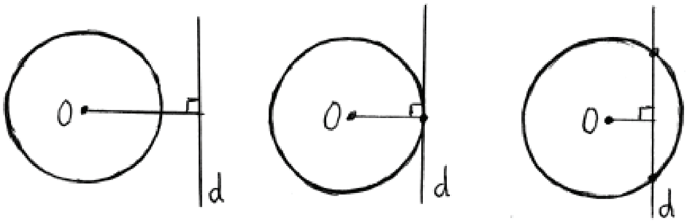


Рис. 8.27

Важно также знать, что взаимное расположение двух окружностей (A, R) и (B, r) зависит от соотношения между расстоянием AB между их центрами и радиусами этих окружностей: 1) при $R > r$ они не имеют общих точек, если $0 \le AB < R - r$, а также если $AB > R + r$

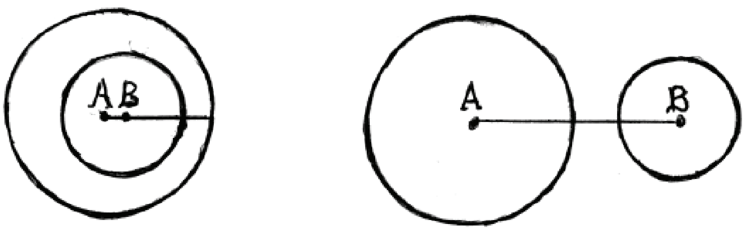


Рис. 8.28

касаются – в тех случаях, когда $AB = R - r$ (внутреннее касание) и $AB = R + r$ (внешнее касание)

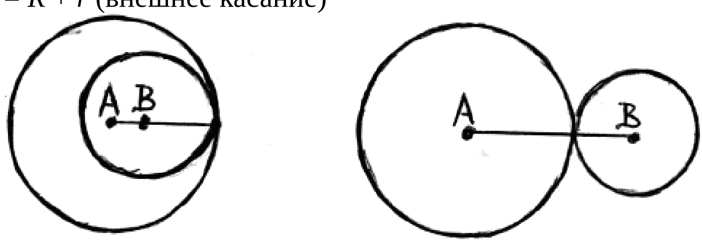


Рис. 8.29

пересекаются в двух точках – в остальных случаях, т.е. когда $R - r < AB < R + r$

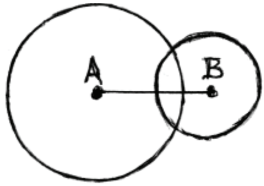


Рис. 8.30

2) при $R = r$ ($A \neq B$) пересечение двух окружностей может быть $\emptyset$ ($AB > 2r$); точкой (парой совпавших точек), если $AB = 2r$; парой точек, когда $AB < 2r$:

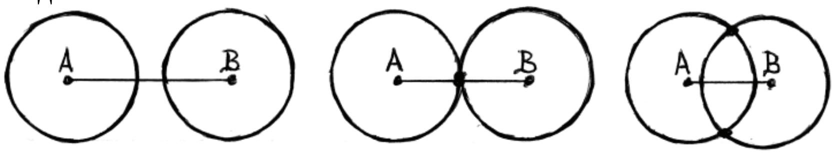


Рис. 8.31

Задача 8.29. Построить треугольник *ABC*, стороны которого соответственно равны данным отрезкам *a*, *b*, *c*: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Решение. *Анализ*. Если *ABC* – треугольник со сторонами *a*, *b*, *c*, то $AB = c$, а вершина *C* удалена от *A* на расстояние *b*, а от *B* – на расстояние *a*, т.е. является точкой пересечения двух окружностей (*A*, *b*) и (*B*, *a*):

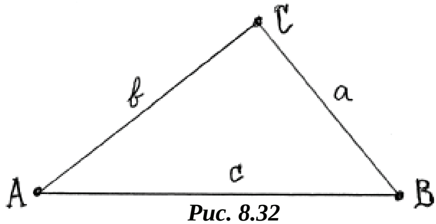


Рис. 8.32

Построение. 1) $AB = c$ (обозначаем *AB* данный, а значит, уже построенный отрезок длины *c*); 2) окружность (*A*, *b*); 3) окружность (*B*, *a*); 4) $C \in$ окр. (*A*, *b*) $\cap$ окр. (*B*, *a*); 5) треугольник *ABC* (соединяем точку *C* с точками *A* и *B* отрезками).

Доказательство. В треугольнике *ABC* $AB = c$ по построению 1 (П1), $BC = a$ по П3 и П4, $CA = b$ по П2 и П4.

Исследование. Построения 1–3 дают каждое вполне определенный результат. Все зависит от П4. Задача имеет единственное решение, если $|a - b| < c < a + b$. Во всех остальных случаях треугольника с такими сторонами a, b, c не существует.

Замечание. Равные треугольники (симметричные относительно прямой *AB*) в этой задаче, естественно, считаются одним решением.

Задача 8.30. Построить треугольник *ABC* по основанию c, высоте h_c к основанию и известному отношению $m : n$ боковых сторон *AC* и *BC* (m и n – данные отрезки, причем $m > n$).

Решение. *Анализ.* Если *ABC* – искомый треугольник, то основание *AB* равно c, высота *CH* равна h_c, $AC : BC = m : n$ (m по условию больше n):

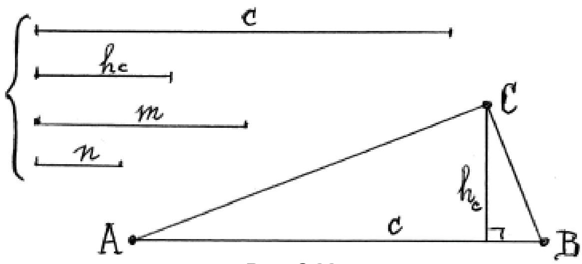


Рис. 8.33

Так как расстояние ρ (*C*, *AB*) $= h_c$, то вершина $C \in$ ГМТ плоскости, удаленных от прямой *AB* на расстояние h_c (пара прямых, параллельных прямой *AB*). Так как $AC : BC = m : n$, то $C \in$ ГМТ плоскости, отношение расстояний которых до точек *A* и *B* равно отношению данных отрезков m и n, где по условию $m > n$ (окружность Аполлония). Таким образом, вершину *C* следует искать в пересечении двух указанных ГМТ.

Построение. 1) $AB = c$ (концы данного отрезка c обозначаем буквами *A* и *B*); 2) ГМТ, удаленных от прямой *AB* на расстояние h_c; 3) окружность Аполлония; 4) $C \in$ ГМТ из П2 $\cap$ окр. Аполлония; 5) треугольник *ABC* (соединяем точку *C* с точками *A* и *B*):

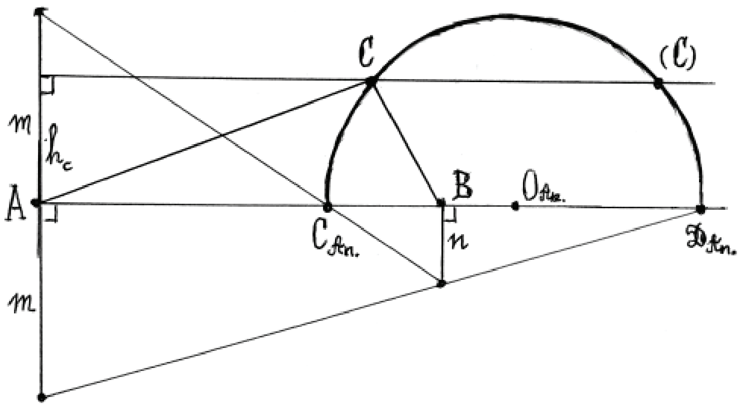


Рис. 8.34

Замечание. Так как чертеж симметричен относительно прямой *AB*, а равные треугольники как и в предыдущей задаче следует считать за одно решение, то построение можно вести в одной полуплоскости с границей *AB*.

Доказательство. В треугольнике *ABC* основание *AB* равно *c* по П1, высота к основанию будет равна h_c в силу построений П4 и П2, *AC* : *BC* = *m* : *n* в силу построений П4 и П3.

Исследование. Оно основано на построении 4. Задача не имеет решений, когда ГМТ из П2 и окружность Аполлония не имеют общих точек (это будет, когда h_c больше радиуса окружности Аполлония $r_A = (mn / (m^2 - n^2)) \cdot AB = (mn / (m^2 - n^2)) \cdot c$); задача имеет одно решение, когда $h_c = r_A$; задача имеет два решения, если $h_c < r_A$.

8.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Выше, в первом параграфе, уже были упомянуты такие известные из школьного курса геометрии преобразования множества точек плоскости как преобразования подобия, а также движения плоскости. Мы начнем с более общих преобразований евклидовой плоскости – так называемых аффинных преобразований.

8.7.1. Аффинные преобразования плоскости

Определение 8.5. Пусть на евклидовой плоскости заданы два аффинных репера $R = O\ \vec{a}\ \vec{b}$ и $R' = O'\ \vec{a}'\ \vec{b}'$. Если мы каждой точке M плоскости, имеющей координаты x, y в репере R, поставим в соответствие точку M' с теми же координатами x, y, но в репере R', то получим преобразование f множества точек плоскости, которое *называется аффинным преобразованием плоскости.* (То, что при таком соответствии f у каждой точки плоскости будет единственный образ и у каждой точки плоскости будет единственный прообраз, т.е. соответствие f будет биекцией, проверяется без особого труда.) Будем говорить, что аффинное преобразование $f = (R, R')$ задано реперами R и R':

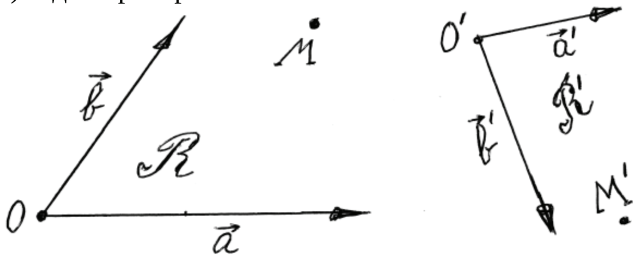


Рис. 8.35

Аффинный репер $R = O\ \vec{a}\ \vec{b}$ вполне определяется тремя неколлинеарными точками O, A, B:

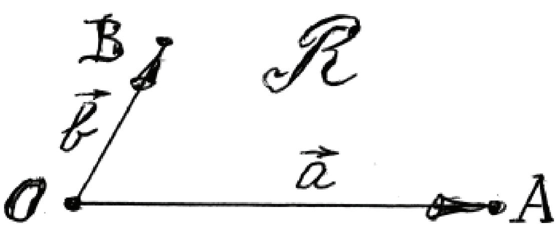


Рис. 8.36

По этой причине упорядоченную тройку неколлинеарных, т.е. не лежащих на одной прямой точек (O, A, B) часто также называют *аффинным репером* на плоскости.

Замечание. Если аффинное преобразование f задано парой реперов R и R', то образом аффинного репера $\tilde{R} = (\tilde{O}, \tilde{A}, \tilde{B})$ будет аффинный репер $\tilde{R}' = (\tilde{O}', \tilde{A}', \tilde{B}')$. Так как точки $\tilde{O}$ и $\tilde{O}'$, $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$, $\tilde{B}$ и $\tilde{B}'$ в реперах $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$ соответственно имеют одни и те же координаты, то векторы $\vec{\tilde{a}}$ и $\vec{\tilde{a}}'$, $\vec{\tilde{b}}$ и $\vec{\tilde{b}}'$ будут иметь одни и те же координаты в базисах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ этих реперов. Поэтому формулы, выражающие координаты x, y точки M в репере R через ее координаты $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ в репере $\tilde{R}$ будут такими же, при помощи которых координаты x', y' ее образа M' в репере R' выражаются через координаты точки M' в репере $\tilde{R}'$. По этой причине *аффинное преобразование* $f = (R, R')$ *можно задавать любой парой* $(\tilde{R}, \tilde{R}')$ *соответствующих аффинных реперов*.

Этим важным замечанием мы не раз будем пользоваться впоследствии при рассмотрении некоторых теоретических вопросов и при решении различных задач на преобразования.

Тождественное преобразование плоскости id, оставляющее все точки плоскости на месте, является аффинным: $id = (R, R)$. Преобразование, обратное аффинному преобразованию $f = (R, R')$, является аффинным: $f^{-1} = (R', R)$. Композиция $f \circ g$ двух аффинных преобразований f и g также будет аффинным преобразованием плоскости: если $f = (R, R')$, а $g = (R', R'')$, то $f \circ g = (R, R'')$. Таким образом, множество всех аффинных преобразований плоскости образуют группу – подгруппу группы всех преобразований плоскости (см. параграф 1).

Отметим еще некоторые свойства аффинных преобразований. Из определения аффинного преобразования можно понять, что если $F(x, y) = 0$ – уравнение некоторой плоской геометрической фигуры (т.е. некоторого множества Φ точек плоскости) в репере R, то при аффинном преобразовании $f = (R, R')$ образ Φ' фигуры Φ $(\Phi' = f(\Phi))$ в репере R' описывается тем же самым уравнением $F(x', y') = 0$.

Поэтому при аффинных преобразованиях: *прямая переходит в прямую;* параллельные прямые – в параллельные прямые; направление в широком смысле (множество всех параллельных прямых плоскости) – в направление; сохраняется отношение трех точек (AB, M) прямой, т.е. всегда $(A'B', M') = (AB, M)$; сохраняется отношение параллельных отрезков; вектор как множество всех направленных отрезков, которые имеют одинаковое направление (в узком смысле!) и одинаковую длину (с добавлением так называемого нулевого вектора, операции сложения векторов, умножения векторов на числа и – для евклидовой плоскости – скалярного умножения векторов), переходит в вектор; линии второго порядка переходят в линии второго порядка с тем же уравнением, но в репере R'; сохраняется отношение площадей фигур (Как измеряется площадь при помощи палетки? Что происходит, когда каждый квадратик на палетке разбивается на 100 более мелких квадратиков и этот процесс продолжается неограниченно? Во что переходит сетка из квадратиков при аффинном преобразовании?).

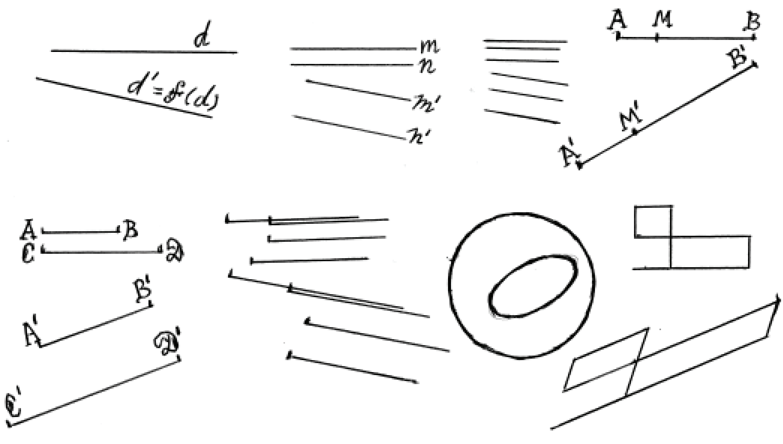


Рис. 8.37

Курсивом было выделено одно из важнейших свойств аффинных преобразований плоскости: прямые при любом аффинном преобразовании переходят в прямые. Справедливо и обратное утверждение: любое преобразование множества точек плоскости, при котором сохраняется *коллинеарность* точек, будет аффинным преобразованием. Это свойство называют *характеристическим свойством аффинных преобразований*, его можно использовать при определении аффинного преобразования.

Определение 8.6. *Инвариантной фигурой* аффинного преобразования f называется любая фигура Ф, которая при преобразовании f переходит сама в себя, т.е. для которой f (Ф) = Ф.

Вопросы: 1) Какую фигуру называют *фигурой инвариантных точек* преобразования f?

2) Что можно сказать о прямой AB, которая проходит через инвариантные точки A, B аффинного преобразования f?

3) Может ли аффинное преобразование иметь три (ровно три) инвариантные точки?

4) Верно ли, что любая инвариантная прямая определяет инвариантное направление аффинного преобразования?

5) Верно ли, что инвариантные прямые аффинного преобразования следует искать только среди прямых инвариантных направлений?

6) Сравните множества инвариантных точек аффинного преобразования f и обратного ему преобразования f^{-1}, а также множества инвариантных прямых и множества инвариантных фигур этих аффинных преобразований.

Определение 8.7. Две геометрические фигуры $Ф$ и $Ф^*$ называются *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное преобразование f, переводящее первую фигуру во вторую.

Так как каждая геометрическая фигура аффинно эквивалентна самой себе (она переходит в себя при помощи аффинного преобразования id), то отношение аффинной эквивалентности геометрических фигур рефлексивно. Оно также симметрично (если $Ф$ аффинно эквивалентна фигуре $Ф^*$, т.е. существует аффинное преобразование f, переводящее $Ф$ в $Ф^*$, то $Ф^*$ может быть переведена в $Ф$ при помощи обратного аффинного преобразования f^{-1}) и транзитивно (если $Ф$ аффинно эквивалентна $Ф^*$, а $Ф^*$ в свою очередь аффинно эквивалентна $Ф^{**}$, т.е. $Ф$ переходит в $Ф^*$ при помощи некоторого аффинного преобразования f, а $Ф^*$ переходит в $Ф^{**}$ при помощи аффинного преобразования g, то композиция $f \circ g$, которая также является аффинным преобразованием, переведет первую фигуру $Ф$ в третью $Ф^{**}$). Таким образом, отношение аффинной эквивалентности геометрических фигур будет отношением эквивалентности. В соответствии с известной теоремой ([1], с. 37–39) отношение эквивалентности разбивает множество всех геометрических фигур на плоскости на классы эквивалентности. Фигуры одного класса будут аффинно эквивалентны, фигуры разных классов не будут аффинно эквивалентными.

Замечание. В определенном смысле аффинная эквивалентность – «неотличимость» геометрических фигур по отношению к группе аффинных преобразований плоскости. Так же, как *равенство* геометрических фигур (которое сравнительно недавно пытались заменить невыговариваемым термином «конгруэнтность», чтобы не возникало при изложении классической геометрии Евклида противоречий со сравнительно молодой теорией множеств) – это их эквивалентность по отношению к группе движений, а *подобие* фигур – эквивалентность по отношению к группе подобий плоскости.

Если рассматривать аффинную эквивалентность фигур, то все треугольники попадают в один класс «Треугольники», все параллелограммы также будут образовывать свой класс «Параллелограммы», то же можно доказать про эллипсы, гиперболы, параболы.

Когда же мы переходим к подобию фигур, т.е. сужаем группу преобразований евклидовой плоскости с группы аффинных преобразований до группы подобий, класс «Треугольники» в некотором смысле как зеркало расколется на бесконечное множество осколков, среди которых будут «Правильные треугольники», «Равнобедренные прямоугольные треугольники» и т.д. – в один класс попадают все треугольники, имеющие одинаковую форму, которая вполне определяется величинами углов треугольника (см. соответствующий признак подобия треугольников).

С классом «Параллелограммы» произойдет нечто подобное: он разобьется на бесконечно много осколков, среди которых будут «Квадраты», «Золотые прямоугольники» и т.д. – в один класс попадают все прямоугольники, имеющие одинаковую форму, а также «Ромбы с острым углом 30°» и т.д. и т.п.

При переходе к группе движений происходит дальнейшее измельчение классов эквивалентности.

Так, класс «Правильные треугольники» расколется на бесконечное множество осколков, каждый из которых будет состоять изо всех правильных треугольников со стороной данной длины. То же произойдет с классом «Квадраты», «Ромбы с острым углом 30°» и т.д.

Примерами аффинно эквивалентных фигур являются любые два треугольника, параллелограмма, эллипса, любые две параболы, гиперболы. Справедливость этого факта для треугольников и параллелограммов легко усматривается из рисунков

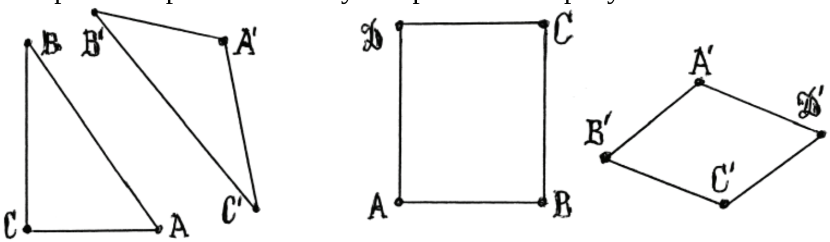


Рис. 8.38

Искомым аффинным преобразованием f будет в обоих случаях аффинное преобразование $f = (R, R')$, где $R = (A, B, C)$, $R' = (A', B', C')$.

Вопросы: 1) Сколько существует аффинных преобразований, переводящих: *a*) треугольник *ABC* в треугольник *KLM*; *b*) параллелограмм *ABCD* в параллелограмм *KLMN*; *c*) трапецию *ABCD* в трапецию *KLMN*?

2) Что можно сказать об аффинном преобразовании, имеющем три инвариантные прямые, изображенные на каждом из следующих рисунков?

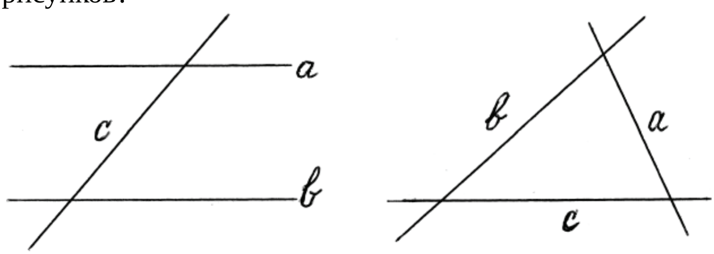


Рис. 8.39

3) Образуют ли группу все аффинные преобразования плоскости, которые данную фигуру Φ переводят в себя?

Чтобы убедиться в аффинной эквивалентности любых двух парабол Φ и Φ^*, напомним, что уравнение параболы Φ в некотором связанном с ней ортонормированном репере $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ может быть записано в виде $y = \frac{1}{4p} \cdot x^2$ (см. задачу 8.28). Перейдем к аффинному реперу $\tilde{R} = O\; 2\sqrt{p}\;\vec{i}\,\vec{j}$. Формулы (8.1) преобразования координат при переходе от репера R к новому реперу $\tilde{R}$ $x = 2\sqrt{p}\,\tilde{x}$, $y = \tilde{y}$ дадут нам уравнение параболы Φ в новом репере $\tilde{R}$: $\tilde{y} = \tilde{x}^2$.

К такому же виду может быть приведено уравнение второй параболы Φ^* в некотором своем аффинном репере $\tilde{R}^*$. Искомым аффинным преобразованием f, переводящим первую параболу Φ во вторую Φ^*, будет $f = (\tilde{R}, \tilde{R}^*)$.

Аналогичным образом решается вопрос с любыми двумя эллипсами, для каждого из которых можно найти аффинный репер, в котором он будет задаваться уравнением $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$, а также с любыми двумя гиперболами ($\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 1$).

Вопросы: 1) Любые ли две трапеции аффинно эквивалентны?

2) Любые ли два выпуклых четырехугольника аффинно эквивалентны?

3) Любые ли два угла аффинно эквивалентны?

Замечание. Угол может быть нулевым, острым, прямым, тупым, развернутым, сверхтупым (величина φ которого заключена в промежутке $\pi < \varphi < 2\pi$ – в настоящее время этот термин почему-то не употребляется), полным.

Итак, отношение аффинной эквивалентности разбивает множество всех геометрических фигур плоскости на классы эквивалентности. Получается аффинная классификация плоских геометрических фигур, в которой есть, например, такие классы, как «Треугольники», «Параллелограммы», «Параболы», «Эллипсы» (куда попадают и все окружности), «Гиперболы», однако нет таких классов, как «Квадраты», «Ромбы», «Прямоугольники», одного класса «Трапеции», «Выпуклые четырехугольники», «Углы» (из-за аффинной неэквивалентности, например, острых и развернутых углов).

Покажем, как аффинные преобразования помогают просто решить достаточно сложную задачу (все сложности уходят в теорию аффинных преобразований!).

Для доказательства того, что в произвольной трапеции $ABCD$ середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон всегда лежат на одной прямой (коллинеарны), мы рассмотрим вспомогательную равнобедренную трапецию $A'B'C'D'$ с теми же основаниями, т.е. такую, что $A'B' = AB$, $C'D' = CD$, и произвольной высотой. Эта трапеция симметрична относительно прямой, проходящей через середины оснований: вершина A симметрична вершине B, вершина C – вершине D. Поскольку прямая AD будет симметрична прямой BC, то точка пересечения этих прямых будет лежать на оси симметрии. То же самое можно сказать и про прямые AC и BD.

А теперь воспользуемся аффинным преобразованием f, которое определяется реперами $R = (A', B', D')$ и $R' = (A, B, D)$. При этом преобразовании f вспомогательная трапеция $A'B'C'D'$ перейдет в трапецию $ABCD$, а ее ось симметрии перейдет в прямую, на которой будут лежать середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон данной (произвольной) трапеции $ABCD$.

Рассмотрим вопрос об *аналитическом задании аффинного преобразования* f, т.е. о формулах, связывающих координаты x, y прообраза M и координаты x', y' образа $M' = f(M)$ в одном и том же репере R. Пользуясь формулами, можно достаточно эффективно изучать свойства аффинных преобразований алгебраическими методами.

Теорема 8.1. Если аффинное преобразование f задано парой реперов $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$ и $R' = O'\,\vec{a}'\,\vec{b}'$, причем известны координаты точки O' в репере R и координаты векторов $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, то зависимость между координатами x, y точки M и координатами x', y' ее образа $M' = f(M)$ в аффинном репере R выражается формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2, \end{aligned} \tag{8.16}$$

где $O'(c_1, c_2)$, $\vec{a}'(a_1, a_2)$, $\vec{b}'(b_1, b_2)$.

Замечание. Столбцы коэффициентов при x и y в формулах (8.16) аффинного преобразования f – координаты базисных векторов $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ репера R', и поэтому они не пропорциональны.

Доказательство. Так как в репере R' точка $M' = f(M)$ имеет те же координаты x, y, что и ее прообраз M в репере R, то

$\overrightarrow{O'M'} = x\,\vec{a}' + y\,\vec{b}' = x\,(a_1\,\vec{a} + a_2\vec{b}) + y\,(b_1\,\vec{a} + b_2\,\vec{b}) =$

$= (x\,a_1 + y\,b_1)\,\vec{a} + (x\,a_2 + y\,b_2)\,\vec{b}.$

А так как $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{OO'}$ и $\overrightarrow{OO'} = c_1\,\vec{a} + c_2\,\vec{b}$, то

$x'\,\vec{a} + y'\,\vec{b} = (x\,a_1 + y\,b_1 + c_1)\,\vec{a} + (x\,a_2 + y\,b_2 + c_2)\,\vec{b}.$

Координаты вектора $\overrightarrow{O'M'}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ определены однозначно, поэтому

$$x' = a_1\,x + b_1\,y + c_1,$$
$$y' = a_2\,x + b_2\,y + c_2.$$

Вопрос. Как, пользуясь формулами (8.16), можно находить инвариантные точки аффинного преобразования f, т.е. те точки плоскости, которые при этом преобразовании переходят сами в себя (остаются на месте)?

Задача 8.31. Аффинное преобразование f задано парой реперов $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$ и $R' = O'\,\vec{a}'\,\vec{b}'$ (см. рис.)

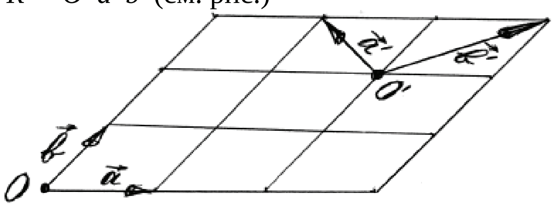


Рис. 8.40

Найдите образы точек O, A, B, C (1, 1), D (–1, 0), E (–1, –4), O', A', B', а также прообразы точек O', A', B', $C' = f\,(C)$, $D' = f\,(D)$, O, A, B, E.

Задача 8.32. Аффинное преобразование f задано формулами

$$x' = -x + y + 2,$$
$$y' = x + y + 1. \qquad (8.17)$$

Найдите, пользуясь этими формулами, образы и прообразы тех же точек, для которых требовалось построить образы и прообразы в предыдущей задаче.

Задача 8.33. Найти инвариантные точки аффинного преобразования *f* из предыдущей задачи.

Решение. Для того, чтобы найти координаты x, y инвариантных точек аффинного преобразования, которое задано формулами (8.17), достаточно решить систему $x' = x$, $y' = y$ (в формулах (8.17) просто удаляются штрихи у x' и y'!). В нашем случае мы получим систему

$$\begin{aligned} x &= -x + y + 2, \\ y &= x + y + 1, \end{aligned}$$

единственным решением которой является точка (– 1, – 4).

Задача 8.34. Запишите формулы аффинного преобразования, обратного преобразованию задачи 8.32.

Вопросы: 1) Как можно найти образ и прообраз прямой d: $2x - 3y + 5 = 0$ при аффинном преобразовании *f* из задачи 8.32?

2) То же – для фигуры Φ, заданный в аффинном репере R уравнением $y^2 = 1$, и для фигуры Φ^* с уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Верно ли, что фигура Φ – это пара параллельных прямых, а Φ^* – окружность?

