

256143

M

Маҳкамов М.
Камолиддинов Ч.
Бойматов К.
Раззоқов А.А.
Каримов Т.Х.

МАТЕМАТИКА



**ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
МАРКАЗИ ҶУМҲУРИЯВӢИ ТАЪЛИМИЮ МЕТОДӢ**



**БА ҶАШНИ XXV СОЛАГИИ ИСТИҚЛОЛИЯТИ ДАВЛАТИИ
ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН БАХШИДА МЕШАВАД**

**Маҳкамов М., Камолиддинов Ҷ.,
Бойматов К., Раззоқов А.А., Каримов Т.Х.**

МАТЕМАТИКА

**Дастури таълимӣ барои муассисаҳои таҳсилоти
миёнаи касбӣ**

Душанбе
“Маориф”
2016

Маҳкамов М., Камолиддинов Ҷ., Бойматов К., Раззоқов А.А.,
Каримов Т.Х. Математика. Дастури таълими барои муассисаҳои
таҳсилоти миёнаи касбӣ. - Душанбе: "Маориф", 2016. -332 с.

Китоби мазкур барои хонандагон, ки синфи 9-ро хатм
намудаанд, пешбинӣ карда шудааст. Маводи дар китоб
овардашуда ба барномаи математика, алгебра ва ибтидоӣ
анализ мувофиқ аст. Китоби мазкур бо мақсади расонидани ёрии
амалӣ ба хонандагон ва донишҷӯёни муассисаҳои таҳсилоти
миёнаи касбӣ таълиф карда шудааст. Дар китоб маводи назарӣ
ва намунаи ҳалли мисолу масъалаҳо оварда шудааст, ки он
барои кори мустақилонаи хонандагон ва донишҷӯён пешбинӣ
шудааст.

Китоби мазкур барои хонандагон, донишҷӯёни муассисаҳои
таҳсилоти миёнаи касбӣ ва олии касбӣ пешниҳод шудааст.

Мухаррирон: Норов Қ., Нурматов М.

Мукарирзон:

Рачабов Т. - номзади илмҳои педагогӣ, дотсент, мудири
кафедраи методикаи таълими ибтидоӣ
ДДОТ ба номи С. Айни;

Бегимов Ҳ. - номзади илмҳои педагогӣ, дотсенти кафедраи
математика ва информатикаи Коллеҷи
омӯзгорони назди ДДОТ ба номи С. Айни

Таррох: Умаров К.А.

Хуруфчини компютерӣ: Шодиёва З.

ISBN 978-99947-1-441-4

© Маҳкамов М., Камолиддинов Ҷ., Бойматов К., Раззоқов А.А.,
Каримов Т.Х., 2016

PDF-файл дар коргоҳи сомонан
zarowadk.ru бозсозӣ шуд. 06.07.2023.



000182534

Китобхонаи миллии Тоҷикистон

*Кори ҳамсоятро мушоҳида
карда, математикаро омӯхтан
гайриммкон аст.*

Нисен А.

ПЕШГУФТОР

Китоби мазкур аз рӯи барномаи имтиҳоноти қабул аз математика барои дохилшавандагон навишта шуда, он чун дастурамали ёрирасон барои дохилшавандагони муассисаҳои миёна ва олии касбӣ пешниҳод карда мешавад.

Бо дар назардошти барномаи омӯзишии Коллеҷҳо ва курсҳои тайёри, дар китоби мазкур амалҳои арифметикӣ бо ададҳои гуногун, ҳисобкунии тақрибӣ, амалҳои арифметикӣ бо касрҳо, масъалаҳо доир ба протсент, прогрессияҳо, дараҷа, реша, муодилаҳо, системаи муодилаҳо, нобаробариҳо, функция, ифодаҳои тригонометрӣ, назарияи ҳудудҳо, ҳосила, интеграл ва амсоли ин ба таври пурра шахру тавзеҳ дода шудааст.

Дар дастур то ҳадди имкон қисми назариявии мавдро мухтасар баён намуда, доир ба онҳо намунаи ҳалли мисолу масъалаҳо оварда шудааст. Мисолу масъалаҳое, ки дар ин китоб оварда шудааст, ба барномаи таҳсилоти миёнаи умумӣ мувофиқ ва ба қадри имкон сода буда, ҳаллашон бо тарзҳои гуногун оварда шудааст.

Қайд кардан зарур аст, ки китоби номбурда пеш аз ҳама барои дохилшавандагони Коллеҷҳо пешниҳод шуда бошад ҳам, вале он барои шунавандагони шуъбаҳои тайёрии муассисаҳои олий ва миёнаи касбӣ, барои худомӯзии хонандагони мактабҳои миёна ва миёнаи махсус ва умуман барои он шахсоне, ки мароки аз худ кардани математикаи курси мактабӣ доранд, хизмат карда метавонад.

Аҷаб, нест, ки дастури номбурда аз камбудӣҳо холи набошад. Бинобар он муаллифон фикру мулоҳизаҳои хонандагонро, ки бойси боз ҳам беҳтар шудани сифати дастур мегардад, бо камолӣ қаноатмандӣ қабул хоҳанд кард.

Муаллифон

АРИФМЕТИКА

БОБИ I. АДАДҲОИ БУТУН ВА КАСРӢ

§1. Фанни арифметика

Арифметика фаннест, ки дар бораи ададҳо, хосиятҳои онҳо ва амалҳо бо онҳо баҳс мекунад. Бинобар ин вазифаи асосии ин фан аз муқаррар намудани мафҳуми адад, инкишофи ин мафҳум, омӯختани вобастагии байни ададҳо ва хосияти амалҳои арифметикӣ иборат мебошад. Мафҳуми адад яке аз фаслҳои муҳимтарин ва мушкултарини математикаи муосир ба шумор меравад. Бинобар ин омӯختани он вобастагиҳои ададӣ ва хосияти амалҳо ҷолиби қайд аст, чунки онҳо на фақат барои ададҳои конкретӣ, балки барои ададҳои дилхоҳ низ татбиқшавандаанд. Барои ҳамин ҳам, ҳангоми омӯختани вобастагиҳои умумии арифметикӣ аз ифодаҳои ҳарфӣ истифода мебаранд. Масалан, баробарии $a+b=8$ фақат барои баъзе қиматҳои a ва b , масалан, ҳангоми $a=6$ ва $b=2$ будан дуруст аст. Баробарии $a+b=b+a$ бошад, барои қиматҳои дилхоҳи a ва b , аз ҷумла, барои қимати $a=6$ ва $b=2$ ҳам дуруст мебошад.

Дар ин ҷо агар баробарии якум ҳеҷ гуна хосияти умумии ададро баён накунад ҳам, лекин баробарии дуюм хосияти умумии ба ҳамаи ададҳо мансуб бударо баён мекунад, яъне вай нишон медиҳад, ки суммаи ададҳо аз дигар кардани ҷои ҷамъшавандаҳо тағйир намеёбад.

Аз ҳамин сабаб, дар оянда ҳангоми омӯختани хосиятҳои арифметикии барои ҳамаи ададҳо мансуб аз ифодаҳои ҳарфӣ истифода мебарем.

§2. Маҷмӯъ. Амалҳо бо маҷмӯҳо

2.1. Маҷмӯъ ва элементҳои он

Маҷмӯъ - як аз мафҳумҳои асосии математикаи муосир мебошад. Ин мафҳум ба мафҳумҳои дигар оварда намешавад ва таъриф дода намешавад.

Мафҳуми «маҷмӯъ» ҳамчун ҷамъбасти баъзе предметҳо, объектҳо аз мафҳуми «адад» пеш меистад. Калимаи «маҷмӯъ» дар математика на ба маънои синоними «бисёр» кор фармуда мешавад, балки маънои вай яққоя, ҷамъбаст мебошад. Масалан, маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ; маҷмӯи нуқтаҳои ҳамворӣ; маҷмӯи ҳарфҳои алифбои тоҷикӣ; маҷмӯи хонадагонии синф, маҷмӯи хонаҳои истиқоматӣ; маҷмӯи дарахтони боғ; маҷмӯи донишҷӯён;

мачмуи ададҳои якрақама; мачмуи ададҳои натуралӣ; мачмуи китбаҳои олам; мачмуи сайёраҳои системаи офтобӣ; мачмуи ҳамаи секунҷаҳо, ки ба давраи додашуда дарункашидашуда ва ғайраҳо. Чӣ хеле ки маълум аст, маҷмуъҳо аз объектҳои гуногун иборат шуда метавонанд. Умуман, предметҳо, объектҳо ва ададҳо ки аз онҳо маҷмуъ ташкил ёфтааст, узвҳои маҷмуъ, ё ки элементҳои маҷмуъ номида мешаванд. Масалан, ба таркиби маҷмуи китбаҳои олам элементҳои зерин дохил мешаванд: Аврупо, Осиё, Африка, Америка, Австралия (бо Океания) ва Антрактида; ба таркиби маҷмуи ададҳои якрақама бошад элементҳои (рақамҳои) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 дохил мешаванд. Бинобар ин барои навиштани маҷмуъҳои элементҳои гуногундошта аз қавси фигуравӣ истифода мебаранд. Масалан, маҷмуи сайёраҳои системаи офтобро дар намуди зерин менависем: {Зуҳра, Замин, Миррих, Аторуд, Нептун, Зуҳал, Уран, Муштарӣ}; Маҷмуи ададҳои якрақамаро дар намуди {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} менависанд.

Ҳамин тариқ, ҳамаи он чизе ки мо тасаввур карда метавонем, элементҳои маҷмуъ шуда метавонанд. Элементи маҷмуъҳоро бо тартиби гуногун навиштан мумкин аст. Масалан, $\{a; b; c\}$ ва $\{b; c; a\}$ - ҳардуи ин ҳамон як маҷмуъро ифода мекунад, ки онҳо аз a ; b ; c таркиб ёфтаанд.

Барои аз ҳамдигар фарқ кардани маҷмуъҳо ва элементҳои онҳо, бо ҳарфҳои калони латинии $A, B, C, X, \dots$ маҷмуъҳо ва бо ҳарфҳои хурди латинии $a, b, c, x, \dots$ ё бо ҳарфҳои индексдорин $a_1, a_2, a_3, \dots$ элементҳояшон ишорат карда мешаванд. Ибораи «объекти a элементи маҷмуи A аст» бо рамзи $a \in A$ ишора карда мешавад. Агар объекти a ба маҷмуи A тааллуқ надошта бошад, ин ҳел менависанд: $a \notin A$.

Масалан, маҷмуи ададҳои натуралӣ аз рақами 7 хурдро бо ҳарфи A ишора намуда, дар намуди зерин менависем:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Маҷмуъ ин тавр хонда мешавад: «маҷмуи A аз ададҳои 1; 2; 3; 4; 5; 6 иборат аст». Чӣ хеле ки дида мешавад, адади 6 ба маҷмуи A тааллуқ дорад, вале адади 7 ба маҷмуи A тааллуқ надорад. Масалан, ҷумлаи «Адади 6 ба маҷмуи A тааллуқ дорад»-ро мухтасар бо ёрии ишораи $\in$ менависанд: $6 \in A$.

Чумлаи "Адади 7 ба маҷмуи A тааллуқ надорад"-ро ҳам мухтасар бо ёрии ишорати $\notin$ менависанд: $7 \notin A$.

Бигузор E -маҷмуи дилхоҳ бошад. Агар x элементи маҷмуи E бошад, пас $x \in E$ менависанд (чунин хонда мешавад: x ба маҷмуи E тааллуқ дорад). Агар x элементи маҷмуи E набошад, пас $x \notin E$ навишта мешавад (чунин хонда мешавад: x ба маҷмуи E тааллуқ надорад).

Мисоли дигар, агар N - маҷмуи ададҳои натуралӣ бошад, пас аз ишораҳои истифода бурда менависем: $1 \in N$; $3 \in N$; $7 \in N$; $-4 \notin N$; $-8 \notin N$. Маҷмуҳои охиринок ва беохир мешаванд. Масалан, шумораи хонандагони синф охириноканд, аммо маҷмуи ададҳои бутун, маҷмуи секунҷаҳои дарункашидашудаи давра ва шумораи нуктаҳои хати рост маҷмуи беохиранд.

Дар ҳаёти ҳаррӯза калимаи «маҷмуъ» шумораи зиёди предметҳоро мефаҳмонад. Дар математика маҷмуҳои дорои 3, 2, 1 элемент ва маҷмуҳои ягон элемент надошта дида барои маҷмуи мешаванд.

Таърифи 1. Маҷмуе, ки ягонто элемент надорад, маҷмуи холӣ номида мешавад ва бо рамзи $\emptyset$ ишорат карда мешавад.

Масалан, маҷмуи ададҳои токи ба 2 қаратӣ, маҷмуи ҳамаи натуралӣ мусбати муодилаи $x^2 + 1 = -3$, маҷмуи ҳамаи нобаробарии $x^2 + 1 < 0$, маҷмуи нуктаҳои умумини ду хати рост параллел мисолҳои маҷмуи холӣ шуда метавонанд.

Агар маҷмуъ аз шумораи охиринокӣ элементҳо ташкил ёфта бошад, онро маҷмуи охиринок ва агар аз шумораи беохирӣ элементҳо ташкил ёфта бошад, маҷмуи беохир меноманд.

2.2. Тарзҳои дода шудани маҷмуъ

Барои дода шудани маҷмуъ пеш аз ҳама донишмандон он лозим аст, ки кадоме аз объектҳо ба маҷмуъ тааллуқ доранд ва кадоме аз онҳо тааллуқ надоранд. Агар маҷмуъ шумораи ками элементҳоро дарбар гирад, онро бо номбар намудани ҳамаи элементҳояш додан мумкин аст. Масалан, шумораи хонандагони синф - ин рӯйхати онҳо дар рӯзномаи синф, маҷмуи давлатҳои дунё - рӯйхати онҳо дар атласи география мебошанд.

Агар маҷмуъ бо рӯйхати элементҳояш дода шуда бошад, элементҳои он дар қавси фигуравӣ бо нукта - вергул навишта мешавад. Масалан, маҷмуи рақамҳои ин ҳел навишта мешавад:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}.$$

Мачмуъ фақат ҳамон вақт бо рӯйхат дода мешавад, ки агар вай шумораи охирноки элементҳоро дарбар гирад. Ин ҳангоми калон будани шумораи элементҳо хело ноқулай аст. Бинобар ин тарзи универсалии дода шудани маҷмуъ мавҷуд аст, ки бо он маҷмуи дилхоҳро додан мумкин аст. Маҷмуъ метавонад бо воситаи хосияти характеристикӣ, яъне ҳамин ҳел ҳосият, ки онро ҳамаи элементҳои ба ин маҷмуъ мутааллиқ доранд, дода шавад. Объектҳои, ки ба маҷмуъ тааллуқ надоранд ин ҳел навишта мешавад: $A = \{x | P(x)\}$, ки $P(x)$ - хосияти характеристикӣ мебошад.

Якчанд мисол меорем:

а) Бигузур A - маҷмуи бақияҳои тақсими ададҳои натуралӣ ба адади 5 бошад, он гоҳ $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ мешавад.

б) Агар $B = \{n | n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 12\}$ - маҷмуи ададҳои натуралӣ дар байни ададҳои 3 ва 12 ҷойгир буда бошад, он гоҳ $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ мешавад.

в) Агар $D = \{x | x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 4\}$ бошад, он гоҳ D порчаи $[-3; 4]$ мешавад.

г) Агар $X = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ - маҷмуи решаҳои муодилаи квадратӣ бошад, он гоҳ $X = \{1; 2\}$ мешавад.

Маҷмуи $A = \left\{ \frac{n}{n^2 - 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ -ро дида баромада, муайян менамоем, ки оё ададҳои $\frac{1}{4}; \frac{2}{7}$ ба ин маҷмуъ мутааллиқанд ё не?

Адади $\frac{1}{4} \in A$ мешавад, агар ҳамин ҳел адади натуралӣ n мавҷуд бошад, ки $\frac{n}{n^2 - 2} = \frac{1}{4}$ шавад. Барои санҷиш муодилаи

$\frac{n}{n^2 - 2} = \frac{1}{4}$ -ро ҳал мекунем. Аз муодилаи охири $n^2 - 4n - 2 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $n_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$ мешавад. Азбаски

$2 - \sqrt{6}$ ва $2 + \sqrt{6}$ ададҳои натуралӣ нестанд, бинобар он $\frac{1}{4} \notin A$ мебошад.

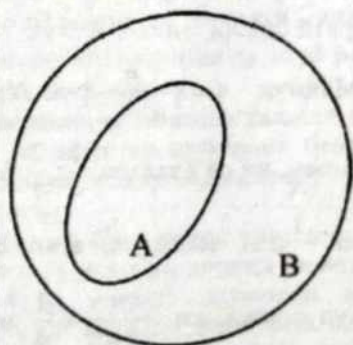
Ҳамин тавр, муодилаи $\frac{n}{n^2 - 2} = \frac{2}{7}$ -ро ҳал намуда, $n_1 = 4$ ва $n_2 = -\frac{1}{2}$ -ро ҳосил мекунем. Азбаски $4 \in N$ ва $\frac{2}{7} = \frac{4}{4^2 - 2}$ аст, пас, $\frac{2}{7} \in A$ мешавад.

2.3. Тахтмаҷмуҳо

Дар баъзе мавридҳо ба ҷои тамоми маҷмуи додашуда, қисми маҷмуи додашударо дида мебароянд. Масалан, ба ҷои тамоми маҷмуи ададҳои натуралӣ як қисми он маҷмуи ададҳои содаро дида мебароянд. Бинобар ин дар математика ба ҷои калимаи «қисми маҷмуъ» аксар вақт аз калимаи тахтмаҷмуъ истифода мебаранд.

Ду маҷмуҳои A ва B -ро муоина менамоем. Агар ҳар як элементи маҷмуи A элементи маҷмуи B низ бошад, он гоҳ мегӯянд, ки A - тахтмаҷмуи маҷмуи B мебошад (Расми 1).

Онро чунин ишора мекунанд: $A \subset B$. Маҷмуи ҳоли тахтмаҷмуи дилхоҳ мебошад. Ҳар як маҷмуи ғайриҳолии A ақаллан дорои ду тахтмаҷмуъ - худӣ маҷмуи A ва маҷмуи ҳоли мебошад. Онҳоро тахтмаҷмуҳои ғайриҳоси маҷмуи A ва ҳамаи дигар тахтмаҷмуҳоро (агар мавҷуд бошад) тахтмаҷмуҳои ҳоси маҷмуи A меноманд. Агар A - тахтмаҷмуи маҷмуи B , B тахтмаҷмуи маҷмуи C бошад ($A \subset B, B \subset C$), он гоҳ A - тахтмаҷмуи C мешавад ($A \subset C$).



Расми 1

Таърифи 2. Агар ҳамаи элементҳои маҷмуи A элементҳои маҷмуи B низ бошанд, он гоҳ A таҳтмаҷмуи B (ё ки қисми маҷмуи B) номида мешавад.

Масалан, дар курси якум 240 нафар талаба меҳонад. Рӯзи якуми сентябр дар дарсҳо 220 нафар талабагон иштирок доштанд, 20 нафарашон бо сабабҳои гуногун дар дарсҳо иштирок накарданд. Агар маҷмуи ҳамаи талабагони курси якумро бо ҳарфи E , маҷмуи ҳамаи талабагони дар дарсҳо иштирокнакардари бо ҳарфи K ишорат кунем, он гоҳ K таҳтмаҷмуи маҷмуи E мешавад: $K \subset E$.

Дар ин ҷо ишорати $\subset$ чунин хонда мешавад: маҷмуи K таҳтмаҷмуи маҷмуи E мебошад.

Мисолҳо: 1) Бигузор N - маҷмуи ададҳои натуралӣ, Z - маҷмуи ададҳои бутун, Q - маҷмуи ададҳои раціоналӣ, R - маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ бошад, он гоҳ $N \subset Z \subset Q \subset R$ мешавад.

2) Бигузор A - маҷмуи ҳарфҳои алифбои тоҷикӣ ва B - маҷмуи садонокҳои ин алифбо бошад, он гоҳ $B \subset A$ мешавад.

3) Бигузор A - маҷмуи хатҳои ҳамвории α ва β - маҷмуи хатҳои қачи ин ҳамворӣ бошад, он гоҳ $B \subset A$ мешавад.

Агар $B \subset A$ бошад, он гоҳ тааллуқияти элементҳои x ба маҷмуи B шартӣ кифоягии ба маҷмуи A тааллуқ доштани он ва ба маҷмуи A тааллуқ доштани элементҳои x шартӣ зарурии ба маҷмуи B тааллуқ доштани он мебошад.

Масалан, агар A - маҷмуи ҳамаи параллелограмҳо ва B - маҷмуи ҳамаи росткунҷаҳо бошад, он гоҳ $B \subset A$ мешавад. Бинобар он барои он, ки чоркунҷа параллелограмм бошад, яъне ба маҷмуи A тааллуқ дошта бошад, вай бояд ба B тааллуқ дошта бошад. Аз тарафи дигар, барои он, ки чоркунҷа росткунҷа бошад, зарур аст, ки вай параллелограмм бошад.

Агар дар як вақт $A \subset B$ ва $B \subset A$ бошад, мегӯянд, ки маҷмуҳои A ва B баробаранд, яъне онҳо аз ҳамон як элементҳо иборатанд. Дар ин ҳолат муталлиқияти элемент ба A барои ба B тааллуқ доштани он зарур ва кифоя аст. Аксариати теоремаҳои математикаро ҳамчун тасдиқоти баробар будани маҷмуҳо дида баромадан мумкин аст.

Таърифи 3. Агар ҳар як элементҳои маҷмуи A дар як вақт элементҳои маҷмуи B ва ҳар як элементҳои маҷмуи B элементҳои

мачмуи А бошад, он гоҳ мегӯянд, ки мачмуъҳои А ва В бо ҳам баробаранд (якхелаанд).

Масалан, мачмуи ададҳои натуралӣ, ки ба 10 тақсим мешаванд, бо мачмуи ададҳои натуралӣ, ки бо нол тамом мешаванд, баробаранд.

Таърифи 4. Агар барои мачмуъҳои дилхоҳи А ва В шартҳои $A \subset B$ ва $B \subset A$ иҷро гарданд, яъне ин мачмуъҳо аз элементҳои якхела тартиб додашуда бошанд он гоҳ онҳо баробаранд: ($A = B$).

Масалан, $\{1; 2; 3\} = \{2; 3; 1\} = \{3; 1; 2\}$ ва ғайраҳо мисоли мачмуъҳои элементҳои якхела дошта мебошанд. Мисоли дигарро дида мебароем. Агар ҳамаи хонандагони курси якум ба курсиҳои худ нишаста бошанду ягонто ҳам курсии ҳолӣ намонда бошад, он гоҳ гуфтан мумкин аст, ки дар байни элементҳои мачмуи хонандагони курси якум ва мачмуи курсиҳо мувофиқати якқиматаи байниҳамдигарӣ вучуд дорад. Аз ин мисол мафҳуми эквивалентии мачмуъҳо бармеояд.

Таърифи 5. Мачмуъҳо, ки ҳамаи элементҳояшонро ба мувофиқати якқиматаи байниҳамдигарӣ овардан мумкин аст, мачмуъҳои баробарқувва (эквивалент) номида мешаванд. Баробарқуввагии мачмуъҳои А ва В -ро ин тавр ишорат мекунанд: ($A \sim B$).

Мафҳуми мувофиқати якқиматаи байниҳамдигарӣ ба мо имконият медиҳад, ки ба ғайр аз баробарқуввагии мачмуъҳо мо пурқувват ва камқувватии мачмуъҳоро муқаррар намоем.

Таърифи 6. Мачмуи ғайрихосӣ, ки элементҳои гуногун надорад, мачмуи воҳидӣ номида мешавад.

Масалан, агар мачмуи Е элементҳои ба худаш мутааллиқӣ α дошта бошад, мачмуи Е мачмуи воҳидӣ номида мешавад. Инро мо чунин менависем: $E = \{a\}$; элементҳои а элементҳои ягонаи мачмуи Е номида мешавад. Ба мачмуи воҳидӣ якто ва фақат якто элемент мутааллиқ аст.

Мачмуъҳои баробарқувва дорон се хосият мебошад: хосияти рефлексивӣ (баргардандагӣ), хосияти симметрия (табдилёбандагӣ) ва хосияти транзитивӣ (ҷойдигаркуний).

1. **Хосияти рефлексивӣ.** Ҳар гуна мачмуъ ба худаш баробарқувва аст.

2. Хосияти симметрий. Агар маҷмуи A ба маҷмуи B баробарқувва бошад, он гоҳ маҷмуи B низ ба маҷмуи A баробарқувва аст.

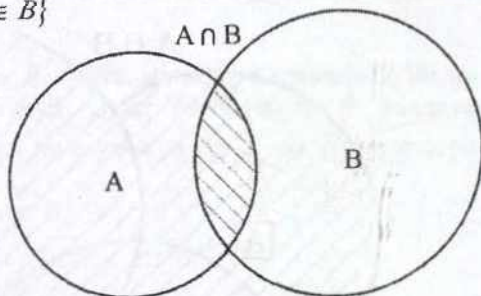
3. Хосияти транзитивӣ. Агар маҷмуи A ба маҷмуи B баробарқувва буда ва маҷмуи B ба маҷмуи C баробарқувва бошад, он гоҳ маҷмуи A ба маҷмуи C баробарқувва мебошад, яъне ду маҷмуи ба маҷмуи сеюм баробарқувва, байни худ баробарқувва аст.

2.4. Буриши маҷмуҳо

Дар математика ба ҷои ибораи “қисми умумии маҷмуъҳо” аз ибораи “буриши маҷмуъҳо” истифода мебаранд.

Бигузор ду маҷмуҳои A ва B дода шуда бошанд. Буриши (зарби) маҷмуҳои A ва B гуфта, маҷмуёро меноманд, ки он аз элементҳои дар як вақт ҳам ба маҷмуи A ва ҳам маҷмуи B мутааллиқ иборат аст. Буриши маҷмуҳоро бо рамзи $A \cap B$, $A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$

ишора мекунанд. Буриши шумораи дилхохи маҷмуҳо айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад. Буриши маҷмуҳоро графикӣ дар намуди қисми умумии ду ё зиёда аз он доираҳои Эйлер – Венн (Расми 2) тасвир намудан қулай ва ба мақсад мувофиқ аст.



Расми 2

Таърифи 7.

Буриши ду маҷмуъ гуфта, маҷмуёро меноманд, ки вай аз элементҳои умумии ин маҷмуъҳо тартиб дода шудааст.

Масалан, агар $A = \{3; 5; 7; 9; 11\}$ ва $B = \{3; 7; 9; 10; 12; 15\}$ бошад, он гоҳ $A \cap B = \{3; 7; 9\}$ мебошад.

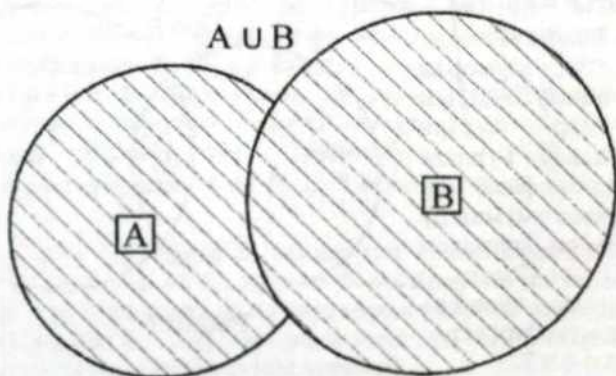
Агар маҷмуи аз сақоҳои сурх ташкилфтаро бо ҳарфи M ва маҷмуи аз сақоҳои сафед ташкилфтаро бо ҳарфи E ишорат кунем, он гоҳ буриши ин ду маҷмуъҳо маҷмуи холӣ мебошад, яъне $M \cap E = \emptyset$. Агар $\emptyset$ бошад, пас мегӯянд, ки ин ду маҷмуъҳо ҳамдигарро намебуранд.

Мисолҳо: 1) $A = \{2n | n \in N\}$ - маҷмӯи ададҳои ба 2 қаратӣ, $B = \{3n | n \in N\}$ - маҷмӯи ададҳои ба 3 қаратӣ, (бебақия тақсимшаванда) аст. $A \cap B = \{6n | n \in N\}$ - ин маҷмӯи ададҳои ба 6 тақсимшаванда мебошад.

2) A - порчаи $[0; 6]$, B - порчаи $[3; 8]$ аст. $A \cap B$ - порчаи $[3; 6]$ мебошад.

2.5. Якҷояшавии маҷмӯҳо

Якҷояшавии ду маҷмӯҳои A ва B гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки он аз ҳамаи элементҳои ақаллан ба яке аз ин маҷмӯҳои A ва B мутааллиқ ташкил ёфтааст. Якҷояшавии маҷмӯҳои A ва B бо рамзи $A \cup B$ ё $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ ишора карда мешавад (Расми 3).



Расми 3

Якҷояшавии шумораи дилҳои маҷмӯҳо ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Таърифи 8. *Якҷояшавии ду маҷмӯъ (ё ки ҷамъи ду маҷмӯъ) гуфта маҷмӯеро меноманд, ки элементҳои аз элементҳои ҳама маҷмӯи якум ва ҳама маҷмӯи дуюм иборат аст.*

Агар ҳамаи маҷмӯи ададҳои ҷуфти натуралӣ бо A ва ҳамаи маҷмӯи ададҳои токи натуралӣ бо B ишорат кунем, он гоҳ якҷояшавии маҷмӯҳои A ва B маҷмӯи ададҳои натуралӣ ташкил медиҳад, яъне $A \cup B = N$.

Мисолҳо:

1) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 12\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 18\}$, он гоҳ

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 12; 18\}$ мешавад.

2) $A = [0; 9]$, $B = [4; 10]$, он гоҳ $A \cup B = [0; 10]$ мешавад.

3) $A = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ададҳои, ки ҳангоми онҳоро ба 6 тақсим намудан бақия ба 2 баробар мешавад. $C = \{6k + 4 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ - ададҳои, ки ҳангоми ба 6 тақсим намудан дар бақия 4 мемонад. Баъзе элементҳои ин маҷмӯҳоро менависем:

$$A = \{\dots, -6; 0; 6; 12; \dots\},$$

$$B = \{\dots, -4; 2; 8; 14; \dots\},$$

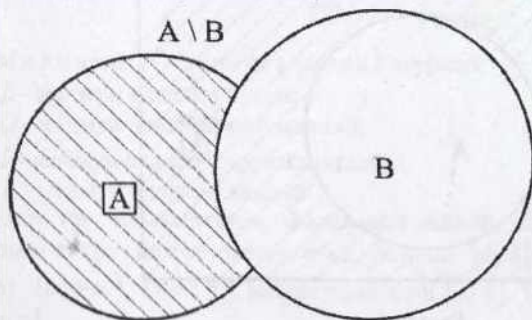
$$C = \{\dots, -2; 4; 10; 16; \dots\}.$$

Аён аст, ки $A \cup B \in C = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ маҷмӯи ададҳои ҷуфт мешавад.

2.6. Фарқи маҷмӯҳо

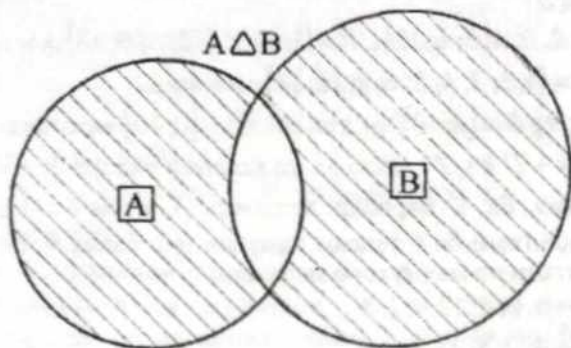
Фарқи маҷмӯҳои A ва B гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки он аз ҳамаи элементҳои маҷмӯи A , ки ба маҷмӯи B тааллуқ надорад, иборат аст. Фарқи маҷмӯҳои A ва B -ро чунин ишора мекунам (Расми 4):

$$A \setminus B \text{ ё } A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}.$$



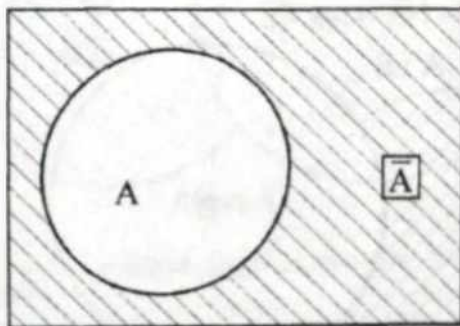
Расми 4

Фарқи симметрии маҷмӯҳои A ва B гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки он аз ҳамаи элементҳои ба яке аз маҷмӯҳои A ё B тааллуқ дошта иборат аст. Фарқи симметрии бо рамзи $A \Delta B$ ишора карда мешавад (Расми 5).



Расми 5

Аксар вақт, ҳангоми ҳалли масъалаҳо маҷмуи универсиалии $\cup$, яъне маҷмуи аз ҳама калони элементҳои дар масъала дида баромадашаванда дохил карда мешавад. Пурракунии маҷмуи A то маҷмуи универсиалии гуфта, маҷмуи элементҳои маҷмуи универсиалиро, ки ба маҷмуи A тааллуқ надорад, меноманд. Пурракунии маҷмуи A -ро бо рамзи $\bar{A} = \cup \setminus A = \{x \mid x \in \cup, x \notin A\}$ ишора мекунанд (Расми 6).



Расми 6

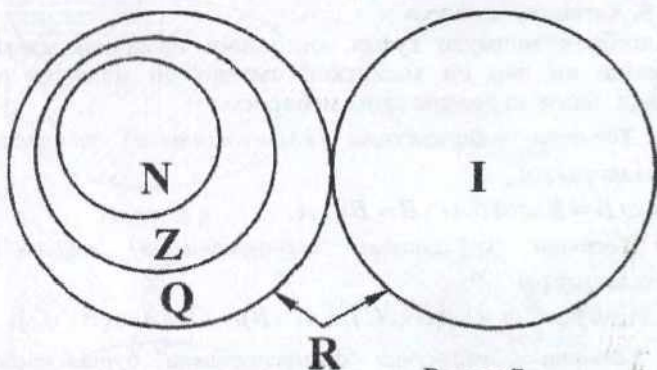
Мисолҳо: 1) $A = [-2; 0)$, $B = [-1; 3)$ аст, он гоҳ $A \setminus B = [-2; -1)$ ва $B \setminus A = [0; 3)$ мешавад.

2) $A = \{2m-1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ аст. Он гоҳ,

$A = \{\dots, -3; -1; 1; 3; \dots\}$, $B = \{\dots, -3; 1; 5; 9; \dots\}$ шуда, аз ин ҷо $A \cap B = \{\dots, -1; 1; 3; \dots\}$ ва $A \setminus B = \{4k-1 | k \in \mathbb{Z}\}$ ҳосил мешавад.

2.7. Маҷмуҳои ададӣ

Объектҳои табиаташон гуногун (ададҳо, калимаҳо, фигураҳои геометрӣ, функцияҳо, ашёҳо, ҳайвонот ва ғайра) элементҳои маҷмуъ шуда метавонанд. Дар математика мавқеи асосиро маҷмуҳе мебозанд, ки элементҳои онҳо объектҳои математикӣ мебошанд. Мо аксар вақт бо маҷмуҳои ададӣ, яъне маҷмуҳе, ки элементҳояшон ададҳо мебошанд, дучор меем (Расми 7).



Расми 7

Мисолҳо: N - маҷмуи ададҳои натуралӣ;

Z - маҷмуи ададҳои бутун;

Q - маҷмуи ададҳои раціоналӣ;

I - маҷмуи ададҳои иррационалӣ;

R - маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ.

Дар ин ҷо маҷмуҳои фосилаҳои ададӣ номидашаванда, мақоми хосро ишғол менамоянд: порчаи $[a; b]$, интервалҳои $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, ниминтервалҳои $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; +\infty]$, $(-\infty; b]$.

Маҷмуи ададӣ ҳангоми ҳалли муодилаҳо ва нобаробариҳо васеъ истифода карда мешаванд.