3) Дано уравнение прямой m: $3x - 4y + 2 = 0$ и формулы (8.17) аффинного преобразования f. Попробуйте понять, что мы находим, когда выполняем следующие операции:

a) $3x' - 4y' + 2 = 0$;

b) $3(-x + y + 2) - 4(x + y + 1) + 2 = 0$;

c) $7x + y - 4 = 0$?

Что мы получим, если в уравнение прямой m вместо x и y подставим их выражения через x', y', найденые из формул аффинного преобразования f, т.е.

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}y' + \tfrac{1}{2}, \\ y &= \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}y' - \tfrac{3}{2}? \end{aligned}$$

Задача 8.35. Даны формулы аффинных преобразований *f* и *g*

$$f:\ \begin{aligned} x' &= -x + y + 2, \\ y' &= x + y + 1; \end{aligned} \qquad g:\ \begin{aligned} x' &= x + 3, \\ y' &= y + 5. \end{aligned}$$

Требуется записать формулы композиции $f \circ g$ и композиции $g \circ f$. Совпадают ли эти аффинные преобразования? Коммутативна ли операция композиции на множестве всех аффинных преобразований плоскости? Будет ли группа всех аффинных преобразований плоскости *коммутативной* (*абелевой*) *группой*?

Замечание. В вопросе 3 мы записали зависимость между координатами x', y' образов M' и, используя формулы (8.17) аффинного преобразования f из задачи 8.32, нашли зависимость между координатами x, y их прообразов M. Таким образом, уравнение $7x + y - 4 = 0$ – это уравнение прообраза прямой m. Соответственно во втором случае, когда используются формулы обратного аффинного преобразования f^{-1}, мы получим уравнение образа прямой m. Образом прямой m: $3x - 4y + 2 = 0$ будет прямая m': $7x + y - 19 = 0$.

Определение 8.8. *Гомотетией плоскости* с центром О и коэффициентом m, где m – отличное от нуля и единицы действительное число, называется аффинное преобразование $H^m(O)$, которое задается реперами $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$ и $R' = O\,m\vec{a}\,m\vec{b}$:

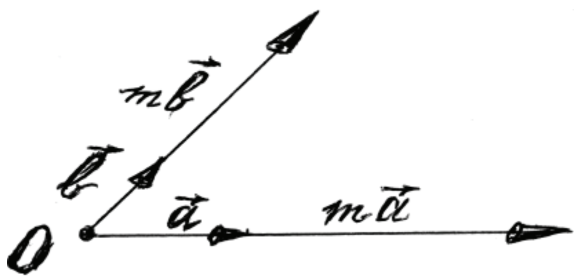


Рис. 8.41

Можно понять, что: 1) при $m = -1$ гомотетия $H^{-1}(O)$ – это центральная симметрия Z_O;

2) гомотетия $H^{-m}(O)$ с отрицательным коэффициентом $(-m)$ – это композиция гомотетии $H^m(O)$ с положительным коэффициентом m и центральной симметрии Z_O (заметим, что в данном случае $H^m(O) \circ Z_O = Z_O \circ H^m(O)$);

3) если бы мы не исключили случай $m = 1$, то это было бы id – тождественное преобразование плоскости;

4) композицией двух гомотетий с общим центром и коэффициентами m и n будет гомотетия с тем же центром, коэффициент

которой равен произведению коэффициентов m и n (если считать id гомотетией с коэффициентом 1).

Задача 8.36. Докажите, что все гомотетии плоскости с фиксированным центром вместе с тождественным преобразованием плоскости id образуют группу преобразований. Будет ли она абелевой?

Гомотетия, будучи частным случаем аффинного преобразования, обладает, естественно, всеми свойствами аффинных преобразований. К ним добавляется еще ряд свойств:

a) Любая прямая d, не проходящая через центр гомотетии, переходит в параллельную ей прямую d'.

b) Любая прямая d, проходящая через центр гомотетии, инвариантна, т.е. переходит сама в себя.

Отсюда следует, что при гомотетии любое *направление на плоскости* (*в широком смысле, т.е. множество всех параллельных прямых*) инвариантно.

Замечание. *Направлением на плоскости в узком смысле* называется множество всех сонаправленных (т.е. одинаково направленных) лучей:

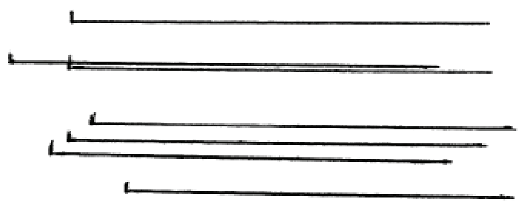


Рис. 8.42

В этом смысле говорят о направлении луча, осей общей декартовой (аффинной) системы координат, направленного отрезка, вектора.

c) Если A', B' – образы точек A, B при гомотетии с коэффициентом m, то всегда $\overrightarrow{A'B'} = m \cdot \overrightarrow{AB}$.

Справедливость утверждений *a*) и *b*) вытекает из того, что уравнение прямой d в репере $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$ и ее образа d' в репере $R' = O\,m\vec{a}$ $m\vec{b}$ совпадают. Для доказательства свойства *c*) воспользуемся тем, что если $A\,(a_1, a_2)$, $B\,(b_1, b_2)$ в репере $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$, то их образами будут точки A', B', имеющие те же координаты, но в репере $R' = O\,m\vec{a}\,m\vec{b}$.

Тогда $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\,\vec{a} + (b_2 - a_2)\,\vec{b}$, $\overrightarrow{A'B'} = (b_1 - a_1)\,m\vec{a} + (b_2 - a_2)\,m\vec{b}$, откуда и заключаем, что $\overrightarrow{A'B'} = m \cdot \overrightarrow{AB}$.

В качестве следствия из свойства *c*) отметим следующее: *при гомотетии с коэффициентом m все расстояния изменяются в* $|m|$ *раз.* Что можно сказать об инвариантности при гомотетии направлений в узком смысле?

Вопросы. Образуют ли группу: 1) *id* и гомотетия с коэффициентом $m = -1$;

2) все гомотетии $H^m(O)$ с фиксированным центром O, коэффициент m которых: *a*) любое натуральное число; *b*) любое целое число, отличное от нуля; *c*) целая степень числа 2 ($m = 2^n$, где $n \in Z$); *d*) натуральная степень числа 2 ($m = 2^n$, где $n \in N$); *e*) целая степень числа 10 ($m = 10^n$, где $n \in Z$); *f*) целая степень числа π ($m = \pi^n$, где $n \in Z$); *g*) любое рациональное число, отличное от нуля; *h*) любое иррациональное число? Здесь мы считаем, что гомотетия может быть и с коэффициентом $m = 1$.

Покажем, как известная уже нам задача о трапеции может быть красиво решена с использованием двух гомотетий. Пусть *ABCD* – произвольная трапеция, *M* и *N* – середины оснований *AB* и *CD*, *E* – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*, *O* – точка пересечения продолжений боковых сторон *AD* и *BC*:

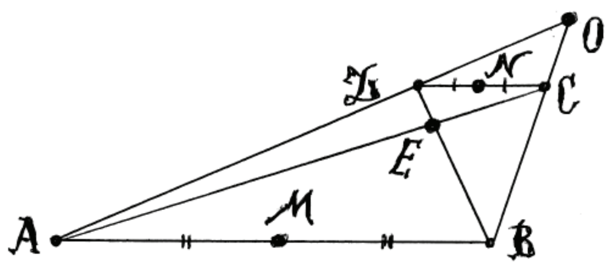


Рис. 8.43

При гомотетии с центром O и коэффициентом $m = AB / DC$, которая точку *D* переводит точку *A*, а точку *C* – в точку *B*, верхнее основание *DC* перейдет в нижнее *AB*, а его середина – точка *N* перейдет в середину нижнего основания – точку *M*. Поэтому точки *O*, *N* и *M* лежат на одной прямой.

При гомотетии с центром E и коэффициентом $(-m)$ точка D переходит в точку B, точка C – в точку A; основание CD – в основание AB; середина N верхнего основания – в середину M нижнего основания. Поэтому точки E, N и M также лежат на одной прямой – той же самой (!) прямой MN.

Вопрос. Возможно, кто-то заметил, что в решении задачи верхнее основание трапеции сначала названо DC, а затем – CD? Оговорка? Или же в этом есть какой-то смысл?

Замечание. Почему эта задача о трапеции решается нами уже не в первый раз? Она памятна автору настоящей главы учебного пособия вот по какой причине. В далеком 1966 году один из авторов широко известного в СССР пособия по математике для поступающих в вузы (в те старые добрые времена еще не было ЕГЭ (!) и абитуриенты демонстрировали свою математическую подготовку, сдавая вступительный экзамен по математике в выбранном ими вузе – в рамках школьной программы, но с разным уровнем требований к глубине демонстрируемых знаний; имеется в виду книга Г.В. Дорофеева, М.К. Потапова, Н.Х. Розова «Математика для поступающих в вузы») предложил эту задачу мне – тогда ученику 8 класса – на устном экзамене в г. Ставрополе при поступлении в ФМШ 18 при МГУ, где лекции ученикам этой школы (не обучающимся, а именно ученикам, школьникам, интернатовцам!) в течение двух лет читал величайший математик XX века академик Андрей Николаевич Колмогоров, которому мне однажды даже посчастливилось сдавать и сдать сложный дифференцированный зачет по геометрии. Но вот уже более полувека не могу вспомнить, как же я доказал на вступительном зкзамене в ФМШ коллинеарность этих самых четырех точек.

Перейдем к вопросу о формулах гомотетии. Формулы гомотетии с центром в точке О и коэффициентом m в аффинном репере $R = O\ \vec{a}\ \vec{b}$ можно легко получить, воспользовавшись формулами (8.16) аффинного преобразования. Так как эта гомотетия может быть задана реперами $R = O\ \vec{a}\ \vec{b}$ и $R' = O\ m\vec{a}\ m\vec{b}$, то O' (0, 0) в репере R, $\vec{a}'$ $(m, 0)$, $\vec{b}'$ $(0, m)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, поэтому формулы гомотетии $H^m(O)$ в репере $R = O\ \vec{a}\ \vec{b}$ имеют следующий вид:

$$x' = mx,$$
$$y' = my.$$

Какой вид имеют формулы гомотетии с центром в точке C (c_1, c_2) и коэффициентом m? Если в репере R точка M имеет координаты x, y, а ее образ $M' = H^m(C)$ (M) – координаты x', y', то поскольку при гомотетии всегда $\overrightarrow{C'M'} = m \cdot \overrightarrow{CM}$, а $C' = C$, то в нашем случае $\overrightarrow{C'M'} = m \cdot \overrightarrow{CM}$. Так как $\overrightarrow{C'M'}$ ($x' - c_1$, $y' - c_2$), $\overrightarrow{CM}$ ($x - c_1$, $y - c_2$), $m \cdot \overrightarrow{CM}$ (m ($x - c_1$), m ($y - c_2$)), то

$$x' - c_1 = m\,(x - c_1),$$
$$y' - c_2 = m\,(y - c_2);$$

или

$$x' = m\,(x - c_1) + c_1,$$
$$y' = m\,(y - c_2) + c_2. \qquad (8.18)$$

Замечание. При $m = -1$ гомотетия $H^{-1}(C)$ – это центральная симметрия Z_C. Формулы центральной симметрии Z_C с центром в точке C (c_1, c_2), таким образом, имеют вид

$$x' = -x + 2c_1,$$
$$y' = -y + 2c_2. \qquad (8.19)$$

Если же центр C совпадает с началом координат, т.е. $C = O$ (0, 0), то

$$x' = -x,$$
$$y' = -y.$$

При аффинных преобразованиях евклидовой плоскости равные отрезки вовсе не обязаны переходить в равные (см. рис. 8.44):

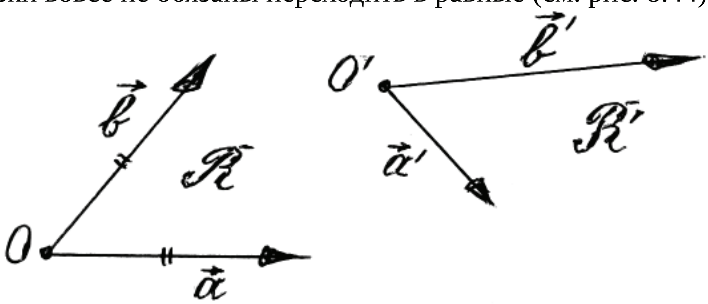


Рис. 8.44

Но если отрезки *равной* длины располагаются на параллельных прямых или на одной прямой, то при любом аффинном преобразовании f их образы также будут отрезками *равной* длины, расположенными на параллельных прямых или на одной прямой (см. свойства аффинных преобразований). Можно доказать, что при любом аффинном преобразовании f направление в узком смысле (множество всех одинаково направленных или сонаправленных лучей) переходит в направление в узком смысле:

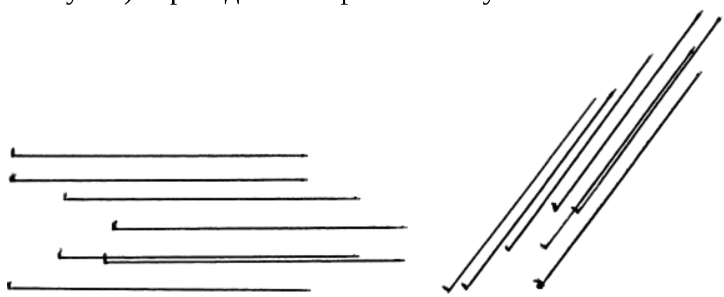


Рис. 8.45

Поэтому при любом аффинном преобразовании f образом вектора $\vec{v}$, рассматриваемого как множество всех сонаправленных отрезков одинаковой длины (плюс нулевой или нуль-вектор $\vec{0}$ и соответствующие операции над векторами!), будет вектор $\vec{v}'$, т.е. с любым аффинным преобразованием f точек плоскости связано вполне определенное преобразование f_v векторов этой плоскости.

Теорема 8.2. Если аффинное преобразование f задано формулами

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

то зависимость между координатами v_1, v_2 вектора $\vec{v}$ и координатами v_1', v_2' его образа $\vec{v}'$ при связанном с f преобразовании векторов f_v выражается формулами

$$v_1' = a_1 v_1 + b_1 v_2,$$
$$v_2' = a_2 v_1 + b_2 v_2. \qquad (8.20)$$

Доказательство. Отложим вектор $\vec{v}$ (v_1, v_2) от начала координат: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. При аффинном преобразовании f образом точки O будет точка O' (c_1, c_2), образом точки M (v_1, v_2) будет точка M' $(a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1, a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2)$. Поэтому образом вектора $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ будет вектор $\vec{v}' = \overrightarrow{O'M'}$ $(a_1 v_1 + b_1 v_2, a_2 v_1 + b_2 v_2)$.

Замечание. Пользуясь формулами (8.20), можно находить ненулевые векторы $\vec{v}$, которые переходят в коллинеарные им ненулевые векторы $\vec{v}' = m\,\vec{v}$ (здесь число $m \neq 0$). Такие векторы задают инвариантные направления аффинного преобразования f (здесь под направлением понимается *направление в широком смысле*, т.е. множество всех параллельных между собой прямых плоскости). Именно среди прямых инвариантных направлений следует искать инвариантные прямые аффинного преобразования f (объясните почему).

Задача 8.37. Найти инвариантные направления аффинных преобразований f, заданных следующими формулами:

a) $x' = x + 3,\ y' = y + 18;$ b) $x' = -y,\ y' = x;$ c) $x' = x + y,\ y' = y;$

d) $x' = -x + 18,\ y' = y + 9;$ e) $x' = -x + y + 8,\ y' = x + y + 18;$ f) $x' = -x + 26,\ y' = -y + 26.$

Решение. Для каждого случая запишем формулы (8.20), по которым преобразуется координаты векторов $\vec{v}\,(v_1, v_2)$:

a) $v_1' = v_1,\ v_2' = v_2;$ b) $v_1' = -v_2,\ v_2' = v_1;$ c) $v_1' = v_1 + v_2,\ v_2' = v_2;$

d) $v_1' = -v_1,\ v_2' = v_2;$ e) $v_1' = -v_1 + v_2,\ v_2' = v_1 + v_2;$ f) $v_1' = -v_1,\ v_2' = -v_2.$

Пользуемся последним замечанием и ищем ненулевые векторы $\vec{v}\,(v_1,\ v_2)$, которые переходят в ненулевые векторы $\vec{v}' = m\,\vec{v}(m\,v_1,\ m\,v_2)$ такие, что

$$v_1' = m\,v_1,\quad v_2' = m\,v_2,$$

где m – некоторое ненулевое число.

В случае a) получим $v_1 = m\,v_1$, $v_2 = m\,v_2$. При $m = 1$ любой ненулевой вектор $\vec{v}\,(v_1, v_2)$ переходит сам в себя.

В случае b) из $-v_2 = m\,v_1, v_1 = m\,v_2$ или $m\,(v_1 + v_2) = 0$, $m\,(v_1 - v_2) = 0$ следует, что таких векторов не существует.

Для c) из $v_1 + v_2 = m\,v_1, v_2 = m\,v_2$ или $(m - 1)\,v_1 + v_2 = 0$, $(m - 1)\,v_2 = 0$ следует, что при $m = 1$ любой ненулевой вектор $\vec{v}\,(v_1, 0)$ переходит сам в себя.

В задаче d) система $-v_1 = m\,v_1$, $v_2 = m\,v_2$ равносильна системе $(m + 1)\,v_1 = 0$, $(m - 1)\,v_2 = 0$. Ненулевые векторы $\vec{v}\,(0, v_2)$ переходят сами в себя, а векторы $\vec{v}$ (v_1, 0) «опрокидываются», т.е. переходят в противоположные им векторы – $\vec{v}$ (– v_1, 0).

Для аффинного преобразования, заданного формулами *e*), из системы $-v_1 + v_2 = m\,v_1$, $v_1 + v_2 = m\,v_2$ или равносильной ей системы $(m + 1)\,v_1 - v_2 = 0$, $v_1 - (m - 1)\,v_2 = 0$ можно сделать вывод о том, что ненулевых векторов $\vec{v}$, переходящих в ненулевые $m\,\vec{v}$, у данного аффинного преобразования нет.

f) Убедитесь самостоятельно, что в этом случае любой ненулевой вектор $\vec{v}$ будет «опрокидываться», т.е. переходить в противоположный ему вектор – $\vec{v}$. Если переписать формулы данного аффинного преобразования в виде

$$\frac{1}{2}(x' + x) = 13,\ \frac{1}{2}(y' + y) = 13,$$

то можно понять, что это – формулы центральной симметрии с центром в точке *F* (13, 13).

Задача 8.38. Найти инвариантные прямые аффинных преобразований *a*) – *f*) из предыдущей задачи.

Решение. Напомним, что инвариантной фигурой аффинного преобразования *f* называется такое множество точек плоскости, которое при этом преобразовании *f* переходит сам*о* в себя. Выше уже говорилось о том, что инвариантные прямые аффинных преобразований следует искать только среди прямых инвариантных направлений. Это вытекает из того факта, что при аффинном преобразовании *f* направление (в широком смысле) переходит в направление. По этой причине сразу можно сказать, что у аффинных преобразований, заданных формулами *b*) и *e*), нет инвариантных прямых.

Для аффинного преобразования *a*) ищем уравнение инвариантной прямой *d* в виде $A\,x + B\,y + C = 0$. Прямая *d*: $A\,x + B\,y + C = 0$ будет инвариантной при аффинном преобразовании *f iff* ее прообраз, т.е. прямая $A\,(x + 3) + B\,(y + 18) + C = 0$ совпадает с прямой *d* (объясните, почему при нахождении инвариантных прямых можно искать прообраз, а не образ прямой *d*) *iff* уравнения $A\,x + B\,y + C = 0$ и $A\,x + B\,y + 3\,A + 18\,B + C = 0$ равносильны, т.е. определяют одну и ту же прямую *d iff* $3\,A + 18\,B + C = C$ *iff* $A + 6\,B = 0$ *iff* направляющий вектор $\vec{m}$ (– *B*, *A*) прямой *d* параллелен вектору с координатами (1, 6). Таким образом любая прямая d с уравнением $6x - y + C = 0$, где C – любое действительное число будет инвариантной прямой аффинного преобразования *а*).

Замечание. Так как при аффинном преобразовании *а*) для любой точки M (x, y) и ее образа M' (x', y') вектор $\overrightarrow{MM'}$ (3, 18) один и тот же, то формулы *а*) являются формулами параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ (3, 18). При параллельном переносе все прямые, имеющие направление вектора переноса, являются инвариантными прямыми.

Аффинное преобразование *с*) имеет одно инвариантное направление – направление координатной оси Ox. Поэтому инвариантные прямые будем искать среди прямых $y = C$, где C – действительное число. Прямая d: $y = C$ инвариантна при аффинном преобразовании *с*) *iff* ее прообраз $y' = C$, т.е. прямая $y = C$, совпадает с ней. Видим, что инвариантными будут все прямые $y = C$ инвариантного направления.

Для *d*) инвариантные прямые ищем среди прямых $y = C$ и $x = D$. Прямая d: $y = C$ будет инвариантной прямой аффинного преобразования *d*) *iff* ее прообраз $y' = C$, т.е. прямая $y + 9 = C$, совпадает с ней. Среди прямых этого инвариантного направления инвариантных прямых нет.

Прямая d: $x = D$ инвариантна *iff* ее прообраз $x' = D$, т.е. прямая $-x + 18 = D$, совпадает с ней. Видим, что и среди прямых направления оси Oy тоже нет ни одной инвариантной прямой.

В случае *f*), как и в случае *а*), уравнения инвариантных прямых ищем в общем виде $A\,x + B\,y + C = 0$, т.е. инвариантные прямые ищем среди прямых всех направлений.

Прямая d: $A\,x + B\,y + C = 0$ будет инвариантный прямой аффинного преобразования *f*) *iff* ее прообраз $A\,x' + B\,y' + C = 0$, т.е. прямая $A\,(-x + 26) + B\,(-y + 26) + C = 0$, совпадает с ней *iff* уравнения $A\,x + B\,y + C = 0$ и $A\,x + B\,y - (26\,A + 26\,B + C) = 0$ равносильны *iff* $C = -(26\,A + 26\,B + C)$ *iff* $C = 13\,A + 13\,B$. Таким образом, инвариантными прямыми аффинного преобразования *f*) будут все прямые d, уравнения которых могут быть записаны в виде: $A\,(x - 13) + B\,(y - 13) = 0$, где $A^2 + B^2 > 0$, т.е. все прямые, проходящие через точку F (13, 13) – центр центральной симметрии Z_F.

8.7.2. Перспективно-аффинные преобразования плоскости

Частным случаем аффинных являются так называемые перспективно-аффинные преобразования, в самом названии которых подчеркивается важная область их практического применения – изображение фигур на плоскости.

Определение 8.9. *Перспективно-аффинным преобразованием* или *родством* называется такое аффинное преобразование плоскости, множеством инвариантных точек которого является прямая p (от франц. *perspective*) – *ось родства*.

Перспективно-аффинные преобразования, естественно, обладают всеми свойствами аффинных (см. раздел 1 параграфа 7). При этом каждое из них имеет хотя бы одно инвариантное направление (какое?).

Вопрос. Образуют ли группу: 1) все перспективно-аффинные преобразования плоскости; 2) все перспективно-аффинные преобразования плоскости с фиксированной осью p; 3) тождественное преобразование плоскости id вместе с преобразованиями 2)?

Если задавать родство при помощи пары аффинных реперов $R = (O, A, B)$ и $R' = (O', A', B')$, точки O и A удобно помещать на оси родства. Тогда третья точка репера B уже не будет инвариантной (почему?), т.е. $B' \neq B$. Возможны следующие два случая.

Если прямая $BB' \parallel$ оси p, то такое родство называют *сдвигом плоскости с осью p;* в случае

$BB' \nparallel p$ – *косым растяжением плоскости с осью p:*

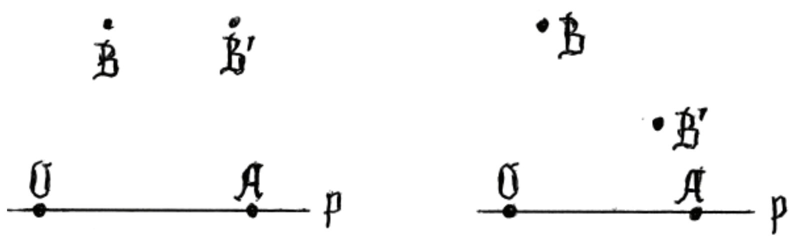


Рис. 8.46

Попробуйте объяснить способ построения образа M' точки M ($M \notin p$) при сдвиге и при косом растяжении плоскости:

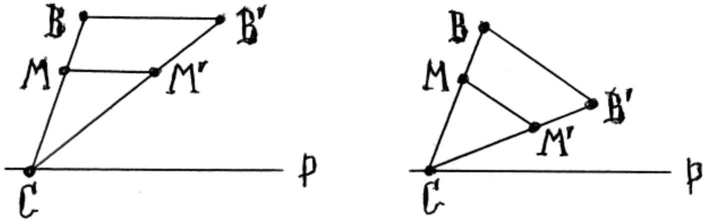


Рис. 8.47

На обоих рисунках $(B'C, M') = (BC, M)$, поэтому $MM' \parallel BB'$. Отсюда следует, что направление прямой BB' целиком состоит из инвариантных прямых (оно называется *направлением родства* и в первом случае совпадает с направлением оси сдвига):

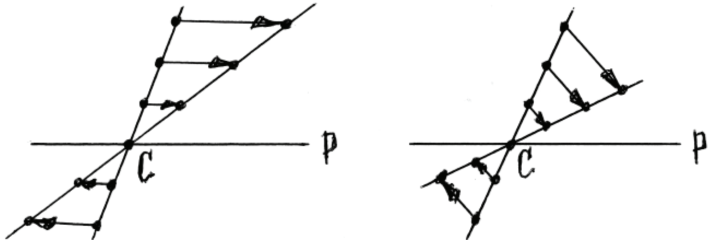


Рис. 8.48

Вопрос. Как строится образ точки M, которая находится на прямой BB'? В частности, как построить образ точки B'?

Для любой точки M, не лежащей на оси косого растяжения p, $(MM', M) = (BB', B) = \lambda$:

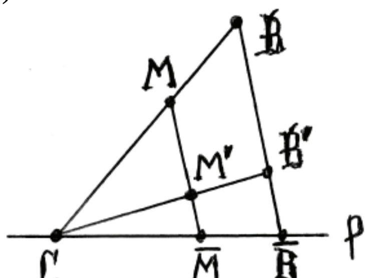


Рис. 8.49

Константу $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ называют *коэффициентом косого растяжения*. Из $\overrightarrow{M\overline{M}} = \lambda\ \overrightarrow{\overline{M}M'}$ следует, что $\overrightarrow{\overline{M}M'} = \mu \cdot \overrightarrow{\overline{M}M}$.

Косое растяжение с коэффициентом *μ = –1* называется *косой симметрией* (почему?):

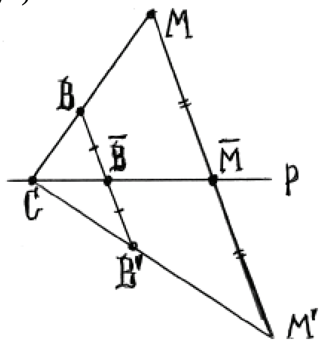


Рис. 8.50

Если направление косого растяжения *f* перпендикулярно оси растяжения ($BB' \perp p$), то *f* называется *растяжением плоскости от прямой p*. Если же при этом коэффициент растяжения $\mu = -1$, получаем S_p *– осевую симметрию с осью p.*

Вопрос. Может ли коэффициент *μ* косого растяжения плоскости быть равен 0 или 1? Почему?

Задача 8.39. Какое перспективно-аффинное преобразование *f* с осью *p* задано на каждом из рисунков точкой *B* и ее образом $B' = f\,(B)$?

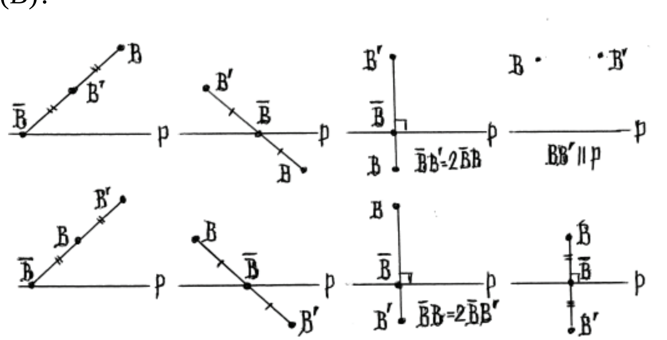


Рис. 8.51

Мы укажем лишь значения коэффициентов μ: ½, –1, –2, нет, 2, –1, –½, –1.

Задача 8.40. Перспективно-аффинное преобразование f задано осью p и парой соответствующих точек B и $B' = f(B)$, где $B \neq B'$. Построить образ и прообраз: 1) прямой d, которая пересекает ось p; 2) прямой m, которая параллельна оси p; 3) квадрата $KLMN$, одна из сторон которого параллельна оси p; 4) квадрата $PQRS$, ни одна из сторон которого не параллельна оси родства. Рассмотреть как случай сдвига плоскости ($BB' \parallel p$), так и случай косого растяжения плоскости ($BB' \nparallel p$).

Задача 8.41. Записать формулы косого растяжения плоскости с коэффициентом μ (μ – действительное число, отличное от 0 и 1) в удобном аффинном репере и, пользуясь этими формулами, найти инвариантные точки, направления и прямые данного вида перспективно-аффинных преобразований.

Решение. Косое растяжение плоскости f с осью p может быть задано при помощи аффинных реперов $R = (O, A, B)$ и $R' = (O, A, B')$, где точки O, A расположены на оси p и поэтому инвариантны, а точки B и B' задают так называемое направление косого растяжения f.

Для решения задачи воспользуемся еще более удобным репером $R = (O, A, B)$, выбрав в качестве первой его точки О точку пересечения оси p и прямой BB', а в качестве второй точки A возьмем любую другую точку оси родства:

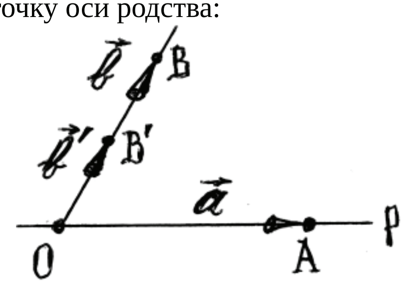


Рис. 8.52

Для аффинного преобразования f, которое задано такими реперами $R = (O, A, B)$ и $R' = (O, A, B')$: $O' = O\,(0, 0)$ в репере $R = O\,\vec{a}\,\vec{b}$; $\vec{a}' = \vec{a}$ $(1,\ 0)$, $\vec{b}' = \mu\,\vec{b}$ $(0,\ \mu)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$; а μ – коэффициент косого растяжения, так как это число было взято из равенства $\vec{b}' = \mu\,\vec{b}$ или $\overrightarrow{OB}' = \mu\,\overrightarrow{OB}$. Подставляя координаты начала и базисных векторов репера R' в формулы (8.16) аффинных преобразований, получим формулы

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \mu\,y \end{aligned} \tag{8.21}$$

косого растяжения f с коэффициентом μ в специально подобранном аффинном репере R.

Инвариантные точки f находим, решая систему $x' = x$, $y' = y$ или $x = x$, $y = \mu\,y$. Из $(\mu - 1)\,y = 0$ с учетом того, что $\mu \neq 1$, получим прямую $y = 0$ инвариантных точек – ось родства f. Другого результата мы и не ожидали.

Переходим к нахождению инвариантных направлений. Для этого используем формулы (8.20) связанного с косым растяжением f преобразования векторов f_v:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1, \\ v_2' &= \mu v_2. \end{aligned}$$

Ищем ненулевые векторы $\vec{v}\,(v_1, v_2)$, которые при этом преобразовании переходят в ненулевые векторы $m\,\vec{v}\,(m\,v_1, m\,v_2)$. Приходим к системе

$$\begin{aligned} mv_1 &= v_1, \\ mv_2 &= \mu v_2 \end{aligned}$$

или $(m - 1)\,v_1 = 0$, $(m - \mu)\,v_2 = 0$. Если $m = 1$, то из системы $0 = 0$, $(1 - \mu)\,v_2 = 0$ видим, что вектор $\vec{a}(1, 0)$ при f_v переходит сам в себя ($m = 1$).

Вопрос. А в какие векторы переходят векторы, коллинеарные вектору $\vec{a}$, т.е. того же в широком смысле (!) направления?

Если же $m \neq 1$, то из системы $(m - 1)\,v_1 = 0$, $(m - \mu)\,v_2 = 0$ найдем при $m = \mu$ вектор $\vec{b}\,(0, 1)$ при f_v будет переходить в $\mu\,\vec{b}$ (так же, как и все ему коллинеарные векторы!).

Таким образом, косое растяжение f имеет ровно два инвариантных направления: направление оси p и отличное от него направление косого растяжения. В общем-то это было понятно из геометрических соображений, мы лишь убедились, что помимо известных нам двух инвариантных направлений других инвариантных направлений у косого растяжения нет.

Инвариантные прямые перспективно-аффинного преобразования f, как мы это делали ранее и как всегда будем делать в дальнейшем для других частных видов аффинных преобразований евклидовой плоскости, ищем *только* среди прямых инвариантных направлений.

Прямая $x = c$ инвариантна при косом растяжении (8.21) *iff* ее прообраз $x' = c$, т.е. прямая $x = c$ совпадает с ней. Таким образом, любая прямая с уравнением $x = c$, т.е. имеющая направление косого растяжения, будет инвариантна.

Прямая $y = c$ инвариантна при (8.21) *iff* ее прообраз $y' = c$, т.е. прямая $\mu\ y = c$ совпадает с ней *iff* $c\ /\ \mu = c$ (у нас $\mu \neq 0$!) *iff* $c = 0$. Видим, что среди прямых этого инвариантного направления лишь одна прямая будет инвариантной – ось p косого растяжения, которая, будучи осью родства, является прямой инвариантных точек.

Задача 8.42. Сделать то же, что в задаче 8.41, но для сдвига плоскости.

Указание. В аффинном репере $R = (O, A, B)$, где O и A лежат на оси сдвига p:

$O' = O$ (0, 0), $A' = A$ (1, 0), B' (β, 1), где β – некоторое действительное число, отличное от нуля.

Вопрос. Для косого растяжения число μ в определенном смысле характеризовало степень косого растяжения плоскости относительно оси растяжения p и было одинаковым для всех точек M вне оси p. Каков геометрический смысл числа β?

Задача 8.43. Построить образ окружности при сжатии плоскости с коэффициентом 2 (растяжении с коэффициентом $\mu = ½$) к прямой p, проходящей через ее центр. Записать уравнение образа окружности в удобном ортонормированном репере. Что это за кривая?

Рассмотрим несколько задач, связанных с изображениями фигур *в параллельной проекции*. При параллельном проектировании плоскости на плоскость прямые проектируются в прямые, параллельные – в параллельные, сохраняется отношение трех точек (AB, M) и отношение параллельных отрезков. Можно доказать (попробуйте сделать это самостоятельно!), что *параллельной проекцией* (*тенью*) *данного треугольника ABC может служить любой* (*с точностью до подобия*) *треугольник A′ B′ C′ плоскости изображений*.

Задача 8.44. Дано изображение квадрата *KLMN* и прямой *d*, лежащей в плоскости квадрата. Требуется построить изображение перпендикуляра, проведенного из центра квадрата *KLMN* к прямой *d*.

Решение. Изображением квадрата *KLMN* и прямой *d* будут (в параллельной проекции!) параллелограмм *K′L′M′N′* и прямая *d′*. Изображением центра квадрата О будет, естественно, центр О′ параллелограмма. На стороне *M′N′* параллелограмма строим квадрат *N′M′LK* и будем считать его оригинальным квадратом *KLMN*. Рассмотрим родство *f* с осью *p* = *M′N′*, при котором квадрат *KLMN* переходит в свое изображение – параллелограмм *K′L′M′N′*. Оно может быть задано точкой *L* и ее образом *L′* (см. рис.):

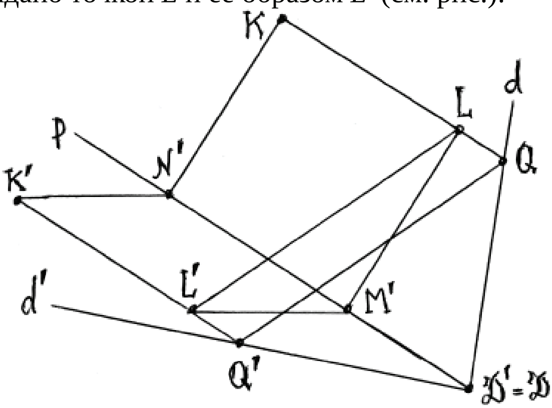


Рис. 8.53

Восстановим на оригинале прямую *d*. Для этого на нашем рисунке (возможны и другие варианты, но они не могут вызвать каких-либо серьезных затруднений) строим образ *d* прямой *d′* при обратном родстве f^{-1} или, что то же самое, прообраз прямой *d′* при родстве *f*. Можно взять на прямой *d′* точки *D′* и *Q′*, для которых легко находятся прообразы *D* и *Q*: $D' = d' \cap p$, $Q' = d' \cap K'L'$. Прямая *d* = *DQ*. Мы восстановили оригинал (квадрат *KLMN* и прямую *d*) по его изображению в параллельной проекции (параллелограмму

$K'L'M'N'$ и прямой d'). Сам описанный метод поэтому называется *методом перехода к оригиналу*. Он позволяет решать подобные задачи при помощи перспективно-аффинных преобразований.

В нашей задаче осталось на оригинальном чертеже провести перпендикуляр ОН из центра квадрата к прямой d, а затем вернуться в плоскость изображений, т.е. построить образ этого перпендикуляра ОН при родстве f.

Вопрос. Как можно задавать обратное родство f^{-1}?

Задача 8.45. Дано изображение квадрата $KLMN$ и угла, лежащих в одной плоскости. Восстановить оригинальный угол.

Задача 8.46. $P'Q'R'$ – изображение прямоугольного равнобедренного треугольника PQR с гипотенузой QR. Как изобразятся правильные треугольники, построенные в плоскости PQR на сторонах треугольника PQR вне его?

Задача 8.47. На сторонах египетского треугольника ABC с гипотенузой AB и меньшим углом A вне его построены квадраты. Построить их изображения, если сам египетский треугольник изображен в виде правильного треугольника $A'B'C'$. Чему равны отношения площадей построенных изображений?

8.7.3. Преобразования подобия плоскости

Определение 8.10. Пусть на евклидовой плоскости задан ортонормированный репер $R = O\ \vec{i}\ \vec{j}$ и ортогональный репер $R' =$ $= O\ \vec{a}', \vec{b}'$, векторы которого $\vec{a}'\ \vec{b}'$ не только ортогональны (перпендикулярны), но и равны по длине: $|\vec{a}'| = |\vec{b}'| = k$. Аффинное преобразование $f = (R, R')$, которое определяется такой парой реперов R, R', называется *преобразованием подобия или подобием плоскости с коэффициентом k:*

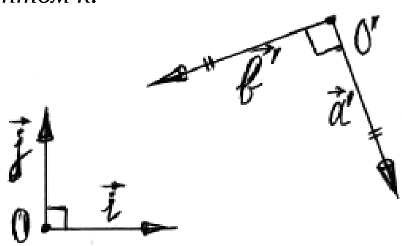


Рис. 8.54

Если M и N – произвольные точки, $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ – их образы, и $M(m_1, m_2)$, $N(n_1, n_2)$ в ортонормированном репере $R = O\vec{i}\,\vec{j}$, то $M'(m_1, m_2)$, $N'(n_1, n_2)$ в ортогональном репере R' с базисными векторами $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ длины k. Тогда $\overrightarrow{MN}(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$ в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}$; а $\overrightarrow{M'N'}(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$ в ортогональном базисе $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ с векторами длины k. Из $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2$ (так как $\overrightarrow{MN}^2 = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos 0° = MN^2$) $= [(n_1 - m_1)\vec{i} + (n_2 - m_2)\vec{j}]^2 = (n_1 - m_1)^2 \vec{i}^2 + 2(n_1 - m_1)(n_2 - m_2)\vec{i} \cdot \vec{j} + (n_2 - m_2)^2 \vec{j}^2 = (n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2$, $M'N'^2 = \overrightarrow{M'N'}^2 = [(n_1 - m_1)\vec{a}' + (n_2 - m_2)\vec{b}']^2 = (n_1 - m_1)^2 \vec{a}'^2 + 2(n_1 - m_1)(n_2 - m_2)\vec{a}' \cdot \vec{b}' + (n_2 - m_2)^2 \vec{b}'^2 = (n_1 - m_1)^2 k^2 + (n_2 - m_2)^2 k^2 = MN^2 \cdot k^2$

заключаем, что *при преобразовании подобия плоскости с коэффициентом k все расстояния изменяются в k раз.* Отсюда, в частности, следует, что *при преобразованиях подобия сохраняются величины углов.*

Замечание. Можно доказать, что если преобразование плоскости все расстояния изменяет в k раз, то это преобразование является преобразованием подобия. Это свойство, таким образом, является *характеристическим свойством подобий* и обычно используется в качестве определения преобразования подобия плоскости.

А так как преобразования подобия – частный случай аффинных преобразований, то они обладают также всеми свойствами аффинных преобразований (см. раздел 1 параграфа 7). В частности, преобразование подобия можно задавать любой парой соответствующих реперов $\tilde{R} = (\tilde{O}, \tilde{A}, \tilde{B})$ и $\tilde{R}' = (\tilde{O}', \tilde{A}', \tilde{B}')$. Можно понять, что при этом треугольники $\tilde{O}\tilde{A}\tilde{B}$ и $\tilde{O}'\tilde{A}'\tilde{B}'$ подобны с коэффициентом k.

Тождественное преобразование плоскости id – подобие (с коэффициентом 1). Преобразование f^{-1}, обратное преобразованию подобия f, будет преобразованием подобия (с коэффициентом k^{-1}), композиция любых двух преобразований подобия f и g с коэффициентами k и l также будет преобразованием подобия (с коэффициентом $k \cdot l$). Таким образом, множество всех преобразований подобия евклидовой плоскости образуют группу – подгруппу группы всех аффинных преобразований плоскости.

Определение 8.11. Две геометрические фигуры Φ и Φ^* называются *подобными* ($\Phi \backsim \Phi^*$), если существует преобразование подобия f, переводящее первую фигуру во вторую.

Так как каждая геометрическая фигура Φ подобна самой себе (Ф переходит в Φ при подобии id), то отношение подобия рефлексивно. Если фигура Φ подобна фигуре Φ^*, т.е. переходит в Φ^* при подобии f (с коэффициентом k), то Φ^* может быть переведена в Φ при помощи обратного преобразования f^{-1}, которое также является подобием, но с коэффициентом k^{-1}. Таким образом, отношение подобия симметрично. Если $\Phi \backsim \Phi^*$, а $\Phi^* \backsim \Phi^{**}$, т.е. Φ переходит в Φ^* при подобии f с коэффициентом k, а Φ^* переходит в Φ^{**} при подобии g с коэффициентом l, то фигура Φ перейдет в фигуру Φ^{**} при композиции $f \circ g$, которая также является подобием (с коэффициентом $k \cdot l$). Поэтому $\Phi \backsim \Phi^{**}$, т.е. отношение подобия геометрических фигур транзитивно, а значит, будет отношением эквивалентности.

Множество всех геометрических фигур плоскости разбивается на классы эквивалентности, каждый из которых состоит изо всех подобных между собой фигур и называется *формой геометрической фигуры.*

Вопрос. Верно ли, что параллельной проекцией данного треугольника ABC может быть треугольник $A'\ B'\ C'$ произвольной формы (см. раздел 2 параграфа 7)?

Примерами подобных фигур могут служить любые два отрезка, луча, прямых угла, угла в 33°; любые два прямоугольника, имеющие форму «золотого сечения» или «Божественной пропорции»; любые два прямоугольника с заданным отношением сторон (которое и определяет форму прямоугольника!) и, в частности, любые два квадрата; любые две окружности и т.д.

Поэтому можно говорить о форме отрезка (все отрезки плоскости составляют один класс эквивалентности «Отрезки»), прямой, луча, правильного треугольника или прямоугольного треугольника с острым углом 30°, квадрата, прямого угла, окружности, «золотого» прямоугольника, прямоугольника с отношением сторон 2 : 1 (названия соответствующим классам эквивалентности дайте сами!), но нельзя говорить: форма прямоугольника, форма эллипса, форма трапеции, форма прямоугольного треугольника, форма остро- или тупоугольного треугольника (объясните почему). Интересно, что из трех конических сечений (эллипс, гипербола, парабола) парабола находится в привилегированном положении: любые две параболы подобны, чего нельзя сказать о любых двух эллипсах или любых двух гиперболах. То, что любые две параболы подобны, будет доказано ниже.

Вопросы: 1) Сколько существует преобразований подобия плоскости, переводящих: *a*) отрезок *AB* в отрезок *CD*; *b*) правильный треугольник *ABC* в правильный треугольник *KLM*; *c*) квадрат *ABCD* – в квадрат *KLMN*; *d*) «золотой» прямоугольник *ABCD* – в «золотой» прямоугольник *KLMN*; *e*) прямой угол – в прямой угол; *f*) окружность – в окружность; *g*) окружность с отмеченной на ней точкой *M* – в окружность с отмеченной на ней точкой *M′*, где *M′* – образ точки *M*; *h*) прямую – в прямую; *i*) прямоугольный треугольник с острым углом 30° – в прямоугольный треугольник с острым углом 60°?

2) Образуют ли группу все подобия плоскости, коэффициентами которых являются все: *a*) числа из множества $A = \{..., \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, ...\}$; *b*) положительные рациональные числа; *c*) положительные иррациональные числа; *d*) все степени числа 2 с натуральным показателем; *e*) все степени числа 5 с целым показателем?

3) Образуют ли группу все подобия плоскости с коэффициентом 1?

Задача 8.48. Доказать, что любые две параболы подобны.

Доказательство. Воспользуемся определением параболы *Ф* как геометрического места точек плоскости, равноудаленных от некоторой прямой *d* (*директриса*, т.е. направляющая) и не лежащей на ней точки *F* (*фокус параболы*). Если *Ф** – вторая парабола, т.е. ГМТ плоскости, равноудаленных от своих прямой *d** и точки *F**, то при подобии *f*, которое переводит директрису и фокус параболы *Ф* соответственно в директрису и фокус параболы *Ф**, парабола *Ф* перейдет в параболу *Ф** (объясните почему).

Вопросы: 1) Сколько таких подобий *f* в задаче 8.48 и чему равен их коэффициент *k*?

2) При помощи каких реперов *R* и *R′* эти подобия могут быть заданы?

3) Напомним, что эллипс Φ – это геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 (*фокусы эллипса*) есть величина постоянная, большая фокусного расстояния $F_1 F_2$. Если Φ^* – второй эллипс, то при каком условии он будет подобен эллипсу Φ?

4) Аналогичный вопрос – про две гиперболы Φ и Φ^*. Под гиперболой понимается ГМТ плоскости, модуль разности расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 (*фокусы гиперболы*) равен длине фиксированного отрезка, который меньше отрезка $F_1 F_2$.

Теорема 8.3. Формулы преобразования подобия f с коэффициентом k в ортонормированном репере $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ имеют вид

$$\begin{matrix} x' = k\cos\varphi\cdot x - k\sin\varphi\cdot y + c_1 \\ y' = k\sin\varphi\cdot x + k\cos\varphi\cdot y + c_2; \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x' = k\cos\varphi\cdot x + k\sin\varphi\cdot y + c_1, \\ y' = k\sin\varphi\cdot x - k\cos\varphi\cdot y + c_2. \end{matrix} \qquad (8.22)$$

Доказательство. Образом ортонормированного репера $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ при подобии f с коэффициентом k будет ортогональной репер $R' = O\,\vec{a}'\,\vec{b}'$, векторы $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ которого взаимно перпендикулярны и имеют длину k:

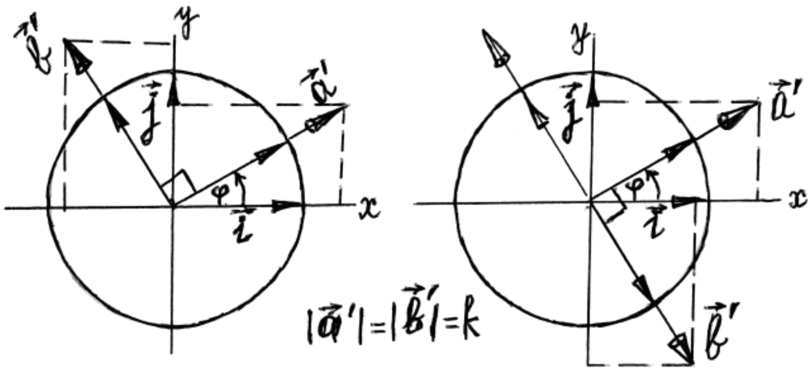


Рис. 8.55

$\vec{a}'$ $(k\cos\varphi, k\sin\varphi)$, $\vec{b}'$ $(-k\sin\varphi, k\cos\varphi)$ или $\vec{b}'$ $(k\sin\varphi, -k\cos\varphi)$, а начало O' в репере R имеет некоторые координаты c_1 и c_2. Осталось подставить координаты векторов $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ и точки O' в общие формулы (8.16) аффинных преобразований.

Замечание. Так как гомотетия $H^m(O)$ – аффинное преобразование, при котором все расстояния изменяются в одно и то же число $|m|$ раз, то она ортонормированный репер $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ переводит в ортогональный репер $R' = O\,m\vec{i}\,m\vec{j}$ с равными по длине векторами $m\vec{i}$ и $m\vec{j}$: $|\,m\vec{i}\,| = |\,m\vec{j}\,| = |\,m\,|$. А так как аффинное преобразование может задаваться любой парой соответствующих реперов, то гомотетия $H^m(O)$ с коэффициентом m, где m – число, отличное от нуля и единицы, – это частный случай подобия с коэффициентом $k = |\,m\,|$.

Вопрос. Образуют ли группу тождественное преобразование плоскости *id* и: *a*) все гомотетии с данным центром О; *b*) все гомотетии с рациональными коэффициентами $m \neq 0$; *c*) все гомотетии с положительными коэффициентами m; *d*) все гомотетии, коэффициентами m которых являются степени числа 2 с целыми показателями ($m = 2^{\,n}$, где $n \in Z$); *e*) гомотетия $H^{-1}(O)$ с коэффициентом $m = -1$, т.е. центральная симметрия Z_O? Центрами всех гомотетий в *a*) – *e*) является фиксированная точка О.

Задача 8.49. (O, R) и (O^*, R^*) – окружности с центрами O, O^* и радиусами R, R^* соответственно. Будут ли эти окружности гомотетичными? Рассмотрите все возможные случаи взаимного расположения окружностей и для каждого из них найдите все гомотетии, переводящие первую окружность во вторую. Как можно построить центры этих гомотетий?

Задача 8.50. Доказать, что любое преобразование подобия f с коэффициентом k можно представить в виде композиции гомотетии с центром в произвольно выбранной точке A и коэффициентом k (или $-k$) и преобразования подобия f^* с коэффициентом 1.

Доказательство. Пусть подобие f задано при помощи ортонормированного репера $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ и ортогонального репера $R' = O'\,\vec{a}'\,\vec{b}'$, где $|\,\vec{a}'| = |\,\vec{b}'| = k$. При гомотетии $H^k(A)$ с центром в точке A и коэффициентом k ортонормированный репер $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ перейдет в ортогональный репер $\overline{R} = \overline{O}\,k\vec{i}\,k\vec{j}$, где $\overline{O} = H^k(A)\,(O)$. Реперы $\overline{R}$ и R' оба ортогональные, причем $|\,k\,\vec{i}\,| = |\,k\,\vec{j}\,| = |\,\vec{a}'| = |\,\vec{b}'| = k$. Пара таких реперов $\overline{R}$ и R' определяет аффинное преобразование f^*, которое будет подобием с коэффициентом 1. Искомое разложение имеет вид $f = H^k(A)\; o\; f^*$.

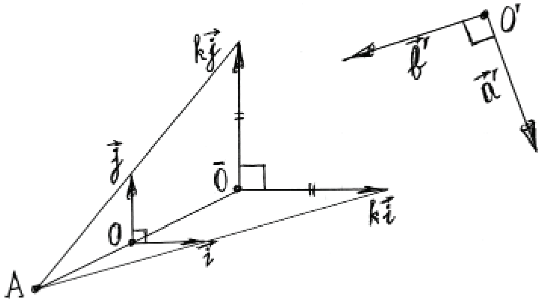


Рис. 8.56

Аналогично может быть рассмотрен случай гомотетии с отрицательным коэффициентом – k.

Задача 8.51. Доказать, что любое подобие с коэффициентом $k \neq 1$ имеет единственную инвариантную точку.

Доказательство. Если формулы подобия в ортонормированном репере имеют вид

$$x' = k \cos \varphi \cdot x - k \sin \varphi \cdot y + c_1,$$
$$y' = k \sin \varphi \cdot x + k \cos \varphi \cdot y + c_2,$$

то система $x' = x$, $y' = y$ для нахождения координат инвариантных точек может быть записана в виде

$$(k \cos \varphi - 1)\, x - k \sin \varphi \cdot y + c_1 = 0,$$
$$k \sin \varphi \cdot x + (k \cos \varphi - 1)\, y + c_2 = 0. \qquad (8.23)$$

При $k \neq 1$ и $\sin \varphi = 0$ ($\cos \varphi = \pm 1$) система

$$(\pm k - 1)\, x + c_1 = 0,$$
$$(\pm k - 1)\, y + c_2 = 0$$

имеет единственное решение.

При $k \neq 1$ и $\sin \varphi \neq 0$ коэффициенты при x, y системы (8.23) не пропорциональны, поскольку из $(k \cos \varphi - 1) / k \sin \varphi = -k \sin \varphi / (k \cos \varphi - 1)$ следовало бы $(k \cos \varphi - 1)^2 = -k^2 \sin^2\varphi$, $k^2 - 2k \cos \varphi + 1 = 0$, $\cos \varphi = (k^2 + 1) / 2k$, $(k^2 + 1) / 2k \leq 1$, $k^2 - 2k + 1 \leq 0$, $(k - 1)^2 \leq 0$, т.е. $k = 1$. (Случай $k \cos \varphi - 1 = 0$ рассмотрите сами.)

Если же формулы подобия имеют вид

$$x' = k \cos \varphi \cdot x + k \sin \varphi \cdot y + c_1,$$
$$y' = k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y + c_2,$$

то вместо (8.23) получим систему

$$(k \cos \varphi - 1)\, x + k \sin \varphi \cdot y + c_1 = 0,$$
$$k \sin \varphi \cdot x - (k \cos \varphi + 1)\, y + c_2 = 0,$$

которая при $k \neq 1$ также имеет единственное решение. (Докажите это!)

Вопросы: 1) Является ли ограничение $k \neq 1$ существенным?

Указание. Случаю $k = 1$ посвящен раздел 4 этого параграфа.

2) Верно ли, что при подобии f направление (в широком смысле), ортогональное инвариантному, тоже инвариантно? Справедливо ли это для произвольных аффинных преобразований?

8.7.4. Движения плоскости

Определение 8.12. Пусть на евклидовой плоскости задана пара ортонормированных реперов $R = O\,\vec{i}\,\vec{j}$ и $R' = O'\,\vec{i}'\,\vec{j}'$. Аффинное преобразование $f = (R, R')$, определяемое этой парой реперов, называется *движением плоскости*.

Замечание. В геометрии используются физические термины (параллельный перенос или трансляция, поворот или вращение, симметрия или отражение), но нас интересует не сам процесс реального движения точек плоскости по каким-то траекториям, а лишь их исходное M и конечное M' положения (см. параграф 1, определение преобразования множества). Хотя привлечение наглядных образов вовсе не мешает, а скорее помогает изучению этой важной темы. Изложение теории геометрических преобразований плоскости (аффинных, преобразований подобия, движений) при помощи самой *удобной*, наиболее тесно связанной с тем или иным видом преобразований множества точек евклидовой плоскости пары реперов R, R', хотя их можно задавать любой парой соответствующих реперов $\tilde{R}, \tilde{R}'$, на наш взгляд придает изложению наглядный характер и способствует лучшему усвоению материала.

Так как движение – это подобие с коэффициентом $k = 1$, то *при движении сохраняется расстояние между точками* (*характеристическое свойство движений*!), т.е. всегда $A'B' = AB$. Любой вектор при этом, естественно, переходит в вектор той же длины, т.е. всегда $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$. Движения обладают всеми свойствами аффинных преобразований (см. раздел 1 параграфа 7) и преобразований подобия (раздел 3 этого параграфа).

В частности, *движение можно задавать любой парой соответствующих реперов* $\tilde{R}$, $\tilde{R}'$.

Вопросы: 1) Как устроены соответствующие реперы $\tilde{R} = (\tilde{O}, \tilde{A}, \tilde{B})$ и $\tilde{R}' = (\tilde{O}', \tilde{A}', \tilde{B}')$?

2) Выше было доказано (задача 8.50), что любое преобразование подобия f с коэффициентом k можно разложить в композицию гомотетии с положительным k (или отрицательным $-k$) коэффициентом с центром в произвольно заданной точке A и некоторого движения f^*, а также, что при $k \neq 1$ преобразование подобия f имеет единственную инвариантную точку (задача 8.51). Что можно утверждать о движении f^*, если центром гомотетии является инвариантная точка преобразования f?

Докажите самостоятельно, по аналогии с соответствующим материалом раздела 3 параграфа 7, что все движения плоскости образуют группу. Эта группа будет подгруппой группы всех преобразований подобия плоскости.

Вопрос. Сколько существует движений плоскости, переводящих: *a*) отрезок AB в равный ему по длине отрезок CD; *b*) луч – в луч; *c*) разносторонний треугольник ABC – в равный ему треугольник KLM; *d*) квадрат $ABCD$ – в равный ему квадрат $KLMN$; *e*) прямоугольник $ABCD$, где $AB \neq CD$ – в равный ему прямоугольник $KLMN$; *f*) равнобедренный, но не равносторонний треугольник ABC – в равный ему треугольник KLM; *g*) правильный треугольник ABC – в равный ему треугольник KLM; *h*) ромб $ABCD$ без прямых углов – в равный ему ромб $KLMN$; *i*) окружность – в окружность того же радиуса; *j*) окружность с отмеченной точкой M – в окружность того же радиуса с отмеченной точкой M', где M' – образ точки M?