Мисол. Маҷмуи қиматҳои имконпазири муодилаи зеринро меёбем: $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{x^2-4} = 2$.

$$\text{Х.а.л.} \begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (3 - x)(3 + x) \geq 0, \\ (x - 2)(x + 2) \geq 0. \end{cases}$$

Системаи нобаробариҳои ҳосилшударо бо методи интервалҳо ҳал мекунем:



$$\text{Ҷавоб: } [-3; -2] \cup [2; 3]$$

2.8. Алгебраи маҷмуҳо

Алгебраи маҷмуҳо гуфта, он қисми назарияи маҷмуҳоро меноманд, ки дар он ҳосиятҳои амалҳо бо маҷмуҳо омӯхта мешавад. Баъзе аз онҳоро дида мебароем:

1. *Ҳосияти ҷойивазкунии (коммутативии) якҷояшавӣ ва буриши маҷмуҳо:*

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

2. *Ҳосияти гурӯҳбандии (ассотсиативии) якҷояшавӣ ва буриши маҷмуҳо:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. *Ҳосияти ҷойивазкунии (дистрибутивии) буриши нисбат ба якҷояшавӣ ва баръакс:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$4. A \cup A = A, A \cap A = A;$$

$$5. A \cup U = U; A \cap U = A;$$

$$6. A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$7. A \cup \bar{A} = U; A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

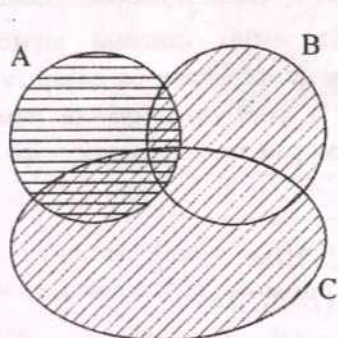
$$8. \bar{\bar{A}} = A;$$

$$9. \bar{U} = \emptyset; \emptyset = U;$$

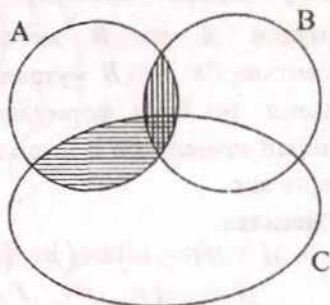
$$10. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \text{ (қонуни де-Морган ё}$$

формулаи дукаратагӣ).

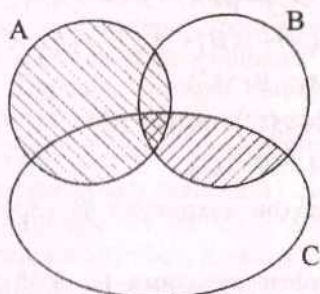
Акнун ба воситаи диаграмаи Эйлер-Венн, яъне аз хосиятҳо, масалан хосияти 3-ро нишон медиҳем. Тарафҳои чап ва рости баробари алоҳида-алоҳида дида мебароем (Расми 8 а, б). Дар расми 8 а диққати моро ба худ маҷмӯи ду маротиба штрих карда ҷалб менамояд, дар расми 8 б бошад, маҷмӯе, ки ақаллан як бор



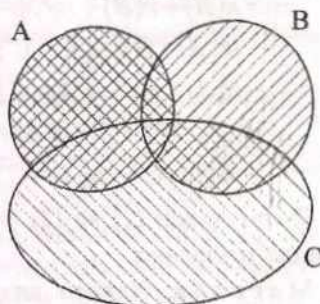
Расми 8 а



Расми 8 б



Расми 9 а



Расми 9 б

штрих карда шудааст, мароқовар аст. Тарафи чапи баробари дуюмро маҷмӯе муайян мекунад, ки он ақаллан як бор штрихонида шудааст (Расми 9 а). Тарафи ростро – маҷмӯе, ки ду маротиба штрихонида шудааст, муайян менамояд (Расми 9 б).

2.9. Формулаи дохилкунӣ ва хориҷкунӣҳо

Бигузур маҷмӯи охирноки A дода шуда бошад. Шумораи элементҳои онро бо $n(A)$ ишора мекунем. Шумораи

элементҳоро, ки ба маҷмӯи $A \cup B$ мутааллиқ аст, меёбем. Формулаи асосии ёфтани шумораи элементҳои суммаи ду маҷмӯҳ:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (1)$$

Дар ҳақиқат, $n(A \cup B)$ - ин суммаи шумораи элементҳои маҷмӯҳи A ва B мебошад, аммо ҳангоми шуморидан элементҳои ба $A \cap B$ мутааллиқ ду маротиба ба назар гирифта шудаанд. Бо ёрии формулаи (1) формулаи муайян намудани шумораи элементҳои суммаи шумораи дилхоҳи маҷмӯҳоро ёфтан мумкин аст.

Масалан,

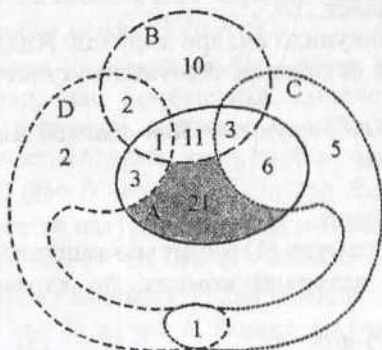
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup (B \cup C)) = \\ &= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) = \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - (n(A \cap B) + n(A \cap C)) - \\ &\quad - n((A \cap B) \cap (A \cap C)) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - \\ &\quad - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (2)$$

Формулаҳои (1) ва (2) формулаҳои дохилкунӣ ва хориҷкунӣ номида мешаванд.

Масъала. Чандто адади чуфти дурақама ба 3, 5 ва 11 тақсим намешавад?

Ҳал. Пеш аз ҳама муайян намудан лозим аст, ки чанд элемент ба маҷмӯи A тааллуқ дорад ва ба дигар маҷмӯҳи мансуб нест. Диаграммаро дида баромада, нишондиҳандаҳои шуморавиро дар соҳаҳои мувофиқ бо тартиби зерин қайд менамоем:

$$\begin{aligned} n(A \cap B \cap C) &= 3, \quad n(A \cap B \cap D) = 1, \\ n(A \cap B) - 3 - 1 &= 11, \quad n(A \cap C) - 3 = 6, \\ n(A \cap D) - 1 &= 3, \\ n(A) - 3 - 1 - 11 - 3 - 6 &= 45 - 24 = 21. \end{aligned}$$



Ҳамин тарик, фақат дар маҷмуи A ададҳои ба 3, 5 ва 11 тақсим нашаванда 21-то будааст.

МАШҚҲО

1. Оё маҷмуи A тахтмаҷмуи маҷмуи B мебошад, агар: A - маҷмуи пойтахтҳои ҷумҳуриҳои Осиёи Миёна, B - маҷмуи шаҳрҳои Осиёи Миёна бошанд?

2. Буриши маҷмуи ҳарфҳои калимаи «математика» бо маҷмуи ҳарфҳои калимаи «грамматика» ёфта шавад.

3. Дода шудааст: $A = \{7; 8; 9; 10\}$ ва $C = \{9; 10; 11; 12\}$. Бо ёрии қавсҳои фигуравӣ нависед: а) $A \cup C = ?$ б) $A \cap C = ?$

4. Маълум аст, ки $x \in R$ мебошад. Маҷмуи ҳалли ҳар яке аз ин муодилаҳоро ёбед. Кадоме аз онҳо маҷмуи ҳолӣ мебошанд?

а) $12x + 5 = 12(x + 21)$; б) $7y + 21 = 5(1,4y + 3,7)$;

в) $4(x - 5) = 5x$; г) $32z + 21 = 3(24z + 37)$;

д) $x^2 + 25 = 16$; е) $9y^2 - 1 = -37$.

§3. Ададҳои бутун ва амалҳо бо онҳо

Мафҳуми адади бутун, ки он яке аз мафҳумҳои асосии математикаи ҳозиразамон аст, ҳанӯз дар замони қадим ба вучуд омада буд.

Фридрих Энгелс дар асари классикии худ «Анти-Дюринг» доир ба масъалаи пайдоиши математика навишта буд: математика ба монанди ҳамаи дигар фанҳо аз эҳтиёҷоти амалии одамон пайдо шудааст: «Математика аз чен кардани масоҳати

китъаҳои замин ва гунҷониши зарфҳо, аз ҳисоб кардани вақт ва аз механика ба вучуд омадааст....».

Натиҷаи ҳаргуна ченкуниҳо ададро медиҳад. Ададҳо гуногун шуда метавонанд, чунки натиҷаҳои ченкуни низ гуногунанд.

I. Адади натуралӣ

Таърифи 1. Ададҳои бутуни мусбат ададҳои натуралӣ ном доранд. Масалан, ададҳои

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \dots \quad (1)$$

ададҳои натуралӣ мебошанд.

Ададҳои натуралӣ намуди (1) маҷмӯро ташкил медиҳад, ки онро маҷмуи ададҳои натуралӣ номида, бо ҳарфи *N* ишора менамоянд.

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \dots\} \quad (2)$$

Маҷмуи ададҳои натуралӣ бо тартиби зиёдшавиашон ҷойгиршударо қатори натуралӣ ҳам меноманд. Адади хурдтарини маҷмуи ададҳои натуралӣ воҳид буда, адади калонтаринаш вучуд надорад, чунки ҳар чӣ қадар адади калонро нагирем, дар натиҷаи ба вай илова кардани воҳид адади навро ҳосил мекунем. Аз ин сабаб маҷмуи ададҳои натуралӣ беохир аст.

Ба қатори маҷмӯҳои элементдор мо маҷмуи ҳолӣ, яъне маҷмӯро дохил мекунем, ки ягонто ҳам элемент надорад. Ба сифати характистикани маҷмуи ҳолӣ адади нави нол дохил карда мешавад. Ҳамин тариқ, 0 ададест, ки маҷмӯи классии маҷмуи ҳолиро баён мекунад. Масалан, агар ба маҷмуи ададҳои натуралӣ ба тартиб овардашуда, адади 0-ро илова намуда, дар пеши адади 1 ҷой диҳем ва онро аз адади натуралӣ дилҳоҳ хурд ҳисоб кунем, дар натиҷа маҷмуи ададҳои натуралӣ ба маҷмӯи $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \dots\}$ -ро ҳосил мекунем. Нол адади бутуни гайриманфист, ки аз паси ҳеҷ қадом адади бутуни гайриманфӣ намеояд.

Ҳаман ададҳои қатори натуралӣ дорон ҳосиятҳои рефлексивӣ (баргардандагӣ), ҳосияти симметрия (табдилёбандагӣ) ва ҳосияти транзитивӣ (ҷойдигаркуни) мебошанд.

1. *Ҳосияти рефлексивӣ.* Адади дилҳоҳи натуралӣ худаш ба худаш баробар аст: $(a = a)$, $a \in N$.

2. *Ҳосияти симметрия.* Агар адади $a \in N$ ба адади $b \in N$ баробар бошад, он гоҳ адади b низ ба адади a баробар аст: $(b = a)$.

3. Хосияти транзитивӣ. Агар адади $a \in N$ ба адади $b \in N$ ва адади $b \in N$ ба адади $c \in N$ баробар бошад, он гоҳ адади a низ ба адади c баробар мебошад ($a = c$).

Агар адади натуралӣ аз ҷадвали амалии инсон ба вучуд омада бошад, пас арифметика амалҳо бо ададҳоро муоина мекунад ва қонунҳои амалҳоро меомӯзад. Дар ин ҷо мо бо чор амали арифметикӣ: ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсим кордор мешавем.

1. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ $m + n = s$, $s \in N$ – суммаи ду адади натуралӣ номида мешавад;

2. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ $m \cdot n = p$, $p \in N$ – ҳосили зарби ду адади натуралӣ номида мешавад;

3. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ

$$r = n - m, \quad r \in N, \text{ агар } n > m,$$

$$r = n - m, \quad r \notin N, \text{ агар } n < m \text{ бошад.}$$

Дар ин ҷо r фарқи ду адади натуралӣ номида мешавад. Масалан, адади 7 аз адади 5 калон аст, бинобар он фарқи ин ду адад мавҷуд ва ба адади натуралии 2 баробар мебошад: $7 - 5 = 2$, $2 \in N$. Адади 7 аз адади 9 хурд аст, фарқи ин ду адади натуралӣ адади натуралӣ нест: $7 - 9 = -2$, $-2 \notin N$.

4. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ $\frac{m}{n} = q$, $q \in N$ – нисбати ду адади натуралӣ меноманд. Дар ин ҷо адади m – ро тақсимшаванда ва адади n – ро тақсимкунанда меноманд.

II. Ададҳои бутун

Таърифи 2. Ададҳои натуралӣ, ададҳои ба онҳо муқобил ва адади нол ададҳои бутун номида мешаванд.

Масалан, ададҳои

$$0; 1; -2; -3; 4; -5; \dots 5999; \dots$$

(3)

ададҳои бутун мебошанд.

Ҷамъбасти ададҳои

$$0; 1; -2; -3; 4; -5; \dots 5999; \dots$$

маҷмун ададҳои бутунро ташкил медиҳад. Маҷмун ададҳои бутунро бо Z ишорат намуда дар шакли

$$Z = \{0; -1; -2; 3; -4; \dots; 999; \dots\}$$

(4)

менависанд.

Мачмун ададҳои бутун Z -ро бо ду тахтмаҷмуҳи Z^+ ва Z^- ҷудо карда навиштан мумкин аст:

$$Z^+ = \{0; 1; 2; 3; \dots\}; \quad Z^- = \{-1; -2; -3; -4; -5; \dots\}$$

Аз ин ҷо,

$$Z = Z^+ \cup Z^-; \quad Z^+ \cap Z^- = \emptyset \text{ мешавад.}$$

Ҳангоми иҷро намудани амалҳои арифметикии ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсими ададҳои бутун аз қонунҳои ҷамъ ва зарб истифода мебаранд.

III. Қонунҳои ҷамъ ва зарб

Ададҳои, ки онҳоро ҷамъ кардан лозим аст, ҷамъшавандаҳои номида мешавад, натиҷаи ҷамъ бошад, яъне адади дар натиҷаи ҷамъкунии пайдошударо, ҳосили ҷамъ меноманд. Дар вақти ҷамъ кардани ададҳо мо ба се қонун: ҷойивазкунии, якҷоякунии ва монотонӣ таъна мекунем.

1. **Қонуни ҷойивазкунии.** Аз иваз кардани ҷои ҷамъшавандаҳои ҳосили ҷамъ тағйир намеёбад. Агар a ва b ададҳои дилхоҳ бошанд, он гоҳ $a + b = b + a$ мешавад.

2. **Қонуни якҷоякунии.** Агар ҷамъшавандаҳои дилхоҳро ба гурӯҳҳо ҷудо карда, ҷамъ кунему баъд натиҷаҳоро ҷамъ кунем, аз ин ҳосили ҷамъ тағйир намеёбад. Яъне, барои қиматҳои дилхоҳи a ; b ва c :

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

3. **Ҳосили ҷамъи монотонӣ.** а) Агар ду ададҳои a ва a_1 баробар бошанд, он гоҳ дар натиҷаи бо ягон адади дигари b ҷамъ кардани ҳар яки аз ин ададҳо ҳосили ҷамъи баробар ҳосил мешавад, яъне аз $a = a_1$ бармеояд, ки $a + b = a_1 + b$.

б) Агар яке аз ададҳои додашудаи a аз дигараш a_1 калон ё хурд бошад ва ба онҳо ягон адади $b > 0$ -ро ҷамъ кунем, он гоҳ ҳосили ҷамъи якум назар ба дуюм мувофиқан калон ё хурд мешавад, яъне аз $a > a_1$ бармеояд, ки $a + b > a_1 + b$ аст. Зарб гуфта, чунин амалро меноманд, ки вай аз ёфтани ҳосили ҷамъи ҷамъшавандаҳои якхела иборат аст.

Масалан: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5 = 15$;

$$a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a, \quad a > 0.$$

Ҳамин тарик, ададе, ки ҷамъшаванда мебошад, зарбшаванда номида мешавад ва ададе, ки шумораи ҷамъшавандаҳои якхеларо

нишон медиҳад, зарбкунанда номида мешавад. Натиҷаи амалро, яъне адади дар натиҷаи зарб ҳосилшударо, ҳосили зарб меноманд. Дар бисёр ҳолатҳо зарбшаванда ва зарбкунандаро ҳамзарбҳо ҳам меноманд.

Амали зарб ҳамеша иҷрошаванда буда, дар вақти маълум будани ҳамзарбҳо натиҷаи ягона медиҳад. Масалан, барои ҳаргуна ададҳои дилхоҳи $a > 0$ ва $b > 0$ баробарии зерин қой дорад: $a \cdot b = ab$, дар ин ҷо a — зарбшаванда ва b — зарбкунанда мебошад.

Дар оянда ҳангоми иҷро намудани амали зарб мо ба се қонун: қойивазкунӣ, якҷоякунӣ ва тақсимот таъя мекунем.

1. Қонуни қойивазкунӣ. *Аз иваз намудани ҷои ҳамзарбҳо ҳосили зарб тағйир намеёбад. Яъне барои ҳаргуна ададҳои дилхоҳи a ва b баробарии зерин $a \cdot b = b \cdot a$ қой дорад.*

Масалан, аз $5 \cdot 7 = 35$ ва $7 \cdot 5 = 35$ бармеояд, ки $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$ мебошад.

2. Қонуни якҷоякунӣ. *Агар ягон гурӯҳи зарбшавандаҳои паси ҳам истодаро бо ҳосили зарбашон иваз кунем, аз ин ҳосили зарб тағйир намеёбад. Дар ҳақиқат барои қиматҳои дилхоҳи a , b ва c чунин амали зарб қой дорад:*

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

Масалан, $3 \cdot 5 = 15$ ва $15 \cdot 4 = 60$ бармеояд, ки $3 \cdot 5 \cdot 4 = (3 \cdot 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$ мебошад.

3. Қонуни тақсимот. *Ҳосили зарби суммаи якчанд адад ба ягон адад бар суммаи ҳосили зарби ҳар як ҷамъшаванда ба ин адад баробар аст. Яъне, барои ададҳои дилхоҳи a , b , c ва d чунин баробарии қой дорад:*

$$(a + b + c)d = a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d.$$

Масалан, аз иҷрои амалҳои

$$8 \cdot 3 = 24; 4 \cdot 3 = 12; 24 + 12 = 36$$

бармеояд, ки $8 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = (8 + 4) \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36$ мебошад.

Барои ба адад зарб задани фарқ (ҳосили тарҳ) камшаванда ва камкунандаро алоҳида-алоҳида ба ин адад зарб зада, баъд аз ҳосили зарби якум ҳосили зарби дуюмро тарҳ кардан кифоя аст, яъне инро ба намуди умумӣ ин тавр ифода кардан мумкин аст:

$$(a - b)c = a \cdot c - bc.$$

Масалан, аз иҷрои амалҳои

$$4 \cdot 3 = 12; 2 \cdot 3 = 6; 12 - 6 = 6$$

бармеояд, ки $(4 - 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6$ мебошад.

Амалҳои тарҳ ва тақсими ҳамчун амалҳои баракси ҳам ва зарб дида баромадан мумкин аст.

Тарҳ гуфта, чунин амалро меноманд, ки ба воситаи вай аз рӯи ҳосили ҳамин маълум ва яке аз ҳамшавандаи маълум ҳамшавандаи дигар ёфта мешавад.

Ададе, ки аз вай тарҳ мекунад, камшаванда ва ададе, ки онро тарҳ мекунад, камкунанда номида мешаванд.

Ададе, ки дар натиҷаи иҷрои ин амал ҳосил мешавад, фарқ ё ҳосили тарҳ меноманд. Аз адади a тарҳ кардани адади b ёфтани чунин адади c мебошад, ки ҳангоми онро бо адади b ҳам кардан, a ҳосил мешавад, яъне $a - b = c$ бошад $b + c = a$ мешавад. Дар ин ҳо c -ро фарқи ададҳои a ва b , адади a -ро камшаванда ва адади b -ро камкунанда меноманд.

Тақсим гуфта, чунин амали арифметикиро меноманд, ки бо ёрии он аз рӯи ҳосили зарби ду адад ва яке аз онҳо адади дигар ёфта мешавад.

Адади a -ро ба адади b тақсим кардан ин ёфтани чунин адади c мебошад, ки барои ҳосил кардани адади a онро бо адади b зарб задан лозим аст, яъне $b \cdot c = a$. Дар ин ҳо адади c -ро ҳосили тақсими ададҳои a ва b , адади a -ро тақсимшаванда, адади b -ро тақсимкунанда меноманд. Ҳамин тариқ, тақсими адади a ба адади b бо ду тарз навишта мешавад:

$$1) a : b = c \quad \text{ё} \quad 2) \frac{a}{b} = c.$$

Тақсим на ҳама вақт иҷрошаванда аст. Ҳангоми иҷро намудани амалҳои арифметикӣ аз ҳосиятҳои амалҳои ҳам, зарб ва тақсим истифода мебаранд.

IV. Ҳосиятҳои асосӣ

1. Агар яке аз ҳамшавандаҳо ба нол баробар бошад, он гоҳ сумма ба ҳамшавандаи дигар баробар мешавад. Яъне, баробариҳои $a + 0 = a$ ва $0 + a = a$ барои қиматҳои дилхоҳи a дуруст мебошад. Масалан, $6 + 0 = 6$; $0 + 6 = 6$.

2. Агар зарбкунанда воҳид бошад, он гоҳ ҳосили зарб ба зарбкунанда баробар мешавад. Яъне, $a \cdot 1 = a$; $1 \cdot a = a$ барои қиматҳои дилхоҳи a дуруст аст.

Масалан: $5 \cdot 1 = 5$; $1 \cdot 5 = 5$.

3. Агар яке аз ҳамзарбҳо нол бошад, он гоҳ ҳосили зарб ба нол баробар мешавад: $a \cdot 0 = 0$; $0 \cdot a = 0$.

Масалан: $7 \cdot 0 = 0$; $-4 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 7 = 0$; $0 \cdot (-4) = 0$.

Агар тақсимшаванда баробари нол бошад, он гоҳ ҳосили тақсим ҳам ба нол баробар мешавад. Яъне, дар мавриди $a = 0$ будан $a : b = 0$ мешавад, чунки $b \cdot 0 = 0$ аст. Масалан, $\frac{0}{5} = 0$, чунки $5 \cdot 0 = 0$ аст.

4. Агар тақсимкунанда ба воҳид баробар бошад, он гоҳ ҳосили тақсим ба тақсимшаванда баробар мешавад.

Масалан: $5 : 1 = 5$, чунки $1 \cdot 5 = 5$ аст;

$\frac{6}{1} = 6$, чунки $1 \cdot 6 = 6$ аст.

5. Агар тақсимшаванда a ба нол баробар набошад ва тақсимкунанда b ба нол баробар бошад, он гоҳ ҳосили тақсимо ёфташ мумкин нест, чунки ададе ёфт намешавад, ки ҳангоми онро ба нол зарб задан адади a ҳосил шавад. Аз ҳамин сабаб ягон ададро ба нол тақсим кардан мумкин нест, аз ҷумла 0-ро ба 0 ҳам тақсим кардан мумкин нест, чунки ифодаи $\frac{0}{0}$ ҳеҷ гуна қимати ададиёро ифода намекунад.

Ададҳои бутун ҷуфт ва тоқ шуда метавонанд. Адади бутунро адади ҷуфт меноманд, агар вай ба 2 тақсим шавад ва адади тоқ меноманд, агар вай ба 2 бебақия тақсим нашавад. Нол - адади ҷуфт аст.

Масалан, ададҳои 12; 14;22 - ро ададҳои ҷуфт меноманд, чунки ин ададҳо ба 2 тақсим мешаванд. Ададҳои 13; 15; 17;31-ро ададҳои тоқ меноманд, чунки ба 2 бебақия тақсим намешаванд.

Теорема. Агар адади b тақсимкунандаи ададҳои a_1 ва a_2 бошад, он гоҳ b тақсимкунандаи суммаи $a_1 + a_2$ ҳам мебошад (исботаш ба ҳонандаи пешниҳод карда мешавад).

V. Тақсими бақиянок

Чӣ хеле, ки мо дар боло хотиррасон кардем, ҳангоми адади a -ро ба адади b тақсим кардан, дар ҳосили тақсим на ҳама вақт адади бутун ҳосил мешавад. **Масалан,** адади 51-ро ба адади 8

тақсим кардан мумкин нест, чунки адади бутуне нест, ки ҳангоми онро ба 8 зарб задан адади 51 ҳосил шавад. Агар 51-ро ба 8 тақсим кунем дар натиҷа 6 то расида, 3 то бақия менамояд. Дар ин ҷо 51-ро тақсимшаванда ва адади 8-ро тақсимкунанда меноманд: адади 6 ҳосили тақсими нопурра ва адади 3 бақияи тақсим мебошад.

Дар ин ҳолат амали тақсимро тақсими бақиянок меноманд. Яъне, агар дар вақти қимати дилхоҳи a -ро ба қимати дилхоҳи b тақсим кардан, ҳосили тақсими нопурра q ва бақия r ҳосил шавад, он гоҳ онро дар намуди зерин менависанд:

$$a : b = q \text{ (бақия } r), \text{ ё ки } \frac{a}{b} = q \text{ (бақия } r).$$

Аз ин навишт истифода бурда, мо мисоли дар боло муоина кардашударо дар ин намуд менависем:

$$51 : 8 = 6 \text{ (бақия } 3) \text{ ё ки } \frac{51}{8} = 6 \text{ (бақия } 3).$$

Аз тарафи дигар таърифи умумии тақсими бақиянокро дар намуди зерин додан мумкин аст.

Таъриф. Адади a -ро ба адади b ($b > 0$) тақсим кардан ин ёфтани чунин ду ададҳои q (ҳосили тақсим) ва r (бақия) мебошад, ки онҳо вобастагии зеринро қаноат мекунонанд:

$$a = b \cdot q + r \text{ ва } 0 \leq r < b.$$

Дар ин ҷо бақияи дар натиҷаи тақсим ҳосил шуда ҳамеша бояд аз тақсимкунанда хурд бошад. **Масалан:**

$$\frac{37}{5} = 7 \text{ (бақия } 2); \quad \frac{55}{9} = 6 \text{ (бақия } 1), \text{ чунки}$$

$$37 = 5 \cdot 7 + 2; \quad 55 = 9 \cdot 6 + 1$$

мешаванд.

VI. Амалҳо бо ададҳои бутун

Чор амали дида баромада – ҷамъ, тарҳ, зарб, тақсимро ба ду дараҷа ҷудо кардан қабул шудааст. Ду амали аввала, яъне ҷамъу тарҳро амалҳои дараҷаи якум ва ду амали охири, яъне зарбу тақсимро амалҳои дараҷаи дуум меноманд. Ҳамин тариқ, дар таркиби ҳар як дараҷа як амали рост ва як амали ба вай ҷаппа мавҷуд аст. Бинобар он, дар вақти иҷро намудани амалҳои арифметикӣ ба тартиби навишти амалҳо аҳамият дода мешавад.

Мо ҳар гуна маҷмуи ададҳо ва аломатҳоеро, ки бо ин ададҳо
чи гуна амалҳо иҷро карда шуданаширо нишон медиҳанд, ифодаи
арифметикӣ меномем. **Масалан:**

$$25 + 12 - 8$$

амалҳои дараҷаи якум;

$$45 - 23 + 9$$

$$80 : 22 : 11$$

амалҳои дараҷаи дуум;

$$64 : 16 : 13$$

$$60 : 12 : 6 + 45$$

$$80 : 16 : 5 - 12 \quad \text{амалҳои дараҷаи якуму дуум.}$$

$$35 + 25 : 12 : 30$$

1. Ҳангоми ҳисоби ифодаҳои арифметикӣ, ки дорои амалҳои
якдараҷаанду қавсҳо надоранд, амалҳо бо ҳамон тартиби
навишташудаашон, ба тариқи сода (аз чап ба рост) иҷро карда
мешаванд.

Мисоли 1. $125 - 25 + 20 - 45 + 65 = 100 + 20 - 45 + 65 =$
 $= 120 - 45 + 65 = 75 + 65 = 140.$

Мисоли 2. $225 : 9 : 4 : 2 : 5 = 25 : 4 : 2 : 5 = 100 : 2 : 5 = 50 : 5 = 10.$

2. Агар ифодаи арифметикӣ қавсҳо надарошта бошад, вале
дорои амалҳои дараҷаи гуногун бошад, он гоҳ аввал амалҳои
зарб ва тақсим, баъд амалҳои ҷамъ ва тарҳ иҷро карда мешаванд.

Мисоли 3. $12 \cdot 5 + 225 : 25 - 144 : 24 - 36 : 6 + 8 \cdot 2.$

Ҳал. а) Амалҳои зарб ва тақсими иҷро менамоем:

1) $12 \cdot 5 = 60;$ 2) $225 : 25 = 9;$

3) $144 : 24 = 6;$ 4) $36 : 6 = 6;$ 5) $8 \cdot 2 = 16.$

б) Амалҳои ҷамъ ва тарҳро иҷро менамоем:

$$60 + 9 - 6 - 6 + 16 = 48 + 9 + 16 = 48 + 25 = 73.$$

3. Барои ҷамъ кардани ададҳои манфӣ ва ададҳои мусбат аз
қонуни ҷамъ истифода мебаранд. Суммаи ду адади манфӣ, адади
манфӣ мебошад, ки бузургии мутлақаш ба ҳосили ҷамъи бузургии
мутлақи ҷамъшавандаҳо баробар аст. Чун қоида дар вақти
навиштани сумма ҷамъшавандаи якумро одатан беқавс менависанд.

Мисоли 4. $-25 + (-15) = -40;$

$$-5 + (-19) = -24;$$

$$-32 + (-112) = -144;$$

$$|-40| = |-25| + |-15|; |-24| = |-5| + |-19|;$$

$$|-144| = |-32| + |-112|.$$

4. Агар ададҳои додашуда аломатҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ барои ёфтани суммаи онҳо аз адади қимати мутлақаш калонтар адади қимати мутлақаш хурдтарро тарҳ кардан зарур аст. Дар ин маврид аломати сумма бо аломати адади қимати мутлақаш калон якхела аст.

Мисоли 5. $9 + (-12) = -3$; $12 + (-4) = +8$; $105 + (-95) = +10$;

$$|-3| = |-12| - |9|; |8| = |12| - |4|; |10| = |105| - |95|.$$

5. Дар вақти аз як адад, адади дигарро тарҳ кардан аз қоидаи зерин истифода мебаранд: аз адади калон, адади хурдро тарҳ карда ба наздаш аломати адади калонро мегузоранд.

Мисоли 6. $45 - 15 = +30$; $105 - 115 = -10$; $125 - 175 = -50$;

$$75 - 87 = -12; 95 - 65 = +30; 91 - 89 = +2.$$

6. Дар вақти адади манфиро аз адади манфии дигар тарҳ кардан аз қоидаи зерин истифода мебаранд: ба камшаванда адади ба камкунанда муқобилро ҷамъ кардан кифоя аст.

Мисоли 7. $-55 - (-15) = -55 + 15 = -40$;

$$-40 - (-30) = -40 + 30 = -10.$$

7. Ҳосили зарби (тақсими) ду адади манфӣ адади мусбат мебошад. Барои ёфтани қимати мутлақи ҳосили зарб (тақсим) қимати мутлақи ин ададҳоро зарб (тақсим) кардан лозим аст.

Масалан: $(-a) \cdot (-b) = ab$; $(-a) : (-b) = \frac{a}{b}$;

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \left| \frac{a}{b} \right| = |a| : |b|; b > 0.$$

Мисоли 8. $(-5) \cdot (-7) = 35$;

$$|35| = |-5| \cdot |-7|;$$

$$(-15) \cdot (-12) = 180;$$

$$|180| = |-15| \cdot |-12|;$$

$$(-44) : (-4) = 11;$$

$$|11| = |-44| : |-4|;$$

$$(-169) : (-13) = 13;$$

$$|13| = |-169| : |-13|.$$

8. Ҳосили зарби (тақсими) ду адади аломаташон гуногун адади манфӣ мебошад. Барои ёфтани қимати мутлақи ҳосили зарб (тақсим) қимати мутлақи ин ададҳоро зарб (тақсим) кардан лозим аст.

Масалан: $(-a) \cdot b = -ab$; $a \cdot (-b) = -ab$; $(-a) : b = -\frac{a}{b}$;

$$|-ab| = |-a| \cdot |b|; |-ab| = |a| \cdot |-b|; \left| -\frac{a}{b} \right| = |-a| : |b|, b > 0.$$

Мисоли 9. $(-12) \cdot 4 = -48$; $(-72) : 36 = -2$; $24 \cdot (-5) = -120$;

$$|-48| = |-12| \cdot |4|; |-2| = |-72| : |36|; |-120| = |24| \cdot |-5|.$$

Агар ифодаи арифметикӣ қавсҳо дошта бошад, он гоҳ аввал амалҳои дар қавсҳо буда иҷро карда мешаванд.

Мисоли 10. Ҳисоб кунед: $120 + 5 \cdot (72 - 2 \cdot (42 - 36))$

$$1) 42 - 36 = 6; \quad 2) 6 \cdot 2 = 12; \quad 3) 72 - 12 = 60;$$

$$4) 60 \cdot 5 = 300; \quad 5) 120 + 300 = 420.$$

Мисоли 11. Қавсҳоро кушода, қимати ифодаро ёбед:

$$-4 + 8 + (12 - 8) = -4 + 8 + 12 - 8 = +8;$$

$$5 + 9 - (10 - 21) = 5 + 9 - 10 + 21 = +25.$$

Агар ҳангоми иҷро намудани амали зарб ё ки қушодани қавсҳо ҳамаи ҷамъшавандаҳо зарбкунандани умумӣ дошта бошанд, он гоҳ аз (қоидаи) қонуни тақсимоти зарб истифода бурда, зарбшавандаи умумиро аз қавс бароварда, дар қавс суммаи коэффитсиентҳои ҳамаи ҷамъшавандаҳоро навиштан лозим аст.

Агар сумма ҷамъшавандаҳои монандиро дошта бошад, он гоҳ аз қоидаи ислоҳ кардани ҷамъшавандаҳои монанд истифода мебаранд. Барои ислоҳ кардани ҷамъшавандаҳои монанд коэффитсиентҳои онҳоро ҷамъ карда, ба сумма қисми умумии ҳарфиро зарб кардан лозим аст.

МАШҚҲО

1. Ҷамъро иҷро кунед:

$$(+5) + (+4) = ; \quad (-4) + (-7) = ;$$

$$(+15) + (-7) = ; \quad (-12) + (+16) = .$$

2. Дар ҳолати қиматҳои адабии зерин доштани ҳарфҳо дурустии баробарии $a + b = b + a$ -ро санҷед:

$$a = 7, b = -4; a = -8, b = -6;$$

$$a = -5, b = 3; a = 1, b = 0.$$

3. Баробарии $a + b + c = a + (b + c)$ ҳангоми

$$a=3, b=-5, c=-4; a=-7, b=5, c=-4;$$

$$a=-2, b=-5, c=-7 \text{ ва } a=5, b=4, c=-5$$

будан, санҷида шавад.

4. Тархро иҷро кунед:

$$(+5)-(+3)=; \quad (+15)-(-12)=;$$

$$(-7)-(+4)=; \quad (-2)-(-7)=;$$

$$(+15)-(-4)=; \quad (-6)-(+6)-(-12)=.$$

5. Амалхоро иҷро кунед:

$$-23 \cdot (-12) \cdot (-5)=;$$

$$6 - ((-3) + (-7)) - ((-1) - (-5) - (-8))=;$$

$$10 - ((-9) + (-1) - (-12))=;$$

$$(-4) - (-5) - ((-8) - ((-5) + (-2) - (-12)))=.$$

6. Амалхоро иҷро кунед:

$$(+20) \cdot (+4)=; \quad (-7) \cdot (-4)=;$$

$$(-40) \cdot (+3)=; \quad (+15) \cdot (-3)=;$$

$$(-4) \cdot (+38) \cdot (-24)=; \quad (-4) \cdot (-5) \cdot (-15)=;$$

$$(-12) : (-4) + (-15) : (+5)=;$$

$$((-4) - (-5)) : (+3)=;$$

$$(-12) : ((-3) + (-15)) : (+3)=;$$

$$(-52) : ((-6) - (-19)) : (-2)=.$$

§4. Аладҳои сода ва таркибӣ

Таърифи 1. Адади натуралиро тақсимкунандаи адади $a \in N$ меноманд, агар он ба адади a бебақия тақсим шавад.

Масалан: а) Адади 16, 5-то тақсимкунанда дорад:

$$\frac{16}{1}, \frac{16}{2}, \frac{16}{4}, \frac{16}{8}, \frac{16}{16}.$$

Дар ин ҷо 1; 2; 4; 8; 16 - тақсимкунандаҳои адади 16 мебошанд.

б) Адади 24, 8-то тақсимкунанда дорад:

$$\frac{24}{1}, \frac{24}{2}, \frac{24}{3}, \frac{24}{4}, \frac{24}{6}, \frac{24}{8}, \frac{24}{12}, \frac{24}{24}.$$

Дар ин ҷо 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 - тақсимкунандаҳои адади 24 мебошанд.

Чи тавре, ки мебинем барои ҳар гуна адад, ки ба 1 баробар нест, воҳид ва худӣ адад тақсимкунандаи он мебошанд.

Таърифи 2. Адади натуралӣ, ки фақат дорои ду тақсимкунанда: воҳид ва худӣ адад мебошад, адади сода номида мешавад.

Таърифи 3. Адади натуралӣ, ки аз дуто зиёд тақсимкунанда дорад, адади таркибӣ номида мешавад.

Масалан, ададҳои 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16;.... мисолҳои ададҳои таркибӣ шуда метавонанд, чунки ин ададҳо аз дуто зиёд тақсимкунанда доранд, **масалан,** адади 12, 6-то ва адади 16 бошад, 5-то тақсимкунанда доранд.

Дар байни ададҳои натуралӣ ададе ҳаст, ки на ба адади сода ва на ба адади таркибӣ тааллуқ дорад. Ин адад 1 аст, чунки вай дорои як тақсимкунанда мебошад. Ҳамин тарик, маҷмӯи ададҳои натуралӣ аз воҳид, ададҳои сода ва таркибӣ иборатанд.