Задача 8.52. Доказать, что множество всех движений плоскости, переводящих данную фигуру Φ в себя, образует группу. Эту группу называют *группой симметрий фигуры* Φ.

Замечание. В том случае, когда эта группа состоит из одного тождественного преобразования id, говорят, что фигура Φ не имеет симметрий.

Задача 8.53. Найдите все симметрии, т.е. движения, оставляющие геометрическую фигуру Φ *инвариантной*: *a*) отрезка; *b*) равнобедренного, но не равностороннего, треугольника; *c*) правильного треугольника; *d*) параллелограмма *ABCD* с $AB \neq BC$ и без прямых углов; *e*) ромба без прямых углов; *f*) прямоугольника, у которого диагонали не взаимно перпендикулярны; *g*) квадрата; *h*) правильного *n*-угольника; *i*) окружности; *j*) пары взаимно перпендикулярных прямых; *k*) пары пересекающихся, но не взаимно перпендикулярных прямых; *l*) пары параллельных прямых; *m*) трех параллельных прямых, из которых одна является осью симметрии двух других; *n*) трех параллельных прямых, ни одна из которых не является осью симметрии двух других; *o*) прямой; *p*) луча; *r*) угла.

Указание. Ознакомьтесь предварительно с теоремой о классификации движений плоскости.

Из школьного курса геометрии нам известны такие движения плоскости как параллельный перенос (трансляция) $T_{\vec{a}}$ на вектор $\vec{a}$, поворот (ротация) R_C^{φ} с центром *C* на ориентированный угол φ, симметрия S_d относительно прямой *d*:

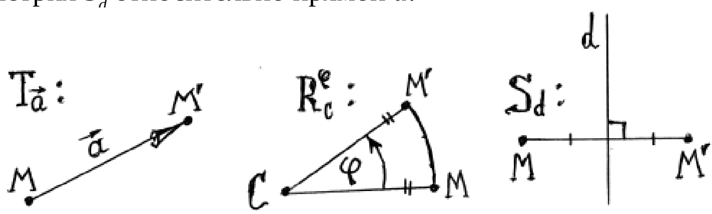


Рис. 8.57

При этом параллельный перенос на нулевой вектор и поворот плоскости на нулевой угол (с центром в любой точке *C*) – это *id*, т.е. тождественное преобразование плоскости; а поворот плоскости на угол 180° с центром в точке *C* – это центральная симметрия Z_C, которая является, таким образом, частным случаем поворота, но обладает по сравнению со всеми остальными поворотами плоскости целым рядом дополнительных свойств.

Напомним основные свойства этих движений:

1) У всех параллельных переносов, за исключением переноса на нулевой вектор, т.е. тождественного преобразования плоскости: нет инвариантных точек; любой вектор $\overrightarrow{MM'}$, где $M' = T_{\vec{a}}(M)$, равен вектору переноса $\vec{a}$; любое направление инвариантно; одно из направлений, а именно – направление вектора переноса $\vec{a}$, цели-

ком состоит из инвариантных прямых; любая прямая *d* другого направления переходит в прямую *d'*, которая параллельна *d* (в узком смысле, т.е. в смысле классического определения параллельных прямых по Евклиду).

2) У всех поворотов плоскости R_C^φ с центром в точке *C* на угол φ, где $-180° < \varphi \le 180°$, за исключением поворотов на нулевой и развернутый углы: единственная инвариантная точка – центр поворота *C*, нет инвариантных направлений (и тем более инвариантных прямых), все окружности с центром *C* инвариантны; все углы *MCM'*, где *M'* – образ точки $M \neq C$ при повороте R_C^φ, равны ориентированному углу φ (при положительном φ поворот «осуществляется» против часовой стрелки, при отрицательном – по часовой).

При $\varphi = \pi$ поворот оказывается гомотетией с центром *C* и коэффициентом $m = -1$ или центральной симметрией Z_C. Поэтому (см. свойства гомотетии в разделе 1 параграфа 7) все прямые, проходящие через точку *C*, будут инвариантными прямыми, а, значит, любое направление в широком смысле тоже будет инвариантным.

3) У всех осевых симметрий S_d: имеется прямая инвариантных точек – ось симметрии *d*; для любой другой точки *M* ось *d* служат серединным перпендикуляром отрезка *MM'*, где *M'* – образ точки *M* при осевой симметрии S_d; инвариантными прямыми будет сама ось *d*, все точки которой инвариантны, а также все прямые перпендикулярного ей направления; направление оси симметрии *d* и ему перпендикулярное инвариантны.

Каждое из рассмотренных движений плоскости можно задать парой ортонормированных реперов $R = O\vec{i}\vec{j}$ и $R' = O'\vec{i}'\vec{j}'$ (см. рис. 8.58):

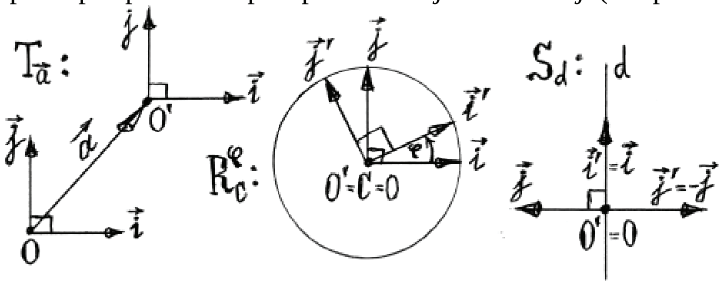


Рис. 8.58

Вопрос. Какие из формул

$x' = x, \quad x' = x + a_1, \quad x' = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y, \quad x' = x + a (a \neq 0),$

$y' = -y; \quad y' = y + a_2; \quad y' = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y; \quad y' = -y;$

записанных в ортонормированном репере $R = O\ \vec{i}\ \vec{j}$ (см. рис. 8.58!), являются формулами параллельного переноса, поворота, осевой симметрии, а какие оказываются «лишними»?

Можно понять, что «лишними» оказались формулы композиции осевой симметрии S_d (ось симметрии d совмещена с осью абсцисс!) и параллельного переноса *вдоль оси d* на ненулевой вектор $\vec{a}$ $(a, 0)$, т.е. $S_d \circ T_{\vec{a}}$ $(\vec{a} \parallel d)$. В данном случае можно было, кстати, написать и $T_{\vec{a}} \circ S_d$ (почему?). Это движение не рассматривалось в школе, оно называется *скользящей симметрией*, обозначается $S_d^{\vec{a}}$ и обладает следующими свойствами:

4) У всех скользящих симметрий $S_d^{\vec{a}}$: нет инвариантных точек; два инвариантных направления – направление оси d и ему перпендикулярное; единственная инвариантная прямая – ось d; середины всех отрезков MM', где M' – образ точки M при скользящей симметрии $S_d^{\vec{a}}$, расположены на оси d.

Замечание. При изучении движений плоскости для лучшего понимания их свойств весьма полезно использовать наглядные образы, т.е. реальные физические движения: параллельный перенос, поворот, осевую симметрию, скользящую симметрию, но при этом не следует забывать, что в геометрии важны исходное M и конечное M' положения каждой точки, а не то, как точка М попала в точку М′.

Перечисленными четырьмя видами движений исчерпываются все движения евклидовой плоскости. Докажем это.

Теорема 8.4. (О классификации движений плоскости). Любое движение f евклидовой плоскости, отличное от тождественного преобразования id, является либо параллельным переносом на ненулевой вектор, либо поворотом на ненулевой угол, либо осевой, либо скользящей симметрией.

Замечание. Подобно тому, как число 1, не будучи ни простым, ни составным, не позволяет разбить все натуральные числа на два класса – простых и составных чисел, так и простейшее из преобразований плоскости – тождественное, мешает разбить все движения плоскости на четыре класса, ибо *id* может считаться и параллельным переносом на нулевой вектор, и поворотом на нулевой угол с центром в произвольной точке A.

Для доказательства теоремы воспользуемся формулами движения f, записанными в ортонормированном репере $R = O\vec{i}\,\vec{j}$. Последние получаются из формул преобразования подобия (8.22) при значении коэффициента подобия $k = 1$:

$$x' = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y + c_1, (|) \quad x' = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y + c_1, (||)$$
$$y' = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y + c_2; \quad y' = \sin\varphi \cdot x - \cos\varphi \cdot y + c_2. \quad (8.24)$$

Рассмотрим сначала формулы (|). При $\varphi = 0$ они дают нам

$$x' = x + c_1,$$
$$y' = y + c_2$$

формулы параллельного переноса на вектор $\vec{c}\,(c_1, c_2)$, так как $\overrightarrow{MM'}\,(x' - x, y' - y) = \vec{c}$.

Пусть $\varphi \neq 0$. Тогда движение (|) имеет единственную инвариантную точку A. Действительно, система $x' = x$, $y' = y$ для нахождения координат x, y инвариантных точек движения (|) приводится к виду

$$(\cos\varphi - 1)\,x - \sin\varphi \cdot y + c_1 = 0,$$
$$\sin\varphi \cdot x + (\cos\varphi - 1)\,y + c_2 = 0,$$

а коэффициенты при x, y в этих уравнениях не пропорциональны, ибо при $\varphi \neq 0$ $(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi \neq 0$.

При этом движении ортонормированный репер $\tilde{R} = A\vec{i}\,\vec{j}$ перейдет в ортонормированный репер $\tilde{R}' = A\vec{i}'\vec{j}'$

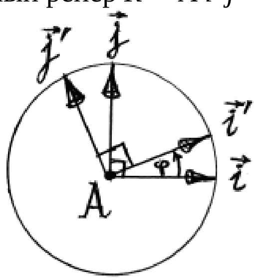


Рис. 8.59

а такие реперы $\tilde{R}$ и $\tilde{R}'$ определяют поворот R_A^{φ} (см. рис. 8.58).

Для движения f, формулы которого в ортонормированном репере репере $R = O\vec{i}\,\vec{j}$ имеют вид (||), докажем, что у него всегда имеется ровно два взаимно перпендикулярных инвариантных направления. Для доказательства воспользуемся формулами (8.20) преобразования векторов f_v

$$v_1' = \cos\varphi \cdot v_1 + \sin\varphi \cdot v_2,$$
$$v_2' = \sin\varphi \cdot v_1 - \cos\varphi \cdot v_2,$$

связанного с движением (||). Ищем ненулевые векторы $\vec{v}\,(v_1, v_2)$, которые при движении (||) инвариантны или переходят в векторы $-\vec{v}$ («опрокидываются»). Для этого решаем системы

$$v_1 = \cos\varphi \cdot v_1 + \sin\varphi \cdot v_2, \quad -v_1 = \cos\varphi \cdot v_1 + \sin\varphi \cdot v_2,$$
$$v_2 = \sin\varphi \cdot v_1 - \cos\varphi \cdot v_2; \quad -v_2 = \sin\varphi \cdot v_1 - \cos\varphi \cdot v_2.$$

Перепишем их в виде

$$(\cos\varphi - 1)\, v_1 + \sin\varphi \cdot v_2 = 0, \qquad (\cos\varphi + 1)\, v_1 + \sin\varphi \cdot v_2 = 0,$$
$$\sin\varphi \cdot v_1 - (\cos\varphi + 1)\, v_2 = 0; \qquad \sin\varphi \cdot v_1 - (\cos\varphi - 1)\, v_2 = 0.$$

При $\varphi = 0$ из первой системы ($0 = 0,\ -2v_2 = 0$) находим инвариантный орт $\vec{i}$, из второй ($2v_1 = 0,\ 0 = 0$) – «опрокидывающийся» орт $\vec{j}$.

При $\varphi \neq 0$ коэффициенты при v_1, v_2 в обеих системах пропорциональны, т.е.

$$\sin\varphi / (\cos\varphi - 1) = -(\cos\varphi + 1) / \sin\varphi \text{ и } (\cos\varphi + 1) / \sin\varphi =$$
$$= \sin\varphi / -(\cos\varphi - 1).$$

(Убедитесь самостоятельно в справедливости последнего утверждения!) Поэтому в обоих случаях существуют ненулевые решения v_1, v_2.

Вопрос. Почему решения этих двух систем будут взаимно перпендикулярными?

А теперь введем вспомогательный ортонормированный репер $\tilde{R} = O\,\vec{i}'\,\vec{j}'$, где $\vec{i}'$ – инвариантный, а $\vec{j}'$ – «опрокидывающийся» орт движения (||). В этом репере формулы движения f примут более простой вид

$$\tilde{x}' = \tilde{x} \qquad + c_1,$$

$$\tilde{y}' = \qquad -\tilde{y} + c_2, \tag{8.25}$$

так как $(\vec{i}')' = \vec{i}'(1, 0)$, $(\vec{j}')' = -\vec{j}'(0, -1)$ в базисе $\vec{i}', \vec{j}'$, а $O'\,(c_1, c_2)$ в репере $\tilde{R} = O\,\vec{i}'\,\vec{j}'$. Движение (||), которое теперь задано формулами (8.25), имеет инвариантные точки *iff* совместна система

$$\tilde{x} = \tilde{x} \qquad + c_1,$$
$$\tilde{y} = \quad -\tilde{y} + c_2,$$

iff $c_1 = 0$. Инвариантных точек у движения в этом случае будет целая прямая d с уравнением $\tilde{y} = ½\, c_2$. Если ввести еще один вспомогательный ортонормированный репер $\overline{R} = B\,\vec{i}\,'\,\vec{j}\,'$, связав его с прямой инвариантных точек d:

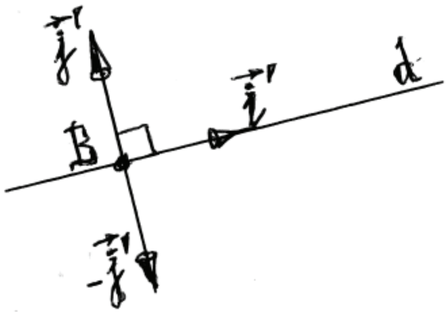


Рис. 8.60

то образом репера $\overline{R} = B\,\vec{i}\,'\,\vec{j}\,'$ будет репер $\overline{R}' = B\,\vec{i}\,' - \vec{j}\,'$. Пара таких ортонормированных реперов $\overline{R}$, $\overline{R}'$ определяет осевую симметрию S_d (см. рис. 8.58).

При $c_1 \neq 0$ у движения (8.25) нет инвариантных точек. Покажем, что в этом случае движение (8.25) имеет ровно одну инвариантную прямую m. Направление инвариантной прямой задается одним из базисных векторов $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ (почему?), т.е. инвариантную прямую m следует искать среди прямых $\tilde{x} = c$ или прямых $\tilde{y} = c$. Прямая с уравнением $\tilde{x} = c$ инвариантна при движении (8.25) *iff* ее прообраз $\tilde{x}' = c$, т.е. прямая $\tilde{x} + c_1 = c$, совпадает с ней *iff* $c_1 = 0$, но у нас $c_1 \neq 0$.

Прямая m с уравнением $\tilde{y} = c$ инвариантна при движении (8.25) *iff* ее прообраз $\tilde{y}' = c$, т.е. прямая $-\tilde{y} + c_2 = c$, совпадает с ней *iff* $c_2 - c = c$ *iff* $c = ½\, c_2$. Таким образом, при $c_1 \neq 0$ прямая m с уравнением $\tilde{y} = ½\, c_2$ будет единственной инвариантной прямой движения (8.25). Вновь воспользуемся еще одним вспомогательным ортонормированным репером $\overline{\overline{R}} = D\,\vec{i}\,'\,\vec{j}\,'$, который свяжем с инвариантной прямой m:

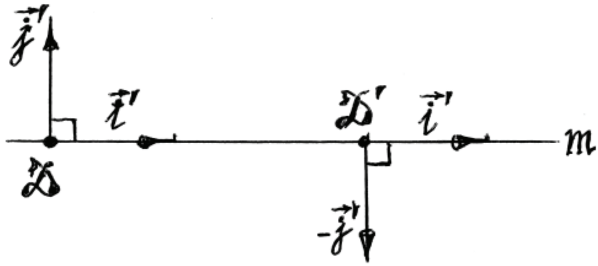


Рис. 8.61

Находим его образ $\bar{\bar{\mathcal{R}}}' = D'\,\vec{i}'\,-\vec{j}'$, где D' – некоторая точка инвариантной прямой m, отличная от точки D, поскольку при $c_1 \neq 0$ у движения (8.25) нет инвариантных точек. Пара ортонормированных реперов $\bar{\bar{\mathcal{R}}}$ и $\bar{\bar{\mathcal{R}}}'$ определяет композицию осевой симметрии S_m и параллельного переноса на ненулевой вектор $\overrightarrow{DD'}$ вдоль оси m, т.е. движение f в данном случае будет скользящей симметрией. Теорема о том, что на плоскости существует ровно четыре вида движений: параллельный перенос, поворот, осевая и скользящая симметрия, доказана.

Задача 8.54. Известно, что любое подобие f с коэффициентом $k \neq 1$, т.е. отличное от движения, имеет единственную инвариантное точку (задача 8.51), а также что подобие f можно представить в виде композиции гомотетии с центром в произвольной точке A и коэффициентом k (или $-k$) и некоторого движения f^* (задача 8.50). Что можно сказать нового о движении f^*, если в качестве центра гомотетии выбрана инвариантная точка A подобия f, – с учетом доказанной теоремы о классификации движений плоскости? (См. этот же вопрос в самом начале раздела 4 параграфа 7.)

Вопросы: 1) Существует ли подобие, имеющее: *a*) две инвариантные точки; *b*) ровно две инвариантные точки; *c*) три инвариантные прямые, содержащие стороны некоторого треугольника; *d*) три инвариантные прямые, две из которых параллельны, а третья является секущей?

2) Что можно сказать о движении f: *a*) имеющем две инвариантные точки; *b*) имеющем одну инвариантную точку; *c*) имеющем ровно одну инвариантное точку; *d*) не имеющем инвариантных

точек; *e*) не имеющем инвариантных прямых; *f*) имеющем две инвариантные параллельные прямые; *g*) имеющем две инвариантные пересекающиеся прямые; *h*) имеющем три инвариантные прямые, изображенные на следующих рисунках?

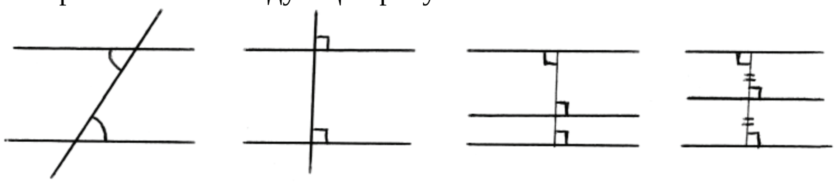


Рис. 8.62

3) Сколько инвариантных направлений (в широком смысле) может иметь движение плоскости?

Как в ортонормированном репере $R = O\vec{i}\,\vec{j}$ записываются формулы параллельного переноса $T_{\vec{a}}$ на вектор $\vec{a}\,(a_1, a_2)$; поворота R_A^{φ} с центром в точке $A\,(a_1, a_2)$ на угол φ (центральной симметрии Z_A с центром $A\,(a_1, a_2)$); осевой симметрии с осью d: $A x + B y + C = 0$; скользящей симметрии $S_d^{\vec{a}}$ с осью d: $A x + B y + C = 0$ и вектором $\vec{a}\,(a_1, a_2) \neq \vec{0}$, который параллелен оси d ($A a_1 + B a_2$ должно быть равно нулю, так как скалярное произведение вектора нормали $\vec{n}\,(A, B)$ прямой d и ее направляющего вектора $\vec{a}\,(a_1, a_2)$ равно нулю)?

Мы приведем лишь готовые ответы. Попробуйте доказать, что указанные формулы действительно являются формулами этих движений. Для этого в случае 1) найдите координаты вектора $\overrightarrow{MM'}$; в случаях 2) и 3) сначала найдите координаты векторов $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ и убедитесь, что эти векторы являются взаимно перпендикулярными ортами, т.е. что формулы 2) и 3) являются формулами движения, а затем найдите их инвариантные точки; в последнем случае следует увидеть, что формулы 4) – это формулы композиции движений, заданных формулами 3) и 1).

1) $T_{\vec{a}}$: $x' = x + a_1,\quad y' = y + a_2;$ 2) R_A^{φ}: $x' = \cos\varphi\cdot(x - a_1) - \sin\varphi\cdot(y - a_2) + a_1,\quad y' = \sin\varphi\cdot(x - a_1) + \cos\varphi\cdot(y - a_2) + a_2;$

3) S_d: $x' = x - (A x + B y + C)2A/(A^2 + B^2),$
$y' = y - (A x + B y + C)2B/(A^2 + B^2);$

4) $S_d^{\vec a}$: $x' = x - (Ax + By + C)2A/(A^2+B^2)+a_1$,
$y' = y - (Ax + By + C)2B/(A^2+B^2)+a_2$.

Вопрос. Как записать формулы композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ преобразований f и g плоскости, которые заданы своими формулами? Например, пусть f – параллельный перенос на вектор $\vec a$ (1, 3), а g – параллельный перенос на вектор $\vec b$ (4, 5). Их формулы в ортонормированном репере $R = O\vec i\,\vec j$ имеют вид

$$f:\ \begin{cases} x' = x + 1,\\ y' = y + 3;\end{cases} \qquad g:\ \begin{cases} x' = x + 4,\\ y' = y + 5.\end{cases}$$

Пусть точка M (x, y) при f перейдет в M^* (x^*, y^*), *а* точка M^* при g перейдет в M' (x', y'):

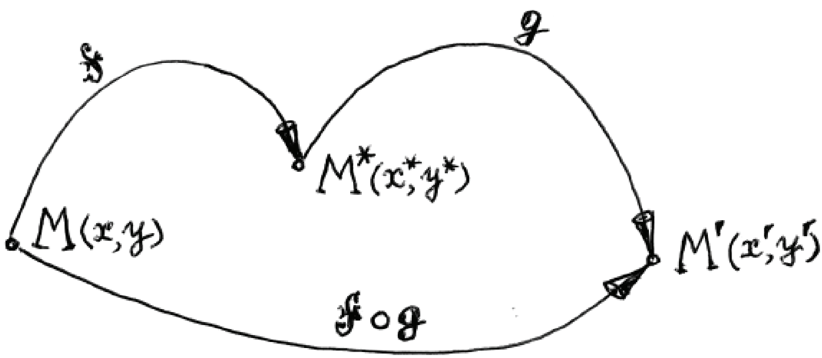


Рис. 8.63

Тогда

$$f:\ \begin{cases} x^* = x + 1,\\ y^* = y + 3;\end{cases} \qquad g:\ \begin{cases} x' = x^* + 4,\\ y' = y^* + 5.\end{cases}$$

Надо выразить координаты x', y' точки M' через координаты x, y точки M. Получим

$$f \circ g:\ \begin{cases} x' = (x + 1) + 4,\\ y' = (y + 3) + 5;\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = x + 5,\\ y' = y + 8.\end{cases}$$

Формулы композиции $g \circ f$ найдите самостоятельно. Сравните и объясните полученный результат. Можно понять, что всегда $T_{\vec a} \circ T_{\vec b} = T_{\vec b} \circ T_{\vec a}$, т.е. композиция параллельных переносов перестановочна или коммутативна.

А теперь найдем композицию двух осевых симметрий S_m и S_n с параллельными осями m: $x = 1$ и n: $x = 2$. Система координат – прямоугольная декартова.

Пользуясь приведенными выше формулами осевой симметрии 3) в ортонормированном репере, запишем уравнения обеих симметрий:

$$S_m:\ \begin{array}{ll} x' = x - (x - 1)\, 2 \times 1 / (1^2 + 0^2), & \text{или} \quad x' = -x + 2, \\ y' = y - (x - 1)\, 2 \times 0 / (1^2 + 0^2); & \qquad\quad y' = y; \end{array}$$

$$S_n:\ \begin{array}{ll} x' = x - (x - 2)\, 2 \times 1 / (1^2 + 0^2), & \text{или} \quad x' = -x + 4, \\ y' = y - (x - 2)\, 2 \times 0 / (1^2 + 0^2); & \qquad\quad y' = y. \end{array}$$

Перепишем эти формулы в удобном для нахождения формул композиции S_m o S_n виде

$$S_m:\ \begin{array}{l} x^* = -x + 2, \\ y^* = y; \end{array} \quad S_n:\ \begin{array}{l} x' = -x^* + 4, \\ y' = y^*. \end{array}$$

Тогда

$$S_m \circ S_n:\ \begin{array}{ll} x' = -(-x + 2) + 4, & \text{или} \quad x' = x + 2, \\ y' = y; & \qquad\quad y' = y. \end{array}$$

Полученные нами формулы являются формулами параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ (2, 0).

Для того, чтобы получить уравнения композиции $S_n \circ S_m$ ($S_n \circ S_m$ = ? (равно ли?) $S_m \circ S_n$), перепишем уравнения осевых симметрий S_n и S_m в виде

$$S_n:\ \begin{array}{l} x^* = -x + 4, \\ y^* = y; \end{array} \qquad S_m:\ \begin{array}{l} x' = -x^* + 2, \\ y' = y^*. \end{array}$$

Тогда

$$S_n \circ S_m:\ \begin{array}{ll} x' = -(-x + 4) + 2, & \text{или} \quad x' = x - 2, \\ y' = y; & \qquad\quad y' = y. \end{array}$$

На этот раз мы получили формулы параллельного переноса на вектор $-\vec{a}$ ($-$2, 0). Попробуйте объяснить полученный результат при помощи чертежа и получить наглядное подтверждение тому, что $S_n \circ S_m \neq S_m \circ S_n$.

Вопросы. 1) Коммутативна ли композиция: *a*) движений; *b*) параллельных переносов; *c*) поворотов с фиксированным центром?

2) Образуют ли группу: *a*) все параллельные переносы плоскости; *b*) все параллельные переносы в одном (в широком смысле)

направлении; *c*) все параллельные переносы на векторы вида $n \cdot \vec{a}$, где $\vec{a}$ – фиксированный ненулевой вектор, а $n \in N$ ($n \in N_0$, $n \in Z$, $n \in Q$); *d*) все параллельные переносы на векторы вида $m\,\vec{i} + n\,\vec{j}$, где числа m и n – оба целые (либо оба четные, оба рациональные, оба иррациональные)? Будут ли эти группы трансляций абелевыми или коммутативными?

Напомним, что N, N_0, Z, Q – это, соответственно, множества натуральных (лат. *Natura*), целых неотрицательных (N с нулем!), целых (нем. *Zahl*) и рациональных (лат. *Quota*) чисел;

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q.$$

3) Образуют ли группу: *a*) все повороты с фиксированным центром A; *b*) все повороты с фиксированным центром A и углами поворота вида $n \times 30^\circ$, где число n – целое (рациональное)? Будут ли эти группы поворотов абелевыми?

Задача 8.55. Найти наименьшую группу движений, которая содержала бы: *a*) параллельный перенос на заданный ненулевой вектор $\vec{a}$; *b*) поворот с центром в точке A на угол 45°; *c*) центральную симметрию Z_A; *d*) осевую симметрию S_d; *e*)* два данных параллельных переноса $T_{\vec{a}}$ и $T_{\vec{b}}$, где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

Напомним, что *симметрией геометрической фигуры Ф* (*Ф* – любое множество точек плоскости) называется любое движение плоскости, при котором эта фигура переходит в себя, а также что все симметрии геометрической фигуры *Ф* образуют группу – так называемую *группу симметрий геометрической фигуры Ф*.

Прямая *d* называется *осью симметрии фигуры Ф*, если при осевой симметрии S_d фигура *Ф* переходит в себя («остается на месте», инвариантна, т.е. не изменяется).

Точка *A* называется *центром вращения* (*поворота*) *порядка n фигуры Ф*, если при повороте вокруг точки *A* на угол 360° / *n* фигура *Ф* переходит в себя. Здесь *n* – натуральное число, которое больше 1.

Элементами симметрии геометрической фигуры Ф называются ее оси симметрии, центры симметрии, центры вращения порядка *n* ($n > 1$) и т.д., т.е. элементы тех движений, при которых эта фигура переходит в себя.

Примеры:

1) Разносторонний треугольник не имеет элементов симметрии, так как инвариантен *только* при одном единственном движении плоскости – *id*, а в этом случае считается, что геометрическая фигура не обладает симметриями.
2) Равнобедренный, но не равносторонний треугольник, имеет одну ось симметрии.
3) Правильный треугольник имеет три оси симметрии и центр вращения третьего порядка.
4) Параллелограмм, который не является ни ромбом, ни прямоугольником, имеет только центр симметрии (это центр вращения 2-го порядка).