Дар ин ҷо се категорияи ададҳои натуралӣро фарқ кардан лозим аст: ба категорияи якум танҳо воҳид, ба категорияи дуюм ададҳои сода ва ба категорияи сеюм ададҳои таркибӣ мансубанд.

Ба зарбкунандаҳои сода ҷудо кардани ададҳоро дида мебароем. Ҳар як адади таркибиро дар намуди ҳосили зарби ададҳои сода навиштан мумкин аст. Барои ин аломатҳои тақсимшавии ададҳоро доништан лозим аст.

Яке аз тарзҳои ба зарбкунандаҳои сода ҷудо кардани ададҳои таркибиро дида мебароем. Барои ин аз аломатҳои тақсимшавии ададҳо истифода бурда хурдтарин адади содаро меёбем. Баъд адади додашударо ба адади ёфташуда тақсим карда, хурдтарин тақсимкунандаи содаи ҳосили тақсими пайдошударо меёбем. Ин тақсимкуниро то дар ҳосили тақсим ҳосил шудани адади сода давом медиҳанд.

Масалан, адади 330-ро ба зарбкунандаҳои сода ҷудо мекунем:

330	2
165	3
55	5
11	11
1	

Инак, адади 330-ро дар намуди ҳосили зарби ҳамзарбҳои сода менависем: $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.

§5. Тақсимкунандаи умумӣ ва каратноқӣ

Бигзор ададҳои $a; b; c; d; \dots$ ададҳои натуралӣ бошанд.

Таърифи 1. Агар ададҳои натуралӣ $a; b; c; \dots$ ба адади натуралӣ d бутун тақсим шаванд, он гоҳ адади d

тақсимунадаи умумӣ номида мешавад. Дар байни онҳо калонтаринашро калонтарин тақсимунадаи умумии адад меноманд ва мухтасар (KTY) менависанд.

Агар KTY -и ададҳои $a; b; c; \dots$ ба 1 баробар бошад, пас ин ададхоро байни худ сода меноманд. Масалан, ададҳои 48 ва 36 ба 2; 3; 4; 6 ва 12 тақсим мешаванд. Ҳамаи ин ададҳо тақсимунадаи умумии ададҳои 48 ва 36 мебошанд. Адади 12, калонтаринаш тақсимунадаи умумии онҳост, яъне $KTY(48;36)=12$. Ададҳои 49 ва 35 ба 7 тақсим мешаванд, бинобар ин $KTY(49;35)=7$. Адади 35 ба 5 ва 7, адади 24 бошад, ба 8 ва 3 тақсим мешаванд, пас $KTY(35;24)=1$ аст, чунки ададҳои 35 ва 24 байни худ сода мебошанд.

Таърифи 2. Каратнокӣ адади a гуфта, чунин адади натуралӣ k -ро меноманд, ки вай ба адади a бутун (бебақия) тақсим шавад.

Ҳар гуна адади натуралӣ, ки ба ҳар яки ададҳои натуралӣ $a; b; c; \dots$ бутун (бебақия) тақсим мешавад, каратноки умумии ин ададҳо номида мешавад. Дар байни онҳо аз ҳама хурдтаринашро хурдтарин каратноки умумии ададҳои додашуда меноманд ва мухтасар XKY менависанд.

Мисол. XKY -и ададҳои 72 ва 60 ёфта шавад.

Ҳал. Азбаски $72=8 \cdot 9=2^3 \cdot 3^2$ ва $60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$ мебошанд, бинобар ин XKY -и ададҳои 72 ва 60 ба $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5=8 \cdot 9 \cdot 5=360$ ё ки $XKY(60; 72)=360$ баробар аст.

§6. Аломатҳои тақсимшавӣ ба 2, 5, 10, 3 ва 9

Дар бисёр ҳолатҳо тақсимиро иҷро накарда, як адад ба адади дигар бутун (бебақия) тақсим шуданашро муайян кардан лозим меояд. Масалан, саволе ба миён меояд, ки адади 156 ба адади 3 бутун тақсим мешавад ё не? Барои ба ин савол ҷавоб додан, адади 156-ро ба адади 3 тақсим кардан лозим аст, вале ин тарзи кор он қадар қулай нест. Барои амали тақсими иҷро накарда, ба адади бутун тақсим шудан ё нашудани ин ду ададро фаҳмидан, бояд чунин нишонаҳои ададхоро, ки дар бораи тақсимшавандагии ададҳо маълумот медиҳанд, дида бароем.

Таърифи 1. Ба адади 2 ($\bar{e}$ ки ба 5) фақат ва фақат он ададҳое тақсим мешаванд, ки воҳидашон ба 2 ($\bar{e}$ ки мувофиқан ба

5) тақсим шавад ё ки нол бошад. Масалан, ададҳои 120, 720, 1120 ба ададҳои 2 ва 5 тақсим мешаванд, чунки онҳо бо нол тамом шудаанд.

Таърифи 2. Ба адади 4 фақат ва фақат он ададҳои тақсим мешаванд, ки ду рақами охиринашон нол бошад, ё ки ба 4 тақсим шавад. Масалан, ададҳои 212, 712, 936, 1032, 700, 1200 ва дигарҳо ба адади 4 тақсим мешаванд, чунки ду рақами ин ададҳо ба 4 тақсим мешавад, ё ноланд.

Таърифи 3. ба адади 3 (ва ё ба 9) фақат ва фақат он ададҳои тақсим мешаванд, ки суммаи рақамҳои он ба 3 (ё ки мувофиқан ба 9) тақсим шаванд. Масалан, ададҳои 135, 378, 856, 999, 2016 ва дигарҳо ба ададҳои 3 ва 9 тақсим мешаванд, чунки суммаи рақамҳои онҳо ба адади 3 ва ҳам ба адади 9 тақсим мешавад.

Таърифи 4. Қимати миёнаи якчанд адади натуралӣ (ё ки миёнаи арифметикии якчанд адад) гуфта, ҳосили тақсимеро меноманд, ки он дар натиҷаи суммаи ин ададҳо ба миқдори онҳо тақсим кардан ҳосил шудааст.

Масалан, ададҳои a, b, c ва d - ададҳои натуралӣ бошанд, он гоҳ қимати миёнаи арифметикии ин чор адад ба $\frac{a+b+c+d}{4}$ баробар аст.

§7. Касрҳои одӣ

Мо ҳосиятҳои ададҳои бутун ва бо онҳо иҷро намудани амалҳоро дида баромадем. Ғайр аз ададҳои бутун боз ададҳои касрӣ ҳам ҳастанд, ки мо дар ин параграф бо онҳо шинос мешавем. Чӣ хеле ки дар боло (§3) муоина кардем, натиҷаи ченкунӣ гуногун шуда метавонад. Ин натиҷа ададҳои бутун ва ҳам ададҳои касрӣ шуданаш мумкин аст.

Адади аз як ё якчанд ҳиссаҳои баробари воҳид тартиб додашударо каср меноманд. Мафҳуми дигари пайдошавии касрҳо ин амали тақсим мебошад.

Бигузор $a \in \mathbb{Z}$ ва $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ бошанд. Натиҷаи тақсими ду адади бутуни a ва b -ро дар намуди $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ навиштан мумкин аст.

Таърифи 1. Адади намуди $\frac{a}{b}$, ки $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ аст, касри одӣ номида мешавад. Дар ин ҷо a -ро сурат ва b -ро махраҷи

каср меноманд. Муқоисакунии касрҳои одиро аз рӯи нишонаҳои зерин мушоҳида кардан мумкин аст.

Агар a, b, c, d - ададҳои бутуни ғайринолӣ бошанд, он гоҳ:

а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ мешавад, агар $a \cdot d = b \cdot c$ бошад;

б) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ мешавад, агар $b \cdot d (a \cdot d - b \cdot c) > 0$ бошад;

в) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ мешавад, агар $b \cdot d (a \cdot d - b \cdot c) < 0$ бошад.

Таърифи 2. Агар сурат ва махраҷи касрро ба ҳамон як адади натуралӣ зарб ё тақсим кунем, он гоҳ касри ба касри додашуда баробарро ҳосил мекунем:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}, m \in N$$

Мисоли 1. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$ ё ки $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Мувофиқи таъриф баробарии касрҳоро месанҷем:

$$3 \cdot 8 = 4 \cdot 6; 24 = 24.$$

Мисоли 2. $\frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12}$ ё ки $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Дар ин ҷо ҳам баробарии касрҳоро дар асоси таъриф месанҷем: $24 \cdot 3 = 36 \cdot 2; 72 = 72$.

Пас, касрҳои додашуда баробаранд.

Агар сурат ва махраҷи каср зарбкунандаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ барои соқит кардани ин зарбкунанда аз қоидаи ихтисори касрҳо истифода мебаранд, ки вай чунин аст.

Таърифи 3. Тарзи ба як адад тақсим намудани сурату махраҷи каср, яъне ба касри аз ҷиҳати бузургӣ ба касри аввала баробар, вале аъзоҳои хурд иваз кардани он, ихтисори каср номида мешавад.

Мисоли 3. Касри $\frac{14}{21}$ -ро ихтисор намуда, касри $\frac{2}{3}$ -ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7}$ аст.

Мисоли 4. Касри $\frac{90}{105}$ -ро ихтисор намуда, касри $\frac{6}{7}$ -ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{90}{105} = \frac{15 \cdot 6}{15 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{6}{7}$ мебошад.

Мисоли 5. Касри $\frac{240}{560}$ -ро ихтисор намуда, касри $\frac{3}{7}$ -ро

ҳосил мекунем, чунки $\frac{240}{560} = \frac{16 \cdot 3 \cdot 5}{16 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{3}{7}$ мебошад.

Аз тарафи дигар касрҳо гуногун шуда метавонанд: касрҳои дуруст, касрҳои нодуруст ва омехта (ададҳои омехта).

Таърифи 4. Касри $\frac{a}{b}$ ($a \in N$, $b \in N$, $b \neq 0$) касри дуруст номида мешавад, агар $a < b$ бошад ва касри нодуруст номида мешавад, агар $a > b$ бошад. Масалан, касрҳои

$$\frac{3}{5}, \frac{11}{15}, \frac{24}{25}, \frac{71}{85}, \frac{100}{103}, \frac{109}{110}, \dots$$

мисолҳои касри дуруст шуда метавонанд, лекин касрҳои

$$\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{21}{14}, \frac{55}{45}, \frac{100}{95}, \frac{300}{245}, \dots$$

мисоли касри нодурустанд.

Таърифи 5. Ададҳои, ки ба таркибашон адади бутун ва каср дохиланд, ададҳои омехта номида мешаванд. Масалан, касри $\frac{19}{10}$ аз як адади бутун ва касри дурусти $\frac{9}{10}$ иборат аст, яъне адади $1\frac{9}{10}$ мебошад.

Дар натиҷа ададе пайдо шуд, ки вай адади омехта аст. Аз навишти ададҳои омехта истифода бурда, ҳамаи касрҳои нодурустро дар намуди ададҳои омехта навиштан мумкин аст.

Масалан, касрҳои нодурусти $\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{21}{14}, \frac{55}{45}, \frac{100}{95}, \frac{300}{245}, \dots$ -ро дар намуди ададҳои омехтаи $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}, \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}, \frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}, \frac{55}{45} = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9},$

$\frac{100}{95} = \frac{20}{19} = 1\frac{1}{19}, \frac{300}{245} = \frac{60}{49} = 1\frac{11}{49}, \dots$ навиштан мумкин аст, чунки

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}, 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}, 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{21}{14};$$

$$1\frac{2}{9} = \frac{11}{9} = \frac{11 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{55}{45};$$

$$1\frac{1}{19} = \frac{20}{19} = \frac{20 \cdot 5}{19 \cdot 5} = \frac{100}{95};$$

$$1\frac{11}{49} = \frac{60}{49} = \frac{60 \cdot 5}{49 \cdot 5} = \frac{300}{245}$$

мебошанд.

§8. Амалҳои арифметикӣ бо касрҳои одӣ

А. Амалҳои ҷамъ ва тарҳи ададҳои касрӣ ба амалҳои ҷамъ ва тарҳи ададҳои бутун бисёр монанданд. Хосиятҳои гуногуне, ки онҳоро барои ададҳои бутун дида баромада будем, барои касрҳо ҳам дурустанд.

Ҳангоми иҷро намудани амалҳои ҷамъ (тарҳ) мо се мавридро пай дар пай дида мебароем:

1. Ҷамъи (тарҳи) касрҳои махраҷашон якхела

Қоидаи 1. Барои ҷамъ (тарҳ) кардани касрҳои махраҷашон якхела суратҳои онҳоро ҷамъ (тарҳ) карда, махраҷашонро бетағйир навиштан лозим аст. Масалан:

$$\text{а) } \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}, b \neq 0; \quad \text{б) } \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7};$$

$$\text{в) } \frac{7}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7+5}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

2. Ҷамъи (тарҳи) касрҳои махраҷашон гуногун

Қоидаи 2. Барои ҷамъ (тарҳ) кардани ду касри махраҷашон гуногун, аввал хурдтарин қаратии умумии (ХКУ)-ро ёфта ва баъд ба махраҷи умумӣ овардан лозим аст. Масалан:

$$\text{а) } \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0;$$

$$\text{б) } \frac{3}{4} + \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15 + 28}{20} = \frac{43}{20}.$$

Қоидаи 3. Барои ҷамъ (тарҳ) намудани касрҳои махраҷашон гуногун, аз қоидаи ба махраҷи якхела овардан истифода мебаранд:

а) сурат ва махраҷи касри якумро ба махраҷи касри дуюм зарб кардан лозим аст;

б) сурат ва махраҷи касри дуюмро ба махраҷи касри якум зарб кардан лозим аст;

в) касрҳои ҳосилишудаи махраҷаш якхеларо ҷамъ (тарҳ) кардан лозим аст.

Масалан:

$$\text{а) } \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d \pm d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0;$$

$$\text{б) } \frac{12}{13} + \frac{3}{7} = \frac{12 \cdot 7}{13 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{12 \cdot 7 + 3 \cdot 13}{13 \cdot 7} = \frac{84 + 39}{91} = \frac{123}{91};$$

$$\text{в) } \frac{12}{15} - \frac{3}{7} = \frac{12 \cdot 7}{15 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 15} = \frac{12 \cdot 7 - 3 \cdot 15}{15 \cdot 7} = \frac{84 - 45}{105} = \frac{39}{105} = \frac{13}{35}.$$

3. Ҷамъи касрҳои омехта

Қоидаи 4. Чамъи касрҳои омехтаре дар ду намуд иҷро намудан мумкин аст:

1. Аввал қисмҳои касри ададҳоро ба махраҷи умумӣ оварда, баъд ададҳои бутун ва касрҳоро дар алоҳидагӣ чамъ кардан мумкин аст. Масалан:

$$а) 3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} = 3\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + 4\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 3\frac{3}{6} + 4\frac{2}{6} = 7 + \frac{3+2}{6} = 7\frac{5}{6};$$

$$б) 4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 4\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + 3\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 4\frac{3}{6} + 3\frac{2}{6} = 7 + \frac{3+2}{6} = 7\frac{5}{6};$$

$$в) 5\frac{1}{6} + 4\frac{5}{6} = 9 + \frac{1+5}{6} = 9 + \frac{6}{6} = 9 + 1 = 10.$$

2. Ададҳои омехтаре ба намуди касри нодуруст оварда ва баъд касрҳои ҳосилшударо ба махраҷи умумӣ оварда, чамъ намудан мумкин аст. Масалан:

$$а) 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} + \frac{3 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{5}{2} + \frac{10}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{15 + 20}{6} = \frac{35}{6};$$

$$б) 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} + \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{13}{4} + \frac{11}{5} = \frac{13 \cdot 5 + 11 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{65 + 44}{20} = \frac{109}{20};$$

$$в) 4\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = \frac{13}{3} + \frac{8}{3} = \frac{13+8}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

4. Чамъи касрҳои махраҷашон каратӣ

Қоидаи 5. Барои касрҳои махраҷашон каратиро чамъ кардан онҳоро ба махраҷи умумӣ меоваранд. Махраҷи умумӣ адади калонтарини дар махраҷҳо буда мебошад. Масалан:

$$а) \frac{3}{16} + \frac{5}{8} = \frac{3+5 \cdot 2}{16} = \frac{3+10}{16} = \frac{13}{16};$$

$$б) \frac{7}{3} + \frac{11}{27} = \frac{7 \cdot 9 + 11}{27} = \frac{63 + 11}{27} = \frac{74}{27};$$

$$в) 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{9} = 2\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} + 3\frac{1}{9} = 2\frac{3}{9} + 3\frac{1}{9} = 5\frac{3+1}{9} = 5\frac{4}{9};$$

$$г) 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{9} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} + \frac{3 \cdot 9 + 1}{9} = \frac{7}{3} + \frac{28}{9} = \frac{7 \cdot 3 + 28}{9} = \frac{21 + 28}{9} = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}.$$

Амали тарҳи касрҳоро, айнан ба монанди амали чамъи касрҳо иҷро намудан мумкин аст. Умуман, дар хотир доштан лозим аст, ки барои чамъ (тарҳ) кардани ду ё якчанд касрҳо онҳоро ба махраҷи умумӣ оварда, баъд чамъ (тарҳ) намудан мумкин аст.

Б. Амалҳои зарб ва тақсими ададҳои касриро дида мебароем.

1. Зарби адади бутун ба каср

Қоидаи 1. Барои адади бутунро ба каср зарб задан, аввал адади бутунро ба сурати каср зарб зада, онро дар сурати каср ва махраҷи касри маълумро дар махраҷ навиштан лозим аст, яъне

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, c \neq 0.$$

Масалан: а) $5 \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7};$

б) $\frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$

2. Зарби каср ба каср

Қоидаи 2. Ҳосили зарби ду каср ба касре баробар аст, ки сурати он ба ҳосили зарби сурати касрҳо ва махраҷи он ба ҳосили зарби махраҷи касрҳои додануда баробар аст, яъне

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, b \neq 0, d \neq 0.$$

Масалан: а) $\frac{7}{16} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{16 \cdot 5} = \frac{21}{80};$

б) $\frac{15}{11} \cdot \frac{18}{7} = \frac{15 \cdot 18}{11 \cdot 7} = \frac{270}{77}.$

3. Зарби касрҳои омехта

Қоидаи 3. Барои зарб кардани ададҳои омехта, аввал онҳоро ба касри нодуруст гардонида, баъд мувофиқи қоидаи 2 зарби касрҳоро иҷро намудан мумкин аст.

Масалан: а) $3\frac{5}{7} \cdot 4\frac{2}{5} = \frac{26}{7} \cdot \frac{22}{5} = \frac{26 \cdot 22}{7 \cdot 5} = \frac{572}{35};$

б) $4\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{23}{5} \cdot 4 = \frac{23 \cdot 4}{5} = \frac{92}{5} = 18\frac{2}{5};$

в) $4\frac{3}{5} \cdot 4 = \left(4 + \frac{3}{5}\right) \cdot 4 = 4 \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 4 = 16 + \frac{3 \cdot 4}{5} =$
 $= 16 + \frac{12}{5} = 16 + 2\frac{2}{5} = 18\frac{2}{5}.$

Ҳангоми иҷро намудани тақсими касрҳо бояд қоидаҳои тақсимикунии зеринро ба хотир овард:

1. тақсими адади бутун ба каср;
2. тақсими адади касрий ба адади бутун;
3. тақсими каср ба каср;
4. тақсими ададҳои омехта.

Қоидаи 1. Барои адади бутунро ба каср тақсим кардан, ин адади бутунро ба махраҷи каср зарб зада ҳосили зарби ҳосилишударо ба сурати касри додашуда тақсим кардан лозим аст, яъне,

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}, \quad c \neq 0, b \neq 0.$$

Масалан: а) $7 : \frac{13}{14} = 7 \cdot \frac{14}{13} = \frac{7 \cdot 14}{13} = \frac{98}{13};$

б) $5 : \frac{15}{16} = 5 \cdot \frac{16}{15} = \frac{5 \cdot 16}{15} = \frac{1 \cdot 16}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$

Қоидаи 2. Барои касрро ба адади бутун тақсим кардан, касрро ба адади чаппаи адади бутун зарб зада, баъд дар асоси қоидаи зарби касрҳо, зарбро иҷро намудан мумкин аст, яъне

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c} = \frac{a}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0.$$

Масалан: а) $\frac{17}{18} : 34 = \frac{17}{18} \cdot \frac{1}{34} = \frac{17 \cdot 1}{18 \cdot 34} = \frac{1 \cdot 1}{18 \cdot 2} = \frac{1}{36};$

б) $\frac{5}{7} : 11 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{11} = \frac{5 \cdot 1}{7 \cdot 11} = \frac{5}{77}.$

Қоидаи 3. Барои як касрро ба касри дигар тақсим намудан, тақсимшавандаро ба адади тақсимкунанда чаппа зарб кардан лозим аст, яъне,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$

Масалан: а) $\frac{11}{13} : \frac{17}{19} = \frac{11}{13} \cdot \frac{19}{17} = \frac{11 \cdot 19}{13 \cdot 17} = \frac{209}{221};$

б) $\frac{21}{25} : \frac{84}{105} = \frac{21}{25} \cdot \frac{105}{84} = \frac{21 \cdot 105}{25 \cdot 84} = \frac{1 \cdot 21}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}.$

Қоидаи 4. Барои як адади омехтаро ба касри омехтаи дигар тақсим кардан, аввал ададҳои омехтаро ба касрҳои нодуруст гардонда, баъд касрҳои ҳосилишударо мувофиқи қоидаи тақсими касрҳо тақсим намудан лозим аст.

Масалан: а) $3\frac{1}{7} : 2\frac{1}{5} = \frac{22}{7} : \frac{11}{5} = \frac{22}{7} \cdot \frac{5}{11} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 1} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7};$

б) $2\frac{1}{11} : 3\frac{1}{33} = \frac{23}{11} : \frac{100}{33} = \frac{23}{11} \cdot \frac{33}{100} = \frac{23 \cdot 3}{1 \cdot 100} = \frac{69}{100}.$

Умуман, ҳангоми иҷро намудани амалҳои зарб ва тақсим аз қонунҳои зарб

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$$

ва ҳам аз қонунҳои тақсим

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$$

истифода мебаранд. Ин қонунҳо ҳангоми сода кардани ифодаҳои арифметикӣ ва ёфтани қиматҳои онҳо истифода бурда мешаванд.

Масалан: а) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) \cdot 3 = \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{9}{4} + \frac{6}{5} = \frac{45+24}{20} = \frac{69}{20}$;

б) $\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\right) \cdot 4 = \frac{3}{5} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{12}{5} - \frac{8}{3} = \frac{36-40}{15} = -\frac{4}{15}$;

в) $\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{7}\right) : 2 = \frac{4}{5} : 2 + \frac{3}{7} : 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{3}{14} = \frac{4 \cdot 14 + 3 \cdot 10}{14 \cdot 10} = \frac{56+30}{140} = \frac{86}{140} = \frac{43}{70}$;

г) $\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{7}\right) : 2 = \frac{4}{5} : 2 + \frac{3}{7} : 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{3}{14}$.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\frac{45 \frac{10}{63} - 44 \frac{25}{84}}{\left(2 \frac{1}{3} - 1 \frac{1}{6}\right) : 4 - \frac{3}{4}} : 62$.

Ҳа. Аз тартиби иҷрои амалҳо истифода бурда, ифодаи додашударо ҳисоб мекунем:

$$1) 45 \frac{10}{63} - 44 \frac{25}{84} = 45 \frac{10 \cdot 84}{63 \cdot 84} - 44 \frac{25 \cdot 63}{84 \cdot 63} = 1 \frac{10 \cdot 84 - 25 \cdot 63}{63 \cdot 84} = 1 \frac{840 - 1575}{63 \cdot 84} = 1 + \frac{840 - 1575}{5292} = \frac{4557}{5292}$$

$$2) 2 \frac{1}{3} - 1 \frac{1}{6} = 2 \frac{2}{6} - 1 \frac{1}{6} = 1 \frac{2-1}{6} = 1 \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$3) \frac{7}{6} : 4 = \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 1}{6 \cdot 4} = \frac{7}{24}$$

$$4) \frac{7}{24} - \frac{3}{4} = \frac{7}{24} - \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{7}{24} - \frac{18}{24} = \frac{7-18}{24} = -\frac{11}{24}$$

$$5) \frac{4557}{5292} : \left(-\frac{11}{24}\right) = -\frac{1519}{21 \cdot 84} \cdot \frac{11}{24} = -\frac{217}{21 \cdot 12} \cdot \frac{11}{24} = -\frac{31}{36} \cdot \frac{11}{11} = -\frac{31}{36}$$

$$6) -\frac{31}{36} : 62 = -\frac{31}{36} \cdot \frac{1}{62} = -\frac{31 \cdot 1}{36 \cdot 62} = -\frac{1}{72}$$

Ҷавоб: $-\frac{1}{72}$.

§9. Қасрҳои даҳӣ

Қасрҳои даҳӣ, ки маҳраҷаҳои ба 10 қаратнок аст, қасрҳои даҳӣ меноманд.

Масалан, қасрҳои $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{100}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{5}{1000}$; $\frac{7}{1000}$; ...

мисоли қасрҳои даҳӣ шуда метавонанд.

Касрҳои намуди $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), ки дар боло мо муоина кардем, касрҳои одӣ буданд. Агар дар касрҳои одии намуди $\frac{a}{b}$, $b = 10^n$, $n \in N$ бошад, он гоҳ касри $\frac{a}{10^n}$ ($n \in N$) -ро касри даҳӣ меноманд. Дар ин ҷо ҳангоми $a \neq 0$ ва $n \in N$ будан, мо навишта метавонем:

$$\frac{a}{10} = 0,a; \quad \frac{a}{10^2} = \frac{a}{100} = 0,0a; \dots$$

Аз тарафи дигар ҳангоми $a = 0$ ва $n \in N$ будан

$$\frac{0}{10} = \frac{0}{10^2} = \frac{0}{10^3} = \dots = \frac{0}{10^n} = 0 \text{ мебошад.}$$

Касри даҳии дилхоҳро дар намуди суммаи зерин тасвир карда, навишта метавонем:

$$a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n}, \quad (1)$$

дар ин ҷо $a_0; a_1; a_2; \dots; a_m$, $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n$ -рақамҳо мебошанд.

Масалан: $\frac{3}{10} = 0 + \frac{3}{10}$; $\frac{27}{10} = 2\frac{7}{10} = 2 + \frac{7}{10}$; $\frac{31}{10} = 3\frac{1}{10} = 3 + \frac{1}{10}$;

$$\frac{3219}{10^3} = \frac{3219}{100} = 3 \cdot 10 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2};$$

$$23\frac{568}{1000} = 2 \cdot 10 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{8}{10^3}.$$

Агар дар (1) ҳаман $a_m; a_{m-1}; \dots; a_1; a_0$ -ҳо ба нол баробар бошанд, он гоҳ қисми

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \dots + \frac{b_n}{10^n}, \quad n \in N$$

касри даҳии дурустро тасвир мекунад, вагарна (1) адади омехта аст.

Агар дар (1) ҳаман $b_1; b_2; b_3; b_4; \dots; b_n$ ба нол баробар бошанд, он гоҳ қисми

$$a_m; a_{m-1}; a_{m-2}; \dots; a_1; a_0; \quad m \in N$$

албатта адади бутунро ифода мекунад. Бинобар ин чунин навишта метавонем:

$$23\frac{568}{1000} = 23,568; \quad \frac{15}{1000} = 0,015; \quad \frac{345}{1000} = 0,345.$$

Умуман, дар касрҳои даҳӣ рақамҳои пеш аз вергул истодаро қисми бутуни каср ва рақамҳои дар тарафи ростии вергул

истодаро қисми касрӣ (ё ки аломатҳои даҳӣ) меноманд. Дар хотир доштан лозим аст, ки ҳангоми навиштани касрҳои даҳӣ нол аҳамияти калон дорад. **Масалан:**

$$0,65; \quad 0,065; \quad 0,605; \quad 0,0065; \dots$$

$$5 = 5,0; \quad 75 = 75,0; \quad 29 = 29,0; \dots$$

$$1 = 1,0; \quad 2,3 = 2,30; \quad 2,3 = 2,300; \quad 2,3 = 2,3000; \dots$$

Агар мо нолро дар тарафи чапи касри даҳӣ нависем, он гоҳ вай ҳеҷ як қисмате надорад. **Масалан:**

$$07,2 = 7,2; \quad 0062,5 = 62,5; \quad 0605 = 605;$$

$$013,5 = 13,5; \quad 0145,75 = 145,75; \quad 0140,05 = 140,05.$$

Партофта навиштани нолҳои тарафи ростии касри даҳиро, ихтисоркунӣ ҳам меноманд. Масалан:

$$3 \frac{30}{100} = 3 \frac{3}{10}; \quad 4 \frac{150}{1000} = 4 \frac{15}{100} = 4 \frac{3}{20}; \dots$$

§10. Муқоисаи касрҳо. Аз касри даҳӣ ба касри одӣ гузаштан

А. Ҳангоми истифодаи касрҳои даҳӣ байни ҳамдигар муқоисакунӣ ададҳои бутун фарқ кунад ҳам, аммо ба муқоисакунӣ касрҳои одӣ монанд мебошад. Ҳангоми муқоисакунӣ касрҳои одӣ ва ҳам касрҳои даҳӣ усули ба махраҷи умумӣ овардан истифода бурда мешавад. *Агар қисми касрини касри даҳӣ кам бошад, он гоҳ вайро бо нол илова карда, навиштан мумкин аст.*

Масалан, касрҳои даҳии 4,5 ва 2,7; 0,34 ва 0,297-ро муқоиса мекунем.

а) Касрҳои 4,5 ва 2,7-ро аз рӯи бузургиашон муқоиса мекунем. Касрҳои додашуда қисмҳои якхелаи касрӣ доранд, яъне дар тарафи ростии вергул дорои яктоғӣ рақаманд. Лекин ададҳои пеш аз вергул буда, ададҳои 4 ва 2 мебошанд. Бинобар ҳамин касри якум 4,5 аз касри дуюм 2,7 калон аст, яъне $4,5 > 2,7$ мебошад.

б) Касрҳои 0,34 ва 0,297-ро аз рӯи бузургиашон муқоиса мекунем. Қисми касрини ин касрҳо дорои рақамҳои баробар нестанд, чунки касри якум баъд аз вергул дуто рақам дорад, аммо касри дуюм бошад, баъд аз вергул се то рақам дорад. *Ана барои ҳамин ҳам онҳоро ба махраҷи умумӣ оварда, ба касри якум нол илова карда, 0,340 менависем.* Ақсун ҳардуи онҳо пас аз вергул се тоғӣ рақам доранд, яъне дорои махраҷҳои якхеланд, ки он 1000 аст. Азбаски махраҷашон баробаранд, пас сураташонро муқоиса карда, гуфта метавонем, ки касри якум аз касри дуюмаш калон аст, яъне $0,34 > 0,297$ ё $0,340 > 0,297$ мебошад.

Аз гуфтаҳои болоӣ истифода карда, аз ҳамдигар калон ё хурд будани касрҳои даҳиро дар намуди умумӣ ин тавр баён мекунанд.

1. Агар рақамҳои касрҳои даҳӣ якхела буда, нисбат ба вергул ҷойҳои якхеларо ишғол кунанд (ба ғайр аз нолҳое, ки пас аз ададҳои охири киматнок истодаанд), ин касрҳо бо ҳам баробаранд. **Масалан:** $4,25 = 4,25$.

2. Аз ду касри даҳӣ додашуда ҳамонаш калон мебошад, ки агар қисми бутуни он калон бошад, ё агар қисми бутунашон баробар бошанду қисми касри даҳнаш калон бошад ва ё агар дар ҳолати қисми касри даҳнаш баробар будан, бояд қисми касри саднаш калон бошад. **Масалан:**

$$3,25 > 2,75 \text{ чунки } 3 > 2,$$

$$3,27 > 3,19 \text{ чунки } 2 > 1,$$

$$3,27 > 3,26 \text{ чунки } 7 > 6 \text{ мебошад.}$$

Б. Агар касри даҳиро ба шакли касри одӣ навиштани шавем, бояд дар касри даҳӣ додашуда вергулро партофта, адади ҳосилшударо ҳамчун сурати касри одӣ қабул карда, ба маҳраҷаш бошад, ҳамон қисмҳои воҳидро, ки он нишондиҳандаи адади 10 аст, навиштан лозим аст. **Масалан:**

$$0,25 = \frac{25}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}; \quad 0,025 = \frac{25}{10^3} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40};$$

$$2,35 = 2 \frac{35}{10^2} = 2 \frac{35}{100} = 2 \frac{7}{20}; \quad 3,05 = 3 \frac{05}{10^2} = 3 \frac{05}{100} = 3 \frac{1}{20}.$$

Дар ин ҷо чунин баробариҳо дурустанд:

$$0,25 = \frac{25}{100}; \quad 0,025 = \frac{25}{1000}; \quad 235 = \frac{235}{100} = \frac{47}{20}.$$

§11. Амалҳо бо касрҳои даҳӣ

Касрҳои даҳӣ ҳам монанди ададҳои бутун ҳам карда мешаванд. Хангоми ҳам намудан ҳамешавандаҳоро чунон менависем, ки разрядҳои якхелаи ҳамаи ҳамешавандаҳо дар зерӣ ҳамдигар ҷой гирифта бошанд. **Масалан:**

$$\begin{array}{r} + \quad 0,9742 \\ \hline 0,7234 \\ \hline 1,6976 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \quad 0,125 \\ \hline 0,45 \\ \hline 3,575 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \quad 7,25 \\ \hline 14,079 \\ \hline 21,329 \end{array}$$

Касрҳои даҳӣ ба монанди ададҳои бутун тарҳ карда мешаванд. Хангоми тарҳ кардан, ба навишти камшаванда ва камкунанда аҳамият додан лозим аст. Камкунандаро ба зерӣ

камшаванда менависанд, ки разрядҳои якхелаи онҳо дар зерин ҳамдигар ҷой гирифта бошанд. **Масалан:**

$$\begin{array}{r} 0,975 \\ - 0,794 \\ \hline 0,181 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,9057 \\ - 2,994 \\ \hline 0,9117 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,250 \\ - 3,248 \\ \hline 1,002 \end{array}$$

Аммо зарб ва тақсими касрҳои дахиро дида мебароем. Онҳо ба зарб ва тақсими касрҳои дахӣ якҷанд мисолҳоро дида мебароем:

Мисоли 1. $2,3 \cdot 1,5 =$

Ҳал. а) Ин ду ададро ҳамчун зарби ду адади бутун дида мебароем:

б) Аз рӯи шумораи рақамҳои баъд аз вергул истодан зарбшавандаҳо мо рақамҳои қисми касри ҳосили зарбро муайян мекунем, яъне дар ҳосили зарб аз рост сар карда, ҳамон миқдор рақамҳоро ҷудо карда, вергул мегузорем.

Азбаски дар мисоли мо баъд аз вергул дуто рақам мавҷуд аст, пас дар ҳосили зарб аз рост сар карда, ду рақамро ҷудо карда, вергул мегузорем, яъне $3,45$. Умуман, ҳосили зарби $2,3 \cdot 1,5 = 3,45$ баробар аст, ба:

Қондан зарби касрҳои дахиро ин тавр баён мекунанд:

Барои зарб кардани касрҳои дахӣ вергулҳои онҳоро партофта, ҳамчун ададҳои бутун зарб мекунанд. Дар ҳосили зарб аз тарафи рост сар карда, ба миқдори рақамҳои пас аз вергул истодан зарбшавандаю зарбкунанда рақамҳоро ҷудо карда, вергул мегузоранд. Ин вергул қисми бутун ва қисми касри ҳосили зарбро ҷудо мекунанд.

Ду касри дахӣ монанди ду адади бутун тақсим карда мешавад. Дар ин ҷо мо ду қондан тақсим, қондан тақсими касри дахӣ ба адади бутун ва ҳам қондан тақсими касри дахӣ ба касри дахиро дида мебароем.