Задача 8.56. Найдите элементы симметрии: *a*) ромба, не являющегося квадратом; *b*) прямоугольника, не являющегося ромбом; *c*) квадрата; *d*) правильного шестиугольника; *e*) отрезка; *f*) луча; *g*) пары параллельных прямых; *h*) пары пересекающихся, но не перпендикулярных прямых; *i*) пары взаимно перпендикулярных прямых; *j*) равнобедренной трапеции; *k*) окружности (круга); *l*) одноточечного множества; *m*) цифр почтового индекса; *n*) римских цифр I, V, X, *L*, *C*, *D*, *M*; *o*) букв *A*, *B*, *C*, ..., X, *Y*, *Z* латинского алфавита; *p*) букв *А*, *Б*, *В*, ..., *Э*, *Ю*, *Я* русского алфавита; *q*) пяти орнаментов (пятый придумайте сами!):

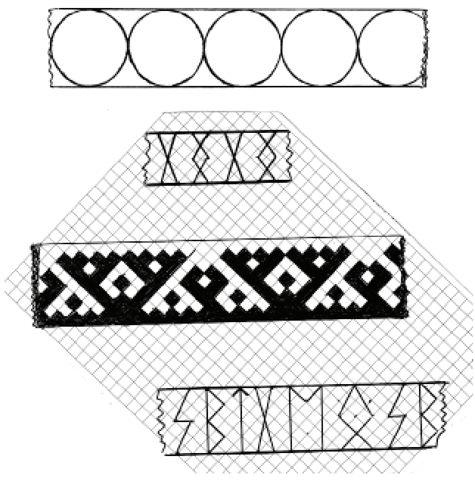


Рис. 8.64

Задача 8.57. Каким движением может быть композиция двух осевых симметрий? Решение. 1-й способ. Задачу с непараллельными осями можно решить с использованием формул осевых симметрий – подобно тому, как выше мы нашли композицию осевых симметрий с параллельными осями. Но даже при решении задачи в удобной системе координат (когда начало O совмещено с точкой пересечения осей этих симметрий, а одна из координатных осей – с осью первой симметрии) могут возникнуть определенные трудности.

2-й способ. Воспользуемся чертежом:

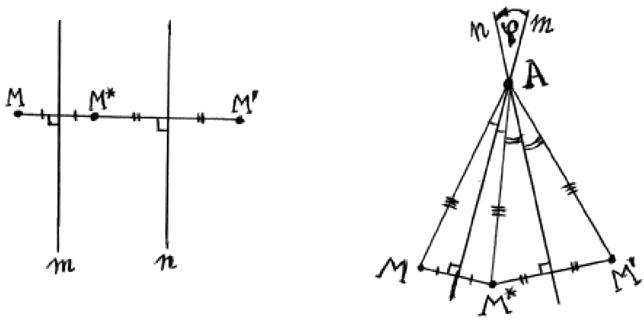


Рис. 8.65

В случае параллельных осей m и n мы видим, что $|\ MM'\ | = 2 \cdot \rho\ (m, n)$, $MM' \perp m\ (n)$, вектор $\overrightarrow{MM'}$ «направлен» от первой оси m ко второй n. Делаем вывод о том, что композиция $S_m\ o\ S_n$ в этом случае будет параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями m и n, а направление (у векторов оно в узком смысле!) перпендикулярно m (n) и «смотрит» от m к n: $S_m\ o\ S_n = \mathrm{T}_{\vec{a}}$. Ясно, что $S_n\ o\ S_m = \mathrm{T}_{-\vec{a}}$, поэтому $S_m\ o\ S_n \neq S_n\ o\ S_m$.

Если же оси m и n пересекаются и $A = m \cap n$, то из чертежа можно понять, что $AM = AM^* = AM'$, а угол MAM' равен удвоенному углу φ между прямыми m и n, т.е. в этом случае композиция $S_m\ o\ S_n$ будет поворотом плоскости с центром A на угол $2\ \varphi$, где φ – величина ориентированного угла между прямыми m и n: $S_m\ o\ S_n = R_A^{2\varphi}$. И здесь $S_m\ o\ S_n \neq S_n\ o\ S_m$, поскольку $S_n\ o\ S_m = R_A^{-2\varphi}$.

3-й способ. Воспользуемся заданием движений при помощи пары ортонормированных реперов. В случае параллельных осей m и n выберем в качестве исходного ортонормированный репер $R = O\vec{i}\,\vec{j}$, у которого начало O расположено на прямой m, а орт $\vec{i}$ является направляющим вектором этой прямой. Строим образ репера R при симметрии S_m – получим ортонормированный репер $R^* = O\vec{i} - \vec{j}$. Затем строим образ промежуточного репера R^* при симметрии S_n – получим ортонормированный репер $R' = O'\vec{i}\,\vec{j}$:

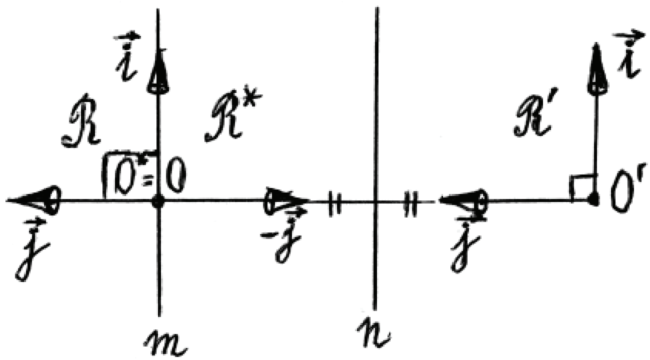


Рис. 8.66

Видим, что композиция $S_m \circ S_n$ переводит репер $R = O\vec{i}\,\vec{j}$ в репер $R' = O'\vec{i}\,\vec{j}$, т.е. является параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO'}$, равный описанному выше вектору $\vec{a}$.

Во втором случае начало ортонормированного репера R совместим с точкой пересечения прямых m и n, а орт $\vec{i}$ вновь направим по прямой m. В результате аналогичных построений получим ортонормированный репер $R' = O\vec{i}'\vec{j}'$ (см. рис. 8.67):

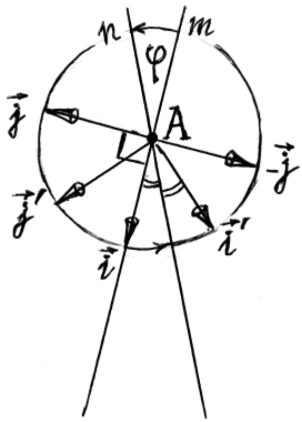


Рис. 8.67

Можно понять, что пара ортонормированных реперов R и R' определяет поворот вокруг точки A пересечения прямых m и n на двойной угол между этими прямыми.

В качестве следствия из разобранной задачи мы получаем практический способ разложения параллельных переносов и поворотов в композицию двух осевых симметрий (как в каждом случае следует выбирать оси этих симметрий?), а также следующую теорему.

Теорема 8.5. Любое движение плоскости может быть представлено в виде композиции не более трех осевых симметрий.

Задача 8.58. Найти композицию скользящих симметрий $S_m^{\vec{a}} \circ S_m^{\vec{b}}$ с одинаковыми осями.

Решение. В силу ассоциативности композиции преобразований, которая была доказана в первом параграфе,

$S_m^{\vec{a}} \circ S_m^{\vec{b}} = (T_{\vec{a}} \circ S_m) \circ (S_m \circ T_{\vec{b}}) = T_{\vec{a}} \circ (S_m \circ (S_m \circ T_{\vec{b}})) =$
$= T_{\vec{a}} \circ ((S_m \circ S_m) \circ T_{\vec{b}}) = T_{\vec{a}} \circ (id \circ T_{\vec{b}})) = T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$.

В частности, $(S_m^{\vec{a}})^2 = S_m^{\vec{a}} \circ S_m^{\vec{a}} = T_{2\vec{a}}$.

Задача 8.59. Найти композицию скользящих симметрий $S_m^{\vec{a}} \circ S_n^{\vec{b}}$ с параллельными осями m и n. Решение. $S_m^{\vec{a}} \circ S_n^{\vec{b}} = (T_{\vec{a}} \circ S_m) \circ (S_n \circ T_{\vec{b}}) = T_{\vec{a}} \circ (S_m \circ (S_n \circ T_{\vec{b}})) = T_{\vec{a}} \circ ((S_m \circ S_n) \circ T_{\vec{b}}) = T_{\vec{a}} \circ (T_{\vec{c}} \circ T_{\vec{b}}) =$
$= T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{c}+\vec{b}} = T_{\vec{k}}$, где $\vec{k} = \vec{a} + (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, а $\vec{c}$ –

вектор, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями *m* и *n*, который перпендикулярен им и направлен от первой оси *m* ко второй *n*:

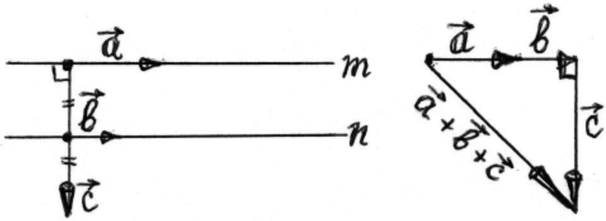


Рис. 8.68

При решении последних двух задач мы, помимо известного свойства ассоциативности композиции преобразований, пользовались результатами задачи 8.57 о композиции $S_m \circ S_n$, а также тем, что $S_m^{\vec{a}} = S_m \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}} \circ S_m$.

Задача 8.60. Дан квадрат *ABCD*. Найти композицию $Z_A \circ Z_B \circ$ $\circ Z_C \circ Z_D$.

Решение. В силу ассоциативности композиции преобразований мы можем написать

$Z_A \circ Z_B \circ Z_C \circ Z_D = (Z_A \circ Z_B) \circ (Z_C \circ Z_D)$. (Попробуйте доказать это самостоятельно!) Из

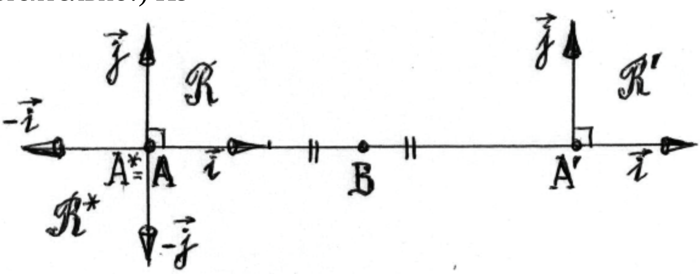


Рис. 8.69

видим, что композиция $Z_A \circ Z_B$ – это параллельный перенос на вектор $2\,\overrightarrow{AB}$. Поэтому ответом в нашей задаче будет композиция двух параллельных переносов на векторы $2\,\overrightarrow{AB}$ и $2\,\overrightarrow{CD}$ соответственно, т.е. параллельный перенос на вектор $2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{CD}$, который является параллельным переносом на нулевой вектор или тождественным преобразованием плоскости.

Замечание. Зная результат, можно предложить более простое решение этой задачи: убедитесь в том, что точки A, B, C – инвариантные точки композиции $Z_A \circ Z_B \circ Z_C \circ Z_D \stackrel{\text{def}}{=} ((Z_A \circ Z_B) \circ Z_C) \circ Z_D$ (*def* – сокр. от *definition*, определение; при отсутствии скобок действия выполняются по порядку, слева направо).

Попробуйте самостоятельно найти композиции $Z_A \circ Z_C \circ Z_B \circ Z_D$, $Z_A \circ Z_D \circ Z_C \circ Z_B$, $Z_A \circ Z_B \circ Z_D \circ Z_C$, $Z_A \circ Z_B \circ Z_A \circ Z_C \circ Z_A \circ Z_D$, $(Z_A)^4$, $(Z_A)^{33}$ и т.п.

Решите аналогичную задачу о композиции $Z_A \circ Z_B \circ Z_C \circ Z_D$ для: *a*) параллелограмма; *b*) трапеции; *c*) произвольного четырехугольника $ABCD$.

Задача 8.61. Докажите, что группа симметрий правильного n-угольника содержит $2n$ симметрий.

Указание. Свяжите с n-угольником удобный репер из трех соседних вершин.

Задача 8.62. Найдите все симметрии обычной синусоиды.

Вопросы: 1) Почему среди симметрий правильного n-угольника не может быть ни параллельного переноса на ненулевой вектор, ни скользящей симметрии?

2) Верно ли, что если группа симметрий геометрической фигуры Φ содержит параллельный перенос на ненулевой вектор или скользящую симметрию, то эта фигура не может быть ограниченной?

Задача 8.63. Где больше симметрий: у шахматной доски 8 х 8 или у маленькой шахматной досточки 2 х 2? Можно ли увеличить (уменьшить) число симметрий, если вместо обычного расположения на этих досках как-то иначе расположить 32 белые и 32 черные (соответственно две и две) клетки?

Указание. Свяжите с угловой клеткой доски определенного цвета удобный репер. Ее образом *может быть* только угловая клетка того же цвета!

Вопрос. Почему в последнем указании слова *может быть* выделены курсивом? В чем отличие *может быть* от *будет*?

Задача 8.64. Каким может быть число симметрий у поля 9 х 9 классического судоку: *a*) на котором не заполнена ни одна клетка;

b) на котором только в одну (две, три, ..., девять) клетку аккуратно вписана симметричная восьмерка 8?

Приведем примеры нескольких задач на построение, при решении которых целесообразно использовать подходящие движения или другие геометрические преобразования плоскости, которые рассматривались нами в параграфе 7.

Задача 8.65. В данный остроугольный треугольник ABC вписать квадрат $KLMN$ так, чтобы его сторона KL лежала на основании AB, а вершины M и N, соответственно, на боковых сторонах BC и CA.

Решение. *Анализ*. Если $KLMN$ – искомый квадрат, то при помощи гомотетии $H^k(A)$ с центром A и некоторым коэффициентом k, где $0 < k < 1$, этот квадрат перейдет в квадрат $K'L'M'N'$, сторона $K'L'$ которого будет лежать на основании AB данного треугольника, вершина N' – на стороне AC, и только одна вершина квадрата $K'L'M'N'$, а именно M', не будет находиться там, где ей положено быть по условию задачи. Мы временно отказываемся от этого требования, сохраняя все остальные, и этот тактический прием позволит нам решить задачу:

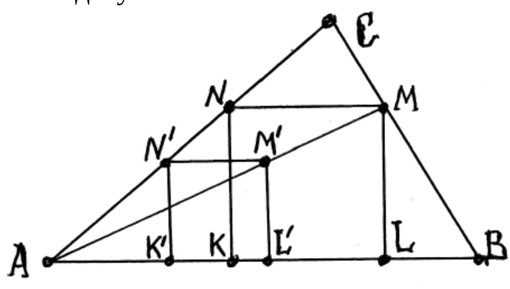


Рис. 8.70

Квадрат $K'L'M'N'$ легко может быть построен, а от него к искомому квадрату $KLMN$ поможет «вернуться» обратное преобразование – тоже гомотетия с тем же центром A, но с коэффициентом k^{-1}, а лучше сказать та, которая точку M' переводит в точку M пересечения стороны BC и луча AM'. В итоге точка М первой(!) займет свое место, а вслед за ней из точек K', L', N' будут получены точки K, L, N.

Остальные три этапа решения этой задачи на построение (построение, доказательство и исследование) завершите самостоятельно.

Задача 8.66. В данную окружность (O, R) вписать треугольник, подобный данному.

Указание. Опишите около данного треугольника окружность (O', r), а затем воспользуйтесь параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{O'O}$ и гомотетией $H^k(O)$ с центром O, коэффициент k которой равен отношению радиусов данной и вспомогательной окружностей, т.е. $k = R : r$. Будьте внимательны при проведении исследования в этой задаче! Вспомните, сколько подобий переводят одну окружность в другую.

Задача 8.67. Построить правильный треугольник, одна вершина которого расположена в данной точке A, вторая – на данной прямой l, третья – на данной окружности (O, R).

Решение. И в этой задаче мы ограничимся только анализом. Закончить решение задачи на построение предлагается самим.

Анализ. Если ABC – искомый правильный треугольник, то $B \in l$, а вершина $C \in$ окр.(O, R):

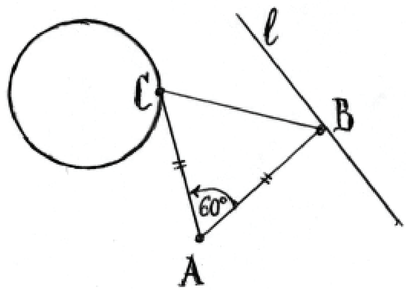


Рис. 8.71

При повороте $R_A^{60^\circ}$ с центром A на угол 60° точка B перейдет в точку C, лежащую на окружности (O, R). Так как $B \in l$, то точка $B' = C$ будет принадлежать пересечению окружности (O, R) и образа $l' = R_A^{60^\circ}(l)$ прямой l.

От точки C пересечения прямой l' и окружности (O, R) к точке B «возвращаемся» при помощи обратного движения, т.е. при помощи поворота $R_A^{-60^\circ}$ с тем же центром A, но на угол –60°.

Замечание. Надо строить и прямую $l' = R_A^{60°}(l)$, и прямую $l'' = R_A^{-60°}(l)$. Количество решений (правильных треугольников ABC) будет зависеть от того, сколько точек пересечения дадут окружность (O, R) и пара построенных прямых $l' \cup l''$ (от 0 до 4).

Задача 8.68. В острый угол ABC вписана окружность, касающаяся обеих сторон угла. Построить окружность, которая касается данной окружности и сторон угла.

Указание. Воспользуйтесь гомотетией с центром B и ее свойствами. Не ошибитесь и в этой задаче с определением количества решений!

Задача 8.69. Даны прямая d и точки A, B, лежащие в одной полуплоскости с границей d. На прямой d требуется найти точку C такую, чтобы сумма длин отрезков AC и BC была минимальной.

Решение. Вновь приводим только первый этап решения. *Анализ.* Пусть точка C – искомая. При осевой симметрии S_d с осью d точка B перейдет в точку B', при этом $CB' = CB$, и $AC + BC = AC + B'C$. Длина ломаной ACB' будет минимальной *iff* точка C будет точкой отрезка AB':

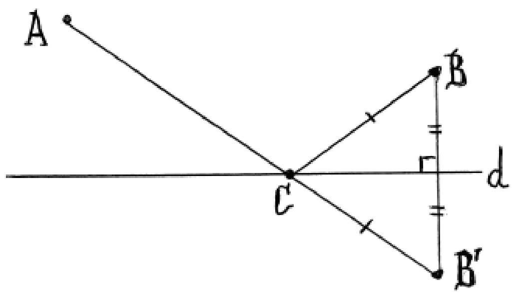


Рис. 8.72

Задача 8.70. Две параллельные прямые a и b являются берегами канала, A и B – населенные пункты, расположенные по разные стороны канала. Требуется построить мост A^*B^* так, чтобы он был перпендикулярен берегам канала, и при этом длина ломаной AA^*B^*B была минимальной.

Указание. Можно воспользоваться параллельным переносом $T_{\vec{n}}$ на вектор $\vec{n}$ (см. рис.):

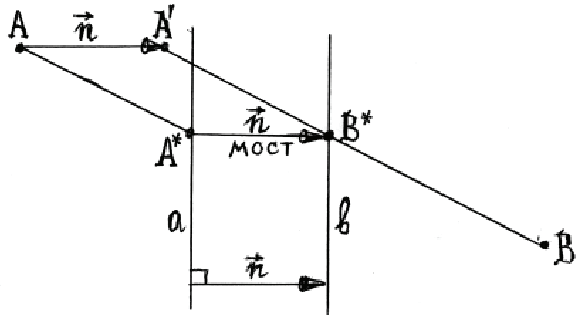


Рис. 8.73

Тогда $AA^* + B^*B = A'B$, где $A' = T_{\vec{n}}(A)$.

Задача 8.71. Восстановить квадрат *KLMN* по его центру *O* и двум точкам: точке *A*, которая лежала на стороне *KL*, и точке *B*, которая лежала на противоположной стороне квадрата *MN*. По условию точка O не лежит на прямой *AB*.

Указание. Можно воспользоваться тем, что центр *O* квадрата является центром вращения 4-го порядка:

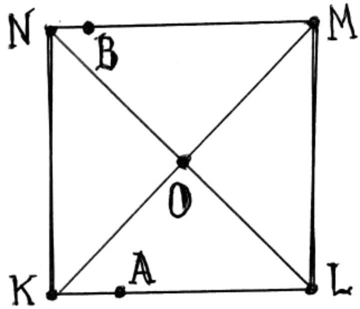


Рис. 8.74

Задача 8.72. Восстановить правильный шестиугольник *ABCDEF* по его центру *O* и двум точкам *K*, *L* стороны *AB*.

Задача 8.73. Построить правильный *n*-угольник, центр которого находится в данной точке *O*, а вершины располагаются, соответственно, на *n* данных попарно различных окружностях (окружностях и прямых; прямых). Число *n* = 3, 4, 5*, 6, 10*.

Указание. Центр правильного n-угольника является центром вращения порядка n, поэтому нужно использовать повороты плоскости с центром O на углы 120°, 90°, 72°, 60°, 36°. Для решения задач со звездочкой предварительно разберите задачу о построении правильного 10-угольника.

Задача 8.74. Построить равнобедренную трапецию $ABCD$ по середине M верхнего основания CD, центру O описанной окружности и точкам K, L боковых сторон BC и DA.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 8

1. *Чекин А.Л.* и др. Математика и информатика. Ч. 1. М.: МПГУ, 2019.
2. *Базылев В.Т.* и др. Геометрия. Ч. 1 и 2. М.: Просвещение, 1974 и 1975.

ГЛАВА 9.
ВЕЛИЧИНЫ

9.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 9.1. *Величиной* принято называть какое-либо свойство объектов (предметов или явлений), которое можно в каком-то смысле точно измерить.

Например, скорость движения предмета в пространстве (скажем, скорость самолета) – это величина.

Определение 9.2. Если две величины характеризуют одно и то же свойство объектов, то говорят, что это *величины одного рода* (*или однородные величины*).

Например: высота дерева, глубина океана, ширина плеч и длина дороги – это величины одного рода.

Определение 9.3. Величину называют *скалярной*, если результат ее измерения можно выразить одним вещественным числом.

Скорость выработки паутины пауком – это скалярная величина. Вообще любая скорость, понимаемая как производительность, является скалярной величиной.

Замечание. Напротив, скорость самолета **не является** скалярной величиной. Для точной характеристики скорости самолета мы должны знать направление, в котором движется самолет, а это направление задано своими тремя проекциями на три координатные оси. Поэтому для задания скорости самолета нужны три числа, а не одно.

Определение 9.4. Скалярную величину называют *положительной,* если результат ее измерения может быть задан положительным вещественным числом.

Всякая скорость, понимаемая как производительность, является положительной скалярной величиной

Плотность вещества (например, плотность воды при комнатной температуре) – это также положительная скалярная величина.

Определение 9.5. Если для положительных скалярных величин из некоторой совокупности G однородных величин имеет смысл операция сложения, то такие величины называют *аддитивными*.

Как мы увидим ниже, длина – типичная положительная скалярная аддитивная величина. Скорость, понимаемая как производительность, также является положительной скалярной аддитивной величиной.

В то же время плотность вещества аддитивной величиной **не является** (плотности веществ не складываются при смешении веществ).

9.2. АКСИОМЫ А.Н. КОЛМОГОРОВА

Известный математик и педагог А.Н. Колмогоров ввел в рассмотрение систему из 10 аксиом, характеризующих абстрактную систему G однородных положительных скалярных аддитивных величин. При этом он взял за основу привычные («очевидные») свойства таких величин, как длина, масса, время, площадь, объем, производительность, стоимость.

Мы приведем здесь не весь список аксиом Колмогорова, а только важнейшие из этих аксиом, допускающие сравнительно легкую проверку на практике в случае конкретных величин. (Полный список колмогоровских аксиом можно найти, например, в [1].)

Аксиома 1. *Для любых двух величин a и b из системы G определена* (*и притом единственным образом*) *их сумма $a + b$.*

Аксиома 2. *Операция сложения в G коммутативна и ассоциативна.*

Аксиома 3. *Для любых двух величин a и b из системы G верно одно и только одно из соотношений:*

$$a < b,\ a = b,\ b < a. \qquad (9.1)$$

Здесь отношение «меньше» вводится с помощью следующего определения:

$a < b$ тогда и только тогда, когда существует c из системы G такое, что $a + c = b$.

Аксиома 4. *Для любой величины a из системы G и любого натурального n найдется такая величина b из системы G, что*

$$nb = a. \tag{9.2}$$

Здесь через nb обозначена сумма n слагаемых:

$$nb = b + b + \ldots + b.$$

Опираясь на эти аксиомы и еще на ряд более трудных математических аксиом, Колмогоров установил следующий важный результат.

Теорема Колмогорова 9.1. В системе G, подчиняющейся аксиомам Колмогорова, определено умножение величин на положительные вещественные числа. При этом любые две величины a и b из G связаны между собой соотношением

$$a = wb, \tag{9.3}$$

где w – некоторое положительное вещественное число.

Замечание. Введем в системе G в качестве единицы величины (или, как иногда говорят, единицы измерения величины) некоторую величину e.

Тогда для произвольно взятой величины a из G будем (в силу теоремы 9.1) иметь:

$$a = m_e(a)\,e. \tag{9.4}$$

В правой части равенства (9.4) стоит произведение вещественного числа $m_e(a)$ (называемого *мерой величины a* при единице измерения e) на величину е.

Замечание. Пусть a и b – любые две величины из G. Тогда нетрудно показать, что

$$m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b). \tag{9.5}$$

Это свойство называется *аддитивностью меры.*

Замечание. Пусть a, e, f – произвольно взятые величины из G. Тогда нетрудно вывести формулу:

$$m_f(a) = m_e(a)m_f(e). \tag{9.6}$$

Это свойство называется *мультипликативностью меры.*

9.3. ДЛИНА

Вначале определим длину отрезка как класс отрезков, которые можно совместить с данным отрезком, перемещая их как твердые тела.

Теперь нам нужно определить сложение длин как сложение классов. (Здесь наблюдается значительное сходство с определением сложения натуральных чисел.) Итак, возьмем два произвольных не налегающих друг на друга отрезка из двух не обязательно различных классов (обозначим эти отрезки a и b) и приставим отрезок b к отрезку a, образовав новый отрезок $\boldsymbol{c}$.

Запишем это в виде

$$c = a \oplus b.$$

Каждому из отрезков a, b, c отвечает его класс, который обозначим соответственно через

$$|a|,\ |b|,\ |c|.$$

Класс $|c|$ будем называть *суммой* классов $|a|$ и $|b|$ и обозначать это в виде:

$$|c| = |a| + |b|.$$

Очевидно, что класс $|c|$ не зависит от выбора конкретных отрезков из классов $|a|$ и $|b|$.

Таким образом, операция *сложения* наших классов определена корректно. Тем самым справедливость колмогоровской Аксиомы 1 установлена.

Замечание. Скажем, что отрезок $\boldsymbol{c}$ *разбит* на отрезки a_1 и b_1, если справедливо $c = a_1 \oplus b_1$, где a_1 и b_1 – части отрезка $\boldsymbol{c}$. Из данного выше определения сложения длин, очевидно, следует, что если отрезок c разбит на части двумя разными способами:

$$c = a_1 \oplus b_1,\ c = a_2 \oplus b_2,$$

то суммы длин соответствующих частей будут одинаковы:

$$|a_1| + |b_1| = |a_2| + |b_2|.$$

Это соображение мы не будем повторять в дальнейшем при определении сложения других величин.

Покажем теперь, что определенное выше сложение классов (т.е. сложение длин отрезков) коммутативно.

Проще всего это сделать так, как показано на рис. 9.1. Отрезок $a \oplus b$ поворачиваем на 180 градусов, не меняя его длины, в результате имеем

$$a \oplus b = b \oplus a, \tag{9.7}$$

откуда и следует коммутативность сложения соответствующих классов:

$$|a| + |b| = |b| + |a|. \qquad (9.8)$$

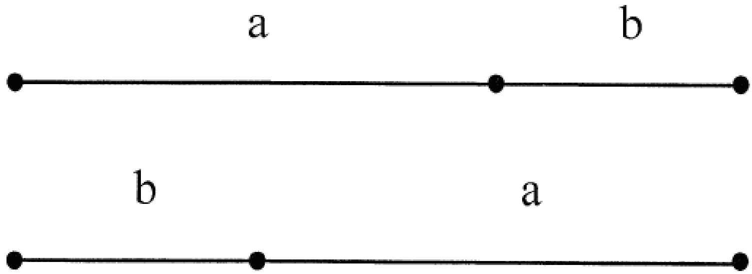


Рис. 9.1

Ассоциативность сложения длин отрезков геометрически устанавливается еще проще.

Действительно, геометрически очевидно, что для любых (не налегающих друг на друга) отрезков *a, b, c*

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c), \qquad (9.9)$$

откуда и следует ассоциативность сложения соответствующих классов (т.е. длин отрезков):

$$(|a| + |b|) + |c| = |a| + (|b| + |c|). \qquad (9.10)$$

Итак, справедливость Аксиомы 2 также установлена.

Замечание. Существует еще один способ доказательства коммутативности и ассоциативности сложения длин отрезков, который пригодится нам в дальнейшем в более сложной ситуации. Ограничимся новым доказательством коммутативности.

Будем для простоты считать, что отрезки a и b соизмеримы, т.е. существует отрезок e укладывающийся в точности n раз в отрезке a и в точности m раз в отрезке b (здесь n и m – любые натуральные числа). Мы будем обозначать это так:

$$a = ne, \ b = me. \qquad (9.11)$$

Тогда равенство (9.7) очевидным образом следует из (9.11) и коммутативности сложения натуральных чисел:

$$n + m = m + n.$$

Задача. Доказать, что диагональ квадрата не соизмерима с его стороной.

Замечание. Справедливость для длины отрезков приведенных выше колмогоровских Аксиом 3 и 4 будем считать геометрически очевидной; выполнение остальных колмогоровских аксиом примем без доказательства.

Замечание. Длину ломаной линии определяют как сумму длин составляющих ее отрезков. Длину кривой линии определяют с помощью предельного перехода, вписывая в нее ломаные, длины звеньев которых неограниченно уменьшаются.