Қондан 1. Барои касри дахиро ба адади натуралӣ тақсим намудан, қондаҳои зеринро риоя кардан лозим аст:

а) аввал қисми бутуни касро ба адади натуралӣ додашуда тақсим кардан лозим аст;

б) баъд аз тақсими адади бутун вергул гузоштан лозим аст;

в) пас, тақсими адади дар натиҷаи илова намудан ба бақияи разряди оянда ҳосилишударо ҷудо намудан лозим аст. **Масалан:**

$$a) 16,45:7=$$

Ҳал.

$$б) 14,82:13=$$

$$\begin{array}{r} 16,45 \overline{) 7} \\ \underline{-14} 2,35 \\ 024 \\ \underline{-21} 035 \\ \underline{-35} 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14,82 \overline{) 13} \\ \underline{-13} 1,14 \\ 018 \\ \underline{-13} 052 \\ \underline{-52} 0 \end{array}$$

Қоидаи 2. Барои ягон ададро ба касри даҳӣ тақсим намудан, вергули тақсимкунандаро партофта, тақсимкунандаро чанд карат зиёд карда бошем, тақсимиавандаро низ ҳамон қадар зиёд карда, тақсими мувофиқи қоидаи тақсими ададҳои бутун иҷро кардан лозим аст. Масалан:

$$1) 4:0,0125=40000:125=$$

$$\begin{array}{r} 40000 \overline{) 125} \\ \underline{-375} 320 \\ 0250 \\ \underline{-250} 000 \end{array}$$

$$2) 4,551:1,23=4551:1230=$$

$$\begin{array}{r} 4551 \overline{) 1230} \\ \underline{-3690} 3,7 \\ 08610 \\ \underline{-8610} 000 \end{array}$$

$$3) 0,25:4=25:400=$$

$$\begin{array}{r} 2500 \overline{) 400} \\ \underline{-2400} 0,0625 \\ 01000 \\ \underline{-800} 2000 \\ \underline{-2000} 000 \end{array}$$

$$4) 743,6:1,43=74360:143=$$

$$\begin{array}{r} 74360 \overline{) 143} \\ \underline{-715} 520 \\ 0286 \\ \underline{-286} 000 \end{array}$$

Касрҳои даҳие, ки пас аз вергул миқдори охирноки рақамҳоро доранд, касрҳои охирноқанд.

Касрҳои даҳини беохир гуфта, касрҳои намуди $c, b_1b_2b_3b_4\dots b_n\dots$ -ро меноманд, ки баъд аз вергул шумораи беохирӣ рақамҳо мебошад.

Касрҳои даҳини беохир, касрҳои даврӣ номида мешавад, агар дар онҳо як ё якчанд рақамҳо даврӣ тақрор шаванд. Масалан:

$$0,(9)=1; 4,12(9)=4,13; 0,1313131313\dots=0,(13);$$

$$5,324444444\dots = 5,32(4).$$

Гуфтан мумкин аст, ки касрҳои даврии даврашон ба 9 баробар ба касри даврии охиринок баробар аст. **Масалан:**

$$0,(9) = 1; 4,12(9) = 4,13; 2,32(9) = 2,33;$$

$$12,0(9) = 12,1; 23,01(9) = 23,02.$$

Барои касри одиро ба касри даҳӣ гардонидан суратро ба маҳраҷ тақсим кардан лозим аст. Агар тақсими давом диҳем, дар натиҷа ё касри даврии охиринок ё касри даврии беохирро ҳосил мекунем. **Масалан:**

$$a) \frac{1}{8} = 0,125; \frac{2}{25} = \frac{2}{5^2} = 0,08; \frac{3}{20} = 0,15; \dots$$

Дар ин ҷо касрҳои одӣ ба касрҳои даврии охиринок гардонда, навишта шудаанд.

$$b) \frac{20}{6} = 3,666(6); \frac{11}{6} = 1,8333(3); \frac{1}{3} = 0,333(3).$$

Дар ин ҷо касрҳои одӣ ба касрҳои даврии беохир оварда, навишта шудаанд.

Касрҳои даврии беохирро то ягон дараҷан сахтеӣ навиштан мумкин аст. **Масалан:**

$$3,456 = 3,4 \text{ (бо норасой);}$$

$$3,456 = 3,5 \text{ (бо изофагӣ).}$$

Дар асоси гуфтаҳои болоӣ ва мисолҳои муоина кардашуда мо гуфта метавонем:

Теоремаи 1. (бе исбот). *Ҳаргуна касрҳои одиро ба намуди касрҳои даҳии даврии охиринок ё беохир оварда, навиштан мумкин аст. Масалан:*

$$\frac{1}{4} = 0,25; \frac{1}{8} = 0,125; \frac{13}{6} = 2,166\dots = 2,1(6); \frac{4}{33} = 0,121212\dots = 0,(12).$$

Теоремаи 2 (бе исбот). *Барои ҳаргуна касри даврӣ, касри одӣ ба он баробарро ёфтан мумкин аст. Масалан:*

$$0,(7) = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9};$$

$$0,(45) = \frac{45-0}{99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11};$$

$$0,3(14) = \frac{314-3}{990} = \frac{311}{990};$$

$$2,(13) = 2 + 0,(13) = 2 + \frac{13-0}{99} = 2 + \frac{13}{99} = 2\frac{13}{99};$$

$$2,3(11) = 2 + 0,3(11) = 2 + \frac{311-3}{990} = 2 + \frac{308}{990} = 2\frac{308}{990};$$

$$3,46(8) = \frac{3468-346}{900} = \frac{3122}{900} = \frac{1561}{450};$$

$$3,6(9) = \frac{369-36}{90} = \frac{333}{90} = 3,7.$$

Барои он ки доир ба иҷрои тартиби амалҳо маълумоти муфассал гирем, яқчанд мисолҳои ифодаҳои арифметикиро дида мебароем.

Мисоли 1. Амалҳои зеринро иҷро намоед:

$$\frac{(-2) \cdot (-2) + (-6) : 2 - 2 - 3 + 4}{9 - 7 + 5 - 3}.$$

Ҳал. 1. $(-2) \cdot (-2) = +4;$

2. $(-6) : 2 = -3;$

3. $(+4) + (-3) = 4 - 3 = 1;$

4. $1 - 2 = -1;$

5. $-1 - 3 = -4;$

6. $-4 + 4 = 0;$

7. $9 - 7 + 5 - 3 = 2 + 2 = 4;$

8. $0 : 4 = 0.$

Мисоли 2. Амалҳои зеринро иҷро кунед:

$$\frac{(-1,5 + 4 - 2,5) \cdot (-6) + 5 - 7 + 9}{(0,3 \cdot 2 + 0,3 - 0,2) \cdot 2 - 0,4 + 2 \cdot (-2) + 4}.$$

Ҳал. 1. $-1,5 + 4 - 2,5 = -4 + 4 = 0;$

2. $0 \cdot (-6) = 0;$

3. $0 + 5 - 7 + 9 = 7;$

4. $0,3 \cdot 2 = 0,6;$

5. $0,6 + 0,3 - 0,2 = 0,7;$

6. $0,7 \cdot 2 = 1,4;$

7. $1,4 - 0,4 = 1,0;$

8. $2 \cdot (-2) + 4 = -4 + 4 = 0;$

9. $1,0 + 0 = 1,0;$

10. $7 : 1,0 = 7 : 1 = 7.$

Мисоли 3. Ҳисоб кунед:

$$\frac{4,5 : (47,375 - (26\frac{1}{3} - 18 \cdot 0,75) \cdot 2,4 : 0,88)}{17,81 : 1,37 - 23\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}}.$$

Ҳал. 1. $18 \cdot 0,75 = 13,50;$

2. $26\frac{1}{3} - 13,5 = 26\frac{1}{3} - 13\frac{5}{10} = 26\frac{1}{3} - 13\frac{1}{2} = \frac{79}{3} - \frac{27}{2} = \frac{158-81}{6} = \frac{77}{6};$

3. $\frac{77}{6} \cdot 2,4 = \frac{77}{6} \cdot 2\frac{4}{10} = \frac{77}{6} \cdot \frac{24}{10} = \frac{77}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{77}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{154}{5};$

4. $\frac{154}{5} : 0,88 = \frac{154}{5} : \frac{88}{100} = \frac{154}{5} \cdot \frac{100}{88} = \frac{154}{5} \cdot \frac{25}{22} = \frac{77 \cdot 5}{1 \cdot 11} = \frac{385}{11};$

- $$5. 47,375 - \frac{385}{11} = 47 \frac{375}{1000} - \frac{385}{11} = \frac{47375}{1000} - \frac{385}{11} =$$
- $$= \frac{379}{8} - \frac{385}{11} = \frac{379 \cdot 11 - 385 \cdot 8}{8 \cdot 11} = \frac{4169 - 3080}{88} = \frac{1089}{88};$$
- $$6. 4,5 : \frac{1089}{88} = 4 \frac{5}{10} : \frac{1089}{88} = \frac{45}{10} \cdot \frac{88}{1089} = \frac{9}{2} \cdot \frac{88}{1089} =$$
- $$= \frac{1 \cdot 44}{1 \cdot 121} = \frac{44}{121} = \frac{4}{11};$$
- $$7. 17,81 : 1,37 = 1781 : 137 = 13;$$
- $$8. 23 \frac{2}{3} : 1 \frac{5}{6} = \frac{71}{3} : \frac{11}{6} = \frac{71}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{71 \cdot 2}{1 \cdot 11} = \frac{142}{11};$$
- $$9. 13 - \frac{142}{11} = \frac{13}{1} - \frac{142}{11} = \frac{13 \cdot 11 - 142}{11} = \frac{143 - 142}{11} = \frac{1}{11};$$
- $$10. \frac{4}{11} : \frac{1}{11} = \frac{4}{11} \cdot \frac{11}{1} = \frac{4 \cdot 11}{11 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4.$$

МАШҚО

Ҳисоб қунед:

- $$1. \frac{172 \frac{5}{6} - 170 \frac{1}{3} + 3 \frac{5}{12}}{0,8 \cdot 0,25}.$$
- $$2. \frac{(49 \frac{5}{24} - 46 \frac{7}{20}) \cdot 2 \frac{1}{3} + 0,6}{0,2}.$$
- $$3. \frac{3 + 4,2 : 0,1}{(1 : 0,3 - 2 \frac{1}{3}) \cdot 0,3125}.$$
- $$4. \frac{3 \frac{2}{7} - 3 \frac{1}{14} : \frac{1}{6}}{41 \frac{23}{84} - 40 \frac{49}{60}}.$$
- $$5. \frac{(1,6 + 154,66 : 70,3) : 1,9}{(2 \frac{2}{5} - 1,3) : 4,3}.$$
- $$6. \frac{(7 - 6,35) : 6,5 + 9,9}{(1,2 : 36 + 1,2 : 0,25 - 1 \frac{5}{16}) : \frac{169}{24}}.$$
- $$7. \left(\left(\frac{7}{9} - \frac{47}{72} \right) : 1,25 + \left(\frac{6}{7} - \frac{17}{28} \right) \right) : (0,358 - 0,108) \cdot 1,6 - \frac{31}{25}.$$
- $$8. \left(\frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2 \frac{1}{3} + 0,125}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{70}} \right) : 2 \frac{1}{2} + 0,43.$$
- $$9. \frac{2 \frac{3}{4} : 1,1 + 3 \frac{1}{3} : \frac{5}{7} - \frac{(2 \frac{1}{6} + 4,5) \cdot 0,375}{2,75 - 1 \frac{1}{2}}}{2,5 - 0,4 \cdot 3 \frac{1}{3}}.$$

БОБИ II АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

Мо дар боби I ададҳои бутун ва амалҳо бо ададҳои бутунро муоина карда, шуморо бо мафҳуми асосии ададҳои натуралӣ шинос кардем.

Дар ин боб бошад, бо мафҳуми ададҳои ратсионалӣ, ирратсионалӣ ва амалҳо бо онҳо шинос шуда, мафҳуми ададҳои ҳақиқиро дида мебароем.

§1. Ададҳои ратсионалӣ

Ҳосияти 1. Ададҳои $\frac{a}{b}$ ($a; b$ - ададҳои бутун ва адади натуралӣ) тасвир кардан мумкин аст, ададҳои ратсионалӣ меноманд.

Маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ аз ададҳои бутуни мусбат ва манфӣ, ададҳои касрӣ мусбат ва манфӣ ва нол иборат аст. Маҷмӯи ададҳои ратсионалиро бо рамзи Q ишорат мекунанд. Ҳар гуна адади бутун, адади ратсионалӣ мебошад. **Масалан,**

$$5 = \frac{5}{1}; 7 = \frac{7}{1}; -4 = \frac{-4}{1}; -9 = \frac{-9}{1}; 0 = \frac{0}{1}; \dots$$

ва ҳаказо.

Ҳосияти 2. Маҷмӯи ададҳои бутун Z , таҳтмаҷмӯи ададҳои ратсионалӣ мебошад: $Z \in Q$.

Масалан: агар $a \in Z$ ва $b \in N$ бошанд, он гоҳ

$$a \pm b = \frac{a}{1} \pm \frac{b}{1} = \frac{a \pm b}{1}; a \cdot b = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1}$$

мебошад.

Агар $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ - ададҳои ратсионали мусбат бошанд, он гоҳ:

а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ аст, агар $ad = bc$ бошад;

б) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ аст, агар $ad > bc$ бошад;

в) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ аст, агар $ad < bc$ бошад.

Масалан: а) $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$ аст, агар $3 \cdot 7 > 4 \cdot 5$ бошад;

б) $\frac{3}{4} < \frac{7}{6}$ аст, агар $3 \cdot 6 < 4 \cdot 7$ бошад;

в) $-\frac{3}{4} > -\frac{7}{6}$ аст, агар $-3 \cdot 6 > -7 \cdot 4$ бошад.

Ададҳои ратсионалиро ҳамчун тарҳ, зарб ва тақсим (ба ғайр аз ба нол) кардан мумкин аст. Ин қоида барои касриҳои одӣ ҳам дуруст аст. Натиҷаи ҳар гуна чор амалҳои арифметикӣ бо ададҳои ратсионалӣ ба субот расонидашуда, ададҳои ратсионалиро медиҳад.

Ҳосияти 3. *Ҳар гуна адади ратсионалиро дар намуди касри даҳии беохирӣ даврӣ (ва баръакс) навиштан мумкин аст.*

Масалан: $\frac{1}{5} = 0,2 = 0,20 = 0,200 = \dots = 0,2(0);$

$-\frac{1}{4} = -0,25 = -0,2500 = \dots = -0,25(0);$

$-\frac{13}{6} = -2,1(6); -\frac{4}{33} = -0,(12); -0,3(14) = -\frac{311}{999}.$

§2. Ададҳои ирратсионалӣ

Таърифи 1. *Ададҳои ирратсионалӣ, ки дар намуди нисбати ду адади бутун ифода намешаванд, ададҳои ирратсионалӣ меноманд.*

Масалан: ададҳои $\sqrt{2}; \sqrt{5}; \sqrt{11}; \lg 3; \pi; 3 - \sqrt{2}$ ва ҳамаи мисолҳои ададҳои ирратсионалӣ шуда метавонанд.

Агар адади ратсионалӣ касри даҳии беохирӣ даврӣ ифода кунад, пас адади ирратсионалӣ касри даҳии беохирӣ ғайридаврӣ ифода мекунад.

Ададҳои ирратсионалӣ, монанди ададҳои ратсионалӣ, ададҳои мусбат ва манфӣ шуда метавонанд. Масалан: $0,101001000100001\dots$ - адади ирратсионалӣ мусбат, $-2,07007000700007\dots$ - адади ирратсионалӣ манфӣ мебошад.

§3. Мафҳуми ададҳои ҳақиқӣ

Таърифи 2. *Ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ якҷоя ададҳои ҳақиқиро ташкил мекунанд.*

Агар ба маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ мо маҷмӯи ададҳои ирратсионалиро ҳамроҳ кунем, дар натиҷа маҷмӯи ададҳои ҳақиқиро ҳосил мекунем. Маҷмӯи ададҳои ҳақиқиро бо рамзи R ишорат мекунанд.

Ҳар гуна адади ҳақиқиро дар намуди касри даҳии беохир навиштан мумкин аст. Масалан, агар адади ратсионалӣ бошад, он гоҳ вайро дар намуди касри даҳии беохирӣ даврӣ ифода кардан

мумкин аст: агар адад ирратсионалӣ бошад, он гоҳ вайро дар намуни касри даҳии беохирӣ ғайридаврӣ ифода кардан мумкин аст.

Ададҳои ҳақиқӣ ададҳои ба тартиб овардашуда мебошанд, чунки барои ҳар як ҷуфти ададҳои ҳақиқӣ x ва y яке аз муносибатҳо $x < y$, $x = y$ ва ё $x > y$ иҷро мегардад.

Мисол, ададҳои $-2,3$ ва $-2,(3)$ -ро муқоиса мекунем.

Ҳал. Азбаски, $-2,3 = -2,30 = -2,300 = -2,3000 \dots$,
 $-2,(3) = -2,333 \dots$ ва $2,300 \dots < 2,333 \dots$ ё $2,300 \dots < 2,333 \dots$ аст,
он гоҳ $-2,3 > -2,(3)$ мешавад.

Таърифи 3. Қисми бутуни адади ҳақиқӣ x гуфта, калонтарин адади бутуни аз x хурдро меноманд. Қисми бутуни адади x -ро бо $[x]$ ишорат мекунанд.

Мисол: $[32,5] = 32$; $[3,24] = 3$; $[0,53] = 0$; $[-4,6] = -5$ ва ҳоказо.

Дар ин ҷо, агар x -адади бутун бошад, он гоҳ $[x] = x$ мешавад; агар x -адади касрӣ бошад, он гоҳ $[x] < x$ мебошад. Аз ин ҷо, барои ҳар гуна x нобаробарии $[x] \leq x < [x] + 1$ ҷой дорад.

Таърифи 4. Қисми касрии адади ҳақиқӣ x гуфта, фарқи байни ададҳои x ва $[x]$ -ро меноманд. Қисми касрии адади x -ро бо $\{x\}$ ишорат мекунанд.

Мисол: $\{32,5\} = 32,5 - [32,5] = 32,5 - 32 = 0,5$;

$\{3,24\} = 3,24 - [3,24] = 3,24 - 3 = 0,24$;

$\{0,53\} = 0,53 - [0,53] = 0,53 - 0 = 0,53$;

$\{-3\} = -3 - [-3] = -3 - (-3) = -3 + 3 = 0$.

Дар ин ҷо аз нобаробарии $[x] \leq x < [x] + 1$ нобаробарии $0 < x - [x] < 1$ бармеояд. Бинобар он, барои ҳар гуна x нобаробарии $0 < x - [x] < 1$ дуруст аст.

Тасвири ададҳои ҳақиқиро дар тире адади дида мебароем. Бигузор нуқтаи 0 дар хати рост нуқтаи қайд кардашуда бошад. Барои мавқеи нуқтаро дар хати рост нисбат ба нуқтаи 0 муайян кардан ба ғайр аз донишманди масофаи он аз нуқтаи 0 боз нишон додан лозим аст, ки ин нуқта дар кадом самт ҷойгир шудааст. Одатан дар як тарафи нуқтаи 0 ададҳои бутуни мусбат ва дар дигар тарафаш ададҳои бутуни манфиро тасвир мекунанд. Аз

нуқтаи 0 самти ростро мусбат ва самти чапро манфӣ ҳисоб мекунанд.

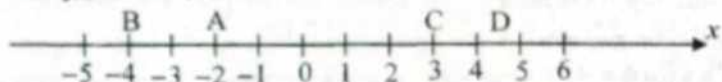
Ададҳои дар самти мусбат тасвиршуда бо ададҳои дар самти манфӣ тасвиршуда муқобил мебошанд. Бинобар ин, ададҳои муқобилро ин тавр мефаҳманд:

Барои ҳар як адад якто адади ба он муқобил мавҷуд аст. Адади ба адади дигар a муқобилро бо $-a$ ишорат мекунанд.

Агар дар хати рост нуқтаи 0 қайд карда, дар он самти мусбатро нишон дода, воҳиди масштаб интиҳоб карда шуда бошад, он гоҳ хати ростро хати рости координатӣ меноманд. Нуқтаи 0-ро ибтидои координатӣ меноманд, чунки адади нол (0) дар хати рост ададҳои мусбат ва манфиро аз ҳамдигар ҷудо мекунад.

Таърифи 5. Ададе, ки мавқеи нуқтаро дар хати рост нишон медиҳад, координатаи ҳамин нуқта номида мешавад.

Мисалан: бигуздор дар хати рости координатӣ нуқтаҳои зерин қайд шуда бошанд:



Расми 1

Он гоҳ мегӯянд, ки нуқтаи A координатаи -2 ; нуқтаи B координатаи -4 ; нуқтаи C координатаи 3 ва нуқтаи D координатаи $4,5$ -ро дорад. Ин тавр ҳам менависанд: $A(-2)$; $B(-4)$; $C(3)$; $D(4,5)$ (Расми 1).

Ба ҳар як адади маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ як нуқтаи муайяни маҷмӯи нуқтаҳои тирӣ ададӣ (хати рости координатӣ) мувофиқ меояд. Баръакс, ҳар як нуқтаи тирӣ ададӣ тасвири фақат як адади ҳақиқӣ мебошад.

§4. Қимати мутлақи адад

Таърифи 1. Бузургии мутлақи (модули) адади ҳақиқии x гуфта, ҳади адади x -ро, агар x мусбат ва $-x$ -ро, агар x манфӣ бошад, меноманд.

Бузургии мутлақи (модули) адади ҳақиқии x бо $|x|$ ишорат кардашуда, бо баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0, \\ -x, & \text{агар } x < 0. \end{cases}$$

Ҳосиятҳо: Агар $x, y \in R$ бошанд, он гоҳ

1. $|x| = |-x|$; $|x| \geq x$; $|x| \geq -x$ барои ҳар гуна x : $|x| \geq 0$.

2. $|x + y| \leq |x| + |y|$;

3. $|x - y| \geq |x| - |y|$;

4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

5. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$;

6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

7. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ва $-x \geq a$.

Масалаи: $|7| = 7$; $|-7| = 7$; $|0| = 0$; $\left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$;

$$|5 + 8| \leq |5| + |8|; |5 + (-9)| < |5| + |-9|;$$

$$|7 - 9| > |7| - |9|; |7 - 9| < |7| + |-9| = |7| + |-9|.$$

Агар $M(-5)$ ва $N(4)$ нуқтаҳо дар тири ададӣ бошанд, он гоҳ барои ёфтани модули адад масофара аз ибтидои ҳисоб (0) то нуқтае, ки ба он адади додашуда мувофиқ меояд, бо порчаҳои воҳидӣ чен кардан лозим аст.

Масалаи: $|-5| = |OM| = 5$ ва $|ON| = |4| = 4$.

Маънои геометрии қимати мутлақии адад ин дарозии порча мебошад.

Агар $A(x_1)$ ва $B(x_2)$ нуқтаҳо дар тири ададӣ бошанд, он гоҳ масофаи байни ин ду нуқтаро дар намуди

$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

навиштан мумкин аст. Дар ин ҷо $|AB|$ дарозии порчаи AB -ро мефаҳмонад.

Масалаи: 1. Агар $A(2)$ ва $B(5)$ нуқтаҳо дар хати рост бошанд, он гоҳ дарозии порчаи AB аз рӯи формулаи $|AB| = |x_2 - x_1|$ ёфта мешавад.

$$|AB| = |x_2 - x_1| \Rightarrow AB = |5 - 2| \Rightarrow AB = 3.$$

2. Агар $A(-5)$ ва $B(-2,5)$ нуқтаҳои хати рост бошанд, он гоҳ масофаи байни онҳо бо формулаи $|AB| = |x_2 - x_1|$ ёфта мешавад.

$$|AB| = |x_2 - x_1| \Rightarrow AB = \left| -\frac{5}{2} - (-5) \right| \Rightarrow AB = \left| -\frac{5}{2} + 5 \right| \Rightarrow AB = \frac{5}{2}.$$

Агар ҳамворӣ додашуда бошад, он гоҳ ду хати ростии перпендикулярӣ Ox ва Oy -ро, ки онҳо ҳамдигарро дар нуқтаи ибтидои ҳисоб (0) мебуранд, мегирем. Дар хатҳои ростии Ox ва Oy масштабҳоро интихоб намуда, баъд мавқеи нуқтаро дар ҳамворӣ муайян мекунем.

Хатҳои ростии Ox ва Oy , ки самтҳо ва порчаҳои воҳидиро (масштаб) доранд, тирҳои координатаӣ ном дорад.

Мавқеи нуқта дар ҳамворӣ бо ду адад муайян карда мешавад: $M(x, y)$.

Дар ин ҷо x - абсисса дар ҷои якум ва y - ординатро дар ҷои дуюм менависанд. Ҳар ду ададро $(x; y)$ якҷоя координатаҳои нуқтаи M меноманд.

§5. Ҳисобкунии ифодаҳои арифметикӣ

Дар вақти ҳисобкунии ифодаҳои арифметикӣ аз тартиби иҷрои амалҳо истифода мебаранд. Бинобар ин пеш аз ҳисобкунии аввал тартиби иҷрои амалҳоро бори дигар хотиррасон мекунем.

I. Агар ифодаи додашуда қавсҳо надошта бошад, он гоҳ аввал амали дараҷаи сеюм (бадараҷабардорӣ), баъд амалҳои дараҷаи дуюм (зарб ва тақсим) ва дар охир амалҳои дараҷаи якум (ҷамъ ва тарҳ) бо тартиби додашудаашон иҷро карда мешаванд.

II. Агар ифодаи додашуда қавсҳо дошта бошад, он гоҳ, аввал ҳамаи амалҳои дар дохили қавсҳо буда бо тартиби дар боло гуфта гузаштамон (пункти I) иҷро карда мешаванд.

III. Агар ифодаи додашуда қасрӣ бошад, аввал амалҳои дар сурати қаср ва баъд амалҳои дар махраҷи қаср додашударо бо тартиби дар пункти якум муайяншуда иҷро карда, натиҷаи ҳосилшудани суратро ба натиҷаи ҳосилшудани махраҷ тақсим кардан лозим аст.

Акнун ягонд мисолҳои ҳисоби ифодаҳои арифметикиро дида мебароем.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\frac{45\frac{10}{63} - 44\frac{25}{84}}{(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6}) : 4 - \frac{3}{4}} : 31$.

Ҳал. Аз тартиби иҷрои амалҳо истифода бурда, ифодаи додашударо ҳисоб мекунем:

$$1. 45\frac{10}{63} - 44\frac{25}{84} = 1\frac{10}{63} - \frac{25}{84} = \frac{73}{63} - \frac{25}{84} = \frac{292 - 75}{252} = \frac{31}{36};$$

$$2. 2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6} = \frac{7}{3} - \frac{1}{6} = \frac{14 - 1}{6} = \frac{13}{6};$$

$$3. \frac{7}{6} : 4 = \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{24};$$

$$4. \frac{7}{24} - \frac{3}{4} = \frac{7 - 18}{24} = -\frac{11}{24};$$

$$5. \frac{31}{36} : (-\frac{11}{24}) = -\frac{31}{36} \cdot \frac{24}{11} = -\frac{31 \cdot 2}{3 \cdot 11} = -\frac{62}{33};$$

$$6. -\frac{62}{33} : 31 = -\frac{62}{33} \cdot \frac{1}{31} = -\frac{2 \cdot 1}{33 \cdot 1} = -\frac{2}{33}.$$

Ҷавоб: $-\frac{2}{33}$.

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $\frac{(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}) \cdot 0,3}{0,2}$.

Ҳал. 1. $152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8} = 4\frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{19}{4} - \frac{3}{8} = \frac{38}{8} - \frac{3}{8} = \frac{38 - 3}{8} = \frac{35}{8};$

$$2. \frac{35}{8} \cdot 0,3 = \frac{35}{8} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 2} = \frac{21}{16};$$

$$3. \frac{21}{16} : 0,2 = \frac{21}{16} : \frac{2}{10} = \frac{21}{16} \cdot \frac{5}{1} = \frac{21 \cdot 5}{16 \cdot 1} = \frac{105}{16} = 6,5625;$$

Ҷавоб: 6,5625.

Мисоли 3. Ҳисоб кунед: $\frac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0,0001 : 0,005}$.

Ҳал. 1. $215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} = 7\frac{9}{16} - \frac{3}{4} = \frac{121}{16} - \frac{3}{4} = \frac{121 - 12}{16} = \frac{109}{16};$

$$2. \frac{109}{16} + \frac{1}{2} = \frac{109 + 8}{16} = \frac{117}{16};$$

$$3. 0,0001 : 0,005 = 0,1 : 5 = \frac{1}{10} : 5 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50};$$

$$4. \frac{117}{16} : \frac{1}{50} = \frac{117}{16} \cdot \frac{50}{1} = \frac{117 \cdot 25}{8 \cdot 1} = \frac{2925}{8} = 365 \frac{5}{8}.$$

Ҷавоб: $365 \frac{5}{8}$.

Мисоли 4. x -ро ёбед: $\frac{3+4,2:0,1}{(1:0,3-2\frac{1}{3}) \cdot 0,3125} - 8x = 72$.

Ҳал. 1. $4,2:0,1=42:1=42$; 2. $3+42=45$;

3. $1:0,3=1:\frac{3}{10}=1 \cdot \frac{10}{3}=\frac{10}{3}$;

4. $\frac{10}{3}-2\frac{1}{3}=\frac{10}{3}-\frac{7}{3}=\frac{10-7}{3}=\frac{3}{3}=1$;

5. $1 \cdot 0,3125=0,3125$;

6. $45:0,3125=45:\frac{3125}{1000}=45:\frac{5}{16}=45 \cdot \frac{16}{5}=9 \cdot 16=144$;

7. $144-8x=72$; $144-72=8x$; $72=8x$. Аз ин ҷо: $x=9$.

Ҷавоб: 9.

Мисоли 5. Ифодаро ҳисоб карда, x -ро ёбед:

$$\frac{(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}) : 18\frac{1}{6}}{0,002} \cdot 3\frac{1}{3}x = 1000.$$

Ҳал. 1. $140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}=2\frac{7}{30}-\frac{5}{12}=\frac{67}{30}-\frac{5}{12}=\frac{134-25}{60}=\frac{109}{60}$;

2. $\frac{109}{60} : 18\frac{1}{6} = \frac{109}{60} : \frac{109}{6} = \frac{109}{60} \cdot \frac{6}{109} = \frac{1}{10}$;

3. $\frac{1}{10} : 0,002 = 0,1 : 0,002 = 1 : 0,02 = 1 : \frac{2}{100} = 1 \cdot \frac{100}{2} = 50$;

4. $50 \cdot 3\frac{1}{3}x = 1000$; $50 \cdot \frac{10}{3}x = 1000$;

$500x = 3000$. Аз ин ҷо, $x=6$ мешавад.

Ҷавоб: 6.

§6. Ҳисобкуниҳои тақрибӣ

Мо дар баёнотҳои дар боло овардашуда ҳосиятҳо ва амалҳоро бо ададҳо омӯхтем.

Ҳангоми шуморидани миқдори предметҳо, ченкуниҳо ва ҳисоббарорӣ мо ё ададҳои саҳеҳ (аниқ) ва ё ададҳои тақрибиро ҳосил мекунем. Дар ин ҷо се мавриди ҳосил шудани ададҳои саҳеҳ ва тақрибиро дар мисолҳо дида мебароем.

1. Оилаи донишҷӯи курси дуҷуми факултети математика Абдурахмонзода аз 12 нафар иборат аст. Вақте, ки мо оилаи Абдурахмонзода 12 нафар мегӯем, ин адад узви оилаи номбар кардашударо саҳеҳ нишон медиҳад.

2. Масофаи байни шаҳрҳои Душанбе ва Хучанд 300 км аст. Вақте ки мо ин тасдиқотро меорем, адади 300 монанди адади аъзоёни оилаи номбар кардашуда аниқ (саҳеҳ) нест. Бинобар ин 300 км адади «яклухт» кардашуда мебошад.

3. Дар вақти ҳисоббарорӣ вобаста ба ададҳои додашуда ҳисобро иҷро мекунем, лекин дар натиҷа бошад адади саҳеҳ ва ё адади тақрибиро ҳосил мекунем. **Масалан**, дар вақти тақсим намудани ададҳои саҳеҳ ё адади аниқ ё адади тақрибӣ ҳосил мешавад.

Ҳамин тариқ, дар вақти шуморидани предметҳо ва ё ҷенкуниҳо ададҳои саҳеҳ ва ё ададҳои тақрибӣ ҳосил мекунанд, лекин натиҷаи ҳамаи ҷенкуниҳои дарозӣ ва *вазми предметҳо доимо ададҳои тақрибиро медиҳанд*.

Дар ин ҷо барои ишора намудани ададҳои тақрибӣ аз аломати $\approx$, ки маънояш «тақрибӣ баробар»-ро дорад, истифода мекунанд.

Адади саҳеҳ гуфта, ададери меноманд, ки вай қимати саҳеҳи бузургии додашударо муайян мекунад.

Адади тақрибӣ гуфта, ададери меноманд, ки вай қимати тақрибии бузургии додашударо ифода мекунад, ё ки вай дар натиҷаи бо ягон саҳеҳии додашуда яклухт кардан ҳосил шудааст.

Агар дар вақти яклухткунӣ рақами якуми партофташуда ададҳои 0; 1; 2; 3; 4 бошанд, он гоҳ рақами охирини нигоҳ дошта шуда таъғир намеёбад; агар рақами якуми партофта шуда 5; 6; 7; 8; 9 бошад, он гоҳ рақами охирини нигоҳ дошта шударо як воҳид зиёд карда менависанд.

Масалан: Адади $32176 \approx 32000$, яъне то ҳазор яклухт карда шудааст;

Адади $32176 \approx 32200$, яъне то садӣ яклухт карда шудааст;

Адади $12345 \approx 12350$, яъне то даҳӣ яклухт карда шудааст.

Дар ин ҳолат мегӯянд, ки ададҳои тақрибии ҳосилшуда ададҳои тақрибии бо барзиёдагӣ ва ё бо норасогӣ гирифта шуда мебошанд.

Хатон мутлақ ва нисбӣ. Дар амал ҳангоми яклухткунии ададҳо то саҳеҳии додашуда ба хатоҳо роҳ медиҳем. Хатоҳои роҳ додашуда хатоҳои мутлақ ва нисбӣ мешаванд.

Таърифи 1. Бузургии мутлақи фарқи байни қимати саҳҳеҳи адад ва қимати тақрибии он хатон мутлақи адади тақрибӣ номида мешавад.

Инак, агар қимати саҳҳеҳи ададро ба A , қимати тақрибияшро бо a ва бузургии мутлақи хаторо бо Δ («делта» хонда мешавад) ишора кунем, он гоҳ

$$\Delta = |A - a| \text{ ё ки } A - a = \pm \Delta$$

мешавад. Дар ин ҷо аломатҳои дар назди Δ (делта) буда, қимати тақрибии ададро бо норасоӣ ва бо барзиёдӣ мефаҳмонад.

Масалан, агар $A = 4,28$, $a_1 = 4,2$ қимати тақрибии адади A бо норасоӣ ва $a_2 = 4,3$ қимати тақрибии адади A бо барзиёдӣ бошад, он гоҳ

$$A - a_1 = 4,28 - 4,2 = 0,08 \text{ (бо норасоӣ);}$$

$$A - a_2 = 4,28 - 4,3 = -0,02 \text{ (бо барзиёдӣ) мешавад.}$$

Аммо бузургии мутлақи хатоҳо (Δ) дар ҳар ду ҳолат ҳам мусбат мешаванд.

$$\Delta = |A - a_1| \Rightarrow \Delta = |4,28 - 4,2| \Rightarrow \Delta = 0,08;$$

$$\Delta = |A - a_2| \Rightarrow \Delta = |4,28 - 4,3| \Rightarrow \Delta = 0,02.$$

Аз сабаби он ки дар амал қимати саҳҳеҳи адади A маълум нест, бинобар ин қимати саҳҳеҳи хатон мутлақро мо наметавонем. Бинобар ин ҳангоми ба хатон мутлақ баҳо додан аз мафҳуми сарҳадҳои хатон мутлақ (h) истифода мебаранд:

$$\Delta \leq h \Leftrightarrow |A - a| \leq h \Leftrightarrow a - h \leq A \leq a + h.$$

Таърифи 2. Нисбати хатон мутлақ бар қимати мутлақи тақрибии адад хатон нисбӣ номида мешавад ва бо формулаи

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \Leftrightarrow \delta = \frac{A - a}{a}$$

мусайян карда мешавад.

Дар амал хатон нисбиро бо протсент, баъзан бо касри даҳӣ ва ё одӣ ифода мекунянд:

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \cdot 100 \text{ ё ки } \delta = \frac{A - a}{a} \cdot 100.$$

Агар $\Delta \leq h$ бошад, он гоҳ сарҳадҳои ҳамаи нисбиро бо ε («эпсилон») ифода карда, меёбанд,

$$\varepsilon = \frac{h}{a}, \delta = \varepsilon.$$

Ададҳои тақрибиро ҳам, тарҳ, зарб ва тақсим намудан мумкин аст. Лекин дар хотир доштан лозим аст, ки ададҳои тақрибӣ аз ҷиҳати саҳеҳнашон гуногун шуда метавонанд. Барои ду ва ё якчанд ададро то саҳеҳии додашуда ҳам (тарҳ) намудан, аввал онҳоро ҳам (тарҳ) намуда баъд натиҷаашро яклукт намудан мумкин аст, ё ин ки ҳар яке онҳоро ба як разряд зиёд яклукт карда, баъд ҳам (тарҳ) мекунад ва аз натиҷааш разряди охириро мебароянд.

Мисоли 1. Ададҳои 2,356; 0,173; 12,541; 3,087 ва 9,704 то саҳеҳии 0,1 ҳам карда шаванд:

А)	В)
2,356	$2,356 \approx 2,36$
0,173	$0,173 \approx 0,17$
*12,541	* $12,541 \approx 12,54$
3,087	$3,087 \approx 3,09$
9,704	$9,704 \approx 9,70$
27,861 $\approx$ 27,9	27,86 $\approx$ 27,9

Мисоли 2. То саҳеҳии 0,01 ҳисоб мекунем:

$$47,03573 - 21,53034 - 2,01519$$

а)	б)
47,03573	$47,03573 \approx 47,036$
- 21,53034	$- 21,53034 \approx - 21,530$
- 2,01519	$- 2,01519 \approx - 2,015$
23,49020 $\approx$ 23,49	23,491 $\approx$ 23,49

Мисоли 3. Ҳосили зарби ададҳои $a_1 = 3,491$ ва $a_2 = 8,6$ -ро ёбед.

Ҳал. Аз сабаби он ки $a_2 = 8,6$ баъд аз вергул як адади қиматдор дорад, пас адади $a_1 = 3,491$ -ро то 3,5 яклукт карда, ҳосили зарбро меёбем:

$$a_1 \cdot a_2 = 8,6 \cdot 3,5 = 30,10 \approx 30.$$

Мисоли 4. Нисбати $\frac{a_1}{a_2}$ -ро хангоми $a_1 = 39,57$ ва

$a_2 = 42,6137$ будан ёбед.

Ҳал. Дар ин ҷо ҳам ба монанди зарби ададҳои тақрибӣ рафтор намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{39,57}{42,6137} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{39,57}{42,61} = 0,92865... \approx 0,9287.$$

Аз мисолҳои дар боло муоина карда шуда маълум мешавад, ки хангоми иҷрои амалҳои арифметикӣ, ки дар онҳо ақаллан яке аз ададҳои тақрибӣ мебошад, зарур аст, ки ададҳои дигар яқлукт карда шаванд. Натиҷаи ҳисоб ҳамеша адади тақрибӣ мешавад.

§7. Протсент

Дар корҳои амалии хоҷагидорӣ, ҳисобҳои молнавиъ – иқтисодӣ ва таҳлили тасдиқи иҷрои буҷетҳои протсент васеъ истифода бурда мешавад.

Аз тарафи дигар хангоми муқоисаи ду адад донишманд лозим аст, ки як адад аз адади дигар чанд маротиба калон (ё хурд) аст, як адад ба чанд ҳиссаи адади дигар баробар аст.

Масалан, адади 25 ба $\frac{1}{3}$ ҳиссаи адади 75 баробар аст, яъне адади 75 аз адади 25 се маротиба калон мебошад.

Нисбати адади a ба адади b , ($b \neq 0$) гуфта, касри $\frac{a}{b}$ -ро меноманд. Аслан мо дар таҳти каллимаи «нисбат» натиҷаи тақсимодро мефаҳмем. Натиҷаи тақсимои адад ва ё бузургии адади ғайри ягон мафҳуми шуда метавонад.

Масалан, нисбати 112 ба 100 ба 1,12 баробар аст, чунки $112:100 = 1,12$ аст. Агар S -масса, t -вақт бошад, он гоҳ $\frac{S}{t} = v$ бузургии суръатро ифода мекунад. Бинобар ин дар бисёр мавридҳои нисбати ду ададро ба аз сад як ҳиссаи ифода мекунанд.

Таърифи 1. *Аз сад як ҳиссаи адад як протсенти он ном дорад. Протсент ба рамзи % ишора карда мешавад.*

Масалан, 1%-и адади 1 ба 0,01 баробар аст, чунки $1\% = 1:100$; 3%-и адади 1 ба 0,03 баробар аст, чунки $3\% = 3:100$ ва ғайра.

Умуман, натиҷаи ҳар гуна ҳисобро ё бо адад, ё ки бо протсент ифода кардан мумкин аст. Бинобар ин, қоидаи ададро бо протсент ва протсентро ба адад гардонида навиштанро доништан лозим аст.

Қоидаи 1. Барои ададро бо протсент ифода кардан бояд адади маълумро ба 100 зарб зада дар оқибати он аломати % гузоштан лозим аст.

Масалан: $32 = 3200\%$ (чунки $32 \cdot 100 = 3200$);

$4,5 = 450\%$ (чунки $4,5 \cdot 100 = 450$);

$0,7 = 70\%$ (чунки $0,7 \cdot 100 = 70$);

$1,35 = 135\%$ (чунки $1,35 \cdot 100 = 135$).

Қоидаи 2. Барои ҳар гуна протсентро бо адад ифода кардан, протсенти додашударо ба 100 тақсим намуда дар ҷавобаш аломати %-ро партофтан лозим аст. **Масалан:**

$5\% = 0,05$ (чунки $5 : 100 = 0,05$);

$0,7\% = 0,007$ (чунки $0,7 : 100 = 0,007$);

$225\% = 2,25$ (чунки $225 : 100 = 2,25$).

Аз мисолҳои дар боло муоина карда шуда маълум мешавад, ки дар ҳисоби протсент се бузургҳои ададиро фарқ кардан лозим аст: N , a ва $p\%$. Дар ин ҷо N - адади маълумро ифода мекунад, яъне ададе, ки мо онро 100% гуфта мегирем; a - бошад, $p\%$ -ти адади N -ро ифода мекунад. Бинобар ин дар ин ҷо се намуни масъалаҳоро доир ба протсент дида мебароем.

Дар масъалаҳои протсентӣ, доимо аз ин се бузургҳои ададӣ дутояш маълум буда, сеюмаш ёфта мешавад.

1. Ёфтани протсенти адади маълум

Масъалаи 1. Ёфтани бузургии a , ҳангоми маълум будани бузургҳои N ва $p\%$.

Ин намуни масъала аз рӯи формулаи зерин ҳал карда мешавад:

$$a = \frac{N}{100} \cdot p. \quad (1)$$

Масъалаи 2. Агар $A = \frac{30 : 0,1 + 60}{0,75 \cdot 32 + 6}$ бошад, 15%-и адади A -ро ёбед.

Ҳал. а) Аввал қимати адади A -ро ҳисоб мекунем:

1. $30:0,1 = 300$; 2. $300 + 60 = 360$;
3. $0,75 \cdot 32 = 24$; 4. $24 + 6 = 30$; 5. $360:30 = 12$.

б) 15%-и адади 12-ро бо ёрии формула ҳисоб мекунем:

$$a = \frac{N}{100} \cdot p = \frac{12}{100} \cdot 15 = \frac{36}{20} = 1,8. \text{ Пас, } a = 1,8 \text{ аст.}$$

Ҷавоб: 15%-и адади A ба 1,8 баробар мебошад.

II. Ёфтани адад аз рӯи протсенташ

Масъалаи 3. Ёфтани бузургии N дар вақти маълум будани бузургихои a ва $p\%$.

Ин намуди масъала бо формулаи зерин ҳал карда мешавад:

$$N = \frac{a}{p\%} \cdot 100 \quad \text{ё ки} \quad N = \frac{a}{p} \cdot 100. \quad (2)$$

Масъалаи 4. Агар 4,5%-и адади x ба 900 баробар бошад, пас худӣ адади x чӣ қадар аст?

Ҳал. Аз формула истифода бурда, ҳал мекунем:

$$x = N = \frac{a}{p} \cdot 100; N = \frac{900}{4,5} \cdot 100; N = \frac{9000}{45} \cdot 100; N = 20000.$$

Ҷавоб: адади номаълуми x ба 20000 баробар аст.

III. Ёфтани нисбати протсенти адад

Масъалаи 5. Ёфтани бузургии $p\%$ хангоми маълум будани бузургихои a ва N . Яъне, нисбати ду адади маълум доимо бо протсентҳо ифода карда мешавад.

Ин намуди масъалаҳо бо формулаи зерин ҳал карда мешавад.

$$p\% = \frac{a}{N} \cdot 100. \quad (3)$$

Масъалаи 6. Дар китобхонаи мактаб 12000 нусха китоб аст. Дар байни онҳо 1200 нусха китоби математика ва 4800 нусха китоби техникӣ ҳаст. Нисбати протсенти адади китобҳои математикӣ ва техникӣ бар адади умумии китобҳо ёбед.

Ҳал. Масъала аз рӯи формула ҳал мекунем.

$$1) p_1 = \frac{a}{N} \cdot 100 \Rightarrow p_1 = \frac{1200}{12000} \cdot 100 \Rightarrow p_1 = 10\%;$$

$$2) p_2 = \frac{a}{N} \cdot 100 \Rightarrow p_2 = \frac{4800}{12000} \cdot 100 \Rightarrow p_2 = 40\%.$$

Ҷавоб: китоби математика 10%-и китобҳои умумии дар мактаб буда ва китобҳои техникӣ бошад, 40%-и ҳамаи китобҳоро ташкил мекардааст.

Масъалаи 7. Нархи телевизор, ки 380 сомони меистод, 20% арзон карда шуд. Телевизор чанд сомонӣ арзон шудааст?

Ҳал. Масъаларо аз рӯи формулаи (1) ҳисоб мекунем.

$$a = \frac{N}{100} \cdot p; a = \frac{380}{100} \cdot 20; a = 76.$$

Ҷавоб: телевизор 76 сомонӣ арзон шудааст.

Масъалаи 8. Агар маоши коргар 183 сомонӣ бошад, 6,1%-и он чанд сомонӣ мешавад?

Ҳал. Масъаларо аз рӯи формулаи (1) ҳисоб мекунем.

$$a = \frac{N}{100} \cdot p; a = \frac{183}{100} \cdot 6,1; a = 11,20.$$

Ҷавоб: 6,1%-и маоши коргар ба 11 сомонӣ 20 дирам баробар аст.

Масъалаи 9. Адади x -ро ёбед, агар 2,5%-и он ба $\frac{4,5 : 0,01 + 50}{0,125 \cdot 8 + 9}$ баробар бошад.

Ҳал. а) Аввал 2,5%-и адади x -ро ҳисоб мекунем:

$$1. 4,5 : 0,01 = 4,5 \cdot 100 = 450; \quad 2. 450 + 50 = 500;$$

$$3. 0,125 \cdot 8 = 1; \quad 4. 1 + 9 = 10; \quad 5. 500 : 10 = 50.$$

б) Адади номаълуми x -ро меёбем:

$$x = N = \frac{a}{p} \cdot 100; x = \frac{50}{2,5} \cdot 100; x = 2000.$$

Ҷавоб: адади x ба 2000 баробар будааст.

Масъалаи 10. Рӯзи якуми сентябри соли хониш дар факултети математика ба дарс 40 нафар донишҷӯ наомад, ки он 2,5%-и ҳамаи донишҷӯёни факултетро ташкил мекунад. Шумораи умумии донишҷӯёни факултетро муайян кунед?

Ҳал. Масъала аз рӯи формулаи (2) ҳал карда мешавад.

$$N = \frac{a}{p} \cdot 100; N = \frac{40}{2,5} \cdot 100; N = \frac{400}{25} \cdot 100; N = 1600.$$

Ҷавоб: шумораи умумии донишҷӯёни факултети математика ба 1600 нафар баробар будааст.

Масъалаи 11. Коргар мебоист мувофиқи нақша 800 детал барорад. Аммо вай 996 детал тайёр кард. Коргар нақшаро чанд протсент иҷро кардааст?

Ҳал. Масъала аз рӯи формулаи (3) ҳал карда мешавад.

$$p = \frac{a}{N} \cdot 100; p = \frac{996}{800} \cdot 100; p = 124,5\%.$$

Ҷавоб: коргар нақшаро 124,5% иҷро кардааст.

§8. Таносуб ва ҳосиятҳои он

Дар §6 мо бо мафҳуми нисбат шинос шудем. Акнун аз мафҳуми нисбат истифода бурда, мо мафҳуми таносуб ва ҳосиятҳои онро дида мебароем.

Таърифи 1. Баробарии ду нисбат таносуб номида мешавад.

Масалан, агар $a:b=e$ ва $c:d=e$ бошад, он гоҳ баробарии $a:b=c:d$ таносуб номида мешавад. Чор ададе, ки таносубро ташкил медиҳанд, ададҳои мутаносибӣ номида мешаванд. Дар таносуби додашуда a ва d -ро узвҳои канорӣ, b ва c -ро узвҳои мобайнӣ меноманд.

Ҳосиятҳои асосии таносубро номбар мекунем:

1. Ҳосили зарби узвҳои канорӣ таносуб ба ҳосили зарби узвҳои мобайнӣ баробар аст.

Масалан: дар таносуби $a:b=c:d$ доимо $a \cdot d = b \cdot c$ мебошад.

Мисоли 1. Дар таносуби $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{48} \cdot 20$;

$\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$ аст.

2. Агар мо дар як вақт узви дилхоҳи канорӣ ё мобайнӣ таносубро якчанд маротиба зиёд ё кам кунем, таносуб вайрон намешавад.

Масалан, узви якуми канорӣ ва узви дуюми мобайнӣ таносуби $64:8=80:10$ -ро 16 маротиба кам карда таносуби $4:8=5:10$ -ро ҳосил мекунем.

3. Таносубе, ки дар он узвҳои мобайнӣ ва ё узвҳои канорӣ ба ҳамдигар баробаранд, таносуби бефосила номида мешавад.

Масалан, таносуби $a:b=c:d$ ва $c:k=l:c$ таносубҳои бефосилаанд.

Мисоли 2. Таносубҳои $15:6=6:24$ ва $15:9=25:15$ таносубҳои бефосилаанд.

Аз мафҳуми таносуб истифода бурда, мафҳуми мутаносибии бузургӣҳоро дида мебароем.

Як қатор бузургӣҳое ҳастанд, ки байни худ чунин вобастагӣ доранд: ба ҳар як қимати як бузургӣ қимати муайяни дигар бузургӣ мувофиқ меояд. **Масалан,** вақти кор ва музди кор; ҳаҷми кerosин ва ҳарорат ва ғайраҳо. Вобастагии бузургӣҳоро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисоли 3. Дар китобҳои дарсӣ вобастагии байни ҳаҷми керосин ва ҳарорат дар намуни зерин оварда шудааст:

Ҳарорат:	Ҳаҷми керосин:
	1 литр;
0°	1,01 литр;
10°	1,02 литр;
20°	1,03 литр;
30°	1,04 литр;
40°	

Аз мисоли овардашуда маълум мешавад, ки ба ҳар як қимати ҳарорат ҳаҷми муайяни керосин мувофиқ омада истодааст. Чӣ хеле, ки мебинем бо зиёд шудани дараҷаи ҳарорат, ҳаҷми керосин ҳам зиёд шуда истодааст. Ин аст вобастагии байни ҳарорат ва ҳаҷми керосин.

Таърифи 2. Агар ду бузургии A ва B яке аз дигаре чунин вобаста бошанд, ки нисбати ду қимати дилхоҳи як бузургӣ ба нисбати қиматҳои мувофиқи бузургии дуюм баробар бошад, он гоҳ чунин бузургиҳоро бузургиҳои мутаносибан роста меноманд.

Таърифи 3. Агар бузургиҳои A ва B роста мутаносиб бошад, он гоҳ нисбати ҳар ду қимати мувофиқи онҳо адади доимӣ мебошад. Ин адади доимиро коэффитсиенти мутаносибӣ меноманд.

Барои ҳисоб кардани коэффитсиенти мутаносибӣ, қимати дилхоҳи як бузургиро ба қимати мувофиқи бузургини дигар тақсим кардан лозим аст.

Қимати дилхоҳи як бузургиро бо y , қимати ба он мувофиқи бузургини дигарро бо x ва коэффитсиенти мутаносибиро бо k ишорат карда навишта метавонем:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ё ки} \quad y = kx.$$

Баробарии пайдошуда формулаи мутаносибии роста номида мешавад.

Таърифи 4. Агар дар байни ду бузургии A ва B чунин вобастагӣ мавҷуд бошад, ки мувофиқи он нисбати ду қимати дилхоҳи бузургини якум ба нисбати ҷаълаи қиматҳои мувофиқи бузургини дуюм баробар шавад, он гоҳ чунин бузургиҳоро бузургиҳои мутаносибан ҷаъла меноманд.

§8. Таносуб ва ҳосиятҳои он

Дар §6 мо бо мафҳуми нисбат шинос шудем. Акнун аз мафҳуми нисбат истифода бурда, мо мафҳуми таносуб ва ҳосиятҳои онро дида мебароем.

Таърифи 1. Баробарии ду нисбат таносуб номида мешавад.

Масалан, агар $a:b=e$ ва $c:d=e$ бошад, он гоҳ баробарии $a:b=c:d$ таносуб номида мешавад. Чор ададе, ки таносубро ташкил медиҳанд, ададҳои мутаносибӣ номида мешаванд. Дар таносуби додашуда a ва d -ро узвҳои канорӣ, b ва c -ро узвҳои мобайнӣ меноманд.

Ҳосиятҳои асосии таносубро номбар мекунем:

1. Ҳосили зарби узвҳои канорӣ таносуб ба ҳосили зарби узвҳои мобайниаш баробар аст.

Масалан: дар таносуби $a:b=c:d$ доимо $a \cdot d = b \cdot c$ мебошад.

Мисоли 1. Дар таносуби $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{48} \cdot 20$;
 $\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$ аст.

2. Агар мо дар як вақт узви дилхоҳи канорӣ ё мобайнӣ таносубро якчанд маротиба зиёд ё кам кунем, таносуб вайрон намешавад.

Масалан, узви якуми канорӣ ва узви дуюми мобайнӣ таносуби $64:8=80:10$ -ро 16 маротиба кам карда таносуби $4:8=5:10$ -ро ҳосил мекунем.

3. Таносубе, ки дар он узвҳои мобайнӣ ва ё узвҳои канорӣ ба ҳамдигар баробаранд, таносуби бефосила номида мешавад.

Масалан, таносуби $a:b=c:d$ ва $c:k=l:c$ таносубҳои бефосилаанд.

Мисоли 2. Таносубҳои $15:6=6:24$ ва $15:9=25:15$ таносубҳои бефосилаанд.

Аз мафҳуми таносуб истифода бурда, мафҳуми мутаносибии бузургихоро дида мебароем.

Як қатор бузургихоро ҳастанд, ки байни худ чунин вобастагӣ доранд: ба ҳар як қимати як бузургӣ қимати муайяни дигар бузургӣ мувофиқ меояд. **Масалан**, вақти кор ва музди кор; ҳаҷми керосин ва ҳарорат ва ғайраҳо. Вобастагии бузургихоро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисоли 3. Дар китобхон дарсӣ вобастагии байни ҳаҷми керосин ва ҳарорат дар намуди зерин оварда шудааст:

Ҳарорат:	Ҳаҷми керосин:
	1 литр;
0°	1,01 литр;
10°	1,02 литр;
20°	1,03 литр;
30°	1,04 литр;
40°	

.....

Аз мисоли овардашуда маълум мешавад, ки ба ҳар як қимати ҳарорат ҳаҷми муайяни керосин мувофиқ омада истодааст. Чӣ хеле, ки мебинем бо зиёд шудани дараҷаи ҳарорат, ҳаҷми керосин ҳам зиёд шуда истодааст. Ин аст вобастагии байни ҳарорат ва ҳаҷми керосин.

Таърифи 2. Агар ду бузургии A ва B яке аз дигаре чунин вобаста бошанд, ки нисбати ду қимати дилхоҳи як бузургӣ ба нисбати қиматҳои мувофиқи бузургии дуюм баробар бошад, он гоҳ чунин бузургихоро бузургихои мутаносибан роста меноманд.

Таърифи 3. Агар бузургихои A ва B роста мутаносиб бошад, он гоҳ нисбати ҳар ду қимати мувофиқи онҳо адади доимӣ мебошад. Ин адади доимиро коэффитсиенти мутаносибӣ меноманд.

Барои ҳисоб кардани коэффитсиенти мутаносибӣ, қимати дилхоҳи як бузургиро ба қимати мувофиқи бузургии дигар тақсим кардан лозим аст.

Қимати дилхоҳи як бузургиро бо y , қимати ба он мувофиқи бузургии дигарро бо x ва коэффитсиенти мутаносибиро бо k ишорат карда навишта метавонем:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ё ки} \quad y = kx.$$

Баробарии пайдошуда формулаи мутаносибии роста номида мешавад.

Таърифи 4. Агар дар байни ду бузургии A ва B чунин вобастагӣ мавҷуд бошад, ки мувофиқи он нисбати ду қимати дилхоҳи бузургии якум ба нисбати чапҳои қиматҳои мувофиқи бузургии дуюм баробар шавад, он гоҳ чунин бузургихоро бузургихои мутаносибан чаппа меноманд.

Масалан, агар $a_1, a_2, a_3, \dots$ қиматҳои бузургҳои A бошанд ва $b_1, b_2, b_3, \dots$ қиматҳои бузургҳои B бошанд ва агар $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}; \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3}; \dots$ шавад, он гоҳ бузургҳои A ва B бузургҳои мутаносибан ҷалпа мебошанд.

Дар ин ҷо ҳам агар x ва y қиматҳои бузургҳои A ва B бошад ва k коэффициентҳои мутаносибӣ бошад, он гоҳ формулаи мутаносибии ҷалпа дар намуди $y = \frac{k}{x}$ навишта мешавад.

Мисоли 1. 72%-и адади зеринро ёбед:

$$\frac{\left(13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6}\right) \cdot 230,04 + 46,75}{0,01}.$$

Ҳал. А) Дар аввал ифодаи арифметикиро ҳисоб карда, адади додашударо меёбем:

$$\begin{aligned} 1. \quad 13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6} &= 1\frac{54-40-180}{216} = \frac{216}{216} - \frac{166}{216} = \\ &= \frac{216-166}{216} = \frac{50}{216} = \frac{25}{108}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{25}{108} \cdot 230,04 &= \frac{25}{108} \cdot 230\frac{4}{100} = \frac{25}{108} \cdot \frac{23004}{100} = \\ &= \frac{25 \cdot 23004}{108 \cdot 100} = \frac{1 \cdot 213}{1 \cdot 4} = \frac{213}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{213}{4} + 46,75 &= \frac{213}{4} + 46\frac{75}{100} = \frac{213}{4} + \frac{4675}{100} = \\ &= \frac{213 \cdot 100 + 4675 \cdot 4}{4 \cdot 100} = \frac{21300 + 18700}{400} = \frac{40000}{400} = 100; \end{aligned}$$

$$4. \quad 100 : 0,01 = 10000 : 1 = 10000.$$

Б) Протсенти адади ёфтшударо бо ду тарз ҳисоб мекунем:

Тарзи якум. Барои ёфтани 72%-и адади 10000 бояд адади додашударо ба 100 тақсим намуда, баъд ба 72 зарб зад.

$$a = \frac{N}{100} \cdot p \Rightarrow a = \frac{10000}{100} \cdot 72 \Rightarrow a = 7200.$$

Тарзи дуюм. Бо тарзи таносуб ҳисоб мекунем:

$$10000 - 100\%$$

$$x - 72\%$$

$$x = \frac{10000}{100} \cdot 72 \Rightarrow x = 7200.$$

Ҷавоб: 72%-и адади додашуда ба 7200 баробар будааст.

Мисоли 2. Аз таносуби додашуда қимати адади номаълуми x -ро ёбед:

$$\frac{3,6}{14 - 15 \frac{1}{8} : 2,2} = \frac{x}{1,5 + 2 \frac{2}{3} + 3,75}.$$

Ҳал. А) Ифодаҳои дар махраҷи таносуб бударо ҳисоб мекунем:

$$1. 15 \frac{1}{8} : 2,2 = \frac{121}{8} : 2 \frac{2}{10} = \frac{121}{8} : \frac{22}{10} = \frac{121}{8} \cdot \frac{10}{22} = \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{55}{8};$$

$$2. 14 - \frac{55}{8} = \frac{112 - 55}{8} = \frac{57}{8};$$

$$3. 1,5 + 2 \frac{2}{3} + 3,75 = 1 \frac{5}{10} + 2 \frac{2}{3} + 3 \frac{75}{100} = \frac{15}{10} + \frac{8}{3} + \frac{375}{100} = \\ = \frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{15}{4} = \frac{18 + 32 + 45}{12} = \frac{95}{12}.$$

Б) Қиматҳои ҳисоб кардашударо гузошта, таносубро ҳал мекунем:

$$\frac{3,6}{57 \cdot \frac{8}{12}} = \frac{x}{95}; \quad \frac{3,6 \cdot 8}{57} = \frac{x \cdot 12}{95}; \quad \frac{0,3 \cdot 8}{57} = \frac{x}{95};$$

$$\frac{2,4}{57} = \frac{x}{95} \Rightarrow x = \frac{2,4 \cdot 95}{57} \Rightarrow x = \frac{2,4 \cdot 5 \cdot 19}{3 \cdot 19} = 0,8 \cdot 5 \Rightarrow x = 4.$$

Ҷавоб: 4.

МАШҚҲО

1. Амалҳоро иҷро кунед:

$$a) \frac{2 \cdot (-4) - 6 : (-2) - 1 + 2 \cdot (-3) + 15}{2 \cdot (-1) + 5};$$

$$b) \frac{(1 - 3 + 5 - 9) : (-2) - 2}{(-2) \cdot (-3) + (-7) \cdot (-1,2 + 2,5 - 1,3)}.$$

$$2. \text{Ҳисоб кунед: } a) \frac{\left(6 \frac{3}{5} - 3 \frac{3}{14}\right) \cdot 5^5}{(21 - 1,25) : 2,5};$$

$$6) \frac{(19\frac{1}{6} + 43,75) : \frac{5}{6} - (26,8 - 23\frac{3}{7}) : \frac{6}{35}}{(13,3 - 11\frac{1}{2}) : 1,8 - 0,5}.$$

3. Магар ин баробариҳо дурустанд?

$$a) \frac{-2,5 - 8,3 : (3,875 + \frac{1}{8})}{13\frac{5}{8} + 5\frac{5}{42} \cdot (-1\frac{1}{6} - \frac{7}{12})} \cdot (-4\frac{2}{3}) = 44;$$

$$6) \frac{2,4 \cdot (13\frac{1}{5} : 6 + 69,3 : 19,8) - 13,68}{(-5) \cdot (-\frac{3}{5}) + (-0,8) : (-4)} = 0.$$

4. Аз таносуби додашуда кимати x - ро ёбед:

$$\frac{0,9}{14 - 15\frac{1}{8} : 2,2} = \frac{x}{1,5 + 2\frac{2}{3} + 3,75}.$$

5. 25%-и адади зеринро ёбед.

$$\frac{4,5 : (47,375 - (26\frac{1}{3} - 18 \cdot 0,75) \cdot 2,4 : 0,88)}{17,81 : 1,37 - 23\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}}.$$

6. Ифодаро сода карда, x - ро ёбед:

$$\frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{7}} + x - 3\frac{1}{3} = 1\frac{1}{6}.$$

7. x - ро ёбед:

$$a) \frac{\left(\left(4,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26} \right) : x + (2,5 : 1,25) : 6,75 \right) : 1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2} - 0,375 \right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12} \right) : (0,358 - 1,4796 : 13,7)} = \frac{17}{27}.$$

$$6) \frac{x}{10,5 \cdot 0,24 - 15,15 : 7,5} = \frac{9 \cdot \left(1\frac{11}{20} - 0,945 : 0,9 \right)}{1\frac{3}{40} - 4\frac{3}{8} : 7}.$$

АЛГЕБРА

БОБИ III. ДАРАЧА ВА РЕША

§1. Дарачаи нишондиҳандаш натуралӣ

Дар ин параграф мо яке аз мафҳумҳои дараҷа - дараҷаи нишондиҳандаш натуралӣ ва хосиятҳои онро муоина мекунем.

Бигузор $a \in R$ ва $n \in N$ бошад.

Таърифи 1. Дараҷаи адади a бо нишондиҳандаи натуралӣ n ($n \geq 2$) гуфта, ҳосили зарби n -то зарбкунандаҳоро меноманд, ки ҳар яке онҳо ба a баробар аст:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-маротиба}}. \quad (1)$$

Дар ин ҷо a -ро асоси дараҷа, адади n -ро нишондиҳандаи дараҷа ва натиҷаи бадараҷабардориро (a^n) дараҷаи нишондиҳандаш натуралӣ меноманд.

Таърифи 2. Дараҷаи адади a бо нишондиҳандаи 1 гуфта худӣ адади a -ро меноманд:

$$a^1 = a. \quad (2)$$

Ҳамин тариқ дар асоси таърифҳои якум ва дуюм навишта метавонем:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-маротиба}}, & \text{агар } n \geq 2, \\ a, & \text{агар } n = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Ҳангоми $n=2$ будан, $a^2 = a \cdot a$ -ро квадрати адади a меноманд.

Ҳангоми $n=3$ будан, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ -ро куби адади a меноманд.

Аз таърифҳои додашуда бармеояд:

1. Агар $a < 0$ ва n ҷуфт бошад, он гоҳ $a^n > 0$;

Масалан: $(-3)^2 > 0$; $(-\frac{3}{4})^{12} > 0$; $(-2,5)^8 > 0$; ...

2. Агар $a < 0$ ва n тоқ бошад, он гоҳ $a^n < 0$ мешавад;

Масалан: $(-5)^3 < 0$; $(-\frac{3}{7})^{11} < 0$; $(-\frac{4}{17})^{21} < 0$; ...

3. Барои ҳар гуна $a > 0$ доимо $a^n > 0$ мебошад.

4. Барои ҳар гуна n -и натуралӣ охиринок баробарии $0^n = 0$ ҷой дорад. **Масалан:**

$$0^5 = 0; 0^{15} = 0; 0^{100} = 0; \dots$$

5. Барои ҳар гуна n -и натуралӣ охиринок баробарии $1^n = 1$ ҷой дорад. **Масалан:**

$$1^5 = 1; 1^{15} = 1; 1^{100} = 1; 1^{35} = 1; \dots$$

Ҳосиятҳои асосии дараҷаи нишондиҳандааш натуралиро номбар мекунем:

1. Ҳангоми зарб кардани дараҷаҳои асосашон якхела асосро бетағйир монда, нишондиҳандаҳои дараҷаҳоро ҳамчун кардан лозим аст. **Масалан:**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ ҳангоми } m, n \in N.$$

$$a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8; \quad 7^2 \cdot 7^5 = 7^{2+5} = 7^7;$$

$$3^2 \cdot 27 = 3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5.$$

2. Ҳангоми ба дараҷа бардоштани дараҷа асосро бетағйир монда, нишондиҳандаҳоро зарб кардан лозим аст.

$$(a^m)^n = a^{mn}, \text{ ҳангоми } m, n \in N. \text{ Масалан:}$$

$$(2^3)^7 = 2^{3 \cdot 7} = 2^{21};$$

$$(5^3)^5 = 5^{3 \cdot 5} = 5^{15};$$

$$(a^3 \cdot x)^4 = (a^3)^4 \cdot x^4 = a^{12} \cdot x^4;$$

$$x^2 \cdot (y^2)^3 = x^2 \cdot y^{2 \cdot 3} = x^2 \cdot y^6.$$

3. Ҳангоми тақсим кардани дараҷаҳои асосашон якхела асосро бетағйир монда, аз нишондиҳандаи дараҷаи тақсимшаванда нишондиҳандаи дараҷаи тақсимкунамандаро тарҳ кардан лозим аст.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ ҳангоми } m, n \in N, a \neq 0. \text{ Масалан:}$$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27; \quad \frac{8^{15}}{8^{12}} = 8^{15-12} = 8^3;$$

$$\frac{24}{32} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 2^3}{4 \cdot 2^3} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2 \cdot 2^3} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^5} = 3 \cdot 2^{3-5} = 3 \cdot 2^{-2}.$$

4. Агар a адади охиринок ва $a \neq 0$ бошад, он гоҳ $a^0 = 1$ аст.

Аз ҳосиятҳои 3 ва 4 истифода бурда, барои ҳар гуна $a \neq 0$ ва $m, n \in N$ навишта метавонем:

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{агар } m > n, \\ 1, & \text{агар } m = n, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{агар } m < n. \end{cases} \quad (4)$$

Масалан: $5^7 : 5^4 = 5^{7-4} = 5^3 = 125$;

$$3^7 : 3^{12} = 3^{7-12} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5}; \quad \frac{3a^3}{bc} \cdot \frac{4b^2}{2a^2} = \frac{6ab}{c};$$

$$\frac{7^2 \cdot 7^5}{7^{12}} = \frac{7^{2+5}}{7^{12}} = \frac{7^7}{7^{12}} = 7^{7-12} = 7^{-5} = \frac{1}{7^5}.$$

5. Агар $a > 0$ ва $m, n \in N$ бошад, он гоҳ:

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{агар } n - \text{чифт бошад,} \\ -a^n, & \text{агар } n - \text{тоқ бошад.} \end{cases}$$

6. Агар $n \in N$ бошад, он гоҳ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ аст.

7. Агар $b \neq 0$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ мешавад.

8. Мувофиқи таърифи дараҷаи нишондихандааш натуралӣ барои ҳар гуна $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ навишта метавонем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \frac{a}{b}}_{n\text{-мартинба}}. \quad (5)$$

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\frac{12^3 \cdot 28^3}{21^3 \cdot 4^3}$.

$$\text{Ҳал. } \frac{12^3 \cdot 28^3}{21^3 \cdot 4^3} = \frac{(4 \cdot 3)^3 \cdot (4 \cdot 7)^3}{(3 \cdot 7)^3 \cdot 4^3} = \frac{4^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 7^3}{3^3 \cdot 7^3 \cdot 4^3} = 4^3 = 64.$$

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $\frac{(-3) \cdot (-2)^{15} + (-2)^{12}}{4^6 \cdot 5^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ҳал. } & \frac{(-3) \cdot (-2)^{15} + (-2)^{12}}{4^6 \cdot 5^2} = \frac{(-3) \cdot (-2)^{15} + (-2)^{12}}{(2^2)^6 \cdot 5^2} = \\ & = \frac{(-2)^{12} [(-3) \cdot (-2)^3 + 1]}{2^{12} \cdot 5^2} = \frac{2^{12} [(-3) \cdot (-8) + 1]}{2^{12} \cdot 5^2} = \frac{24 + 1}{5^2} = \frac{25}{25} = 1. \end{aligned}$$

1. Ҳисоб кунед: а) $\frac{(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19})^2}{(13 \cdot 8^4)^2}$; б) $(-2,56)^3 \cdot \left(1\frac{9}{16}\right)^3$;

в) $\frac{15^3 \cdot 21^2}{35^2 \cdot 3^4} + \frac{(-2) \cdot (-3)^{17} - 3^{16}}{9^7 \cdot 15}$.

2. Сода кунед: $\frac{5 \cdot 2^{k-2} + 10 \cdot 2^{k-1}}{10^{k+2}}$.

3. Кадоме аз ин ду ададҳо калон аст?

а) 5^{200} ё 3^{300} ; б) $(0,5)^4$ ё $(0,25)^3$.

§2. Дараҷаи нишондиҳандааш бутун

Дар ин ҷо мафҳуми дигари дараҷа - дараҷаи нишондиҳандааш нол ва дараҷаи нишондиҳандааш адади бутуни манфиро муонина мекунем.

Бигузор $a \in R$ ва $n \in Z$ бошад.

Таърифи 1. Агар a адади охирик ва нобаробари 0 бошад, он гоҳ $a^0 = 1$ аст. Масалан:

$$25^0 = 1; 107^0 = 1; (-151)^0 = 1; \left(-\frac{4}{9}\right)^0 = 1; \dots$$

Ифодаи 0^0 маъно надорад.

Таърифи 2. Агар $a \neq 0$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Масалан: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $8^{-3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \text{ ё ки } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8.$$

Ифодаи 0^{-n} низ маъно надорад.

Ҳосиятҳои асосии дараҷаи нишондиҳандааш бутунро қайд мекунем:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; 3. $(a^m)^n = a^{mn}$;

$$4. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad 5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Дар ин ҷо $a \neq 0, b \neq 0$ ададҳои дилхоҳ, n ва m ададҳои бутун мебошанд.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\frac{36^{-4} \cdot 3^4 \cdot 81}{2^{-6}}$.

$$\begin{aligned} \text{Ҳал. } \frac{36^{-4} \cdot 3^4 \cdot 81}{2^{-6}} &= \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 81}{36^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{(4 \cdot 9)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{4^4 \cdot (3^2)^4} = \\ &= \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^8}{2^8 \cdot 3^8} = \frac{1 \cdot 1}{2^2 \cdot 1} = \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $\frac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}}$.

$$\begin{aligned} \text{Ҳал. } \frac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}} &= \frac{2^5 \cdot 3^7}{18^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{(2 \cdot 9)^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 9^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot (3^2)^3} = \\ &= \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 3^6} = \frac{2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^6 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12. \end{aligned}$$

МАШҚҲО

1. Ҳисоб кунед: $\left(\frac{1,7 \cdot 6}{5,1}\right)^{-3} + \frac{2^{-3} \cdot 4^0 + 3^{-2} \cdot 2^3}{4^{-1} \cdot 8 - 3^{-3} \cdot 27}$.
2. Сода кунед: $\frac{(ab)^4}{(a^{-2} \cdot b^{-3})^{-3}}$.
3. 2,4%-и адади $\frac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}} + (3^{-2} \cdot 27 + 2^{-3} \cdot 12) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ -ро ёбед.

§3. Решаи квадратӣ ва ҳосиятҳои он

Бигузор $a \in R$ ($a \geq 0$) бошад.