Замечание. Метр как универсальная единица измерения длины был введен в 1791 году во время Французской революции. Было принято решение в качестве метра взять одну сорокамиллионную долю длины Парижского меридиана; был изготовлен из сплава платины и иридия соответствующий эталон. В настоящее время требования к точности измерений существенно возросли, и в качестве нового эталона длины используется расстояние, проходимое светом в вакууме за время, равное 1 / 299 792 458 доле секунды.

9.4. МАССА

Определим *массу* груза как класс грузов, растягивающих вертикально подвешенную идеальную пружину до одной и той же отметки (на одну и ту же длину).

Теперь нужно определить сумму масс как сумму классов. Делается это очевидным образом. Берутся два груза из классов M_1 и M_2 (классы эти могут совпадать), важно при этом, чтобы у грузов не было общих частей. Объединение взятых грузов естественным образом порождает новый класс M_3, который мы назовем суммой классов M_1 и M_2 :

$$M_3 = M_1 + M_2.$$

Коммутативность и ассоциативность сложения масс очевидным образом проверяется экспериментально (см. рис. 9.2 и 9.3).

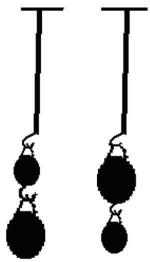


Рис. 9.2.

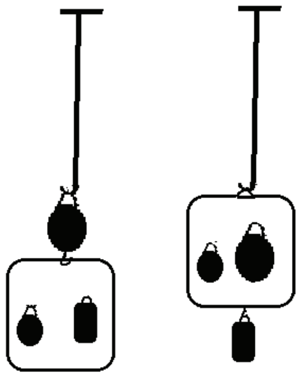


Рис. 9.3

Итак, справедливость колмогоровских Аксиом 1 и 2 для массы установлена. Остальные аксиомы принимаем без доказательства.

Замечание. В качестве универсальной единицы массы во время Французской революции была принята масса кубического дециметра воды при температуре 4 градуса по Цельсию и атмосферном давлении в 1 атмосферу. Тогда же был изготовлен соответствующий эталон из сплава платины и иридия. Этот эталон хранится во Франции (в городе Севр) под стеклянным колпаком.

9.5. ВРЕМЯ. ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКА ВРЕМЕНИ

Время, пожалуй, наиболее трудное для анализа понятие. Прежде всего, условимся, что *отрезок времени* – это совокупность всех мгновений между двумя различными мгновениями. (Таким образом, отрезок времени – это некий аналог геометрического понятия «отрезок».)

Теперь нас будет интересовать вопрос о том, когда двум временным отрезкам можно приписать одинаковую длительность. Непосредственно перемещать отрезки времени, с тем чтобы «приложить их друг к другу», мы не можем. Поэтому приходится идти, так сказать, «окольным путем».

В физике существует важное понятие идеальных часов [2].

Идеальные часы – это движущаяся система тел, удовлетворяющая двум условиям:

а) система не испытывает воздействий со стороны окружающего мира, т.е. является *изолированной;*

б) в некоторый момент времени система возвращается в состояние, в котором находилась в некоторый предшествующий момент времени.

В качестве модели таких часов можно использовать, например, горизонтально расположенный тяжелый диск, вращающийся без трения вокруг вертикальной оси.

Еще одна модель идеальных часов – маятник, качающийся без трения. (Конечно, полностью избавиться от трения в реальности мы не можем, так что речь идет о некоторой идеализации реальных физических процессов.)

Итак, у нас имеются две различные модели идеальных часов: диск и маятник. Существенно, что эти модели никак не связаны между собой – ни механически, ни каким-либо физическим законом. Тем удивительнее закономерность, которую мы будем наблюдать.

Эта закономерность заключается в следующем. Каждый раз, когда маятник совершит одно качание, диск (почему-то!) повернется на один и тот же угол (сделает одно и то же количество оборотов). Таким образом, наша пара независимых друг от друга идеальных часов показывает нам, что мы находимся в равномерно текущем потоке времени. Это значит, что если сегодня господин N успевает добраться из дома до работы, например, за 17 полных оборотов нашего идеального диска, то завтра он снова (при аналогичной работе транспорта) успеет добраться из дома до работы опять за 17 оборотов нашего диска.

Скажем теперь, что два отрезка времени имеют *одинаковую длительность*, если диск идеальных часов повернется в течение каждого из этих отрезков времени на один и тот же угол (сделает одно и то же число оборотов). Класс, состоящий из всех отрезков времени, имеющих одну и ту же длительность, назовем *длительностью* этих отрезков времени.

Наконец, нам осталось определить сложение длительностей отрезков времени.

Сделать это теперь легко.

Пусть T_1 – длительность отрезка времени, в течение которого наш идеальный диск успевает совершить *n* оборотов (*n* – любое положительное, не обязательно целое число), а T_2 – длительность отрезка времени, в течение которого наш идеальный диск успевает совершить *m* оборотов (*m* – любое положительное, не обязательно целое число). Тогда суммой $T_1 + T_2$ будем считать длительность отрезка времени, за который наш диск успевает совершить $n + m$ оборотов.

Коммутативность и ассоциативность сложения длительностей следует из коммутативности и ассоциативности сложения вещественных чисел. Итак, справедливость колмогоровских Аксиом 1 и 2 для длительностей отрезков времени установлена. Остальные колмогоровские аксиомы для длительности отрезков времени принимаем без доказательства.

Замечание. Вместо «*длительность отрезка времени*, за который происходит то-то и то-то» принято говорить просто «*время*, за которое происходит то-то и то-то».

Замечание. Как известно, время «всегда идет вперед». Это связано с физическим законом возрастания энтропии (возрастания беспорядка в необратимых процессах). Если мы посмотрим снятый на пленку фильм, в котором осколки, лежащие на полу, сами собираются в чашку и запрыгивают на стол – это будет означать, что фильм демонстрируется в обратном направлении, поскольку в природе такие процессы невозможны.

Замечание. Основная единица измерения времени – секунда, это $1 / 24 \cdot 60 \cdot 60$ доля средних солнечных суток.

Замечание. Длина, масса, время (точнее – длительность отрезка времени) – это величины, которые принято считать первичными, основными. Остальные величины, которые нам встретятся обычно называют вторичными (производными). Это связано с тем, что измерение вторичных величин может быть сведено к измерению первичных и к последующим вычислениям.

9.6. УГОЛ. ВЕЛИЧИНА УГЛА

Мы будем называть *углом* часть плоскости, содержащую хотя бы одну внутреннюю точку и ограниченную двумя лучами – *сторонами угла*, исходяшими из одной точки, называемой *вершиной угла*.

Угол называют *развернутым*, если его стороны образуют единую прямую.

Угол называют *полным*, если он содержит внутренние точки, а его стороны совпадают.

Таким образом, развернутый угол – это полуплоскость, а полный угол – вся плоскость целиком.

Будем говорить, что два угла *равны по величине*, если их можно совместить, перемещая, как твердые тела. Класс всех углов, равных по величине, будем называть *величиной угла* (точнее: величиной любого из углов, входящих в этот класс).

Если Φ – некоторый угол, его величину будем обозначать через $|\Phi|$.

Попробуем теперь определить сложение величин углов (т.е. сложение классов углов). Выберем из каждого класса соответственно по углу Φ_1 и Φ_2 и (перемещая их как твердые тела) постараемся разместить их на плоскости так, чтобы:

а) у Φ_1 и Φ_2 была общая вершина и одна общая сторона;

б) у пересечения Φ_1 и Φ_2 не было общих внутренних точек.

Если это удается сделать, то получившаяся фигура будет, очевидно, углом (так же, как Φ_1 и Φ_2), который мы обозначим через $\Phi_1 \oplus \Phi_2$. Соответствующий класс углов $|\Phi_1 \oplus \Phi_2|$ мы и будем считать суммой классов $|\Phi_1|$ и $|\Phi_2|$.

Итак, складывать величины углов удается не всегда, так что величина угла, строго говоря, не является аддитивной колмогоровской величиной. Тем не менее можно показать, что для любых двух величин углов справедливо утверждение (9.3) теоремы 9.1. Поэтому у нас имеется возможность выбрать единицу измерения величины угла; в качестве такой единицы измерения обычно используется градус – 1 / 360 доля полного угла.

Величины углов можно сравнивать. Скажем, что $|\Phi_1| < |\Phi_2|$, если угол Φ_1 удается разместить строго внутри угла Φ_2, причем так, что вершины этих углов совпадут. Нетрудно понять, что такое определение отношения «меньше» для величин углов согласуется с введенной выше операцией сложения этих величин.

Замечание. Для измерения величин углов, как известно, используют транспортир.

Замечание. Измерить величину угла можно и не прибегая к транспортиру. Пусть Φ_1 и Φ_2 – два не налегающих друг на друга угла с обще вершиной в точке О. Нарисуем окружность радиуса R с центром в точке О и обозначим через $|L_1|$ и $|L_2|$ длины дуг, высекаемых соответственно углами Φ_1 и Φ_2 на этой окружности. Можно показать, что

справедливо равенство

$$|\Phi_1| \,/\, |\Phi_2| = |L_1| \,/\, |L_2|. \qquad (9.12)$$

Пусть теперь Φ – произвольный угол с центром в точке О, а L – дуга, высекаемая этим углом на нарисованной нами окружности. Нетрудно видеть, что отношение $|L| \,/\, |R|$ не зависит от радиуса проведенной окружности.

Возьмем теперь в качестве новой единицы измерения величину такого угла Φ_0, для которого соответствующее отношение равно 1, т.е.

$$|L_0| = |R| \qquad (9.13)$$

(см. рис. 9.4).

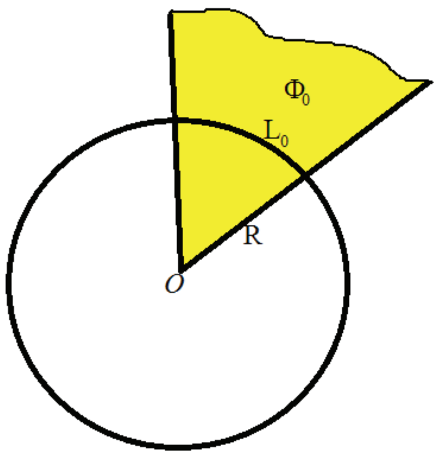


Рис. 9.4

Эта новая единица измерения угла называется *радианом* и вводится обозначение:

$$|\Phi_0| = 1 \textit{рад}. \tag{9.14}$$

Далее, длина окружности, как известно из школы, равна $2\pi|R|$, поэтому для величины полного угла Π в силу (9.12), (9.13) будем иметь:

$$|\Pi| \,/\, |\Phi_0| = 2\pi|R| \,/\, |R| = 2\pi. \tag{9.15}$$

Итак, в силу (9.14), (9.15)

$$|\Pi| = 2\pi|\Phi_0| = 2\pi \cdot \textit{рад}.$$

С другой стороны,

$$|\Pi| = 360^\circ,$$

Поэтому окончательно получаем связь между двумя единицами измерения величин углов:

$$1^\circ = (2\pi \,/\, 360)\textit{рад}. \tag{9.16}$$

9.7. ПЛОЩАДЬ

У каждой плоской геометрической фигуры, ограниченной замкнутой ломаной или гладкой кривой, есть площадь.

Сейчас мы займемся аккуратным введением этого понятия.

Для того чтобы сделать изложение максимально простым и кратким, будем считать, что все рассматриваемые нами фигуры нарисованы на листе плотной бумаги толщиной 1 мм.

Скажем, что *две* (*не налегающие одна на другую*) *плоские фигуры имеют одинаковую площадь, если, будучи вырезанными из листа бумаги, они уравновешивают друг друга на чашечных весах*. (Вариант: растягивают вертикально подвешенную идеальную пружину до одной и той же отметки.)

Класс уравновешивающих друг друга (*после вырезания из бумаги*) *плоских фигур назовем площадью каждой из этих фигур*.

Замечание. Нетрудно понять, что, при таком определении площади, у двух *конгруэнтных* (т.е. совпадающих при наложении) фигур площади будут одинаковы.

Далее, мы можем определить сложение площадей точно так же, как это было сделано выше для масс.

Замечание. Будем обозначать площадь фигуры буквой S. Будем также говорить, что фигура Q *разбита* фигуры Q_1 и Q_2, если $Q = Q_1 \cup Q_2$, причем $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Очевидно, что при нашем подходе площадь S ограниченной фигуры Q, разбитой на фигуры Q_1 и Q_2, оказывается равной сумме площадей своих частей:

$$S(Q) = S(Q_1) + S(Q_2). \tag{9.17}$$

Аналогичным образом экспериментально устанавливается, что операция сложения площадей коммутативна и ассоциативна. Тем самым колмогоровские Аксиомы 1 и 2 установлены. Остальные аксиомы принимаем без доказательства.

Теперь нам предстоит ввести единицу измерения площади, обозначим эту единичную площадь через Р. Нам будет удобно привязать единицу измерения площади к единице измерения длины Х, мы будем записывать это в виде

$$P = P(X).$$

А именно, возьмем в качестве Р(Х) площадь квадрата, длина стороны которого равна Х.

Пусть теперь Q – произвольно взятая плоская фигура, $S(Q)$ – ее площадь. Тогда по теореме 9.1

$$S(Q) = w(X)P(X), \tag{9.18}$$

где w(Х) – положительное вещественное число (мера величины $S(Q)$ при единице площади P(Х)).

Перейдем теперь к новой единице длины Y = Х / k, где k – натуральное число.

Тогда прежний единичный квадрат (со стороной длины Х), очевидно, разобьется на k^2 новых единичных квадратов (со сторонами длины Х / k), поэтому в силу (9.17) имеем

$$P(X) = P(X / k) + P(X / k) + ... + P(X / k) = k^2 P(X / k). \tag{9.19}$$

Можно показать, что соотношение (9.19) остается справедливым при любом $k > 0$ (не обязательно натуральном). Учитывая это обстоятельство, используют следующую условную запись, связывающую единицу площади с единицей длины:

$$P(X) = X^2. \tag{9.20}$$

Подставляя (9.20) в (9.18), окончательно получаем

$$S(Q) = w(X)X^2. \tag{9.21}$$

Пример. Пусть Q – изображение Антарктиды на настенной географической карте, причем

$$S(Q) = 0{,}5\ м^2.$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$S(Q) = 0{,}5(10\ дм)^2 = 50\ дм^2;$$
$$S(Q) = 0{,}5(100\ см)^2 = 5000\ см^2.$$

Замечание. Пусть $\Pi_{a,\,b}$ – прямоугольник, численные значения длин сторон которого (при единице длины X) равны соответственно a и b (где a и b – натуральные числа). Нетрудно видеть, что тогда этот прямоугольник может быть разбит на ab единичных квадратов. Таким образом, в силу определения сложения для площадей имеем:

$$S(\Pi_{a,\,b}) = X^2 + X^2 + \ldots X^2 = abX^2, \tag{9.22}$$

а численное значение площади этого прямоугольника (при единице площади X^2) соответственно равно ab. Можно показать, что формула (9.22) сохраняет свою силу при любых положительных a и b.

Пусть теперь $T_{a,\,h}$ – треугольник, у которого численное значение длины основания равно a, а численное значение длины опущенной на это основание высоты равно h (при единице длины X). Нетрудно перекроить этот треугольник в прямоугольник, у которого численные значения длин сторон будут соответственно равны a и $h\,/\,2$ (см. рис. 9.5).

Отсюда, учитывая (9.22), сразу получаем известную формулу:

$$S(T_{a,\,h}) = (ah\,/\,2)X^2. \tag{9.23}$$

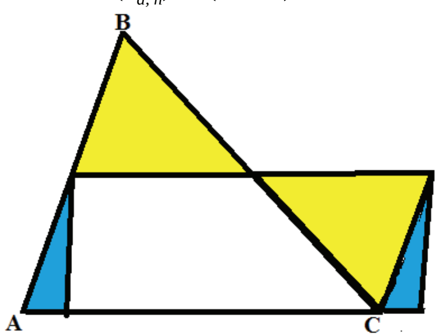


Рис. 9.5

Замечание. Вырезание фигур из бумаги с целью измерения их площади при помощи взвешивания практически неудобно и не всегда осуществимо. На практике пользуются *палеткой* – прозрачной бумагой, разграфленной вертикальными и горизонтальными линиями на «единичные» квадраты. (Площадь такого квадрата принимается за единицу площади.) Палетку налагают на исследуемую плоскую фигуру и затем подсчитывают число *n* «единичных» квадратов, попавших целиком внутрь фигуры, а также число *m* «единичных» квадратов, имеющих с данной фигурой хотя бы одну общую точку. Значение n + m/2 вычисляется несколько раз. Среднее арифметическое этих результатов принимается за численное значение площади при данной единице измерения.

Замечание. Равновеликость и равносоставленность

Многоугольники (и вообще любые плоские фигуры) называются *равновеликими*, если их площади равны.

Многоугольники называются *равносоставленными*, если их можно разбить на конечное число соответственно конгруэнтных друг другу многоугольников. На рис. 9.5 фигуры *A* и *B* равносоставлены.

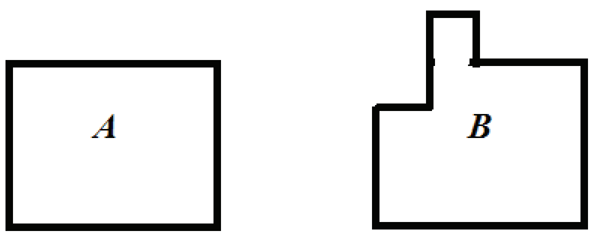


Рис. 9.6

Справедливо следующая замечательная теорема, доказанная Я. Больяи и П. Гервином в XIX веке: *Равновеликие многоугольники равносоставлены.* (Обратное утверждение очевидно.)

9.8. ОБЪЕМ

Величина «объем» вводится аналогично величине «площадь».

Скажем, что два тела имеют одинаковый объем, если при погружении в сосуд с водой они вытесняют одно и то же количество жидкости (жидкость поднимается до одной и той же отметки). Класс тел, имеющих один и тот же объем, называют *объемом* каждого их тел, входящих в этот класс.

Сложение объемов двух тел, не имеющих общих частей, определяется следующим образом. Оба тела погружаются в сосуд с жидкостью одновременно; класс тел, вытесняющих столько же жидкости, сколько эти два тела вместе, назовем суммой объемов упомянутых двух тел.

Коммутативность и ассоциативность сложения объемов проверяется экспериментально. Тем самым колмогоровские Аксиомы 1 и 2 можно считать установленными. Остальные аксиомы принимаем без доказательства.

Таким образом, мы считаем, что к объему (так же, как и к площади) применима теорема 9.1, существенно облегчающая изложение материала.

Теперь нам нужно ввести единицу объема; в качестве такой единицы удобно взять объем куба со стороной единичной длины X. Рассуждая подобно тому, как это было сделано в случае площади, заключаем, что в качестве единицы объема следует взять X^3.

Далее, пусть Q – произвольно взятое объемное тело, $V(Q)$ – его объем. Тогда по теореме 9.1

$$V(Q) = w(X)X^3, \tag{9.24}$$

где $w(X)$ – положительное вещественное число (мера величины $V(Q)$ при единице объема X^3).

Замечание. Пусть $П_{a,\,b,\,c}$ – прямоугольный параллелепипед, численные значения длин сторон которого (при единице длины X) равны соответственно a, b и c (где a, b, c – натуральные числа). Нетрудно видеть, что этот параллелепипед может быть разбит на abc единичных кубов. Таким образом, в силу определения сложения для объемов имеем:

$$V(П_{a,\,b,\,c}) = X^3 + X^3 + \ldots X^3 = abcX^3, \tag{9.25}$$

а численное значение объема этого прямоугольного параллелепипеда (при единице объема X^3) соответственно равно abc. Можно показать, что формула (9.25) сохраняет свою силу при любых положительных a, b, c.

Замечание. Когда речь идет о полых (или содержащих пустоты) телах термин объем приобретает некоторую двусмысленность. Что такое объем стеклянной банки – это объем жидкости, которую в нее можно залить или объем, занимаемый стеклом, из которого сделана банка? Для того, чтобы полностью избежать такой двусмысленности, в начальной школе специально вводят термин *вместимость*, когда речь идет о сосудах, ящиках и т.д.

Измерять вместимость сосудов можно, заливая в них известный объем жидкости. Вместимость чемоданов, ящиков и шкафов таким способом измерить, очевидно, не удастся – вместимость таких предметов проще вычислить, чем измерить. Однако, в принципе, измерение их вместимости можно осуществить, подсчитывая число кубиков заданного размера, которые удалось разместить внутри полости.

Пример. Примем, что объем $V(K)$ ванной комнаты K равен 2 м × 3 м × 4 м = 24 м^3. Тогда

$V(K) = 24(10\text{ дм})^3 = 24\,000\text{ дм}^3$;

$V(K) = 24(100\text{ см})^3 = 24\,000\,000\text{ см}^3$.

Замечание. Аналог теоремы Я. Больяи и П. Гервина о равновеликости и равносоставленности для многогранников неверен. Справедливо следующее утверждение, доказанное М. Деном в 1901 году: *Правильный тетраэдр не равносоставлен с кубом равного объема.*

9.9. СКОРОСТЬ КАК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ

Обозначим через Z некоего производителя (ткача, фабрику, артель), выпускающего шелковую нить. Обозначим через l единицу измерения длины, а через T – единицу измерения времени (длительности).

Этот производитель работает всегда в одном и том же режиме: за первый отрезок времени длительностью $3T$ он выпустил нить длиной $7l$, за второй такой же отрезок времени – тоже нить длиной $7l$ и т.д. Составим таблицу, в которую занесем длину произведенной нити и соответствующее затраченное время (см. табл. 9.1).

Таблица 9.1

Длина нити	$7l$	$14l$	$21l$	$28l$	$35l$
Время	$3T$	$6T$	$9T$	$12T$	$15T$

Мы видим, что отношение численного значения длины нити к численному значению затраченного времени всегда одно и то же:

$$7 / 3 = 14 / 6 = 21 / 9 = 28 / 12 = 35 / 15 = \ldots \qquad (9.26)$$

Определим *скорость* v равномерно идущего производства нити как отношение длины произведенной нити к затраченному времени. В рассматриваемом случае скорость, с которой работает производитель Z, равна

$$v(Z) = \frac{7l}{3T}.$$

Удобно считать отношение $l\ /\ T$ единицей измерения скорости (при данных единицах длины и времени), тогда выражение для скорости v производителя Z может быть записано в виде произведения:

$$v(Z) = \frac{7}{3} \cdot \frac{l}{T}, \qquad (9.27)$$

где $7 / 3$ – численное значение скорости. При изменении единиц длины и времени численное значение скорости преобразуется правильно (в соответствии со здравым смыслом, т.е. новое численное значение характеризует тот же самый процесс). Введем, например новую единицу времени по формуле:

$$t = T / 10.$$

Понятно, что за промежуток времени, в 10 раз более короткий, длина произведенной нити должна быть в 10 раз меньше. Подставляя в (9.27) выражение для T из предыдущего равенства, получаем:

$$v(Z) = \frac{7}{3} \cdot \frac{l}{10t} = \frac{7}{30} \cdot \frac{l}{t}.$$

Определим теперь сложение скоростей следующим естественным образом. Пусть $v(Y) = 5\frac{l}{T}$ и $v(W) = 3\frac{l}{T}$ – скорости, с которыми соответственно работают производители нити Y и W. Составим таблицу, аналогичную табл. 9.1.

Таблица 9.2

Длина нити Y	$5l$	$10l$	$15l$	$20l$	$25l$
Длина нити W	$3l$	$6l$	$9l$	$12l$	$15l$
Длина нити суммарная	$(5 + 3)l$	$2(5 + 3)l$	$3(5 + 3)l$	$4(5 + 3)l$	$5(5 + 3)l$
Время	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$

Мы видим, что отношение численного значения суммарной длины нити к численному значению затраченного времени снова всегда одно и то же:

$$(5 + 3) / 1 = 2(5 + 3) / 2 = 3(5 + 3) / 3 =$$
$$= 4(5 + 3) / 4 = 5(5 + 3) / 5 = 8.$$

Итак, в соответствии с принятым выше определением, скорость «суммарного» производства нити оказывается равной $8\frac{l}{T}$, эту скорость мы и будем считать суммой скоростей, с которыми работают производители Y и W:

$$v(Y) + v(W) = 5\frac{l}{T} + 3\frac{l}{T} = 8\frac{l}{T}.$$

Аналогичным образом определяем сумму скоростей в общем случае:

$$k\frac{l}{T} + q\frac{l}{T} = (k + q)\frac{l}{T} \qquad (9.28)$$

(здесь k и q – произвольные положительные числа). Очевидно, что введенная операция сложения скоростей коммутативна и ассоциативна в силу коммутативности и ассоциативности сложения вещественных чисел.

Замечание. Можно показать, что введенная таким образом величина «скорость» удовлетворяет всем колмогоровским аксиомам.

Пример. Портной Y шьет 5 костюмов в год, а портной W шьет 3 костюма в год. За сколько лет портные Y и W, работая вместе, сошьют 80 костюмов?

Решение. Сумма скоростей портных Y и W равна

$$\frac{\text{5 костюмов}}{\text{год}} + \frac{\text{3 костюма}}{\text{год}} = \frac{\text{8 костюмов}}{\text{год}},$$

откуда, очевидно, следует, что для пошива 80 костюмов портным Y и W потребуется 10 лет.

9.10. СТОИМОСТЬ

Назовем *стоимостью* товара массу золота, на которую этот товар можно обменять на свободном рынке. Понятно, что речь может идти только о некоторой усредненной величине, так как разные покупатели могут предлагать разные условия сделки. К тому же стоимость товара может значительно меняться в зависимости от времени и географического положения покупателя. С учетом вышесказанного, на каком-то базовом, начальном уровне говорить о стоимости можно просто как о массе золота. С этой точки зрения названия мировых валют – евро, фунт, рубль, доллар и др. оказываются просто-напросто различными единицами массы золота.

9.11. ЦЕНА

Для простоты мы будем говорить о цене сыпучих или жидких товаров. Тогда цена – это стоимость единицы массы товара. Для определенности мы будем говорить о ценах в рублях за килограмм. Удобна и согласуется со здравым смыслом запись руб/кг для обозначения «единицы измерения» цены. Кавычки здесь поставлены потому, что цена не является аддитивной колмогоровской величиной. Например, если цена древесных опилок 1 руб/кг, а цена пшеничной муки 100 руб/кг, то 101 руб/кг не будет ценой смеси древесных опилок с мукой.

Тем не менее запись цены товара в виде произведения N руб/кг, где N – положительное вещественное число, осмысленна и чрезвычайно удобна при пересчете в случае изменения типа валюты, в которой производится денежный расчет, а также изменения единицы массы.

Пример 1. Примем, как и выше, что цена пшеничной муки равна 100 руб/кг. Требуется пересчитать эту цену в копейках за грамм.

Имеем: 1 руб = 100 коп., 1 кг = 1000 г, откуда

$$100\ \textit{руб/кг} = 100\,\frac{100\ \text{коп.}}{1000\text{г}} = 10\ \textit{коп/г}. \qquad (9.29)$$

Пример 2. (Продолжение). Вычислим теперь цену пшеничной муки в пиастрах за пуд, зная, что

$$1\ \textit{пуд} = 16{,}38\ \textit{кг},$$
$$1\ \textit{кг} = 0{,}061\ \textit{пуда}, \qquad (9.30)$$

и приняв (условно), что

$$1\ \textit{рубль} = 0{,}25\ \textit{пиастра}. \qquad (9.31)$$

Имеем тогда:

$$100\ \textit{руб/кг} = 100\frac{0{,}25\ \text{пиастра}}{0{,}061\text{пуда}} = 409{,}8\ \textit{пиастров/пуд}. \qquad (9.32)$$

9.12. ЦЕНА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

В предыдущем параграфе мы говорили об удобстве записи цены в виде произведения числа *N* («численного значения цены») на «единицу цены», выраженную дробью:

руб/кг, коп/г, пиастр/пуд и т.д.

Как уже было сказано выше, цена не является аддитивной колмогоровской величиной, поэтому, используя такую запись, ссылаться на теорему 2.1 мы не можем. Следовательно, представляет интерес независимое обоснование записей вида (9.29) и (9.32). Такое обоснование мы проведем сейчас, разбирая Пример 2 из предыдущего параграфа.

Итак, будем, как и в предыдущем параграфе, считать, что:

$$\textit{цена пшеничной муки} = 100 \textit{ рублей за } 1 \textit{ килограмм} \qquad (9.33)$$

и, кроме того, справедливы соотношения (9.30) и (9.31). Наша цель – узнать, сколько пиастров потребуется заплатить за 1 пуд такой муки. Задача решается в два этапа.

1-й шаг. Как мы знаем (см. (9.30)),

$$1 \textit{ пуд} = \frac{1}{0{,}061} \textit{ кг} = 16{,}38 \textit{ кг.}$$

Следовательно, за 1 пуд придется заплатить в 16,38 раз больше, чем за 1 кг муки. Итак,

$$\textit{цена пшеничной муки} = 16{,}38 \cdot 100 \textit{ рублей за пуд} = \\ = \frac{1}{0{,}061} \cdot 100 \textit{ рублей за пуд.} \qquad (9.34)$$

2-й шаг. Выясним теперь, опираясь на (9.31) и (9.34), сколько пиастров стоит 1 пуд.