Таърифи 1. Решаи квадратии адади a ($a \geq 0$) гуфта, чунин адади b -ро меноманд, ки квадраташ ба a баробар аст, яъне,

$$\sqrt{a} = b, \text{ агар } b^2 = a \text{ бошад.} \quad (6)$$

Масалан, адади 6 решаи квадратӣ аз 36 мебошад, чунки $6^2 = 36$ аст; адади $\frac{1}{7}$ решаи квадратӣ аз $\frac{1}{49}$ мебошад, чунки

$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$ ва адади $\left(-\frac{1}{7}\right)$ решаи квадратӣ аз $\frac{1}{49}$ мебошад, чунки $\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$ аст.

Бо ин гуфта метавонем, ки ададҳои b ва $-b$ решаҳои квадратӣ аз a мебошанд, чунки $b^2 = a$ ва ҳам $(-b)^2 = a$ аст. Бинобар он аз ду реша, решаи мусбаташро қабул карда, онро решаи арифметикӣ меноманд.

Бигузор $a \in R$ ($a \geq 0$) ва $b \in R$ ($b \geq 0$) бошад.

Таърифи 2. *Решаи квадратии арифметикии адади a ($a \geq 0$) гуфта, чунин адади гайриманфӣи b ($b \geq 0$)-ро меноманд, ки квадраташ ба a баробар аст, яъне,*

$$\sqrt{a} = b, \text{ агар } b^2 = a, b \geq 0 \text{ бошад.}$$

Дар ин ҷо $\sqrt{}$ - аломати решаи квадратӣ, a - ифодаи тахти решагӣ ва $\sqrt{a}$ -ро решаи квадратии арифметикии адади a меноманд. **Масалан:**

7 решаи квадратии арифметикии адади 49 аст, чунки $\sqrt{49} = 7$, яъне $7^2 = 49$ ва 7 адади гайриманфӣи мебошад. -7 решаи квадратии арифметикии адади 49 шуда наметавонад, чунки вай адади манфӣ аст. Пас, аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки баробарии $\sqrt{49} = 7$ дуруст аст, баробарии $\sqrt{49} = -7$ ё ки $\sqrt{49} = \pm 7$ нодуруст будааст.

Навишти $\sqrt{0}$ - решаи квадратии арифметикии 0-ро мефаҳмонад: $\sqrt{0} = 0$, чунки $0^2 = 0$ ва 0 - адади гайриманфӣист.

Навишти $\sqrt{1}$ - решаи квадратии арифметикии 1-ро мефаҳмонад: $\sqrt{1} = 1$, чунки $1^2 = 1$ ва 1 - адади гайриманфӣист.

Аз таърифи решаи квадратии арифметикӣ ва мисолҳои дар боло муовина кардашуда чунин натиҷа бармеояд:

1. Ифодаи $\sqrt{a}$ ҳангоми $a < 0$ будан маъно надорад.

Масалан, ифодаи $\sqrt{-5}$ маъно надорад, чунки чунин адади ҳақиқӣ нест, ки квадраташ ба адади манфӣ баробар бошад.

2. Агар $\sqrt{a}$ маъно дошта бошад, он гоҳ қимати он гайриманфист. Ҳамин тариқ, гуфтан мумкин аст, ки барои ҳар гуна $a \in R$ $\sqrt{a^2} = |a|$ аст. Масалан:

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5;$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5;$$

$$\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{агар } a \geq b, \\ b-a, & \text{агар } a < b. \end{cases}$$

Ҳосиятҳои асосии решаи квадратии арифметикиро номбар мекунем:

1. Агар $a \geq 0$ ва $b \geq 0$ бошанд, он гоҳ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

2. Агар $a \geq 0$ ва $b > 0$ бошанд, он гоҳ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

3. Агар $a > b > 0$ бошад, он гоҳ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ мешавад.

Мисоли 1. Ифодаро сода кунед:

$$(\sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{20}.$$

Ҳал. $(\sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{20} =$

$$= (\sqrt{2 \cdot 7} - 2\sqrt{5 \cdot 7}) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} =$$

$$= (\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} =$$

$$= (\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{5} = (\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{7} \cdot 7 + 2\sqrt{5} =$$

$$= (\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) + 2\sqrt{5} = \sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{2}.$$

Мисоли 2. Амалҳоро иҷро кунед: $\sqrt{125} - \sqrt{75} + 5\sqrt{3} - \sqrt{80}$.

Ҳал. $\sqrt{125} - \sqrt{75} + 5\sqrt{3} - \sqrt{80} =$

$$= \sqrt{25 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{4^2 \cdot 5} =$$

$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5} =$$

$$= 5\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{5} =$$

$$= 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

МАШҚҲО

1. Ифодаро сода кунед: $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{\frac{b^3}{a^2}}$.
2. Ифодаро сода кунед: $\sqrt{\frac{x^2}{y}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$.
3. Амалҳоро иҷро кунед: $\sqrt{343} - \sqrt{252} - \sqrt{7}$.
4. Амалҳоро иҷро кунед:

$$\sqrt{12} - 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{75} + 3\sqrt{108}.$$
5. Амалҳоро иҷро кунед: $3\sqrt{\frac{1}{27}} - \frac{5}{6}\sqrt{27} - 0,1\sqrt{75} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

§4. Решабарорӣ ҳамчун амали баръакси бадарачабардорӣ

Дар ин параграф яке аз мафҳумҳои асосии решани квадратии арифметикии адади a ($a \geq 0$)-ро дида мебароем, ки вай решабарорӣ мебошад. Чи тавре, ки баён кардем, решани квадратии адади a ($a \geq 0$) гуфта, чунин адади b -ро меноманд, ки квадраташ ба a баробар аст. Яъне, дар ин ҷо ёфтани адади b -ро ҳамчун амали баръакси бадарачабардорӣ дида баромадан мумкин аст. Дар ин ҷо $\sqrt{a}$ адади ҳақиқӣ, ратсионалӣ ва ҳам ирратсионалӣ шуданаш мумкин аст. Чи хеле, ки қайд карда будем, адади ратсионалӣ бо нисбати ду адади бутуни ихтисорнашавандан p ва q ифода карда мешавад:

$$r = \frac{p}{q} \quad (q \neq 0), r \in \mathbb{Q}. \quad (7)$$

Аммо, қайд кардан лозим аст, ки дар маҷмӯи ададҳои ратсионалӣ амали решабарорӣ на ҳамеша иҷрошаванда аст.

Масалаи, ададҳои $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; ... ва ғайраҳо ададҳои ирратсионалӣ мебошад ва ба маҷмӯи $\mathbb{Q}$ тааллуқ надорад.

Таърифи 1. Адади ратсионалии c ($c > 0$) қимати тақрибии $\sqrt{a}$ ($a > 0$) бо норасогии саҳеҳиати то α ($0 < \alpha \in \mathbb{Q}$) номада мешавад, агар

$$c^2 < a < (c + \alpha)^2 \quad (8)$$

бошад.

Бузургии $c + \alpha$ қимати тақрибии $\sqrt{a}$ бо барзиёдати саҳеҳиаш то α номида мешавад.

Мисоли 1. Қимати $\sqrt{3}$ бо саҳеҳии то $\frac{1}{5}$ ҳисоб кунед.

Ҳал. Азбаски, $3 = \frac{3 \cdot 5^2}{5^2} = \frac{3 \cdot 25}{25} = \frac{75}{25}$ аст, пас $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{75}{25}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{75}}{5}$

мешавад. Бинобар он кифоя аст, ки $\sqrt{75}$ -ро то саҳеҳии 1 ҳисоб карда, баъд оиро ба 5 тақсим намоем.

Азбаски, $\sqrt{75} = 8$ (бо саҳеҳии то 1), пас $\sqrt{3} = \frac{8}{5}$ (бо саҳеҳии то $\frac{1}{5}$) мебошад. Пас, дар асоси нобаробарии $c^2 < a < (c + \alpha)^2$, нобаробарии

$$\left(\frac{8}{5}\right)^2 < 3 < \left(\frac{8}{5} + \frac{1}{5}\right)^2$$

-ро навиштан мумкин аст.

Мисоли 2. Қимати тақрибии $\sqrt{72,6115}$ бо саҳеҳии 0,01 ҳисоб кунед.

Ҳал. Адад аз таҳти решаи квадратӣ бо усули зерин бароварда мешавад:

$$\begin{array}{r} \sqrt{72,6115} = 8,52 \\ + \quad 165 \times \overline{64} \\ \quad \quad 5 \times 0861 \\ \hline 1702 \quad \overline{825} \\ \quad \quad 2 \times 3615 \\ \quad \quad \quad \overline{3404} \\ \quad \quad \quad \quad 211 \text{ бақия} \end{array}$$

Яъне, $\sqrt{72,6115} \approx 8,52$ бо норасогии саҳеҳиаш то 0,01 ва $\sqrt{72,6115} = (8,52 + 0,01)$ бо барзиёдати саҳеҳиаш то 0,01 мебошад, чунки $(8,52)^2 < 72,6115 < (8,52 + 0,01)^2$ аст.

§5. Решаи дараҷаи n ва ҳосиятҳои он

Бигузур $a \in R$ ва $n \in N$ ($n \geq 2$) бошад.

Таърифи 1. Решаи дараҷаи n -ум аз адади a гуфта, чунин адади b -ро меноманд, ки дараҷаи n -умаш ба адади a баробар аст, яъне

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \quad (9)$$

Мисоли 1. Навишти $\sqrt[3]{27}$ решаи дараҷаи 3 аз 27-ро мефаҳмонад. Инак, $\sqrt[3]{27} = 3$ мебошад, чунки $3^3 = 27$ аст.

Мисоли 2. Навишти $\sqrt[3]{-27}$ решаи дараҷаи 3 аз -27 -ро мефаҳмонад. Инак, $\sqrt[3]{-27} = -3$ мебошад, чунки $(-3)^3 = -27$ аст.

Таърифи 2. Решаи дараҷаи n -уми арифметики адади a ($a \geq 0$) гуфта, чунин адади ғайриманфӣи b ($b \geq 0$)-ро меноманд, ки дараҷаи n -умаш ба адади a баробар аст, яъне

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ агар } b^n = a \quad (b \geq 0) \quad (10)$$

Мисалан, ададҳои 2 ва -2 решаҳои дараҷаи чорум аз адади 16 ҳастанд. Дар ин ҷо 2-ро решаи дараҷаи чоруми арифметикини адади 16 меноманд, лекин адади -2 решаи дараҷаи чоруми арифметикини адади 16 шуда наметавонад, чунки мусбат нест.

Бигузур $a \in R$ ($a > 0$) бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{a} = b$ решаи дараҷаи n -уми арифметикини адади a -ро мефаҳмонад, агар $b > 0$ бошад, чунки

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$$

мебошад.

Агар $n \in N$ (n -ток, $n \geq 3$) бошад, он гоҳ

$$(-b)^n = -b^n = -a$$

аст. Аз ин баробарӣ маълум мешавад, ки ҳангоми $b > 0$ будан адади манфӣ $(-b)$ - решаи дараҷаи n -ум аз адади манфӣ $(-a)$ аст, яъне

$$-b = -\sqrt[n]{a} \Rightarrow (-b)^n = -a \quad (11)$$

аст.

Мисалан: $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -\sqrt[3]{4^3} = -4$; $\sqrt[3]{-32} = -\sqrt[3]{32} = -\sqrt[3]{2^5} = -2$ ва

ғайраҳо.

Аз мисолҳои дар боло муоина кардашуда қоидаи зерин бармеояд:

1. Агар $n \in N$ (n - тоқ, $n \geq 3$) бошад, он гоҳ ифодаи $\sqrt[n]{a}$ барои ҳар гуна адади ҳақиқии a маъно дорад.

2. Агар $n \in N$ (n - чуфт, $n \geq 2$) бошад, он гоҳ ифодаи $\sqrt[n]{a}$ барои ҳаргуна адади ҳақиқии $a \geq 0$ маъно дорад.

Инак, навишти намуни $\sqrt[n]{a}$ решаи дараҷаи n -уми арифметикии адади a , ҳангоми $a \geq 0$ -ро мефаҳмонад, ё ки решаи дараҷаи токи n -уми ($n \geq 3$, n - тоқ) арифметикии адади a , ҳангоми $a < 0$ -ро мефаҳмонад.

Хосиятҳои асосии решаи дараҷаи n -умро номбар мекунем:

1. Агар $a \geq 0$, $n \in N$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^k}$ аст;

2. Агар $a \geq 0$, $b \geq 0$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ аст;

3. Агар $a \geq 0$, $b \geq 0$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{a^n b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$ аст;

4. Агар $a \geq 0$, $b > 0$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ аст;

5. Агар $a \geq 0$, $m, n \in N$ бошад, он гоҳ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ аст;

6. Агар $a \geq 0$, $m, n \in N$ бошад, он гоҳ ҳангоми $n \geq 2$, $m \geq 2$

будан $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ мебошад;

7. Аз $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, $n \in N$;

8. Аз $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Rightarrow a > b$ ($a > 0$, $b > 0$, $n \in N$);

9. Агар $a \in R$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{агар } n - \text{чуфт ва } n \geq 2; \\ a, & \text{агар } n - \text{тоқ ва } n \geq 3. \end{cases}$$

Таърифи 3. Решаҳо баробар номида мешаванд, агар ифодаи тахти решаҳо ва дараҷаи решаҳо якхела бошанд.

Мисоли 3. Ифодаи $(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}) - (3\sqrt{2} - 7\sqrt{3} - 15\sqrt{5})$ -ро сода кунед.

$$\begin{aligned} \text{Ҳал. } & (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}) - (3\sqrt{2} - 7\sqrt{3} - 15\sqrt{5}) = \\ & = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3} + 15\sqrt{5} = 9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 19\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Мисоли 4. Ҳисоб кунед: $3 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{25}{27}}$.

Ҳал. $3 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{25}{27}} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{27-25}{27}} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{27}} = \sqrt[3]{27 \cdot \frac{2}{27}} = \sqrt[3]{2}$.

Мисоли 5. Амали зарбро иҷро кунед: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-3}$.

Ҳал. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-3} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt[3]{-3}) = -(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) =$
 $= -(\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}) = -\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} = -\sqrt[6]{8 \cdot 9} = -\sqrt[6]{72}$.

МАШҚҲО

1. Ҳисоб кунед: а) $\sqrt{\frac{\sqrt{25^2 - 24^2}}{21,5^2 - 14,5^2}}$.

б) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$.

2. Сода кунед: $\sqrt{1 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

3. Сода кунед: $\sqrt{1300} - 2\sqrt{52} - 12\sqrt{1\frac{4}{9}} + 5\sqrt{3\frac{1}{4}}$.

4. Ҳисоб кунед: $\sqrt{\frac{64 \cdot 324}{529 \cdot 49}}$.

§6. Дарачан нишондиҳандааш ратсионалӣ

Бори дигар хотиррасон мекунем, ки барои ҳар гуна $a \in R$, $m, n \in Z$ баробарии $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ҷой дорад.

Барои ҳар гуна $a \in R$ ($a \geq 0$) қимати a^x барои ҳамаи қиматҳои ғайрирационалии x адади мусбат мебошад.

Мо дар ин ҷо мафҳуми дарачан нишондиҳандааш қасри ратсионалӣро дохил карда, бо ҳамин мафҳуми дарачаро васеъ мекунем.

Таърифи 1. Агар $a \geq 0$ ва x қасри ратсионалии ғайрирационалӣ намуду $\frac{m}{n}$, ($m \in Z$, $n \geq 2$ адади натуралӣ) бошад, он гоҳ:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (11)$$

мешавад.

Таърифи 2. Агар $a=0$ ва $x>0$ бошанд, он гоҳ $a^x=0$ мешавад.

Таърифи 3. Агар $a \neq 0$ ва $x=0$ бошанд, он гоҳ $a^0=1$ мешавад.

Таърифи 4. Агар $a>0$ ва $x<0$ бошанд, он гоҳ $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ мешавад.

Хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандаи раціоналиро номбар мекунем:

1. Агар $a>0$ ва $x = \frac{mk}{nk}$, $k \in N$ бошанд, он гоҳ:

$$a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ мешавад.}$$

2. Агар $a>0$, $b>0$, $r_1, r_2 \in Q$ бошанд, он гоҳ:

$$\text{а) } a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}; \quad \text{б) } a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2};$$

$$\text{в) } (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}; \quad \text{г) } (ab)^{r_1} = a^{r_1} \cdot b^{r_1}; \quad \text{г) } \left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}.$$

3. Аз $a \neq 0$, $a^0=1$ ва $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ ($n \in N$) $\Rightarrow a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ барои ҳар гуна $x \in R$ аст.

Дар навбати худ дар хотир доштан зарур аст, ки ифодаҳои маъно надошта инҳи ҳастанд. **Масалаи:** ифодаҳои 0^{-1} ; $(-2)^{\frac{3}{2}}$; $(-7)^{\frac{1}{2}}$; $(-5)^{-\frac{1}{4}}$; ... ва ғайраҳо.

Мисоли 1. Сода кунед: $5\sqrt{\frac{2}{5}} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{10} - 3\sqrt{\frac{10}{9}} + \sqrt{160}$.

Ҳал. $5\sqrt{\frac{2}{5}} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{10} - 3\sqrt{\frac{10}{9}} + \sqrt{160} =$
 $= \sqrt{5^2 \cdot \frac{2}{5}} - \sqrt{2^2 \cdot \frac{5}{2}} + \sqrt{2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot \frac{10}{9}} + \sqrt{4^2 \cdot 10} =$
 $= \sqrt{5^2 \cdot \frac{2}{5}} - \sqrt{2^2 \cdot \frac{5}{2}} + \sqrt{2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot \frac{10}{9}} + \sqrt{4^2 \cdot 10} =$
 $= \sqrt{5 \cdot 2} - \sqrt{2 \cdot 5} + \sqrt{2 \cdot 5} - \sqrt{2 \cdot 5} + \sqrt{4^2 \cdot 10} = 4\sqrt{10}.$

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $(0,04)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0,125)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Мисоли 4. Ҳисоб кунед: $3 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{25}{27}}$.

Ҳал. $3 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{25}{27}} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{27-25}{27}} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{27}} = \sqrt[3]{27 \cdot \frac{2}{27}} = \sqrt[3]{2}.$

Мисоли 5. Амали зарбро иҷро кунед: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-3}.$

Ҳал. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{-3} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt[3]{-3}) = -(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) =$
 $= -(\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2}) = -\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} = -\sqrt[6]{8 \cdot 9} = -\sqrt[6]{72}.$

МАШҚҲО

1. Ҳисоб кунед: а) $\sqrt{\frac{\sqrt{25^2 - 24^2}}{21,5^2 - 14,5^2}}.$

б) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}.$

2. Сода кунед: $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}.$

3. Сода кунед: $\sqrt{1300} - 2\sqrt{52} - 12\sqrt{1\frac{4}{9}} + 5\sqrt{3\frac{1}{4}}.$

4. Ҳисоб кунед: $\sqrt{\frac{64 \cdot 324}{529 \cdot 49}}.$

§6. Дарачаи нишондихандаш ратсионалӣ

Бори дигар хотиррасон мекунем, ки барои ҳар гуна $a \in R$, $m, n \in Z$ баробарии $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ҷой дорад.

Барои ҳар гуна $a \in R$ ($a \geq 0$) қимати a^x барои ҳамаи қиматҳои дилхоҳи касрии x адади мусбат мебошад.

Мо дар ин ҷо мафҳуми дараҷаи нишондихандаш касри ратсионалиро дохил карда, бо ҳамин мафҳуми дараҷаҳо васеъ мекунем.

Таърифи 1. Агар $a \geq 0$ ва x касри ратсионалии дилхоҳи намуди $\frac{m}{n}$, ($m \in Z$, $n \geq 2$ адади натуралӣ) бошад, он гоҳ:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (11)$$

мешавад.

Таърифи 2. Агар $a=0$ ва $x>0$ бошанд, он гоҳ $a^x=0$ мешавад.

Таърифи 3. Агар $a \neq 0$ ва $x=0$ бошанд, он гоҳ $a^0=1$ мешавад.

Таърифи 4. Агар $a>0$ ва $x<0$ бошанд, он гоҳ $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ мешавад.

Ҳосиятҳои дараҷи нишондиҳандаи раціоналиро номбар мекунем.

1. Агар $a>0$ ва $x = \frac{mk}{nk}$, $k \in N$ бошанд, он гоҳ:

$$a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ мешавад.}$$

2. Агар $a>0$, $b>0$, $r_1, r_2 \in Q$ бошанд, он гоҳ:

$$\text{а) } a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}; \quad \text{б) } a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2};$$

$$\text{в) } (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}; \quad \text{г) } (ab)^{r_1} = a^{r_1} b^{r_1}; \quad \text{д) } \left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}.$$

3. Аз $a \neq 0$, $a^0=1$ ва $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ ($n \in N$) $\Rightarrow a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ барои ҳар гуна $x \in R$ аст.

Дар навбати худ дар хотир доштан зарур аст, ки ифодаҳои маъно надоранда ингиз ҳастанд. Масалан: ифодаҳои $0^{-\frac{1}{2}}$; $(-2)^{\frac{3}{2}}$; $(-7)^{\frac{1}{2}}$; $(-5)^{-\frac{1}{4}}$; ... ва ғайраҳо.

Мисоли 1. Сода кунед: $5\sqrt{\frac{2}{5}} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{10} - 3\sqrt{\frac{10}{9}} + \sqrt{160}$.

$$\begin{aligned} \text{Ҳал. } & 5\sqrt{\frac{2}{5}} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{10} - 3\sqrt{\frac{10}{9}} + \sqrt{160} = \\ & = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{2 \cdot 5} - \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} + \sqrt{4^2 \cdot 10} = \\ & = \sqrt{5^2 \cdot \frac{2}{5}} - \sqrt{2^2 \cdot \frac{5}{2}} + \sqrt{2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot \frac{10}{9}} + \sqrt{4^2 \cdot 10} = \\ & = \sqrt{5 \cdot 2} - \sqrt{2 \cdot 5} + \sqrt{2 \cdot 5} - \sqrt{2 \cdot 5} + \sqrt{4^2 \cdot 10} = 4\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $(0,04)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0,125)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{4}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ҳа л. } & (0,04)^{-1,5} \cdot (0,125)^{-\frac{4}{3}} + \left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\
 & = \left(\frac{4}{100}\right)^{1,5} \cdot \left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1,5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{1}{16^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \\
 & = \left(\frac{1}{5^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{1}{16^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{5^2}\right)^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{16^2}\right)}} = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{5^6}\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2^{12}}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{16^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{5^6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2^{12}}} + \sqrt{\frac{1}{16^2}} = \\
 & = \sqrt{5^6} \cdot \sqrt[3]{2^{12}} + \sqrt{16^2} = 5^3 \cdot 2^4 + 16 = 125 \cdot 16 + 16 = 2000 + 16 = 2016.
 \end{aligned}$$

МАШҚҲО

- Ҳисоб кунед: $\frac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{(125)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}.$
- Ифодаҳоро сода кунед: а) $3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} + \sqrt{150};$
 б) $32^{\frac{1}{5}} \cdot 0,5 - \left(\sqrt{25^3}\right)^0 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3};$
 в) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{14}\right)^{-2} \left(-3,6^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right).$
- Қимати ифодаи $\left(\frac{a^{\frac{5}{12}} \cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$ -ро, ҳангоми $a = 125$ будан, ҳисоб кунед.
- Сода кунед: а) $\frac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 4a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - 4a^{\frac{1}{2}}};$ б) $\frac{x^{\frac{1}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} + 5x^{\frac{1}{4}}}.$
- Қимати ифодаи зеринро ҳангоми $x = 3$ будан, ҳисоб кунед:

$$\frac{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{3}{4}}} - \frac{x^{-\frac{1}{4}} - x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}}.$$

БОБИ IV АДАД ВА ТАБДИЛДИХИҲОИ АЛГЕБРАВӢ

§1. Ифодаҳои ададӣ ва алгебравӣ

1.1. Ифодаҳои ададӣ

Таърифи 1. Ифодаҳои ададӣ гуфта, ифодаҳоеро меноманд, ки онҳо фақат аз ададҳо, аломати амалҳо ва қавсҳо таъкил ёфтаанд.

Масалан: $81:27$; $3 \cdot (10^2 + 5)$; $\sqrt{5^2 + 24}$; 2^5 ; 16 ва ғайраҳо.

Агар амалҳои дар ифодаҳои ададӣ нишондодашударо бо тартибашон иҷро намоем, дар натиҷа мо ададҳо ҳосил мекунем, ки онро қимати ифода меноманд. **Масалан:**

$$81:27 = \frac{81}{27} = \frac{3^4}{3^3} = \frac{3^3 \cdot 3}{3^3} = 3;$$

$$3 \cdot (10^2 + 5) = 3 \cdot (100 + 5) = 3 \cdot 105 = 315;$$

$$\sqrt{7^2 - 8 \cdot 3} = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25} = 5.$$

Дар навбати худ ифодаҳои ададӣ ҳам ҳастанд, ки на ҳамаи амалҳои дар онҳо нишондодашуда иҷрошавяндаанд. Дар ин маврид мегӯянд, ки ин ифодаҳо маъно надоранд.

Масалан: $(12 - 4 \cdot 3)^0$; $\sqrt{2^2 - 3^2}$; $\frac{5}{(21 - 7 \cdot 3)}$ ва ғ.

1.2. Ифодаҳои алгебравӣ

Таърифи 2. Ифодаҳои алгебравӣ гуфта, ифодаҳоеро меноманд, ки онҳо аз ададҳо, рақам ва ҳарфҳои, ки бо ёрии амалҳои арифметикӣ, бадараҷабардорӣ, решабарорӣ ва қавсҳо бо ҳам пайваст шудаанд, таъкил ёфтааст.

Масалан:

$$a + c; a - b; x^3 + y^2 = x + y; x^3 - y^3 = x - y;$$

$$\frac{x^3 - y}{z}, z \neq 0; \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + y - 5$$

ва ғайраҳо мисолҳои ифодаи алгебравӣ шуда метавонанд.

Қимати ададӣи ифодаи алгебравӣ гуфта, ададҳоеро меноманд, ки вай дар натиҷаи ҳисобкунӣ, ҳангоми қиматҳои муайян қабул кардани ҳарфҳо ҳосил мешавад.

Таърифи 3. Ифодаҳои алгебравӣ, ки қиматҳои онҳо ададҳои раціоналианд, ифодаҳои раціонали номида мешаванд.

Масалан: $a \pm b$; ab^2c ; $x^2 + y^2$; $x^3 \cdot y^4$; $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$, $x \neq -y$; 0; 25;

5^2 ; $a - \frac{3}{b}$ ($b \neq 0$) ва ғ. мисолҳои ифодаи ратсионалиянд.

Дар навбати худ ифодаҳои ратсионалӣ бутун ва касрӣ шуда метавонанд.

Таърифи 4. Агар дар ифодаи ратсионалӣ тақсим бар ифодаи ҳарфӣ мавҷуд набояд, он гоҳ ин гуна ифодаро, ифодаи ратсионалии бутун меноманд.

Масалан: $a^2 - 0,4ab + 5$; $\frac{5}{4}x$; $\frac{4x^2 + 5x + 9}{12}$; $1,25x^2$ ва ғ.

мисолҳои ифодаи ратсионалии бутун шуда метавонанд.

Таърифи 5. Агар дар ифодаи ратсионалӣ тақсим бар ифодаи ҳарфӣ мавҷуд бошад, он гоҳ ин гуна ифодаро, ифодаи ратсионалии касрӣ меноманд.

Масалан: $3 + \frac{2}{3b}$ ($b \neq 0$); $\frac{b}{a+1}$ ($a \neq -1$); $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ ($x \neq -y$)

ва ғайраҳои мисолҳои ифодаи ратсионалии касрӣянд.

Таърифи 6. Ифодаҳои алгебравие, ки бо реша (радикал) ифода шудаанд, ифодаҳои ирратсионалӣ номида мешаванд.

Масалан:

$$\sqrt{x^2 - 1} \ (|x| > 1); \sqrt{y^2 - 16} \ (|y| > 4); \sqrt{x} - \sqrt{y} \ (x > 0; y > 0)$$

ва ғайра мисолҳои ифодаҳои ирратсионалӣ мебошанд.

§2. Якузва ва амалҳо бо он

Дар ин параграф мо бори дигар мафҳумҳои асосии якузваҳо ва амалҳо бо онҳоро дар шакли мухтасар хотиррасон мекунем.

Таърифи 1. Якчанд ҳосили зарбро, ки он аз ададҳо, ҳарфҳо ва ғ тағйирёбандаҳо иборат аст, якузва меноманд. Масалан: a ; $5a$; $7a^2x^2$; $3a^2$; $2b^3y$; $-5b^3$; $\frac{7}{3}a$ ва ҳама.

Дар навбати худ адад, ҳарф, тағйирёбанда, дараҷаи тағйирёбандаҳо ҳам якузва меноманд. Аз сабаби он ки якузва аз ҳосили зарб иборат аст, пас вай дорон зарбкунандаҳо мебошад. Агар зарбкунандаҳои якузва бо ҳарфҳо навишта шуда бошад, он гоҳ вайро зарбкунандаи ҳарфӣ якузва меноманд.

Масалан: ab ; a^2bx ; ab^2c ; $a^2b^3c^4$ ва ғайра.

Агар зарбкунандаҳои якузва аз ададҳо иборат бошад, он гоҳ вайро зарбкунандаҳои ададии якузваҳо меноманд.

Якузваҳоро дар намудҳои гуногун ифода карда, навиштан мумкин аст. Масалан: $3a^2 \cdot 3ax^2$ - ро дар намудҳои $3 \cdot a \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot x \cdot x$ ё ки $9 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x$ ё ки $9a^3x^2$ навиштан мумкин аст.

Таърифи 2. Якузвае, ки як зарбкунандаи ададии дар ҷои якум истодаро дорад ва дар он ҳосили зарби ҳарфҳо ва тағйирёбандаҳои якхела ба воситаи дараҷа ифода шудааст, якузваи стандартӣ номида мешавад.

Масалан: $4ab^2$; $-2xy^2$; $-\frac{4}{3}x^2y$; $\frac{1}{3}a^3b^2$; $-7a^3x^2y$ ва Ҳоказо.

Таърифи 3. Зарбкунандаи ададӣ, ки пеш аз зарбкунандаҳои ҳарфӣ меояд, коэффитсиенти номида мешавад.

Масалан: $-4x^2y$; $-\frac{7}{9}axy^2$; $-0,25xy^2$; $\frac{3a^2b \cdot 4ay^3}{6}$ якузваи стандартӣ бошанд, он гоҳ зарбкунандаҳои -4 ; $-\frac{7}{9}$; $-0,25$ мувофиқан коэффитсиентҳои якузваҳои додашуда мебошанд. Барои муайян кардани коэффитсиенти ифодаи $\frac{3a^2b \cdot 4ay^3}{6}$, онро дар шакли дигар менависем:

$$\begin{aligned} \frac{3a^2b \cdot 4ay^3}{6} &= \frac{3 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot y^3}{6} = \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot b \cdot y^3}{6} = \frac{12a^3by^3}{6} = 2a^3by^3. \end{aligned}$$

Инак, адади 2 коэффитсиенти якузваи додашуда мебошад.

Агар якузваи стандартӣ зарбкунандаҳои ададӣ надошта бошад, он гоҳ коэффитсиенти ҷушӣ якузва ба 1 ё ба -1 баробар мебошад.

Масалан: коэффитсиентҳои xy^2 ; a^3b ; bx^2y ; $-abcx^3$; $-a^3b^2xy^2$ мувофиқан ба 1; 1; 1; -1 ва -1 баробар мебошанд.

Таърифи 4. Ду ё якҷинд якузваҳо ба ҳам монанд номида мешаванд, агар онҳо якхела ё фақат бо коэффитсиентҳоишон аз ҳам фарқ кунанд.

Масалан: $7a^2 \cdot (-3)b^3$ ва $-3a^2 \cdot (-2)b^3$ -ро мегирем. Якузваҳоро дар намуди стандартӣ менависем:

$$7a^2 \cdot (-3)b^3 = -21a^2b^3; \quad -3a^2 \cdot (-2)b^3 = 6a^2b^3.$$

Ин ду якузва ба ҳам монанд мебошанд, чунки онҳо фақат бо коэффициентҳои фарқ мекунад.

Таърифи 5. Дараҷаи якузваҳо ба суммаи нисбондихандаҳои дараҷаи ҳарфҳо, тағйирёбандаҳои дар он буда баробар мебошад.

Мисалан: агар $12xy^2$; $-7x^2y$; $\frac{5}{2}xy$; $-\frac{3}{4}x^2y^2$; 45 ; $-\frac{3}{5}xyz$ мисолҳои якузваҳои стандартӣ бошанд, он гоҳ $12xy^2$ якузвӣ дараҷааш 3, $-7x^2y$ - якузвӣ дараҷааш 3, $\frac{5}{2}xy$ - якузвӣ дараҷааш 2, 45 - якузвӣ дараҷааш нол мебошанд.

Бигузур ифодаи $A(x; y; z; \dots w)$ барои ҳар гуна $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, ..., $w \in R$ маъно дошта бошад.

Таърифи 6. Соҳаи муайяни ифодаи $A(x; y; z; \dots w)$ гуфта, маҷмӯи қиматҳоеро меноманд, ки ҳангоми онҳоро қабул кардани тағйирёбандаҳо ифода маъно дорад.

Дар ин ҳолат маҷмӯи R соҳаи муайяни ифодаи $A(x; y; z; \dots w)$ номида мешавад.

Мисоли 1. Соҳаи муайяни ифодаи $\frac{5}{x-2}$ маҷмӯи ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи x мебошад, ки барояш $x \neq 2$ аст.

Мисоли 2. Соҳаи муайяни ифодаи $\frac{5y}{4-3y}$ маҷмӯи ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи y мебошад, ки барояш $4-3y \neq 0$, ё ки $y \neq \frac{4}{3}$ аст.

Таърифи 7. Баробарие, ки он барои ҳамаи қиматҳои бузургҳои дар он мавҷуда дуруст аст, айният номида мешавад.

Ифодаҳои дар тарафҳои гуногуни баробарӣ бударо айниятан ба ҳам баробар меноманд.

Агар $A(x; y; z; \dots w)$ ва $B(x; y; z; \dots w)$ ва $C(x; y; z; \dots w)$ ифодаҳои бутуни алгебравӣ бошанд, он гоҳ айнияти алгебравӣ ҳосилшуда зеринро дорад:

1. Аз $A(x; y; z; \dots w) \equiv B(x; y; z; \dots w)$ ва
 $B(x; y; z; \dots w) \equiv C(x; y; z; \dots w) \Rightarrow A(x; y; z; \dots w) \equiv C(x; y; z; \dots w)$
2. Аз $A(x; y; z; \dots w) \equiv B(x; y; z; \dots w) \Rightarrow$
 $\Rightarrow A(x; y; z; \dots w) + C(x; y; z; \dots w) \equiv$
 $\equiv B(x; y; z; \dots w) + C(x; y; z; \dots w)$
3. Аз $A(x; y; z; \dots w) \equiv B(x; y; z; \dots w) \Rightarrow A(x; y; z; \dots w) \times$
 $\times C(x; y; z; \dots w) \equiv B(x; y; z; \dots w) \cdot C(x; y; z; \dots w)$ мешавад.

Амалҳо бо якузваҳоро дида мебароем:

Якузваҳоро ҷамъ, тарҳ, зарб, тақсим ва ба дараҷа бардоштан мумкин аст. Бигузор якузваҳон $6x^2$; $5x$; $-x$; $4x^3$; $-4x$; $-6x^2$ дода шуда бошанд.

Барои ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсим намудани якузваҳо аз қонди амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсими ададҳо истифода бурда, амалҳоро иҷро мекунам.

Ҳангоми иҷро намудани амалҳои арифметикӣ ба қондаҳои зерин риоя кардан лозим аст:

Қонди 1. Барои ҷамъ кардани якузваҳо онҳоро бо аломатҳои он паси якдигар ба намуди суммаи алгебравӣ навиштан лозим аст.

Қонди 2. Агар дар суммаи алгебравӣ аъзоҳои якхела (монанд) мавҷуд бошад, онҳоро ислоҳ кардан лозим аст.

Мисол. Якузваҳон $6x^2$; $5x$; $-x$; $4x^3$; $-4x$; $-6x^2$ -ро ҷамъ кунед.

Ҳал. Якузваҳон $6x^2$; $5x$; $-x$; $4x^3$; $-4x$; $-6x^2$ -ро дар асоси қонди 1 ва 2 ҷамъ карда, пайдо мекунем:

$$6x^2 + 5x + (-x) + 4x^3 + (-4x) + (-6x^2) =$$

$$= 6x^2 + 5x - x + 4x^3 - 4x - 6x^2 = 4x^3.$$

Қонди 3. Барои якузваҳоро аз ҳамдигар тарҳ намудан, камкунамдаро бо аломати муқобил ба паҳяи камшаванда навиштан kifоя аст.

Мисол. Аз якузван $12x^2$ якузваҳон $3x^2$; $4x^2$; $5x^2$; $-x^3$ кам карда шавад.

Ҳал. Аз қонди 3 истифода бурда, аз якузван $12x^2$, якузван $3x^2$; $4x^2$; $5x^2$; $-x^3$ -ро кам мекунем.

$$12x^2 - 3x^2 - 4x^2 - 5x^2 - (-x^3) = 12x^2 - 3x^2 - 4x^2 - 5x^2 + x^3 = x^3.$$

Акнун зарб ва тақсими якузвaҳоро дида мебароем:

Бигузор якузвaҳон $16x^2y^3$ ва $4x^2y$ дода шуда бошад. Барон иҷро намудани амалҳои зарб ва тақсим аз қондаҳои зарб ва тақсими ададҳо ва ҳам аз қонунҳои ҷойивазкунии ва комбинатсиягӣ истифода мебаранд.

Қондан 4. Дар вақти зарб намудани якузвaҳи коэффисентҳои онҳо зарб карда шуда, нишондиҳандаҳои дараҷаҳои асосиҳои якхела ҳам карда мешаванд ва зарбшавандаҳои танҳо дар ҳосили зарб бо нишондиҳандаи он оварда мешаванд.

Мисол. Амали зарбро иҷро кунед: $16x^2y^3 \cdot 4x^2y$.

Ҳял. Аз қондан 4 истифода бурда, якузвaҳон $16x^2y^3$ ва $4x^2y$ -ро зарб мезанем:

$$16x^2y^3 \cdot 4x^2y = 16 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y = 64x^4y^4.$$

Аз сабаби он, ки амали тақсим, амали баръакси амали зарб мебошад, пас ҳангоми иҷро намудани амали тақсим аз қондаҳои 4 ва 2 истифода бурдан мумкин мебошад.

Мисол. Амали тақсими иҷро кунед: $16x^2y^3 : (4x^2y)$.

Ҳял. Чӣ хеле ки дар боло қайд кардем амали тақсим, амали баръакси зарб мебошад, пас дар асоси қондан 4 ва қондан 2 навишта метавонем:

$$16x^2y^3 : 4x^2y = \frac{16x^2y^3}{4x^2y} = \frac{4 \cdot 4x^2y^3 \cdot y}{4x^2y} = 4y^2.$$

Аз мисолҳои дар боло муоина кардашуда маълум мешавад, ки ҳангоми иҷро намудани амалҳои ҳам, тарҳ, зарб ва тақсими якузвaҳи дар натиҷа бо ҳама якузвa ҳосил мешавад.

§3. Бисёрзвa ва амалҳо бо он

Дар ин параграф ба монанди §2 мафҳумҳои асосии бисёрзвa ва амалҳо бо онҳо дар намуди мухтасар хотиррасон мекунем.

Бигузор якузвaҳои $9a^3$; $5x^3$; $-3ax$; $-abx$ дода шуда бошанд.

Агар якузвaҳои додешударо дар асоси қондаҳои якум ва дуҷуми §2 ҳам кунем, дар натиҷа суммаи алгебравиро ҳосил мекунем:

$$9a^3 + 5x^3 + (-3ax) + (-abx) = 9a^3 + 5x^3 - 3ax - abx.$$

Таърифи 1. Бисёрузва гуфта, суммаи алгебравии ду ва якчанд якузваро меноманд.

Масалан: $9a^5 + 5x^5 - 3ax - abx$; $\frac{1}{7}xy^2 + \frac{3}{5}x^2y - 4xy + 9$; $-4a^5 - 5x^5$ ва гайраҳо, мисолҳои бисёрузваро шуда метавонанд.

Аъзоҳои бисёрузва аз якузваро иборат мебошанд. Агар бисёрузва дар худ якузваро монандро дошта бошад, он гоҳ ҷамъшавандаҳои монандро ислоҳ карда, бисёрузваро дар намуди стандартӣ навиштан лозим аст.

Масалан: $3a^3 + 2a^2 + 3a - a^3 - 8a^2 - 3a + 9 = 2a^3 - 6a^2 + 9$.

Таърифи 2. Дараҷаи бисёрузва гуфта дараҷаи калонтарини якузваи ба он дохилишударо меноманд.

Масалан, дараҷаи калонтарини бисёрузваи $xy + 4x^3y + 4xy^2 - 4$ ба 4 баробар аст, ки онро якузваи $4x^3y$ дорад.

Агар бисёрузва фақат аз як ҳарфи дараҷааш гуногун дошта сохта шуда бошад, он гоҳ аз қонуни ҷойивазкунии ҷамъ истифода бурда аъзоҳои онро аз рӯи дараҷаҳои ҳарф ба намуди зиёдшаванда ё камшаванда навиштан мумкин аст. **Масалан,** агар бисёрузваи $2x^3 - 3a^2x^2 + 4 + 5ax$ -ро аз рӯи дараҷаи зиёдшавандаи ҳарфи x нависем, он гоҳ вай намуди зеринро мегирад:

$$4 + 5ax - 3a^2x^2 + 2x^3.$$

Аз рӯи дараҷаҳои ҳарфи додашуда ботартиб гузошти шудани бисёрузва табдилдиҳии айнияти ҳамин бисёрузва номида мешавад. Дар бисёрузва ислоҳ кардани узвҳои монанд табдилдиҳии айниятӣ мебошад.

Масалан, бисёрузваи $3x^2 - x + 5x^3 + 2x + 6x^2 - 3x + 9$ баъд аз табдилдиҳии айниятӣ намуди зеринро мегирад:

$$\begin{aligned} 3x^2 - x + 5x^3 + 2x + 6x^2 - 3x + 9 &= \\ &= 5x^3 + (3x^2 + 6x^2) + (-x + 2x - 3x) + 9 = \\ &= 5x^3 + 9x^2 - 2x + 9. \end{aligned}$$

Ду бисёрузвас, ки якузвароаш аз рӯи бузургии мутлақ монанд буда, вале аломатҳои гуногун дорад, бисёрузварои муқобил номида мешавад. Ҳосили ҷамъи чунин бисёрузваро айниятан ба нол баробар аст.

Масалан, агар $A(x) = 3x^2 + 4x - 12$ ва $B(x) = 12 - 4x - 3x^2$ бошад, он гоҳ

$$\begin{aligned}
 A(x) + B(x) &= (3x^2 + 4x - 12) + (12 - 4x - 3x^2) = \\
 &= (3x^2 + 4x - 12) + (-3x^2 - 4x + 12) = \\
 &= 3x^2 + 4x - 12 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.
 \end{aligned}$$

Агар ду ё якчанд бисёрузваҳои дар намуди стандартӣ додашударо ҷамъ (тарҳ) кунем, дар натиҷа бисёрузван стандартиро пайдо мекунем.

Масалан, агар $A(x) = 3,2x^2 + 4,2x - 3$ ва

$B(x) = x^3 - 4,1x^2 + 3,8x - 7$ бошад, он гоҳ

$$\begin{aligned}
 1. \quad A(x) + B(x) &= (3,2x^2 + 4,2x - 3) + (x^3 - 4,1x^2 + 3,8x - 7) = \\
 &= 3,2x^2 + 4,2x - 3 + x^3 - 4,1x^2 + 3,8x - 7 = x^3 - 0,9x^2 + 8x - 10;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad A(x) - B(x) &= (3,2x^2 + 4,2x - 3) - (x^3 - 4,1x^2 + 3,8x - 7) = \\
 &= 3,2x^2 + 4,2x - 3 - x^3 + 4,1x^2 - 3,8x + 7 = -x^3 + 7,3x^2 + 0,4x + 4.
 \end{aligned}$$

Агар бисёрузван $A(x)$ -ро бо бисёрузван $B(x)$ зарб занем, дар ҳосили зарб (натиҷа) бисёрузван стандартиро пайдо мекунем.

Барои бисёрузваро бо бисёрузва зарб кардан ҳар як узви як бисёрузваро ба ҳар як узви бисёрузван дигар мувофиқан зарб карда, ҳосили зарби ҳосилшударо ҷамъ кардан kifоя аст.

Масалан, агар $A(x) = 2x + 3ax + 2a$ ва $B(y) = 3y + 4$ бошад, он гоҳ

$$\begin{aligned}
 A(x) \cdot B(y) &= (2x + 3ax + 2a) \cdot (3y + 4) = \\
 &= 2x \cdot 3y + 3ax \cdot 3y + 2a \cdot 3y + 2x \cdot 4 + 3ax \cdot 4 + 2a \cdot 4 = \\
 &= 6xy + 9axy + 6ay + 8x + 12ax + 8a \text{ мешавад.}
 \end{aligned}$$

Фарз мекунем, ки $A(x)$ ва $B(x)$ бисёрузваҳои дараҷаашон натуралӣ бошанд.

Агар $A(x)$ ва $B(x)$ нисбат ба x бисёрузваҳои коэффитсиентҳои ҳақиқӣ дошта бошанд, он гоҳ $A(x) = B(x)$ фақат ва фақат ҳамоно вақт мешавад, ки агар коэффитсиентҳои назди дараҷаҳои якхелаи онҳо бо ҳам баробар бошанд.

Дар вақти иҷрои ҳисобкуниҳои бисёрузваҳо аз навишти ҳосили зарби ду ё якчанд ҷузъҳо, ки барои ҳисобкунии қулай аст, истифода мебаранд.

Ба ҳамзарбҳо ҷудо кардани бисёрузваҳо, табдилдиҳиҳои айниқтан баробар меноманд. Агар ҳамзарбҳо маълум набошад,

он гоҳ бисёрузваҳоро бо тарзи гурӯҳбандӣ ба ҳамзарбҳо ҷудо кардан лозим аст.

Масалан: 1. $a(x+y) - b(x+y) = (x+y)(a-b)$;

2. $kx+ky+10x+10y = k(x+y)+10(x+y) = (x+y)(k+10)$;

3. $c(x-y) - x+y = c(x-y) - (x-y) = (x-y)(c-1)$.

§4. Формулаҳои зарби мухтасар

1. Квадрати сумма $(a+b)^2$

Квадрати суммаи ду адад ба квадрати адади якум, ҷамъи дучанди ҳосили зарби адади якум бар дуҷум, ҷамъи квадрати адади дуҷум баробар аст:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Масалан:

1. $(x+3y)^2 = x^2 + 2x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$;

2. $(4x+b)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot b + (b)^2 = 16x^2 + 8bx + b^2$;

3. $(10a+5)^2 = (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot 5 + (5)^2 =$
 $= 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$;

4. $38^2 = (30+8)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 8 + 8^2 =$
 $= 900 + 480 + 64 = 1444$.

Аз натиҷаи мисоли сеюм истифода бурда, квадрати ададҳои зеринро ҳисоб мекунем:

1. $95^2 = 100 \cdot 9 \cdot 10 + 25 = 9025$;

2. $75^2 = 100 \cdot 7 \cdot 8 + 25 = 5625$;

3. $35^2 = 100 \cdot 3 \cdot 4 + 25 = 1225$;

4. $4,5^2 = 4 \cdot 5 + 0,25 = 20,25$.

2. Квадрати фарқ $(a-b)^2$

Квадрати фарқи ду адад ба квадрати адади якум, фарқи дучанди ҳосили зарби адади якум бар дуҷум, ҷамъи квадрати адади дуҷум баробар аст:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Масалан:

1. $(2x-a)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot a + (a)^2 = 4x^2 - 4ax + a^2$;

2. $(3x-2b)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2b + (2b)^2 = 9x^2 - 12bx + 4b^2$;

$$3. 39^2 = (40-1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = \\ = 1600 - 80 + 1 = 1521;$$

$$4. 69^2 = (70-1)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = \\ = 4900 - 140 + 1 = 4761.$$

3. Куби сумма $(a+b)^3$

Куби суммаи ду адад ба куби адади якум, чамъ сечанди ҳосили зарби квадрати адади якум бар адади дуум, чамъ сечанди ҳосили зарби адади якум бар квадрати адади дуум, чамъ куби адади дуум баробар аст:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Масалаи 1. $(3a+b)^3 = (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3 = \\ = 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3;$

2. $(2ax+3a^2x)^3 = (2ax)^3 + 3 \cdot (2ax)^2 \cdot 3a^2x + \\ + 3 \cdot 2ax \cdot (3a^2x)^2 + (3a^2x)^3 = 8a^3x^3 + 36a^2x^2a^2x + \\ + 54ax \cdot a^4x^2 + 27a^6x^3 = 8a^3x^3 + 36a^4x^3 + 54a^5x^3 + 27a^6x^3;$

3. $21^3 = (20+1)^3 = 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1^2 + 1^3 = \\ = 8000 + 1200 + 60 + 1 = 9261.$

4. Куби фарк $(a-b)^3$

Куби фарки ду адад ба куби адади якум, фарки сечанди ҳосили зарби квадрати адади якум бар адади дуум, чамъ сечанди ҳосили зарби адади якум бар квадрати адади дуум, фарки куби адади дуум баробар аст:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Масалаи 1. $(2a-3)^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2a \cdot 3^2 - 3^3 = \\ = 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27;$

2. $49^3 = (50-1)^3 = 50^3 - 3 \cdot 50^2 \cdot 1 + 3 \cdot 50 \cdot 1^2 - 1^3 = \\ = 125000 - 7500 + 150 - 1 = 117649.$

5. Фарқи квадратҳо $a^2 - b^2$

Ҳосили зарби суммаи ду адад бар фарқи онҳо ба фарқи квадратҳои ҳамин ададҳо баробар мебошад.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Масалаи 1. $(2x-y)(2x+y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2;$

2. $(3x^2 - 5y^3)(3x^2 + 5y^3) = (3x^2)^2 - (5y^3)^2 = 9x^4 - 25y^6$;
3. $47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$;
4. $88 \cdot 92 = (90 - 2)(90 + 2) = 90^2 - 2^2 = 8100 - 4 = 8096$.

6. Куби сумма $a^3 + b^3$

Кубҳои суммаи ду адад ба ҳосили зарби суммаи онҳо бар квадратӣ нопурраи фарқашон баробар аст:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Мисалан: 1. $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$;

$$\begin{aligned} 2. \quad 64 + a^3 &= 4^3 + a^3 = (4 + a)(4^2 - 4a + a^2) = \\ &= (4 + a)(16 - 4a + a^2); \end{aligned}$$

$$3. \quad 8a^3 + 8b^3 = 8(a^3 + b^3) = 8(a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$4. \quad 27y^3 + x^3 = (3y)^3 + x^3 = (3y + x)(9y^2 - 3xy + x^2).$$

7. Куби фарқ $a^3 - b^3$

Фарқи куби ду адад ба ҳосили зарби фарқи ин ду адад бар квадратӣ нопурраи суммаи онҳо баробар аст:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Мисалан: 1. $y^3 - 27 = y^3 - 3^3 = (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$;

$$2. \quad 8 - y^3 = 2^3 - y^3 = (2 - y)(4 + 2y + y^2);$$

$$3. \quad 64x^3 - y^3 = (4x)^3 - y^3 = (4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2);$$

$$4. \quad x^3 - 2 = x^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}).$$

Аз формулаҳои зарби мухтасар ҳангоми сода намудани ифодаҳои алгебравӣ ва ҳал кардани мисолҳо истифода мебаранд.

Барои он, ки доир ба истифодабарии формулаҳои зарби мухтасар фаҳмиши ғурури ҳосил кунем, ягонд мисолҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. Ифодани зеринро сода кунед:

$$(a + 1)(a - 1)(a^4 + a^2 + 1) + (a^2 - a + 1)(a + 1)$$

$$\text{Ҳа. а. } (a + 1)(a - 1)(a^4 + a^2 + 1) + (a^2 - a + 1)(a + 1) =$$

$$= (a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) + (a + 1)(a^2 - a + 1) =$$

$$= (a^2 - 1)((a^2)^2 + a^2 + 1) + (a + 1)(a^2 - a + 1) =$$

$$= ((a^2)^3 - 1) + (a^3 + 1) = (a^6 - 1) + (a^3 + 1) =$$

$$= a^6 - 1 + a^3 + 1 = a^6 + a^3.$$

Мисоли 2. Ифодаи $x^4 + 4$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед.

$$\begin{aligned}\text{Ҳал. } x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = \\ &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = ((x^2)^2 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = \\ &= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)\end{aligned}$$

Мисоли 3. Ифодаи $A(x) = x^3 - 3x - 2$ -ро ба ҳамзарбҳо ҷудо кунед.

$$\begin{aligned}\text{Ҳал. } A(x) &= x^3 - 3x - 2 = x^3 - x - 2x - 2 = x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = \\ &= x(x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x(x - 1) - 2) = \\ &= (x + 1)(x^2 - x - 2).\end{aligned}$$

Мисоли 4. Ифодаи $(x - 2)(x - 3) + (x + 6)(x - 5) - 2(x^2 - 7x + 13)$ -ро сода карда, натиҷаашро дар ҳолати $x = 5,6$ будан, ҳисоб кунед.

Ҳал. а) Ифодаро сода мекунем:

$$\begin{aligned}(x - 2)(x - 3) + (x + 6)(x - 5) - 2(x^2 - 7x + 13) &= \\ = x^2 - 5x + 6 + x^2 - 5x + 6x - 30 - 2x^2 + 14x - 26 &= \\ = (x^2 + x^2 - 2x^2) + (-5x - 5x + 6x + 14x) + (6 - 30 - 26) &= 10x - 50;\end{aligned}$$

б) Ба ифодаи сода кардашуда ба ҷои x қиматашро гузошта, ҳисоб мекунем:

$$(10x - 50) = 10 \cdot 5,6 - 50 = 56 - 50 = 6.$$

МАШҚҲО

1. Ифодаи зеринро ба зарбкунандаҳо ҷудо намоед:

а) $a^2 - 2bc + 2ac - ab$; б) $(x - a)^3 + (a - y)^3 + (y - x)^3$;

в) $x^3 - 3x^2 + 2$; г) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$.

2. Ифодаи $(x - 5)(x - 1) - (x - 2)(x - 3)$ -ро сода карда, натиҷаашро ҳангоми $x = -2,25$ будан, ҳисоб кунед.

3. Ифодаи $A(x) = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$ -ро сода карда, натиҷаашро дар ҳолати $x = 3,6$ ва $y = 2,6$ будан, ҳисоб кунед.

§5. Қасрҳои алгебравӣ

Ифодаи раціоналий ба ифодаҳои бутунӣ раціоналий ва қасрҳои раціоналий ҷудо мешаванд.

Агар ифодаи ратсионалӣ дар худ амали тақсим ва бадарчабардории бутуни манфиро надошта бошад, пас чунин ифодаи ратсионалиро ифодаи ратсионалӣ бутун меноманд.

Масалаи, бисёрузван

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{Z}$$

ки дар ин ҷо $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - ададҳои дилхоҳи доимӣ, x - тағйирёбанда мебошанд, мисоли ифодаи ратсионалӣ бутун шуда метавонад.

Таърифи 1. Ифодае, ки аз каср иборат буда, сурат ва махраҷаш бисёрузваҳо мебошад, касри алгебравӣ номида мешавад.

Агар $P(x)$ ва $Q(x)$ бисёрузваҳо бошанд, он гоҳ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ($\forall x, Q(x) \neq 0$) касри алгебравӣ мешавад. Қимати касри алгебравӣ адади ҳақиқӣ шуда метавонад.

Таърифи 2. Касрҳои алгебравӣ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ва $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ баробар номида мешаванд, агар барои бисёрузваҳои додашуда баробарии

$$P(x) \cdot Q_1(x) = P_1(x) \cdot Q(x), \quad (Q(x) \neq 0, Q_1(x) \neq 0)$$

айниятан иҷро шавад.

Масалаи, $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}, \quad (x \neq 1, x \neq -1)$

чунки $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ё ки $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ мебошад.

Таърифи 3. Ду ифода ҳамон вақт айниятан баробар мешавад, ки агар онҳо дар ҳамаи қиматҳои равои тағйирёбандаҳо ададан баробар бошанд.

Масалаи, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1, x \neq -1.$

Бигузор $P(x)$ - бисёрузван бутуни ратсионалӣ дараҷааш n ва $Q(x)$ бисёрузван бутуни ратсионалӣ дараҷааш m бошанд. Он гоҳ нисбати онҳо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ($\forall x, Q(x) \neq 0$) касри ратсионалӣ мебошад.

Касри ратсионалӣ касри дуруст ва касри нодуруст шуда метавонад.

1. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - касри дуруст номида мешавад, агар дараҷаи бисёрузван $P(x)$ аз дараҷаи бисёрузван $Q(x)$ хурд бошад: $n < m$.

2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - касри нодуруст номиди мешавад, агар дараҷан

бисёрузван $P(x)$ аз дараҷан бисёрузван $Q(x)$ калон бошад: $n > m$ (Дараҷан бисёрузва адади натуралест, ки он ба калонтарин дараҷан тағйирёбандаи дар ифодаи бисёрузва буда, баробар аст).

Масалан, ифодаи

$$\frac{2x^2 + 4x + 5}{3x^3 + 4x^2 + 5x - 2} \text{ - касри дурусти ратсионалӣ,}$$

$$\frac{4x^3 + 5x - 2}{9x^2 + 4x + 15} \text{ - касри нодурусти ратсионалӣ мебошад.}$$

Хосиятҳои асосии касрҳои алгебравиро номбар мекунем:

1. Агар сураи ва махраҷи касри алгебравӣ ба як хел бисёрузва зарб карда шавад, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки ба касри додашуда айниятан баробар аст.

Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ барои ҳар гуна x ($\forall x$) $Q(x) \neq 0$ касри

алгебравӣ ва $R(x) \neq 0$ бисёрузва бошанд, он гоҳ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot R(x)}, \quad (\forall x, Q(x) \cdot R(x) \neq 0).$$

2. Агар сураи ва махраҷи касри алгебравиро ба як хел бисёрузва тақсим кунем, дар натиҷа касре пайдо мешавад, ки ба касри додашуда айниятан баробар мебошад.

Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ барои ҳар гуна x ($\forall x$) $Q(x) \neq 0$ касри алгебравӣ

ва $R(x)$ бисёрузва бошанд, он гоҳ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)/R(x)}{Q(x)/R(x)}, \quad \forall x, Q(x) \neq 0, R(x) \neq 0.$$

3. Агар сураи ва махраҷи каср зарбкунандаи умумӣ дошта бошад, он гоҳ сураи ва махраҷро ба он тақсим карда, касро сода кардан мумкин аст. Чунин тарзи содакунӣ ё шаклдиғаркунӣ ихтисоси каср номида мешавад.

Масалан:

$$1. \frac{12x^2 - 6x + 24}{6x + 6} = \frac{6(2x^2 - x + 4)}{6(x+1)} = \frac{2x^2 - x + 4}{x+1}, \quad x \neq -1;$$

$$2. \frac{4 - 8x^2}{16 - 64x} = \frac{4(1 - 2x^2)}{16(1 - 4x)} = \frac{4(1 - 2x^2)}{4 \cdot 4(1 - 4x)} = \frac{(1 - 2x^2)}{4(1 - 4x)}, \quad x \neq \frac{1}{4};$$

$$3. \frac{8-x^3}{x-2} = \frac{2^3-x^3}{x-2} = \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{x-2} = \\ = \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{-(2-x)} = -(4+2x+x^2).$$

4. Агар аломати назди сурат ва махраҷи касри алгебравий ба аломати назди худӣ каср иваз карда шавад, он гоҳ қимати касри алгебравий тағйир намеёбад.

Масалан: 1. $\frac{2-x}{4-x} = \frac{-(x-2)}{-(x-4)} = \frac{x-2}{x-4}, x \neq 4;$

2. $\frac{x-3}{9-x} = \frac{-(3-x)}{-(x-9)} = \frac{3-x}{x-9}, x \neq 9.$

5. Агар аломати назди сурат ё махраҷи касри алгебравий ба аломати назди худӣ каср иваз карда шавад, он гоҳ қимати касри алгебравий тағйир намеёбад.

Масалан: 1. $\frac{3+4x}{2x-5} = \frac{3+4x}{-(5-2x)} = -\frac{3+4x}{5-2x}, x \neq \frac{5}{2}.$

2. $\frac{2-3x}{4x-8} = \frac{-(3x-2)}{4x-8} = -\frac{3x-2}{4x-8}, x \neq 2.$

3. $\frac{x^2-4x+5}{x-4} = \frac{x^2-4x+5}{-(4-x)} = -\frac{x^2-4x+5}{4-x}, x \neq 4.$

4. $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x}, x \neq 2.$

§6. Амалҳо бо касрҳои алгебравий

Бигузор $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ва $\frac{R(x)}{Q_1(x)}$ ($(\forall x) Q(x) \neq 0, (\forall x) Q_1(x) \neq 0$) касрҳои алгебравий бошанд.

1. Ҷамъ ва тарҳи касрҳои алгебравий

Иҷрои амалҳои ҷамъ ва тарҳи касрҳои алгебравий ба қонди ҷамъ ва тарҳи касрҳои арифметикӣ монанд аст. Дар ин ҷо ҷамъи (тарҳ) касрҳои алгебравийро дида мебароем.

а) Агар касрҳои доданшуда махраҷҳои якхела дошта бошанд, он гоҳ барои ҷамъ (тарҳ) кардан суратҳои касрҳоро ҷамъ (тарҳ) менамояд, ҳосили ҷамъ (тарҳ) натиҷаи ҷамъ (тарҳ) ҳосилшударо ба махраҷи тақсим кардан мегузоранд.

Масалан: $\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x) \pm P_1(x)}{Q(x)}, \forall x, Q(x) \neq 0.$

$$1. \frac{x+2}{a-b} + \frac{2-x}{a-b} = \frac{(x+2)+(2-x)}{a-b} = \\ = \frac{x+2+2-x}{a-b} = \frac{4}{a-b}, a \neq b;$$

$$2. \frac{x+2}{a-b} + \frac{x+1}{b-a} = \frac{x+2}{a-b} - \frac{x+1}{a-b} = \frac{(x+2)-(x+1)}{a-b} = \\ = \frac{x+2-x-1}{a-b} = \frac{1}{a-b}, a \neq b.$$

$$3. \frac{2a+3}{a-3} - \frac{a+6}{a-3} = \frac{(2a+3)-(a+6)}{a-3} = \frac{2a+3-a-6}{a-3} = \\ = \frac{a-3}{a-3} = 1, a \neq 3.$$

б) Агар касрҳои додашуда махраҷҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ барои ҷамъ (тарҳ) кардани касрҳо аявал онҳоро ба махраҷи умумӣ оварда, баъд амалҳоро иҷро кардан лозим аст.

Масалан: $\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x) \cdot Q_1(x) \pm P_1(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot Q_1(x)},$

$(\forall x) Q(x) \neq 0, \forall x, Q_1(x) \neq 0.$

$$1. \frac{a+x}{6} + \frac{a-x}{4} = \frac{2(a+x)+3(a-x)}{12} = \\ = \frac{2a+2x+3a-3x}{12} = \frac{5a-x}{12};$$

$$2. \frac{a+x}{4} - \frac{a-x}{6} = \frac{3(a+x)-2(a-x)}{12} = \\ = \frac{3a+3x-2a+2x}{12} = \frac{a+5x}{12};$$

$$3. 4x + \frac{2x}{3} = \frac{4x}{1} + \frac{2x}{3} = \frac{3 \cdot 4x + 2x}{3} = \frac{12x+2x}{3} = \frac{14x}{3};$$

$$4. \frac{3x+1}{2} - 2x = \frac{3x+1}{2} - \frac{4x}{2} = \frac{3x+1-4x}{2} = \frac{1-x}{2}.$$

II. Зарб ва тақсими касрҳои алгебраӣ

Қонди зарб ва тақсими касрҳои алгебраӣ ба қонди зарб ва тақсими касрҳои арифметикӣ монанд мебошад. Бинобар он, дар

ини ҷо мухтасар зарб ва тақсими касрҳои алгебравиро бори дигар хотиррасон мекунем.

а) Барои ду касри алгебравиро зарб задан суратҳоро алоҳида ва махраҷҳоро алоҳида бо ҳам зарб карда, ҳосили зарби суратҳоро дар сурат ва ҳосили зарби махраҷҳоро дар махраҷ навиштаи лозим аст.

Мисалин:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x) \cdot P_1(x)}{Q(x) \cdot Q_1(x)}.$$

$$((\forall x) Q(x) \neq 0, \forall x, Q_1(x) \neq 0).$$

$$1. \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}, x \neq -3.$$

$$2. \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{x}, x \neq 0.$$

$$3. (x^2-4) \cdot \frac{x}{x-2} = (x-2)(x+2) \cdot \frac{x}{x-2} = x(x+2).$$

б) Барои як касри алгебравиро ба касри дигари алгебравӣ тақсим намудан, тақсимишавандаро ба касре зарб кардан лозим аст, ки вай нисбат ба тақсимкунанда чаппа бошад.

Мисалин:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x) \cdot Q_1(x)}{Q(x) \cdot P_1(x)}, (\forall x, Q(x) \neq 0, Q_1(x) \neq 0, P_1(x) \neq 0).$$

$$1. \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x^2-2x+1) \cdot (x+1)}{(x^2+3x+2)(x-1)} = \frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)}{(x+1)(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{x-1}{x+2}; x \neq -2.$$

$$2. x : \frac{x-1}{x+1} = x \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x-1} = \frac{x^2+x}{x-1}; x \neq 1.$$

$$3. \frac{x-1}{x+1} : x = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-1}{(x+1)x}; x \neq 0, x \neq -1.$$

$$4. \frac{x-1}{x+1} : \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1} \cdot (x^2-1) = \frac{x-1}{x+1} \cdot (x-1)(x+1) = (x-1)^2.$$

Ҳаман он қосиҷҳои асосие, ки нисбат ба амалҳои арифметикӣ дурустанд, барои касрҳои алгебравӣ ҳам ҷой доранд. Инро хусусан дар вақти содакунӣ, ихтисоркунӣ касрҳои алгебравӣ ва таъдидиқунӣ касрҳои алгебравӣ дидаи мумкин аст.

Мисоли 1. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\left(\frac{x}{x-2} + \frac{x^2}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{2-x} \right) : \frac{8}{x^2-4x+4} - \frac{x^2+x+6}{4x+8}.$$

Ҳал. Тартиби иҷрои амалҳои касрҳои алгебравӣ ба монанди амалҳои касрҳои оддӣ иҷро карда мешавад. Яъне, аввал амали зарби дар дохили кавс бударо иҷро мекунем, баъд амали ҷамъ ва пас аз он амали тақсиму тарҳро иҷро менамоем:

$$1. \frac{x^2}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{2-x} = \frac{x^2 \cdot (x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)(2-x)} = \\ = \frac{x^2}{(x+2)(2-x)}, (x \neq -2, x \neq 2)$$

$$2. \frac{x}{x-2} + \frac{x^2}{(x+2)(2-x)} = \frac{x}{x-2} - \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} = \\ = \frac{x(x+2)-x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+2x-x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x}{x^2-4};$$

$$3. \frac{2x}{x^2-4} : \frac{8}{x^2-4x+4} = \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^2-4x+4}{8} = \\ = \frac{2x \cdot (x^2-4x+4)}{(x-2)(x+2) \cdot 8} = \frac{2x \cdot (x-2)^2}{(x-2)(x+2) \cdot 8} = \frac{x(x-2)}{4(x+2)};$$

$$4. \frac{x(x-2)}{4(x+2)} - \frac{x^2+x+6}{4x+8} = \frac{x^2-2x}{4x+8} - \frac{x^2+x+6}{4x+8} = \\ = \frac{x^2-2x-x^2-x-6}{4x+8} = \frac{-3x-6}{4x+8} = -\frac{3(x+2)}{4(x+2)} = -\frac{3}{4}.$$

Натиҷаҳои ёфташуда барои ҳамаи қиматҳои x , ки $x^3+8 \neq 0$, $x-2 \neq 0$ аст, яъне дар вақти $x \neq -2$, $x \neq 2$ будан, дуруст мебошад.

Мисоли 2. Ифодаи $\frac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$ -ро сода кунед.

Ҳал. Барои сода намудани каср аз мафҳуми ихтисори касрҳо ва ба зарбкунандаҳо ҷудокунии истифода мебарем. Бинобар он аввал сурат ва баъд махраҷи касро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$a^4-16 = a^4-4^2 = (a^2)^2-4^2 = (a^2+4)(a^2-4) = \\ = (a^2+4)(a^2-2^2) = (a^2+4)(a-2)(a+2); \\ a^4-4a^3+8a^2-16a+16 = (a^4+8a^2+16)-(4a^3+16a) = \\ = (a^2+4)^2-4a(a^2+4) = (a^2+4)(a^2+4-4a) =$$

$$= (a^2 + 4)(a^2 - 4a + 4) = (a^2 + 4)(a - 2)^2.$$

Он гоҳ касри додашударо дар намуни

$$\frac{a^2 - 16}{a^4 - 4a^2 + 8a^2 - 16a + 16} = \frac{(a^2 + 4)(a - 2)(a + 2)}{(a^2 + 4)(a - 2)^2} = \frac{a + 2}{a - 2}, a \neq 2$$

навиштаи мумкин аст.

Мисоли 2. Ифодаи $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ -ро сода кунед.

Ҳял. Касри додашударо бо ду тарз, яъне бо тарзи ба махраҷи умумӣ овардан ва ҳам бо тарзи сурат ва махраҷро ба $a \cdot b$ зарб зада, сода кардан мумкин аст.

$$\text{Тарзи якум. } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b+a}{ab} : \frac{b-a}{ab} = \frac{b+a}{ab} \cdot \frac{ab}{b-a} = \frac{b+a}{b-a}, b \neq a.$$

$$\text{Тарзи дуюм. } \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{ab(1+b)}{ab}}{\frac{ab(1-b)}{ab}} = \frac{ab(b+a)}{ab(b-a)} = \frac{b+a}{b-a}, b \neq a.$$

§7. Ифодаҳои иррационали

Ифодаҳои иррационали гуфта, чунин ифодаҳои алгебравиро меноманд, ки дар онҳо ягон бузургӣ (харф) дар таҳти реша ҷой дорад.

Дигаргунсозиҳои ифодаҳои иррационали бошад, дар асоси қонуниҳои арифметика ва ҳам амалҳо бо решаҳо гузиронида мешаванд. Мақсади асосӣ ёфтани зарбкуниданӣ ҳамроҳшуда мебошад, ки дар вақти ба он зарб намуни ифодаи иррационали, бузургини дар таҳти реша буда, аз реша озод мешавад. Дар ин ҷо якчанд намуни зарбкуниданҳои ҳамроҳшударо дида мебароем:

1. Барои ифодаи $\sqrt[n]{a^m b^k}$, ки дар ин ҷо $a \geq 0, b \geq 0$, $m, k \in N$, $m < n, k < n$, ($m > 2, k > 2$) мебошанд, ифодаи $\sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-k}}$, зарбкуниданӣ ҳамроҳшуда аст, чунки дар вақти бо он зарб задан ab ҳосил мешавад, яъне:

$$\sqrt[n]{a^m b^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m} b^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n b^n} = ab.$$

2. Барон ифодан $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, ки $a \geq 0$, $b \geq 0$ аст, ифодан $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ зарбкунандан ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

мешавад.

3. Барон ифодан $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, ки $a \geq 0$, $b \geq 0$ аст, ифодан $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандан ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = a + b$$

мешавад.

4. Барон ифодан $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$, ки $a \geq 0$, $b \geq 0$ аст, ифодан $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандан ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b$$

мешавад.

Мисоли 1. Махраҷи ифодан $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}$ -ро аз ифодан иррационалӣ озод кунед.

Ҳал. Аз сабаби он, ки ифодан $\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}$ барон ифодан $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ зарбкунандан ҳамроҳшуда мебошад, бинобар он сурат ва махраҷи касри додашударо бо он зарб зада, дар асоси айнияти $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ навишта метавонем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2})} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 + 2} = \frac{1}{5}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}). \end{aligned}$$

Мисоли 2. Ифодан зеринро сода кунед:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a - b} \right).$$

Ҳал. а) Ифодан додашуда хангоми $a \geq 0$, $b \geq 0$ ва $a \neq b$ будан, маъно дорад.

б) Аз навишти $b = \sqrt{b^2} = (\sqrt{b})^2$, $b \geq 0$ истифода бурда, касри $\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ -ро ихтисор карда, ифодан дар дохили қавс якум бударо дар намуни

$$\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

навишташ мумкин аст.

в) Аз навишти

$$a - b = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

истифода бурда, амалҳои дар дохили қавси дуҷум бударо сода менамоем:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a - b} = \\ & = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ & = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ & = \frac{a - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ & = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

г) Натиҷаҳои қавсҳои якум ва дуҷумро зарб зада, ҳосил менамоем:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}), (a \geq 0, b \geq 0, a \neq b)$$

Мисоли 3. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} - \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}, (x \neq y, x \neq -y)$$

Ҳал. Аз айвонҳои $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ва $a^2 - b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ истифода бурда, касри додшударо сода мекунем.

2. Барои ифодаи $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, ки $a \geq 0, b \geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

мешавад.

3. Барои ифодаи $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, ки $a \geq 0, b \geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = a + b$$

мешавад.

4. Барои ифодаи $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$, ки $a \geq 0, b \geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b$$

мешавад.

Мисоли 1. Махраҷи ифодаи $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}$ -ро аз ифодаи иррационалӣ озод кунед.