Так как 1 руб = 0,25 пиастра, то каждый из заплаченных рублей заменяем на 0,25 пиастра, в результате вся сумма умножается на 0,25:

$$\textit{цена пшеничной муки} = \\ = \frac{0{,}25}{0{,}061} \cdot 100 \textit{ пиастров за пуд.} \qquad (9.35)$$

Итак, мы видим, что при изменении единицы массы и наименования валюты цена товара преобразуется так, как если бы ее «численное значение» было умножено на дробь вида

$$\frac{\text{наименование валюты}}{\text{единица массы}}.$$

Иными словами, мы обосновали подход, изложенный в предыдущем параграфе.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 9

1. Являются ли рост человека и его вес величинами одного рода?

2. Являются ли рост человека и глубина моря величинами одного рода?

3. Что такое длина отрезка?

4. Сколько миллиметров в ста километрах?

5. Что такое масса? Чем отличаются масса предмета и его вес?

6. Изменится ли масса килограммовой гири, если эту гирю переместить на Луну?

7. Сколько пудов в одной тонне?

8. Что такое длительность отрезка времени?

9. Какие вы знаете приборы для измерения времени (длительности отрезков времени)?

10. Имеются песочные часы на 8 и на 11 минут. Как с их помощью отмерить полчаса?

11. Сколько раз в неделю часовая и минутная стрелки на правильно идущих часах: а) сливаются; б) образуют единый отрезок?

12. Что такое площадь плоской фигуры?

13. Предложите способ определения площади искривленной поверхности.

Задачи 14–17 *взяты из* [3].

14. Как перекроить трапецию в параллелограмм?

15. Как перекроить трапецию в прямоугольник?

16. Как перекроить трапецию в треугольник?

17. Как перекроить квадрат в два одинаковых квадрата меньшего размера?

18. Что такое стоимость товара?

19. Что такое цена товара?

20. Величины «скорость» и «цена» определены похожим образом. Объясните, почему скорости можно складывать, а цены – нельзя.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 9

1. *Аматова Г.М., Аматов М.А.* Математика. Кн. 2. М.: Академия, 2008.

2. *Вейль Г.* Пространство, время, материя. М.: Янус, 1996.
3. *Добротворский А.С., Ковригина Л.П., Мерзон А.Е., Чекин А.Л.* Задачник-практикум по математике. Вып. 2. М., 1985.
4. *Завельский Ф.С.* Время и его измерение. М.: Наука, 1977.
5. *Локшин А.А., Сибаева В.Ф.* Что такое величина? М.: Вузовская книга, 2006.
6. *Локшин А.А., Бахтина О.В.* Длина, масса, время и другие величины. М.: МАКС Пресс, 2020.

ГЛАВА 10.
ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НА ГРАФАХ

Теория графов, начало которой было положено Леонардом Эйлером (1736), сегодня широко применяется в математике, физике, электронике, экономике, программировании и других прикладных научных областях. Графы являются основным средством для описания структур сложных объектов. С их помощью можно описать вычислительную сеть, транспортную систему, схему авиалиний и другие объекты. С помощью графов удобно решать разнообразные задачи и головоломки. Графы широко используются и непосредственно при изучении различных разделов математики и информатики. Наглядность и интуитивная понятность графов позволяют обучающимся применять некоторые алгоритмы на графах без их формального описания, начиная с самого раннего школьного возраста.

10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Граф – это множество элементов (вершин графа) вместе с набором отношений между ними. Если объекты некоторого класса[1] изобразить вершинами, а отношения (связи) между ними – линиями, то мы получим информационную модель в форме графа.

Граф является многосвязной структурой, обладающей следующими свойствами:

1) на каждый элемент может быть произвольное количество ссылок;

[1] Класс – множество объектов, обладающих общими признаками.

2) каждый элемент может иметь связь с любым количеством других элементов;
3) каждая связка может иметь направление и вес.

Ненаправленная (без стрелки) линия, соединяющая вершины графа, называется **ребром**. Линия направленная (со стрелкой) называется **дугой**. При этом вершина, из которой дуга исходит, называется начальной, а вершина, куда дуга входит, – конечной. Линия, выходящая из некоторой вершины и входящая в нее же, называется **петлей**. Вершины могут изображаться точками, кругами, овалами, прямоугольниками и т.д.

Граф называется **неориентированным**, если его вершины соединены ребрами. Вершины ориентированного графа соединены **дугами**.

Например, граф, отражающий отношение «переписываются» между объектами класса «дети», может выглядеть так (рис. 10.1):

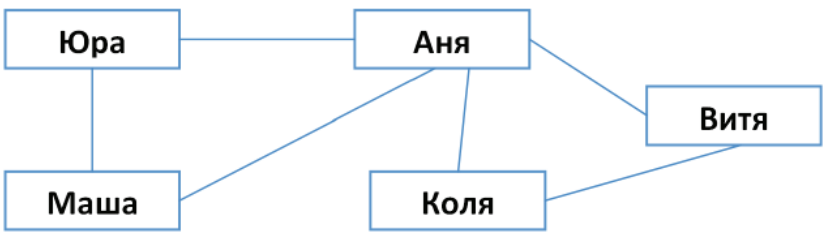


Рис. 10.1. Неориентированный граф отношения «переписываются»

Отношение «переписываются» («пишут письма друг другу») является двухсторонним (симметричным). Поэтому соответствующие вершины соединены линиями без стрелок (ребрами). Иначе выглядит граф, отражающий отношение «пишет письма» между теми же объектами класса «дети» (рис. 10.2). Линии со стрелками (дуги) придают ему совершенно иной смысл.

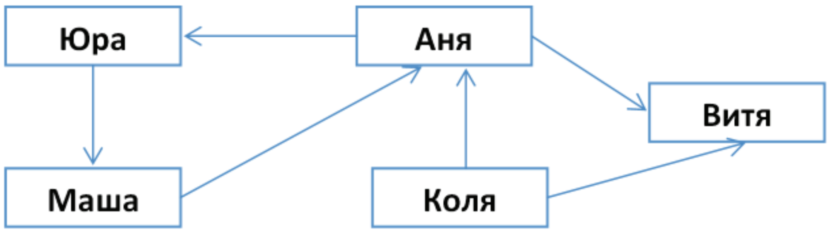


Рис. 10.2. Ориентированный граф отношения «пишет письма»

Путь – это последовательность ребер (дуг), по которым можно перейти из одной вершины в другую. Путь по вершинам и ребрам графа, в который любое ребро графа входит не более одного раза, называется **цепью**. Цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают, называется **циклом**. **Простым циклом** называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Примеры пути: Юра – Аня – Витя – Коля – Аня – Маша (рис. 10.1); Коля – Аня – Юра – Маша (рис. 10.2).

Примеры цепи: Юра – Аня – Витя – Коля (рис. 10.1); Коля – Аня – Юра – Маша (рис. 10.2).

Примеры цикла: Юра – Аня – Витя – Коля – Аня (рис. 10.1); Аня – Юра – Маша – Аня (рис. 10.2).

Подсчет простых циклов в графе – непростая задача. Для некоторых типов графов ее можно решить с помощью специальных формул и алгоритмов. На рис. 10.3 представлен граф и простые циклы, которые в нем можно обнаружить.

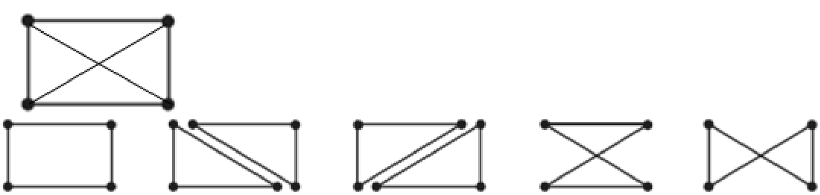


Рис. 10.3. Граф и его простые циклы

Граф называется **взвешенным**, если его вершины или ребра характеризуются некоторой дополнительной информацией – весами вершин или ребер. На рис. 10.4 с помощью взвешенного неориентированного графа изображены дороги между пятью населенными пунктами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; веса ребер – протяженность дорог в километрах.

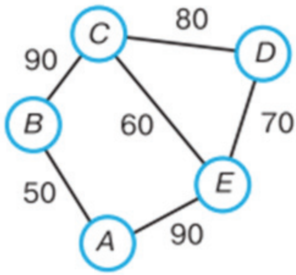


Рис. 10.4. Взвешенный граф

Длина кратчайшей цепи из одной вершины графа в другую называется **расстоянием между** этими **вершинами**. Расстояние между вершинами *A* и *C* равно 140.

Степень вершины графа – количество ребер и/или дуг, выходящих/сходящихся в этой вершине. Если степень вершины нечетное число, вершина называется – нечетной. Если степень вершины число четное, то и вершина называется четной.

Связный граф – граф, в котором все вершины связаны, т.е. существует цепь, соединяющая каждые две вершины.

Полный граф – это граф, каждая пара вершин которого соединена ребром. *n*-угольник, в котором проведены все диагонали, может служить примером полного графа.

Граф с циклом называется **сетью**. Если героев некоторого литературного произведения представить вершинами графа, а существующие между ними связи изобразить ребрами, то мы получим граф, называемый **семантической сетью.** На рис. 10.5 в виде семантической сети представлена информационная модель сказки про Царевну-лягушку.

Рис. 10.5. Информационная модель сказки про Царевну-лягушку

Дерево – это связный граф, в котором нет циклов, т.е. в нем нельзя из некоторой вершины пройти по нескольким различным ребрам и вернуться в ту же вершину. Отличительной особенностью дерева является то, что между любыми двумя его вершинами существует единственный путь.

Всякая иерархическая система может быть представлена с помощью дерева. У дерева выделяется одна главная вершина, называемая его **корнем**. Каждая вершина дерева (кроме корня) имеет только одного **предка**, обозначенный предком объект входит в один класс высшего уровня. Любая вершина дерева может порождать несколько **потомков** – вершин, соответствующих классам нижнего уровня. Такой принцип связи называется «один-ко-многим». Вершины, не имеющие порожденных вершин, называются **листьями**.

Родственные связи между членами семьи удобно изображать с помощью графа, называемого генеалогическим или родословным деревом.

Частным случаем дерева является **бинарное дерево**, в котором каждая вершина может иметь не более двух потомков.

10.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Графы удобно использовать при решении некоторых классов задач.

Пример 1. Для того чтобы записать все трехзначные числа, состоящие из цифр 1 и 2, можно воспользоваться графом (деревом) на рис. 10.6.

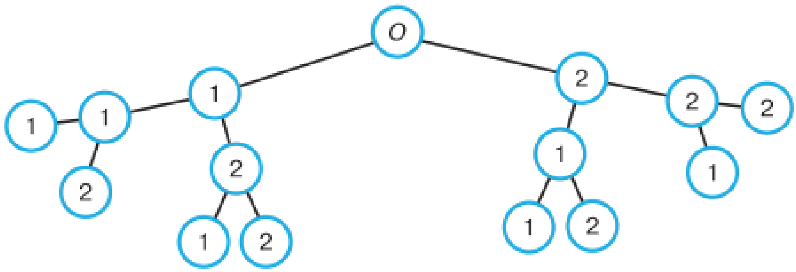


Рис. 10.6. Дерево для решения задачи о записи трехзначных чисел

Пример 2. Рассмотрим несколько видоизмененную классическую задачу о переправе.

На берегу реки стоит крестьянин (К) с лодкой, а рядом с ним – собака (С), лиса (Л) и гусь (Г). Крестьянин должен переправиться сам и перевезти собаку, лису и гуся на другой берег. Однако в лодку кроме крестьянина помещается либо только собака, либо только лиса, либо только гусь. Оставлять же собаку с лисой или лису с гусем без присмотра крестьянина нельзя – собака представляет опасность для лисы, а лиса – для гуся. Как крестьянин должен организовать переправу?

Для решения этой задачи составим граф, вершинами которого будут исходное и результирующее размещение персонажей на берегах реки, а также всевозможные промежуточные состояния, достигаемые из предыдущих за один шаг переправы. Каждую вершину-состояние переправы обозначим овалом и свяжем ребрами с состояниями, которые могут быть из нее образованы (рис. 10.7).

Недопустимые по условию задачи состояния выделены пунктирной линией; они исключаются из дальнейшего рассмотрения. Начальное и конечное состояния переправы выделены жирной линией.

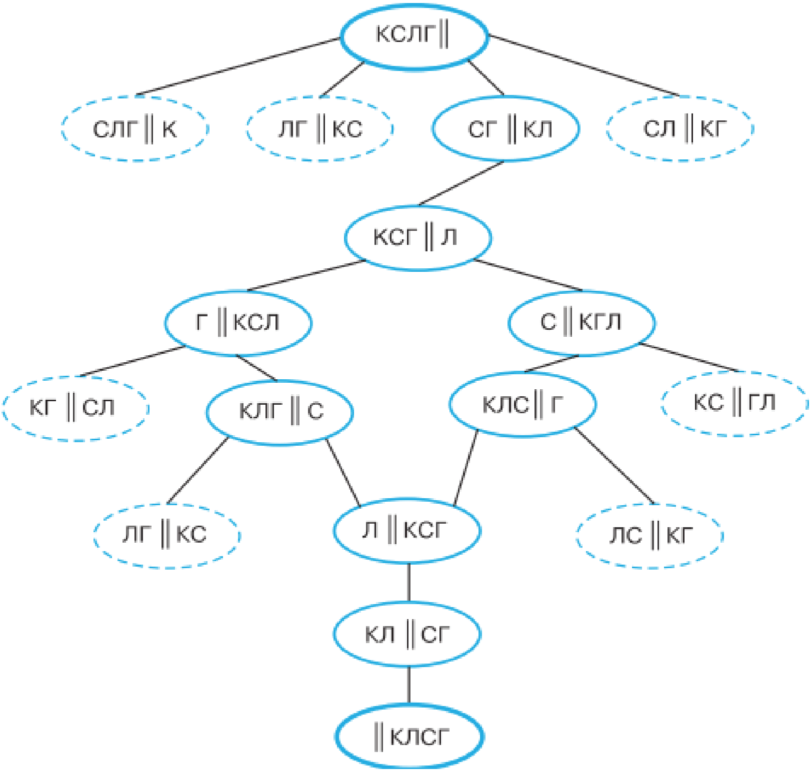


Рис. 10.7. Граф переправы

На графе видно, что существуют два решения этой задачи. Приведем соответствующий одному из них план переправы:

1) крестьянин перевозит лису;
2) крестьянин возвращается;
3) крестьянин перевозит собаку;
4) крестьянин возвращается с лисой;
5) крестьянин перевозит гуся;
6) крестьянин возвращается;
7) крестьянин перевозит лису.

Пример 3. Бобр-врач[2] хочет построить три станции первой медицинской помощи для своих друзей-бобров в соседнем лесу. Он хочет расположить станции на перекрестках каналов так, чтобы бобрам приходилось проплывать не более чем по одному водному каналу для того, чтобы получить помощь вне зависимости от того, где они находятся. Схема каналов приведена на рис. 10.8. На каких перекрестках следует расположить станции?

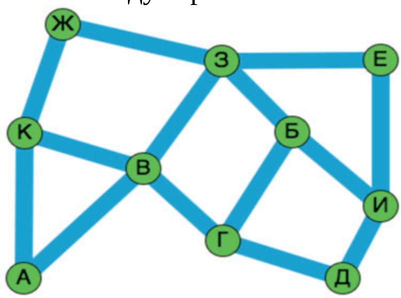


Рис. 10.8. Схема каналов

Решение задач такого рода может быть найдено, если в качестве первого шага разместить станцию в любом месте и пометить все точки, из которых можно добраться до этой станции. Затем можно поставить следующую станцию и снова пометить все точки, из которых можно до нее добраться; таким же образом поставить третью станцию. После того, как все три станции установлены, возможны два варианта: 1) полученное расположение станций является решением задачи; 2) одна или несколько точек остались непомеченными. Если решение не было найдено, можно убрать последнюю станцию, разместить ее в другой точке и проверить выполнение условия задачи. Если решение не найдено и в этом случае, придется отступить на шаг еще раз; если для последней станции нет новых вариантов расположения, надо искать новое расположение для второй станции и т.д. Действуя по такой схеме можно найти все решения. Это так называемый «метод поиска с возвратом».

[2] Эта задача взята из материалов международного конкурса по информатике *Bebras*.

Более общая задача заключается в нахождении так называемого «вершинного покрытия» в графе. Говорят, что подмножество вершин покрывает граф целиком, когда добавление всех вершин, соседних вершинам этого множества, дает множество всех вершин этого графа. Обычно, при решении практических задач, соответствующие действия проводятся на компьютере.

Что касается приведенной выше задачи, то для нее существует шесть правильных вариантов решения; один из вариантов – точки *Д*, *З*, *К*:

- из точек *Г*, *Д*, *И* можно добраться до *Д*;
- из точек *Б*, *В*, *Е*, *Ж*, *З* можно добраться до *З*;
- из точек *А*, *В*, *Ж*, *К* можно добраться до *К*.

10.3. ГРАФЫ И ТАБЛИЦЫ

Информация, представленная в форме графа, удобна для человека. А вот для компьютерной обработки данных предпочтительным является их представление в табличной форме. Важно, что любой граф можно свести к табличной форме. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Построим таблицу, соответствующую неориентированному графу (рис. 10.9), отражающему схему дорог между некоторыми населенными пунктами.

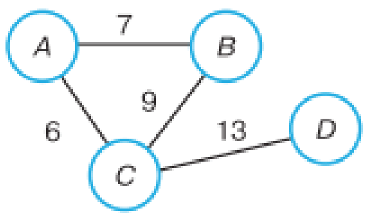


Рис. 10.9. Граф схемы дорог

Строки и столбцы таблицы будут соответствовать вершинам графа. Если две вершины являются **смежными** (соединены ребром), то в ячейку на пересечении соответствующих столбца и строки будем записывать вес этого ребра. В противном случае (вершины не являются смежными) в ячейку будем записывать 0. Получится таблица типа «объект – объект».

Такую таблицу называют **матрицей смежности**. Часто в матрицах смежности вместо нуля ставят знак минус, что обеспечивает большую наглядность.

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	7	6	0
B	7	0	9	0
C	6	9	0	13
D	0	0	13	0

	A	*B*	*C*	*D*
A	–	7	6	–
B	7	–	9	–
C	6	9	–	13
D	–	–	13	–

Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали, идущей от левого верхнего угла к правому нижнему углу. У матрицы смежности ориентированного графа такая симметрия отсутствует.

Пример 5. Обед в школьной столовой состоит из двух блюд и напитка. На первое можно выбрать щи или окрошку, на второе – плов или пельмени, на третье – сок или компот. Все возможные варианты представлены с помощью дерева на рис. 10.10.

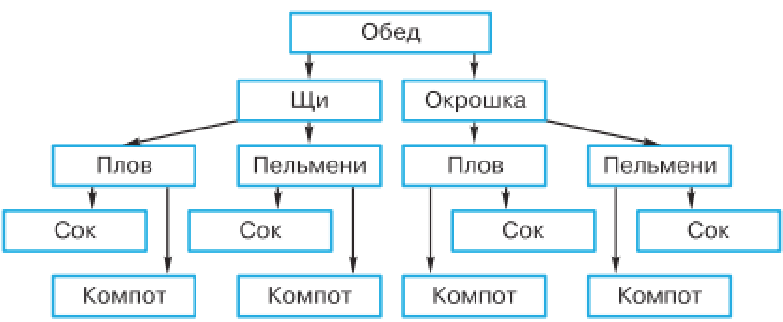


Рис. 10.10. Дерево вариантов обеда

Для того чтобы представить эту же информацию в таблице, будем двигаться по дереву от листьев к корню, описывая все возможные варианты обеда.

Обед	Напиток	2-е блюдо	1-е блюдо
Вариант 1	Сок	Плов	Щи
Вариант 2	Компот	Плов	Щи
Вариант 3	Сок	Пельмени	Щи
Вариант 4	Компот	Пельмени	Щи
Вариант 5	Компот	Плов	Окрошка
Вариант 6	Сок	Плов	Окрошка
Вариант 7	Компот	Пельмени	Окрошка
Вариант 8	Сок	Пельмени	Окрошка

Получилась таблица типа «объект – свойства»: объектами в ней являются варианты обеда, а свойствами – составляющие его блюда. При этом число граф в полученной таблице соответствует числу уровней в дереве.

Пример 6. Путешественник пришел в 08:30 на автостанцию поселка Луговое и увидел следующее расписание автобусов:

Отправление из	Прибытие в	Время отправления	Время прибытия
Заречное	Красное	08:55	11:25
Заречное	Луговое	09:10	10:10
Заречное	Озерное	10:45	12:00
Красное	Озерное	07:45	08:45
Красное	Заречное	09:15	11:45
Красное	Луговое	09:20	10:30
Луговое	Красное	08:00	09:10
Луговое	Заречное	10:40	11:40
Озерное	Заречное	09:00	10:50
Озерное	Красное	09:25	10:35

Требуется определить самое раннее время, когда путешественник сможет оказаться в пункте Озерное согласно этому расписанию.

Анализ таблицы показывает, что прямого маршрута из Лугового в Озерное нет. Следовательно, путешественнику придется добираться из Лугового в Озерное с пересадками. Изобразим схему имеющихся автобусных маршрутов в виде графа (рис. 10.11):

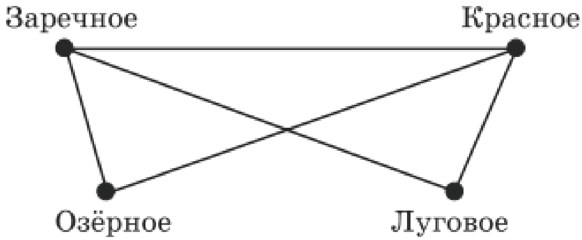


Рис. 10.11. Схема автобусных маршрутов

На графе отчетливо видно, что в Озерное путешественник может попасть только из поселков Красное или Заречное (впрочем, это видно и по 3-й и 4-й строкам расписания). Теперь перейдем к построению дерева с возможными маршрутами передвижения путешественника (рис. 10.12):

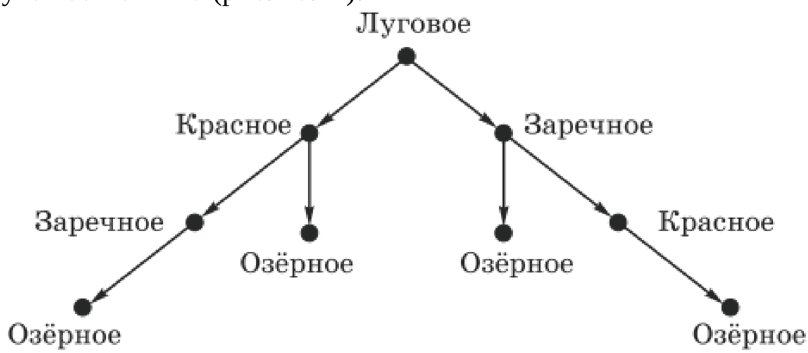
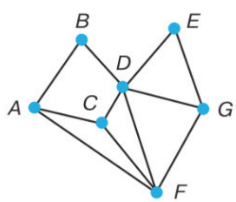


Рис. 10.12. Дерево маршрутов

Итак, самое раннее время, когда путешественник сможет оказаться в пункте Озерное, 12:00; в 12:00 следующего дня (8:30, Луговое – ожидаем до 10:40 автобус на Заречное – 11:40, Заречное – ожидаем до 10:45 следующего дня автобус на Озерное – 12:00, Озерное).

Пример 7. На рис. 10.13 представлена схема дорог, связывающих населенные пункты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. В таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Схему и таблицу создавали независимо друг от друга, поэтому в них используются разные обозначения. Необходимо выяснить длину пути в километрах из пункта *D* в пункт *F*.



	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5	Г6	Г7
Г1		15	10	20			25
Г2	15			25			10
Г3	10					30	20
Г4	20	25			15		
Г5				15			10
Г6			30				15
Г7	25	10	20		10	15	

Рис. 10.13. Схема дорог и таблица их длин

Рассмотрим имеющийся граф и выясним степень каждой вершины – число ребер, соединяющих некоторую вершину с другими вершинами. Получим:

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
3	2	3	5	2	4	3

На основании имеющейся таблицы мы также можем сделать выводы о том, сколькими дорогами соединен тот или иной населенный пункт с другими населенными пунктами:

Г1	Г2	Г3	Г4	Г5	Г6	Г7
4	3	3	3	2	2	5

Сопоставив полученную информацию, можем сказать, что через *Г*1 в таблице обозначен населенный пункт *F*, а через *Г*7 – *D*. Согласно таблице, расстояние между этими пунктами равно 25 км.

10.4. ПОИСК КОЛИЧЕСТВА ПУТЕЙ В ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

Пример 8. На рис. 10.14 изображена схема дорог, связывающих торговые точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. По каждой дороге можно двигаться только в направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей от точки *A* до точки *E*?

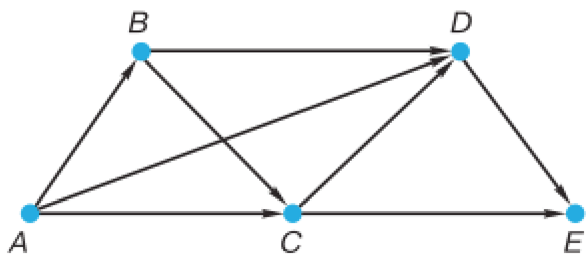


Рис. 10.14. Схема дорог, представленная ориентированным графом

В вершину *E* можно попасть только из вершин *C* и *D*. Если мы будем знать число путей из вершины *A* в вершину *C* и из вершины *A* в вершину *D*, то, сложив их, получим искомое число путей из *A* в *E*. Действительно, для того чтобы попасть из вершины *A* в вершину *E*, мы просто все пути из вершины *A* в вершину *C* дополним дугой *CE*, а пути из вершины *A* в вершину *D* дополним дугой *DE*. Число путей при этом не изменится.

Итак, число путей из вершины *A* в вершину *E* равно сумме путей из *A* в *C* и из *A* в *D*.

Можно сказать, что наша задача распалась на две более простые задачи. Решим каждую из них в отдельности.

В вершину *C* можно попасть непосредственно из вершины *A* и из вершины *B*. В свою очередь, существует единственный путь из вершины *A* в вершину *B*. Таким образом, из вершины *A* в вершину *C* можно попасть двумя путями: 1 (напрямую из *A*) + 1 (через *B*) = 2.

Что касается вершины *D*, она является конечной вершиной для трех дуг: *BD*, *AD* и *CD*. Следовательно, в нее можно попасть из вершин *A*, *B* и *C*:

1 (*напрямую из A*) + 1 (*через B*) + 2 (*через C*) = 4.

Итак, существуют четыре пути из вершины *A* в вершину *D*.

Теперь выполним подсчет путей из *A* в *E*:

2 (*через C*) + 4 (*через D*) = 6.

Решение задачи будет гораздо проще, если двигаться от вершины *A* (начало маршрута) к вершине *E* и проставлять веса вершин – число путей из *A* в текущую вершину (рис. 10.15). При этом вес вершины *A* можно принять за 1. Действительно, существует единственный способ попасть из *A* в *A* – оставаться на месте.

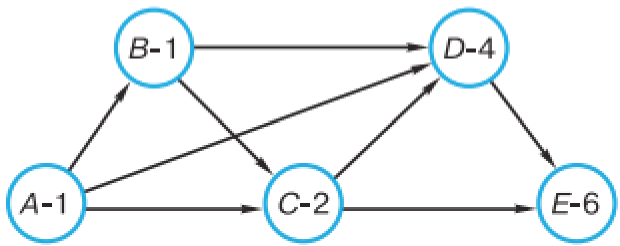


Рис. 10.15. Схема дорог, представленная взвешенным ориентированным графом

10.5. АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ МЕЖДУ ВЕРШИНАМИ ГРАФА

Путь между вершинами *A* и *B* графа считается **кратчайшим**, если:

- эти вершины соединены минимальным числом ребер (в случае, если граф не является взвешенным);
- сумма весов ребер, соединяющих эти вершины, минимальна (для взвешенного графа).

Есть множество алгоритмов определения кратчайшего пути между вершинами графа, в том числе:

1) алгоритм построения дерева решений;
2) алгоритм Дейкстры;
3) метод динамического программирования.

Построение дерева решений. При решении класса задач, связанного с нахождением кратчайшего пути в ориентированном графе, можно:

- от исходного графа перейти к матрице смежности;
- по матрице смежности построить дерево решений;
- по дереву решений выбрать подходящий вариант.

Пример 9. Найдем кратчайший путь от вершины A до вершины F в графе, приведенном на рис. 10.16.

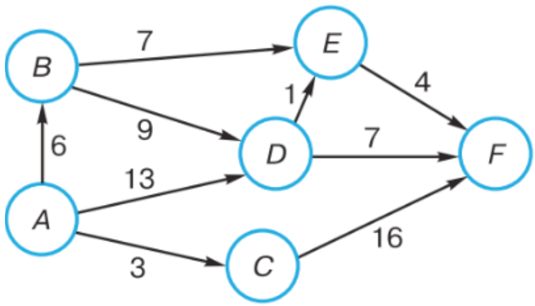


Рис. 10.16. Ориентированный граф

Составим матрицу смежности, соответствующую данному ориентированному графу:

	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
A	–	6	3	13	–	–
B	–	–	–	9	7	–
C	–	–	–	–	–	16
D	–	–	–	–	1	7
E	–	–	–	–	–	4
F	–	–	–	–	–	–

По матрице смежности построим полное дерево перебора решений – рис. 10.17.

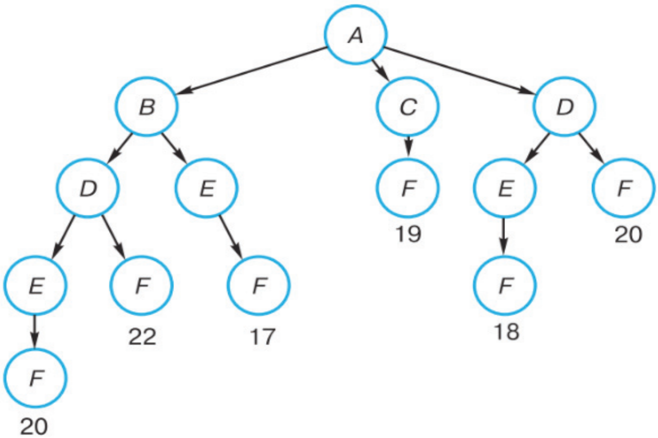


Рис. 10.17. Полное дерево перебора решений

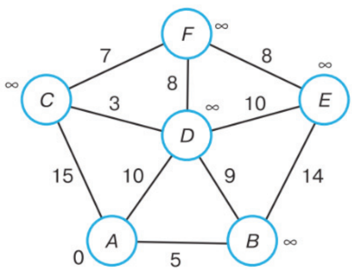
На рис. 10.17 видно, что кратчайший путь из вершины A в вершину F равен 17 и имеет вид $A – B – E – F$.

Алгоритм Дейкстры служит для нахождения кратчайшего пути между одной конкретной вершиной (источником) и всеми остальными вершинами графа. Суть алгоритма состоит в следующем. Каждой вершине графа ставится в соответствие метка – минимальное известное расстояние от источника до этой вершины. Метка самого источника полагается равной 0. Алгоритм работает пошагово – на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки.

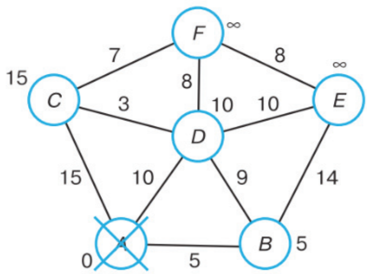
На первом шаге расстояние от источника до всех остальных вершин неизвестно. Метки вершин (кроме источника) считаются равными бесконечности, все вершины считаются непосещенными. Далее, из всех непосещенных вершин выбирается вершина, имеющая минимальную метку. Для каждого из соседей этой вершины (кроме отмеченных как посещенные) рассчитывается новая длина пути, как сумма значений текущей метки этой вершины и длины ребра, соединяющего ее с соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, то значение метки заменяется полученным значением длины. После рассмотрения всех соседей вершина помечается как посещенная. Этот шаг алгоритма повторяется, пока есть непосещенные вершины. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.

Пример 10. На рис. 10.18 кружками обозначены вершины графа, в кружки вписаны имена вершин. Вершины соединены линиями – ребрами графа. Около каждого ребра обозначен его «вес» – длина пути. Рядом с каждой вершиной дана метка – длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины *A*: для вершины *A* – это 0, для всех других вершин она неизвестна и обозначена знаком «бесконечность».

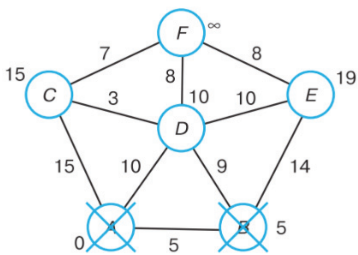
Минимальную метку (0) имеет вершина *A*. Ее соседи – вершины *B*, *C*, *D*. Очередность рассмотрения соседей: *B*, *D*, *C*. После изменения их меток получим результат, представленный на рис. 18*а*.



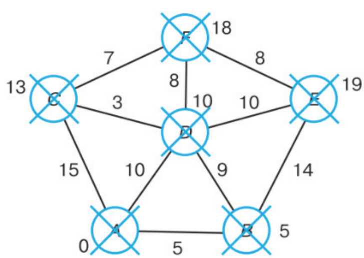
а) Начальное состояние



б) Шаг 1



в) Шаг 2



г) Результат работы

Рис. 10.18. Алгоритм Дейкстры

После изменения меток всех соседей вершины *A* она помечается как просмотренная. Теперь минимальная метка из непросмотренных вершин у вершины *B*. Ее соседи – вершины *D* и *E*. Так как 5 + 9 > 10, метка вершины *D* не изменяется. Вершина *E* получает метку 19 (рис. 10.18*б*).

Теперь минимальная метка из непросмотренных вершин у вершины *D*. Ее соседи – вершины *C*, *E* и *F*. Так как 10 + 3 < 15, метка вершины *C* изменяется. Вершина *F* получает метку 18. Метка вершины *E* не изменяется (рис. 10.18*в*).

Далее в качестве вершин с минимальными метками будут поочередно рассматриваться вершины *C*, *F* и *E*. К изменению меток соседних с ними вершин это не приведет (рис. 10.18*г*).

Полученные в результате работы алгоритма метки вершин графа – это и есть кратчайшие расстояния от вершины *A* до каждой из этих вершин.

Метод динамического программирования основан на том, что процесс решения задачи разбивается на стадии (шаги), на каждой из которых принимаются решения, приводящие к достижению поставленной цели.

Пример 11. Предположим, персонажу некоторой игры необходимо пройти по лабиринту из пункта *A* в пункт *B*, набрав при этом как можно меньше штрафных баллов, количество которых указано в клетках лабиринта, причем перемещаться можно только вверх или вправо. С помощью графа начальные условия могут быть заданы так, как показано на рис. 10.19.

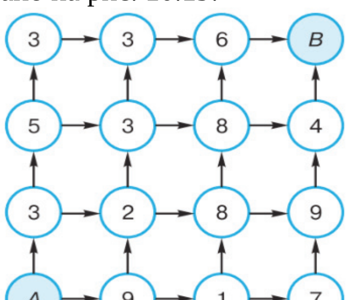


Рис. 10.19. Лабиринт

Составим таблицу, в которой каждая ячейка будет соответствовать определенной клетке лабиринта. Числа в ячейках будут равны минимальному числу штрафных баллов, которое можно получить, пройдя путь от начала до соответствующей клетки.

Заполнять таблицу будем снизу вверх и слева направо. При этом для заполнения каждой новой ячейки будем рассматривать числа двух соседних с ней заполненных ячеек, находящихся слева от нее и под ней. Будем выбирать наименьшее из этих двух чисел, прибавлять к ним число текущей ячейки и результат записывать в нее.

3			
A	9		

3	5		
A	9		

8	8		
3	5	13	
A	9	10	

11			
8	8	16	
3	5	13	
A	9	10	17

11	11		
8	8	16	
3	5	13	22
A	9	10	17

11	11	17	
8	8	16	20
3	5	13	22
A	9	10	17

11	11	17	17
8	8	16	20
3	5	13	22
A	9	10	17

Ответ равен числу в правом верхнем углу таблицы.

10.6. ГРАФЫ И ТЕОРИЯ ИГР

Теория игр – раздел современной математики, связанный с решением многих задач экономики, социологии, политологии, биологии, искусственного интеллекта и ряда других областей, где необходимо изучение поведения человека и животных в различных ситуациях.

Игра выступает в качестве математической модели некоторой ситуации и понимается как процесс, в котором участвуют две и более стороны, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. При этом игра характеризуется такими признаками, как:

1) присутствие нескольких игроков;

2) неопределенность поведения игроков, связанная с имеющимися у каждого из них несколькими вариантами действий;
3) различие (несовпадение) интересов игроков;
4) взаимосвязанность поведения игроков (результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех игроков);
5) наличие правил поведения, известных всем игрокам.

Игра может быть представлена в виде дерева, каждая вершина которого соответствует ситуации выбора игроком своей стратегии.

Мы рассмотрим игры, относящиеся к так называемым играм с полной информацией. В играх с полной информацией участники знают все ходы, сделанные до текущего момента, равно как и возможные стратегии противников, что позволяет им в некоторой степени предсказать последующее развитие игры.

Выигрышная стратегия – это правило, следуя которому игрок выигрывает независимо от того, как играет противник. Игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Выигрышная стратегия может быть только у одного игрока. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации при различной игре противника.

Пример 12. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя.

За один ход игрок может выполнить одно из следующих действий:

- добавить в кучу один камень (+ 1);
- добавить в кучу два камня (+ 2);
- увеличить количество камней в куче в 3 раза (× 3).

Например, имея кучу из 5 камней, за один ход можно получить кучу из 6, 7 или 15 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 45. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 46 или больше камней. Будем считать, что в начальный момент в куче S камней, $1 \le S \le 45$.

Выясним, ***при каких значениях числа*** S ***Петя может выиграть первым ходом.***

Если $S = 45$, то, добавив в кучу один камень (+ 1), два камня (+ 2) или утроив количество камней в ней (× 3), Петя становится победителем.

Если $S = 44$, то стать победителем можно, если добавить в кучу два камня (+ 2) или утроить количество камней в ней (× 3).

Если $S = 43$, то Петя становится победителем, утроив количество камней в куче (× 3). Также можно действовать для любого $S \geq 16$ ($16 \times 3 = 48$, $15 \times 3 = 45$).

Итак, Петя может выиграть, если $S = 16, ..., 45$ – это его выигрышные позиции. Для выигрыша Пете достаточно увеличить количество камней в 3 раза. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой будет 46 или более камней. Если же в куче будет 15 камней, то после любого хода Пети своим первым ходом может выиграть Ваня.

Действительно, при $S = 15$ после первого хода Пети («Ход П») в куче будет 16, 17 или 45 камней. Любой из этих случаев является выигрышным для делающего ход Вани («Ход В»), которому для победы достаточно увеличить количество камней в 3 раза (рис. 10.20).

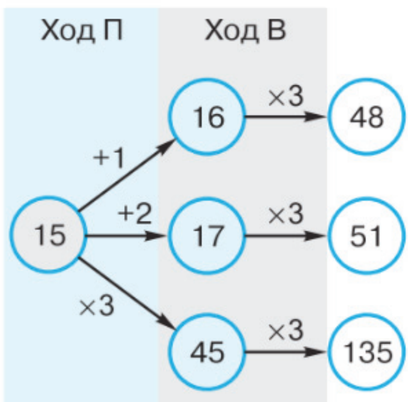


Рис. 10.20. Позиция 15 – выигрышная для Вани

Теперь попробуем определить ***значения** S**, при которых у Пети будет выигрышная стратегия, причем Петя не сможет выиграть первым ходом, но сможет выиграть своим вторым ходом,*** независимо от того, как будет ходить Ваня.

Мы выяснили, что $S = 15$ – проигрышная позиция для любого игрока. Если Петя своим первым ходом сможет перевести в нее Ваню, то что бы ни делал последний, сам он выиграть не сможет, но переведет в выигрышную позицию своего соперника.

15 камней Петя может получить при $S = 14$ (+ 1), $S = 13$ (+ 2) или $S = 5$ (× 3). Других вариантов для S нет (рис. 10.21).

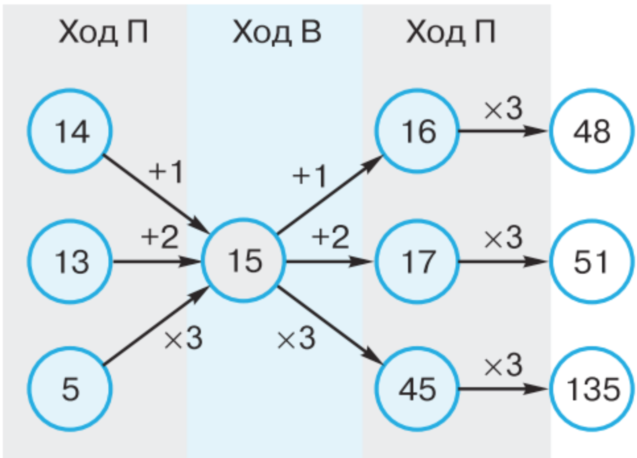


Рис. 10.21. Позиции 5, 13, 14 – выигрышные для Пети

Представим всю информацию на числовой линейке:

				В								В	В	П	В	В	В	В	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...	45	46

Найдем на ней такое ***значение** S**, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети,*** и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Здесь речь идет о проигрышной позиции для первого игрока. Следовательно, искать значение S надо среди позиций, не отмеченных как выигрышные. Пусть $S = 12$. Каким бы ни был ход Пети, им он переведет своего соперника в выигрышную позицию: 13 (12 + 1), 14 (12 + 2) или 36 (12 × 3). В последнем случае Ваня имеет возможность выиграть своим первым же ходом (36 × 3), а в первых двух случаях он должен перевести соперника в проигрышную позицию $S = 15$, что обеспечит ему выигрыш вторым ходом. Следовательно, позиция $S = 12$ – проигрышная для Пети. На дереве решений наши рассуждения могут быть представлены так, как показано на рис. 10.22.

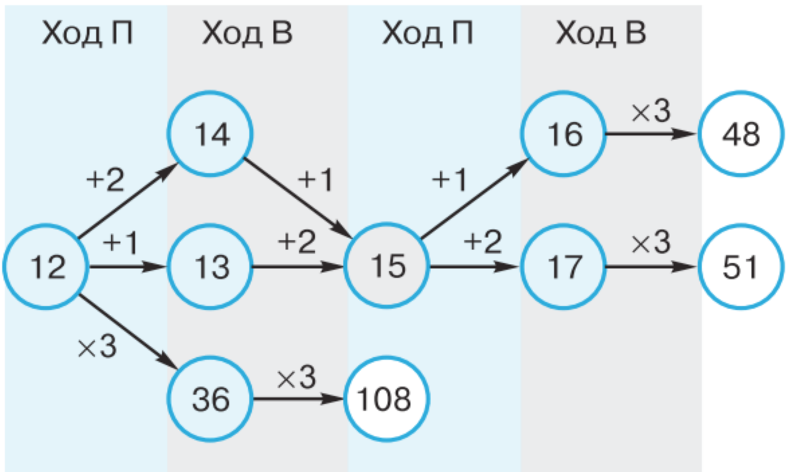
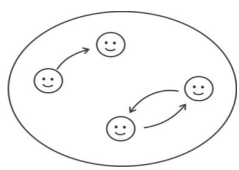
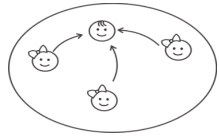


Рис. 10.22. Позиция 12 – проигрышная для Пети

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 10

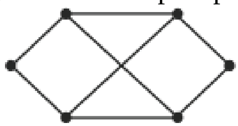
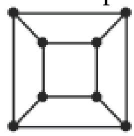
1. Во дворе гуляли четверо детей. Стрелка задает отношение «мой родной брат». Отметьте на рисунке условными обозначениями мальчиков и девочек.





2. В семье четверо детей. Стрелка задает отношение «мой родной брат». Изобразите граф, задающий отношение «моя родная сестра».

3. Для графов, изображенных на рисунках, подсчитайте количество вершин, количество ребер и количество простых циклов.

4. Каждый из десяти населенных пунктов соединен автодорогами с девятью другими (без проезда через промежуточные пункты). При этом автобусное сообщение существует только между следующими населенными пунктами: Нахабино и Аникеевка, Прудок и Спас, Ермолино и Любань, Бужарово и Марушкино, Нахабино и Любань, Аникеевка и Ермолино, Спас и Бужарово, Дарна и Кашино, Дарна и Спас, Кашино и Марушкино.

Постройте граф по этому описанию. Ответьте на вопросы.

1) Сколько всего существует автодорог между населенными пунктами?
2) Можно ли с помощью автобусного сообщения попасть из Бужарово в Дарну?
3) Можно ли с помощью автобусного сообщения попасть из Нахабино в Прудок?
4) С каким наименьшим количеством пересадок можно доехать из Марушкино в Прудок?
5) Какой маршрут можно открыть, чтобы автобусное сообщение существовало между всеми десятью населенными пунктами?
6) Какая дополнительная информация необходима для того, чтобы наладить автобусное сообщение между всеми населенными пунктами с наименьшими затратами?

5. При встрече каждый из одноклассников пожал руку другому (каждый пожал каждому). Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было трое; четверо?

6. В государстве 10 городов, из каждого выходит 2 дороги, кроме столицы, откуда выходит 5 дорог, и города Горный, откуда

выходит одна единственная дорога. Сколько всего дорог в государстве?

7. Можно ли расположить в пространстве 7 карандашей так, чтобы каждый касался ровно трех других?

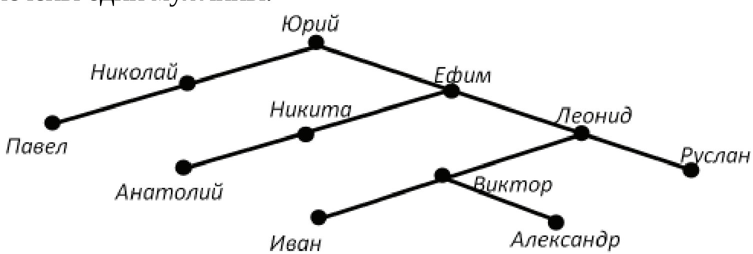
8. В стране Цифромании есть 6 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6. Руководство страны сообщило, что организует железнодорожное сообщение между городами, в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 2. Постройте граф, соответствующий проекту железнодорожного сообщения между городами Цифромании.

9. Составьте семантическую сеть по одной из русских народных сказок: «Колобок», «Курочка Ряба», «Репка».

10. Сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2 и 3 при условии, что в записи числа не должно быть одинаковых цифр? Выпишите все такие числа. Для решения задачи постройте и проанализируйте дерево.

11. Для составления цепочек используются бусины, помеченные буквами: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. На первом месте в цепочке может стоять одна из бусин *A*, *C*, *D*. На втором – любая бусина с согласной, если первая бусина – с гласной, и любая бусина с гласной, если первая – с согласной. На третьем месте – одна из бусин *C*, *D*, *E*, не стоящая в цепочке на первом или втором месте. Сколько цепочек можно создать по этому правилу? Для решения задачи постройте и проанализируйте дерево.

12. На рисунке представлено генеалогическое дерево Ивана, где отмечены одни мужчины.



Кем доводится Ивану Руслан?

13. Информация о родственных связях в некоторой семье представлена следующим образом:

parent(Юрий, Петр); *parent*(Анна, Ева);
parent(Ирина, Георгий); *parent*(Маргарита, Анна);
parent(Анна, Николай); *parent*(Петр, Георгий);
parent(Михаил, Николай); *parent*(Маргарита, Петр);
parent(Юрий, Анна); *parent*(Маргарита, Александр);
parent(Дарья, Руслан); *parent*(Александр, Руслан);
parent(Михаил, Ева); *parent*(Юрий, Александр).

Запись *parent*(*A*, *B*) означает, что *A* является родителем *B*.

Нарисуйте генеалогическое древо этой семьи. Сколько у Ирины племянников и племянниц?

14. В кладовке хранятся елочные игрушки – большие и маленькие красные и золотые шары и звезды. При этом игрушки разного размера, цвета и формы хранятся в отдельных коробках. Например, в одной коробке – большие красные звезды, в другой – маленькие красные звезды и т.д. Известно, что среди игрушек нет ни маленьких шаров, ни маленьких золотых звезд. Всего звезд 25, а шаров – 17. Всего больших игрушек – 32; красных игрушек – 28. Золотых звезд на 2 больше, чем золотых шаров.

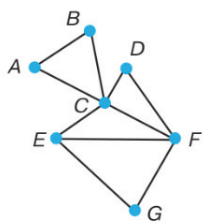
В скольких коробках хранятся игрушки? Сколько игрушек в каждой коробке? Постройте граф, представляющий состав игрушек. Используйте его для решения задачи. Представьте эту же информацию в табличной форме.

15. Между четырьмя местными аэропортами: ВОСТОРГ, ЗАРЯ, ОЗЕРНЫЙ и ГОРКА, ежедневно выполняются авиарейсы. Приведен фрагмент расписания перелетов между ними:

Аэропорт вылета	Аэропорт прилета	Время вылета	Время прилета
Восторг	Горка	13:10	17:15
Озерный	Заря	13:00	14:30
Озерный	Восторг	12:10	14:20
Горка	Озерный	11:15	15:30
Восторг	Озерный	12:35	14:50
Заря	Озерный	12:30	14:20
Восторг	Заря	10:30	12:15
Заря	Горка	14:40	16:45
Горка	Заря	15:15	17:20
Озерный	Горка	14:30	16:20

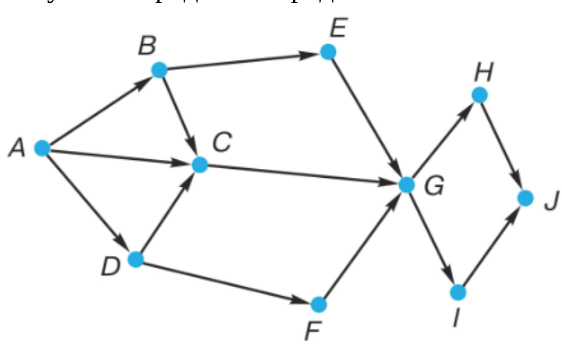
Путешественник оказался в аэропорту ВОСТОРГ в полночь (0:00). Определите самое раннее время, когда он может попасть в аэропорт ГОРКА.

16. На рисунке представлена схема дорог, связывающих населенные пункты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. В таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Схему и таблицу создавали независимо друг от друга, поэтому в них используются разные обозначения. Необходимо выяснить длину пути в километрах из пункта *E* в пункт *F*.

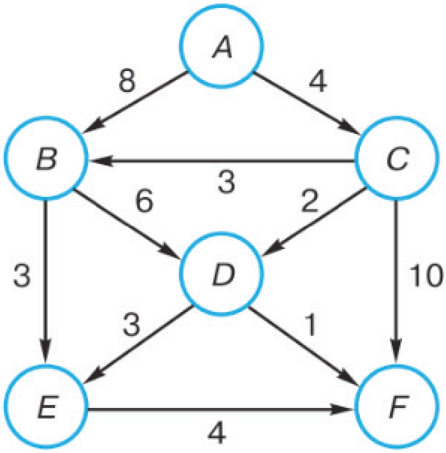


	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5	Г6	Г7
Г1		9		2			
Г2	9			8		11	
Г3					3	12	
Г4	2	8				4	7
Г5			3			11	
Г6		11	12	4	11		9
Г7				7		9	

17. На рисунке представлена схема дорог, связывающих города *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, I, *J*. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько разных путей существует из города *A* в город *J*?



18. Найдите кратчайший путь от вершины *A* до вершины *F* в ориентированном графе:

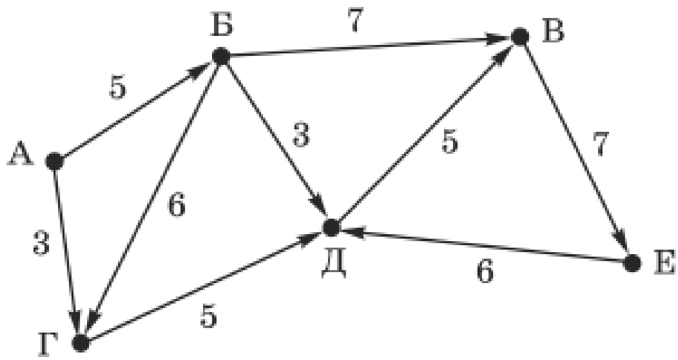


19. Между населенными пунктами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* построены дороги, протяженность которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A			3			
B			9		4	
C	3	9		3	8	
D			3		2	
E		4	8	2		7
F					7	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами *A* и *F* (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

20. Шесть торговых точек *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *Е* соединены дорогами с односторонним движением (направление движения указано стрелками, протяженность дорог в км – числами).



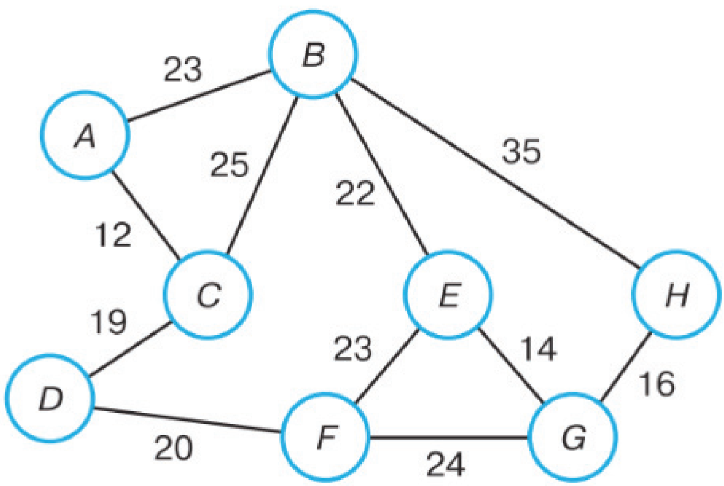
Необходимо перевезти груз из точки *A* в точку *E*.

Ответьте на вопросы.

1) Сколько существует различных вариантов маршрута?
2) Какой маршрут самый короткий?
3) Какой маршрут следует выбрать, чтобы по пути посетить все торговые точки?

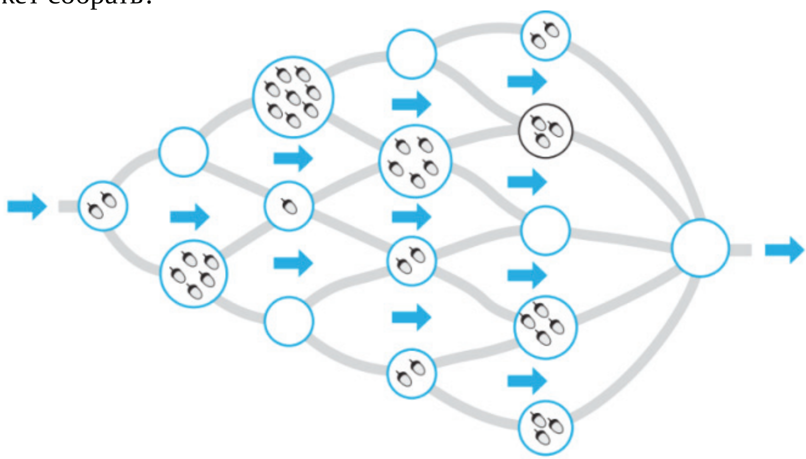
Для решения задачи постройте и проанализируйте дерево.

21. С помощью алгоритма Дейкстры найдите кратчайший путь между вершинами *A* и *G* следующего графа:



22. В материалах международного конкурса по информатике *Bebras* есть такая задача, предложенная разработчиками из Нидерландов.

Бобер Билли любит желуди. Он хочет поплыть по течению и собрать все желуди на островах, мимо которых будет проплывать. Увы, течение реки настолько сильное, что он может плыть только вниз по течению. Какое максимальное количество желудей он сможет собрать?



Решите эту задачу, воспользовавшись методом динамического программирования.

23. На столе лежит 25 спичек. Играют двое. Игроки по очереди могут взять от одной до четырех спичек. Кто не может сделать ход (так как спичек не осталось), проигрывает. Другими словами, выигрывает взявший последнюю спичку. Выясните, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

24. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу 1 камень или 5 камней. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 15 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится

не менее 47. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 47 или больше камней. В начальный момент в куче было *S* камней, $1 \le S \le 46$.

Выполните следующие задания, в каждом случае обосновывая свой ответ.

1) Укажите все такие значения числа *S*, при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения *S*, и укажите выигрывающие ходы.
2) Укажите такое значение *S*, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.
3) Укажите два значения *S*, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причем Петя не может выиграть за один ход, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений *S* опишите выигрышную стратегию Пети.
4) Укажите значение *S*, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, однако у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения *S* опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани.

25. У исполнителя Вычислитель есть две команды, которым присвоены номера:

1 – прибавить 1;
2 – умножить на 2.

Сколько существует различных программ, позволяющих преобразовать число 1 в число 10?

Для решения задачи постройте и проанализируйте дерево.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 10

1. *Босова Л.Л.* Графы в пропедевтическом курсе информатики / Л.Л. Босова // Информатика и образование. 2006. № 12. С. 53–65.

2. *Омельченко А.В.* Теория графов. М.: МЦНМО, 2018. 416 с.
3. *Паппи Ф.* Дети и графы: обучение детей шестилетнего возраста математическим понятиям / Ф. Паппи, Ж. Паппи. Брюссель – Монреаль – Париж, 1968. М.: Педагогика, 1974. 192 с.
4. *Шень А.* Игры и стратегии с точки зрения математики. М.: МЦНМО, 2007. 40 с.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

В двух частях

Часть 2

Учебное пособие

Под редакцией А. Л. Чекина

Редактор *Дубовец В. В.*
Оформление обложки *Удовенко В. Г.*
Компьютерная верстка *Дорожкина О. Н., Потрахов И. А.*

Московский педагогический государственный университет (МПГУ).
119435, Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1.

Управление издательской деятельности и инновационного проектирования (УИД и ИП) МПГУ.
119571, Москва, пр-т Вернадского, д. 88, оф. 446,
тел. +7 (499) 730-38-61, e-mail: izdat@mpgu.su.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УИД и ИП МПГУ.

Подписано в печать 20.01.2022. Формат 60x90/16.
Бум. офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 21,5.
Тираж 500 экз. Заказ 1239.

ISBN 978-5-4263-1061-2

9 785426 310612