Ҳал. Аз сабаби он, ки ифодаи $\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}$ барои ифодаи $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, бинобар он сурат ва махраҷи касри додашударо бо он зарб зада, дар асоси айнияти $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ навишта метавонем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2})} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 + 2} = \frac{1}{5}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}). \end{aligned}$$

Мисоли 2. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a - b} \right).$$

Ҳал. а) Ифодаи додашуда хангоми $a \geq 0, b \geq 0$ ва $a \neq b$ будан, маъно дорад.

б) Аз навишти $b = \sqrt{b^2} = (\sqrt{b})^2$, $b \geq 0$ истифода бурда, касри $\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ -ро ихтисор карда, ифодаи дар дохили қавси якум бударо дар намуни

$$\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

навиштан мумкин аст.

в) Аз навишти

$$a - b = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

истифода бурда, амалҳои дар дохили қавси дуҷум бударо сода менамоем:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a - b} = \\ & = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ & = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ & = \frac{a - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ & = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

г) Натиҷаҳои қавсҳои якум ва дуҷумро зарб зада, ҳосил менамоем:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}), \quad (a \geq 0, b \geq 0, a \neq b)$$

Мисоли 3. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} - \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}, \quad (x \neq y, x \neq -y)$$

Ҳал. Аз айниятҳои $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ва $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ истифода бурда, касри додашударо сода мекунем.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{x - y} - \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} &= \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} - \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)} = \\ &= (x + y) - \frac{(x^2 + xy + y^2)}{(x + y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - xy - y^2}{x + y} = \\ &= \frac{xy}{x + y}, \quad x \neq -y. \end{aligned}$$

Мисоли 4. Қимати ифодаи зеринро ҳангоми $x = -3\frac{3}{4}$ будан, ҳисоб кунед:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2+1} \right).$$

Ҳал. а) Ифодаи дар доҳили қавси якум бударо сода мекунем:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} &= \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{4x}{x^2 - 1}; \end{aligned}$$

б) Ифодаи дар доҳили қавси дуюм бударо сода мекунем:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2+1} &= \frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \\ &= \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 - 1} = \frac{4x^2}{x^4 - 1}; \end{aligned}$$

в) Натиҷаи қавси якумро ба натиҷаи қавси дуюм тақсим карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{4x}{x^2 - 1} : \frac{4x^2}{x^4 - 1} = \frac{4x}{x^2 - 1} \cdot \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{4x^2} = \frac{x^2 + 1}{x};$$

г) Ба натиҷаи ҳосилшуда қимати $x = -3\frac{3}{4}$ ё $x = -\frac{15}{4}$ -ро гузошта, ҳисоб мекунем:

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\left(-\frac{15}{4}\right)^2 + 1}{-\frac{15}{4}} = \frac{\frac{225}{16} + 1}{-\frac{15}{4}} = \frac{\frac{225 + 16}{16}}{-\frac{15}{4}} =$$

$$= \frac{241}{16} : \left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{241}{16} \cdot \frac{-4}{15} = -\frac{241}{4} \cdot \frac{1}{15} = -\frac{241}{60} = -4\frac{1}{60}.$$

МАШҚҲО

1. Ифодаҳоро сода кунед:

а) $\left(\frac{a}{a-2} + \frac{a^2}{a^3+8} \cdot \frac{a^2-2a+4}{2-a}\right) : \frac{8}{a^2-4a+4} - \frac{a^2+a+6}{4a+8};$

б) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2} - \frac{b}{b-a}\right) : \frac{2b}{a^2-b^2};$

в) $\left(\frac{ax-b}{a+b} - \frac{bx+a}{b-a}\right) : \left(\frac{a^2-b^2}{x^2-1} : \frac{a^2+b^2}{x-1}\right);$

г) $\left(x - \frac{4xy}{x+y} + y\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} - \frac{2xy}{x^2-y^2}\right);$

ғ) $\frac{a^2+9}{a^2-6a+9} : \left(3+a - \frac{18}{3-a}\right) \cdot (a-3);$

д) $A = \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}.$

2. Ифодаҳоро сода карда, қимати онро ҳангоми $x = 0,5$ будан, ёбед:

$$\frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{4}{x^4+4x^3+4x^2} + \frac{4}{x^3+2x^2}.$$

3. Ифодаҳоро сода карда, қимати онро ҳангоми $a = -0,01$ будан, ёбед:

$$\frac{a^2-2a+1}{a-3} \cdot \left(\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a}\right).$$

4. Ба зарбқунандаҳо ҷудо кунед:

а) $36a^2 - (5a-1)^2$; б) $3x^3 + x^2 - x - 3.$

5. Айниятро исбот кунед: $\frac{1+a^2+a}{1-a^3} + \frac{a-a^2}{(1-a)^3} = \frac{1}{(1-a)^2}.$

6. Ҳисоб кунед:

а) $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{19-8\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}};$

в) $\sqrt{11-4\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}};$ г) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}.$

БОБИ V МУОДИЛАҲО

§1. Мафҳуми муодила ва ҳалҳои он

Мо ҳангоми тадқиқотҳои назариявӣ ва қорҳои амалӣ аз муодилаҳо истифода мебарем, чунки онҳо дар ҳалли масъалаҳои гуногун ёрӣ мерасонанд. Барои он ки масъала ё мисол бомуваффақият ҳал карда шавад, ҳуди муодила ва тарзҳои гуногуни ҳалли онро нағз доништан лозим аст, зеро ҳалли муодила ин яке аз мафҳумҳои асосии курси алгебра мебошад.

Таърифи 1. Баробариҳои дар таркиби тағйирёбандаи доштари муодила меноманд.

Масалан, баробариҳои $ax - b = 0$, $a \neq 0$, $a, b \in R$, $x^2 - 1 = 0$ муодила мебошанд, чунки ин баробариҳо дар таркибашон тағйирёбандаи x -ро доранд.

Ҳал кардани муодила, ин ёфтани маҷмӯи ҳалҳои (решаҳои) он мебошад.

Маҷмӯи ҳалҳои (решаҳои) муодила, маҷмӯи охиринок, ҳолӣ ва ҳам беохир шуда метавонанд.

Таърифи 2. Ҳалҳои (решаҳои) муодила гуфта, он қиматҳои тағйирёбандаро меноманд, ки барои онҳо баробарӣ дуруст мебошад.

Масалан, муодилаи додашудаи $ax - b = 0$, $a \neq 0$, $a, b \in R$ ҳалли ягонаи $x = \frac{b}{a}$ -ро дорад, чунки ҳангоми $x = \frac{b}{a}$ -ро ба ҷои x -и муодила гузоштан, муодила аиниятан ба нол баробар мешавад, яъне $a \cdot \frac{b}{a} - b = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Се ҳосияти асосии муодиларо дар хотир доштан лозим аст, ки онҳо чунинанд:

1. Агар ба ду тарафи баробариҳои дуруст нисбат ба тағйирёбандаи ягон якузба ё бисёрзваро ҷамъ намоем, он гоҳ ин муодила ҳаллашро тағйир намендиҳад, яъне баробариҳои дуруст ҳосил мешавад.

2. Агар ду тарафи баробариҳои дурустро ба ягон адади нобаробар ба нол зарб ё тақсим намоем, он гоҳ ин муодила ҳаллашро тағйир намендиҳад, яъне баробариҳои дуруст ҳосил мешавад.

3. Агар ягон ҷамъшавандаро аз як қисми баробариҳои дуруст ба қисми дигараш бо аломати муқобил гузаронем, баробариҳои дуруст ҳосил мешавад.

Азбаски дар ҳалли муодилаҳо аз мафҳуми баробаркувва будани муодилаҳо истифода мебаранд, бинобар он дар асоси ин се хосияти дар боло овардашуда мафҳуми баробаркувва будани муодилаҳоро бори дигар хотиррасон мекунем.

Ду муодила ҳамон вақт баробаркуввааст, ки агар муодилаи дуум натиҷаи муодилаи якум ва муодилаи якум натиҷаи муодилаи дуум бошад. Инро бо аломати $\Leftrightarrow$ ишора мекунанд.

Барои фаҳмиши пурра доштан, мисоли зеринро меорем.

Мисол. Муодилаҳои $16x = 0,64$ ва $x = 0,04$, ки тағйирёбандан x доранд, баробаркувва мебошанд: $16x = 0,64 \Leftrightarrow x = 0,04$.

Барои исбот намудан аз хосиятҳои дар боло зикршуда истифода мебарем.

Муодилаи $16x = 0,64$ барои ҳаргуна қиматҳои x ба баробарии дуруст табдил меёбад. Агар ҳар ду қисми баробарии дурустро ба як адад тақсим кунем, боз баробарии дуруст ҳосил мешавад. Пас, агар дар ягон қимати x муодилаи якум ба баробарии дуруст табдил ёбад, он гоҳ муодилаи дуум ҳам ба баробарии дуруст табдил меёбад. Аз ин ҷо бармеояд, ки муодилаи дуум натиҷаи муодилаи якум аст. Агар ҳар ду қисми баробарии дурустро ба як адад зарб занем, боз баробарии дуруст ҳосил мешавад, бинобар он муодилаи якум натиҷаи муодилаи дуум мебошад. Инак, мо исбот намудем, ки муодилаҳои $16x = 0,64$ ва $x = 0,04$ баробаркувваанд.

Таърифи 3. Фақат ҳамон муодилаҳо баробаркувваанд, ки агар маҷмӯи ҳалҳои он мувофиқ бошанд.

Дар ин ҷо бояд дар хотир дошт: муодилаҳое, ки тағйирёбандаҳои якхела доранду ҳал надоранд, баробаркувва ҳисобида мешаванд.

Акнун, намудҳои гуногуни муодилаҳоро дида мебароем.

§2. Муодилаи хаттӣ

Таърифи 1. Муодилаи $ax + b = 0$ ($ax - b = 0$), ки дар ин ҷо a ва b ададҳои дилхоҳанд, муодилаи хаттӣ (ё ки муодилаи дараҷаи якуми яктағйирёбандаи дошта) номида мешавад.

Масалан, муодилаи $3x + 4 = 0$, $0,8 - 0,4x = 0$, $9x + 3 = 0$,

$12x=7$, $2x+4=3$, $\frac{7}{2}x-4=\frac{4}{5}x-5$ ва амсоли ин, муодилаҳои хаттӣ мебошанд. Чӣ хеле, ки дар §1 қайд кардем, ҳал кардани муодила – ин ёфтани маҷмуи ҳалҳои (решаҳои) муодила мебошад. Маҷмуи решаҳои муодилаи хаттӣ, маҷмуи охиринок, ҳолӣ ва беохир шуда метавонад.

Ҳангоми ҳал кардани муодилаҳои хаттӣ аз навишти $ax = -b$ ($ax = b$) истифода мебаранд, чунки муодилаи $ax + b = 0$ ($ax - b = 0$) бо муодилаи $ax = -b$ ($ax = b$) баробарқувва аст.

Ҳалли (решаи) муодилаи хаттӣ $ax - b = 0$ - ро дида мебароем:

1. Агар $a \neq 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax - b = 0 \Leftrightarrow ax = b$ ҳалли ягонаи $x = \frac{b}{a}$ - ро дорад.

Масалан: а) $2x - 7 = 0$; $2x = 7$; $x = \frac{7}{2} = 3,5$;

б) $12 - 4x = 0$; $4x = 12$; $x = \frac{12}{4} = 3$;

в) $7x - 36 = 0$; $7x = 36$; $x = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$;

г) $\frac{3}{5}x - \frac{x}{2} = 0,2$; $6x - 5x = 10 \cdot 0,2$; $x = 2$.

2. Агар $a = 0$ ва $b = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax - b = 0$ ё ки $ax = b$ намуди $0 \cdot x = 0$ - ро мегирад. Маҷмуи решаҳои муодилаи $0 \cdot x = 0$ маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад, яъне ин маҷмуи беохир аст.

Агар $a = 0$, вале $b \neq 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax - b = 0$ ё ки $ax = b$ намуди $0 \cdot x = b$ - ро мегирад. Маҷмуи решаҳои муодилаи $0 \cdot x = b$ ($b \neq 0$) маҷмуи ҳолӣ мебошад ва бо рамзи $\emptyset$ ифода карда мешавад.

Масалан: 1. $ax = a$ (a - параметр мебошад).

Ҳа. л. а) Агар $a \neq 0$ бошад, он гоҳ $ax = a \Rightarrow x = 1$ мебошад.

б) Агар $a = 0$ бошад, он гоҳ $ax = a \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ мебошад. Маҷмуи ҳалҳои муодилаи $0 \cdot x = 0$, маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ аст.

2. $ax = x + 1$ (a - параметр мебошад).

Ҳал. а) $ax = x + 1$; $ax - x = 1$; $(a-1)x = 1$; $x = \frac{1}{(a-1)}$, яъне

агар $a \neq 1$ бошад, муодила ҳалли ягонаи $x = \frac{1}{(a-1)}$ - ро дорад.

б) Агар $a-1=0$ бошад, он гоҳ муодилаи $(a-1)x=1$ намуди $0 \cdot x = 1$ - ро мегирад, яъне муодила ҳал (реша) надорад, маҷмун ҳалҳои 0 мебошад.

Дар охир ҳалҳои (решаҳои) муодилаҳои хаттии гуногунро меорем.

Мисоли 1. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

1. $4x - 7 = 9$;

2. $9 - 3x = 3$;

3. $5 + 4x = 1$;

4. $4x - 5 = 2x + 7$;

5. $x - 0,4 = 3x + 11,6$;

6. $3,4 - 2x = x - 8,6$.

Ҳал. 1. $4x - 7 = 9$; $4x = 9 + 7$; $4x = 16$; $x = \frac{16}{4}$; $x = 4$;

2. $9 - 3x = 3$; $3x = 9 - 3$; $3x = 6$; $x = \frac{6}{3}$; $x = 2$;

3. $5 + 4x = 1$; $4x = 1 - 5$; $4x = -4$; $x = \frac{-4}{4}$; $x = -1$;

4. $4x - 5 = 2x + 7$; $4x - 2x = 7 + 5$; $2x = 12$; $x = \frac{12}{2}$; $x = 6$;

5. $x - 0,4 = 3x + 11,6$; $x - 3x = 11,6 + 0,4$; $-2x = 12$; $x = \frac{12}{-2}$; $x = -6$;

6. $3,4 - 2x = x - 8,6$; $3,4 + 8,6 = x + 2x$; $12 = 3x$; $x = \frac{12}{3}$; $x = 4$.

Мисоли 2. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

1. $\frac{x}{2} + x = 4$;

2. $\frac{x+3}{4} - 2 = 0$;

3. $\frac{x-2}{2} - 4 = \frac{3x+21}{5}$;

4. $\frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3}$.

Ҳал. 1. $\frac{x}{2} + x = 4$; $\frac{x+2x}{2} = 4$; $\frac{3x}{2} = 4$; $3x = 8$; $x = \frac{8}{3}$; $x = 2\frac{2}{3}$.

2. $\frac{x+3}{4} - 2 = 0$; $\frac{x+3-8}{4} = 0$; $\frac{x-5}{4} = 0$; $x-5=0$; $x=5$.

$$3. \frac{x-2}{2} - 4 = \frac{3x+21}{5}; \quad \frac{x-2-8}{2} = \frac{3x+21}{5};$$

$$\frac{x-10}{2} = \frac{3x+21}{5}; \quad \frac{5(x-10)}{2 \cdot 5} = \frac{2(3x+21)}{5 \cdot 2};$$

$$\frac{5x-50}{10} = \frac{6x+42}{10}; \quad 5x-50 = 6x+42;$$

$$5x-6x = 50+42; \quad -x = 92; \quad x = -92.$$

$$4. \frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3};$$

$$\frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} - \frac{x-3}{4} - \frac{x-4}{3} = 0;$$

$$12(x-5) + 3(x-1) - 6(x-3) - 8(x-4) = 0;$$

$$12x - 60 + 3x - 3 - 6x + 18 - 8x + 32 = 0;$$

$$12x - 60 + 3x - 3 - 6x + 18 - 8x + 32 = 0;$$

$$x - 13 = 0; \quad x = 13.$$

Мисоли 3. Муодилаҳоеро, ки дар махраҷашон тағйирёбанда доранд, ҳал кунед:

$$1. \frac{7}{2x-4} - \frac{3}{x+2} = 0; \quad 3. \frac{a}{1-bx} = \frac{b}{1-ax}, \quad a, b \neq 0;$$

$$2. \frac{3}{x-1} + 6 = \frac{4}{x-1}; \quad 4. \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2-9}$$

Ҳал. 1. $\frac{7}{2x-4} - \frac{3}{x+2} = 0$ ё ки $\frac{7}{2(x-2)} - \frac{3}{x+2} = 0.$

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x \neq -2, x \neq 2$ дуруст мебошад. Муодиларо бо тарзи ба махраҷи умумӣ овардан ҳал карда, ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 7(x+2) - 6(x-2) = 0, \\ \begin{cases} x+2 \neq 0, \\ x-2 \neq 0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 7x+14-6x+12=0, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x+26=0$ ё ки $x=-26$ мешавад.

Ҷавоб: $-26.$

$$2. \frac{3}{x-1} + 6 = \frac{4}{x-1}.$$

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x \in R, x \neq 1$ дуруст буда, ҳалли ягонро дорад.

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x-1} + 6 = 0 \text{ ё ки } -\frac{1}{x-1} + 6 = 0;$$

$$-1 + 6(x-1) = 0;$$

$$-1 + 6x - 6 = 0;$$

$$6x = 7; x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}.$$

Ҷавоб: $1\frac{1}{6}$.

$$3. \frac{a}{1-bx} = \frac{b}{1-ax}.$$

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x \in R, x \neq \frac{1}{a}, x \neq \frac{1}{b}$ дуруст аст, он гоҳ муодиларо ҳал карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{a}{1-bx} - \frac{b}{1-ax} = 0; \frac{a(1-ax) - b(1-bx)}{(1-bx)(1-ax)} = 0;$$

$$\frac{a - a^2x - b + b^2x}{(1-bx)(1-ax)} = 0; \frac{(a-b) + (b^2 - a^2)x}{(1-bx)(1-ax)} = 0;$$

$$(a-b) + (b^2 - a^2)x = 0, (1-bx)(1-ax) \neq 0;$$

$$(b^2 - a^2)x = -(a-b); (1-bx) \neq 0, (1-ax) \neq 0;$$

$$x = -\frac{(a-b)}{b^2 - a^2}; x = \frac{b-a}{(b-a)(b+a)}; x = \frac{1}{b+a}. \text{ Ҷавоб: } \frac{1}{b+a}.$$

$$4. \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2-9} \text{ ё ки } \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x+3} - \frac{4}{(x-3)(x+3)} = 0.$$

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x \in R, x \neq -3, x \neq 3$ дуруст буда, ҳалли ягонро дорад.

$$\frac{5(x+3) + 7(x-3) - 4}{(x-3)(x+3)} = 0; \frac{5x+15+7x-21-4}{(x-3)(x+3)} = 0;$$

$$\frac{12x-10}{(x-3)(x+3)} = 0 \Rightarrow 12x-10 = 0;$$

$$x^2 - 9 \neq 0; 12x = 10; x^2 - 9 \neq 0; x = \frac{10}{12}; x = \frac{5}{6}.$$

Ҷавоб: $\frac{5}{6}$.

М А Ш Қ Ќ О

Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

$$1. 4 - \frac{x}{3x-2} = 0;$$

$$2. \frac{x}{2x+1} - \frac{4}{5} = 0;$$

$$3. \frac{3x+2}{3-4x} = \frac{1}{5};$$

$$4. \frac{3}{x-4} - 2 = \frac{3x-5}{x-4};$$

$$5. \frac{4}{3x-4} - \frac{3}{4-3x} = 0;$$

$$6. \frac{0,5}{x} - \frac{1}{3} = \frac{2,5}{x};$$

$$7. \frac{3x-2}{4} - 3 = \frac{4x+5}{6};$$

$$8. \frac{2x}{x+5} + 4 - \frac{5}{x+5} = 0.$$

§3. Муодилаи квадратӣ

Таърифи 1. Муодилаи квадратӣ гуфта, муодилаи намуди

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо a, b, c - ададҳои ҳақиқӣ, x - тағйирёбанда мебошад.

Ададҳои a, b, c - ро коэффитсиентҳои муодилаи квадратӣ меноманд. Дар ин ҷо b - коэффитсиенти назди тағйирёбандаи дараҷаи якум, a - коэффитсиенти назди тағйирёбандаи дараҷаи дуюм ва адади c - узви озод мебошад.

I. Муодилаи квадратии нопурра

Агар дар муодилаи (1) яке аз коэффитсиентҳо b ва ё c , ё ки ҳар ду ба нол баробар бошанд, он гоҳ муодилаи (1)-ро муодилаи нопурраи квадратӣ меноманд. Намудҳои муодилаҳои нопурраи квадратӣ ҳангоми $a \neq 0$ будан, чунинанд:

а) $ax^2 = 0$; б) $ax^2 + c = 0$; ($c \neq 0$); в) $ax^2 + bx = 0$ ($b \neq 0$).

Ҳалли муодилаҳои нопурраи квадратиро ҳангоми $a \neq 0$ будан, бори дигар хотиррасон мекунем:

а) Муодилаи $ax^2 = 0$ решаҳои баробари $x = 0$ -ро дорад.

б) Муодилаи $ax^2 + c = 0$, ($c \neq 0$):

$$ax^2 = -c; \quad x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Ҳангоми ҳал кардани ин ҳел муодила ду ҳолатро дида баромадан мумкин аст:

Агар $\frac{c}{a} > 0$ бошад, он гоҳ $-\frac{c}{a} < 0$ мешавад, ки дар ин маврид муодилаи $x^2 = -\frac{c}{a}$ дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал (реша) надорад.

Агар $\frac{c}{a} < 0$ бошад, он гоҳ $-\frac{c}{a} > 0$ мешавад, ки дар ин ҳолат муодилаи $x^2 = -\frac{c}{a}$ ду реша дорад:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

в) Муодилаи $ax^2 + bx = 0$ ($b \neq 0$) - ро бо роҳи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан, (ё ки x -ро аз қавс баровардан), ҳал кардан мумкин аст.

$ax^2 + bx = 0$ ё ки $x(ax + b) = 0$. Муодила дорои ду ҳал аст:

Аз ин ҷо, $x = 0$ ё ки $ax + b = 0$.

Аз муодилаи якум $x_1 = 0$ ва аз муодилаи дуюм $x_2 = -\frac{b}{a}$ мешавад.

Ҷавоб: $0; -\frac{b}{a}$.

Мисоли 4. Ҳалли муодилаҳои зеринро меорем:

1. $7x^2 = 0$; 2. $-5x^2 = 0$; 3. $3x^2 - 24 = 0$;
4. $36 - 4x^2 = 0$; 5. $12x^2 + 36x = 0$; 6. $4x - 9x^2 = 0$;
7. $9x^2 + 72x = 0$; 8. $0,5x^2 - 1,25x = 0$; 9. $\frac{3}{2}x^2 - 6 = 0$

Ҳал. 1. $7x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$.

2. $-5x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$.

3. $3x^2 - 24 = 0$; $3x^2 = 24$; $x^2 = 8$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{8}$.

4. $36 - 4x^2 = 0$; $36 = 4x^2$; $9 = x^2$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$; $x_1 = -3$; $x_2 = 3$.

5. $12x^2 + 36x = 0$; $x(12x + 36) = 0$.

Аз ин ҷо, $x = 0$ ё ки $12x + 36 = 0$ шуда, $x_1 = 0$; $x_2 = -3$ мешавад.

6. $4x - 9x^2 = 0$; $x(4 - 9x) = 0$ Аз ин ҷо, $x = 0$ ё ки $4 - 9x = 0$ шуда, $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{4}{9}$ мешавад.

7. $9x^2 + 72x = 0$; $x(9x + 72) = 0$. Аз ин ҷо $x = 0$ ё ки $9x + 72 = 0$ шуда, $x_1 = 0$; $x_2 = -8$ мешавад.

8. $0,5x^2 - 1,25x = 0$; $x(0,5x - 1,25) = 0$ шуда, $x = 0$ ё ки $0,5x - 1,25 = 0$ шуда, $x_1 = 0$; $x_2 = 2,5$ мешавад.

9. $\frac{3}{2}x^2 - 6 = 0$; $3x^2 - 12 = 0$; $3x^2 - 12 = 0$;

$3x^2 = 12$; $x^2 = 4$; $x_1 = -2$; $x_2 = 2$.

Дар ҳолатҳои умумӣ барои ҳал намудани муодилаҳои квадратӣ аз тарзи ба квадрати пурра ҷудокунӣ истифода мебаранд. Татбиқи ин тарзро дар муодилаи квадратии намуни (1) дида мебароем.

Тарафи чапи муодилаи $ax^2 + bx + c = 0$ -ро дар намуни зерин менависем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

Барои ифодаи дар дохили қавс бударо ба квадрати пурра овардан, узви дуомашро ба 2 зарб ва тақсим намуда, баъд бо ҷамъ ва тарҳ карда квадрати $\frac{b}{2a}$ ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Пас, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ мешавад.

Он гоҳ, муодилаи (1) намуни зеринро мегирад.

$$\begin{aligned} a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} &= 0; \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Ҳалли муодила аз аломати ифодаи дар тарафи ростии баробарии (2) буда, вобаста аст. Аз сабаби он, ки $4a^2 > 0$ мебошад, бинобар он аломати ифодаи тарафи ростии баробарии (2) аз аломати $b^2 - 4ac$ вобаста аст.

Таърифи 2. Ифодаи $b^2 - 4ac$ дискриминанти муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ буда, бо рамзи D ишорат карда мешавад.

Яъне, $D = b^2 - 4ac$.

«Дискриминант» - калиман лотинӣ буда, маънояш фарқкунанда мебошад.

Мисол 5. Муодилаҳои зринро бо тарзи ба квадрати пурра ҷудокунии ҳал мекунем:

1. $x^2 - 6x - 7 = 0$;

3. $3x^2 + 2x - 5 = 0$;

2. $x^2 - 4x - 5 = 0$;

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ҳал. Барои ҳал намудани муодилаҳои овардашуда, аз формулаҳои зарби мухтасар $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ва $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ истифода мебарем.

1. Тарафи чапи муодиларо дар намуди зерин табдил дода, онро ҳал мекунем:

$$x^2 - 6x - 7 = 0;$$

$$x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x - 7 = 0;$$

$$x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 9 - 7 = 0;$$

$$(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9) - 9 - 7 = 0;$$

$$(x-3)^2 - 16 = 0;$$

$$(x-3)^2 = 4^2;$$

$$(x-3)^2 - 4^2 = 0;$$

$$((x-3)-4)((x-3)+4) = 0;$$

$$(x-7)(x+1) = 0.$$

Аз ин ҷо $x_1 = -1$; $x_2 = 7$ мешавад.

2. **Тарзи якум.** Тарафи чапи муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$x^2 - 4x - 5 = 0;$$

$$x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x - 5 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 - 5 = 0;$$

$$(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4) - 4 - 5 = 0;$$

$$(x-2)^2 - 9 = 0.$$

Тарзи дуюм. Муодилаи $x^2 - 4x - 5 = 0$ - ро дар чунин намуд навишта, ҳаллашро меорем:

$$x^2 + x - 5x - 5 = 0;$$

$$x(x+1) - 5(x+1) = 0;$$

$$(x+1)(x-5) = 0.$$

Аз ин чо, $x+1=0$ ё ки $x-5=0$ шуда, $x_1 = -1$ ва $x_2 = 5$ мешавад.

$$3. 3x^2 + 2x - 5 = 0;$$

$$\text{Тарзи якум. } x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = 0;$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{5}{3} = 0;$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = 0;$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0;$$

$$\left(x + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) = 0;$$

$$\left(x + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) = 0;$$

$$(x-1)\left(x + \frac{5}{3}\right) = 0.$$

Аз ин чо, $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{5}{3}$ мебошад.

$$\text{Тарзи дуюм. } 3x^2 + 2x - 5 = 0;$$

$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 5 = 0;$$

$$3\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) - 5 = 0;$$

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 5 - \frac{3}{9} = 0; \quad 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 5 - \frac{1}{3} = 0;$$

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} = 0; \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}.$$

Дар ин чо, $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \left|x + \frac{1}{3}\right| = \frac{4}{3}$ мебошад. Аз ин чо,

$x + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ва $-(x + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$ шуда, $x_1 = -\frac{5}{3}$ ва $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$; $x_2 = 1$ мебошад. Чӣ хеле ки мебинем $x_1 = -\frac{5}{3}$ ва $x_2 = 1$ ҳалҳои муодилаи квадратии $3x^2 + 2x - 5 = 0$ мебошанд.

$$4. x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{5}{2} + 6 = 0$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 = 0;$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25 - 24}{4} = 0;$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0;$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0;$$

$$\left(\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\left(x - \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0.$$

Аз ин ҷо, $x_1 = 2$ ва $x_2 = 3$ мешавад.

II. Муодилаи квадратии пурра

Ҳалҳои муодилаи $ax^2 + bx + c = 0$ -ро дида мебароем. Пеш аз ҳама барои муодилаи $ax^2 + bx + c = 0$ дискриминанташ $D = b^2 - 4ac$ -ро ҳисоб мекунем.

а) Агар $D = b^2 - 4ac > 0$ бошад, он гоҳ аз (2) бармеояд, ки $ax^2 + bx + c = 0$ ду ҳал дорад:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ ва } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad (3)$$

б) Агар $D = b^2 - 4ac = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax^2 + bx + c = 0$ ҳалли ягона дорад:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad (4)$$

в) Агар $D = b^2 - 4ac < 0$ бошад, муодила дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад, яъне маҷмуи ҳалҳои ҳоли ($\emptyset$) мебошад.

г) Агар дар муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ коэффитсиенти дуҷумаш b - адади ҷуфт, яъне $b = 2k$ бошад, он гоҳ формулаҳои ҳалҳои муодилаи квадратии $ax^2 + 2kx + c = 0$ намуни

$$x_1 = \frac{-2k - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-2k + \sqrt{D}}{2a};$$

$$D = (2k)^2 - 4ac = 4(k^2 - ac) = 4D_1 \quad (5)$$

$$\text{ё ки } x_1 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} \text{ ва } x_2 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} \quad (6)$$

-ро мегиранд.

Аз ин ҷо дида мешавад, ки мавҷудияти ҳалҳои муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ ва шумораи онҳо аз аломати дискриминант D вобаста аст.

Мисоли 6. Ҳалҳои муодилаҳои зеринро меорем:

$$1. \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0;$$

$$2. \quad 2x^2 - 10x + 8 = 0;$$

$$3. \quad x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$4. \quad 5x^2 + 6x + 1 = 0;$$

$$5. \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0;$$

$$6. \quad 2x^2 + 5x + 9 = 0.$$

Ҳал. 1. Дискриминанти муодилаи додашударо ҳисоб мекунем.

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64 > 0$$

Азбаски $D > 0$ аст, пас муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодила бо формулаи (3) ёфта мешаванд.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

Пас, $x_1 = \frac{1}{3}$ ва $x_2 = 3$ мешавад.

2. Дискриминанти муодилаи додашударо ҳисоб мекунем.

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 100 - 64 = 36 > 0.$$

Азбаски $D > 0$ аст, пас муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодила бо формулаи (3) ёфта мешаванд.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{10 - 6}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ ё ки } x_1 = 1.$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{36}}{2 \cdot 2} = \frac{10 + 6}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

ё ки $x_2 = 4$ аст.

3. Дискриминанти муодиларо аз рӯи формулаи $\frac{D}{4} = k^2 - ac$

($b = 2k$) ёфтан мумкин аст, чунки $b = -8$ адади чуфт мебошад:

$$\frac{D}{4} = k^2 - ac = \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 1 \cdot 12 = 16 - 12 = 4 > 0.$$

Пас, муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодиларо аз рӯи формулаи (6) меёбем:

$$x_1 = 4 - 2 = 2; \quad x_2 = 4 + 2 = 6.$$

4. Дискриминанти муодила

$$D_1 = k^2 - ac = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4 > 0 \text{ аст.}$$

Пас, муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодила аз рӯи формулаи (6) ёфта мешаванд.

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-3 - \sqrt{4}}{5} = \frac{-3 - 2}{5} = -1.$$

$$x_2 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-3 + \sqrt{4}}{5} = \frac{-3 + 2}{5} = -\frac{1}{5}.$$

5. Дискриминанти муодила

$$D_1 = k^2 - ac = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0 \text{ аст.}$$

Пас, муодила ду ҳалли баробар дорад. Ҳалли муодила аз рӯи формулаи (4) ёфта мешавад.

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}. \text{ Ҳангоми } b = 2k \text{ будан}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-k}{a} = \frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3} \text{ мешавад.}$$

6. Дискриминанти муодила

$$D = 5^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 25 - 72 = -47 < 0 \text{ мешавад.}$$

Пас, муодилаи додашуда дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад, яъне маҷмуи ҳалҳои ҳақиқӣ ($\emptyset$) мебошад.

III. Муодилаи квадратии ислоҳкардашуда

Агар дар муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ коэффитсиенти якумаш $a=1$ бошад, он гоҳ ишораҳои нави $b=p$ ва $c=q$ -ро дохил карда, муодилаи квадратии

$$x^2 + px + q = 0 \quad (7)$$

-ро ҳосил мекунем.

Муодилаи квадратии (7) - ро муодилаи квадратии ислоҳкардашуда меноманд.

Ҳалҳои муодилаи (7) бо формулаҳои зерин ёфта мешаванд:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ ва } x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (8)$$

Агар дар муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ коэффитсиенти якумаш $a \neq 1$ бошад, он гоҳ ишораҳои нави $\frac{b}{a}=p$ ва $\frac{c}{a}=q$ -ро дохил карда, муодилаи квадратии ислоҳкардашударо ҳосил мекунем:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + px + q = 0.$$

IV. Теоремаи Виет

Теорема. Суммаи решаҳои ҳақиқии муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ ба $-\frac{b}{a}$ ва ҳосили зарби онҳо ба $\frac{c}{a}$ баробар аст, яъне,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (x_1 + x_2 = -p) \text{ ва}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (x_1 \cdot x_2 = q) \quad (9)$$

мебошад (Исботи теорема ба хонандагон супорида мешавад).

Мисоли 7. Ҳалҳои муодилаҳои зеринро меорем:

1. $x^2 + 12x + 36 = 16(2x - 3)$; 2. $x^2 - 7x + 12 = 0$;

3. $x^2 - 2x - 3 = 0$; 4. $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Ҳал. 1. Муодилаи $x^2 + 12x + 36 = 16(2x - 3)$ -ро сода мекунем:

$$x^2 + 12x + 36 = 32x - 48$$

$$x^2 + 12x + 36 - 32x + 48 = 0;$$

$$x^2 - 20x + 84 = 0.$$

Муодилаи дар натиҷаи содакунӣ ҳосилшударо, муодилаи квадратии ислоҳкардашуда номидан мумкин аст. Ҳалҳои ин ҳел муодила аз рӯи формулаи (8) ёфта мешаванд:

$$x_1 = \frac{20}{2} - \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 84} = 10 - \sqrt{100 - 84} = \\ = 10 - \sqrt{16} = 10 - 4 = 6;$$

$$x_2 = \frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 84} = 10 + \sqrt{100 - 84} = \\ = 10 + \sqrt{16} = 10 + 4 = 14.$$

2. Муодилаи квадратии додашуда, муодилаи квадратии ислоҳкардашуда мебошад, бинобар он ҳалҳои ба формулаи (8) ёфта мешаванд:

$$x_1 = \frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \\ = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49 - 48}{4}} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$x_2 = \frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12} = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \\ = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49 - 48}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

3. Муодилаи сеюм айнан монанди муодилаҳои дар боло овардашуда ҳал карда мешавад:

$$x_1 = \frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = 1 - \sqrt{1 + 3} = \\ = 1 - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1;$$

$$x_2 = \frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = 1 + \sqrt{1 + 3} = \\ = 1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3.$$

4. Муодилаи чорумро бо роҳи ба 3 тақсим намудани ду тарафи баробарӣ, ба муодилаи квадратии ислоҳкардашуда оварда, онро ҳал менамоем.

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \text{ ёки } x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0.$$

Ҳалҳои муодилаи $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ аз рӯи формулаи (8) ёфта мешаванд:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{7}{3} : 2 - \sqrt{\left(\frac{7}{3} : 2\right)^2 - \frac{2}{3}} = \\ &= \frac{7}{6} - \sqrt{\left(\frac{49}{36}\right) - \frac{2}{3}} = \frac{7}{6} - \sqrt{\frac{49-24}{36}} = \\ &= \frac{7}{6} - \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{7}{3} : 2 + \sqrt{\left(\frac{7}{3} : 2\right)^2 - \frac{2}{3}} = \\ &= \frac{7}{6} + \sqrt{\left(\frac{49}{36}\right) - \frac{2}{3}} = \frac{7}{6} + \sqrt{\frac{49-24}{36}} = \\ x_2 &= \frac{7}{6} + \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2. \end{aligned}$$

Мисоли 8. Решаҳои муодилаи $4x^2 - 3x - 8 = 0$ -ро наёфта, ифодаҳои $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $x_1^2 + x_2^2$ ва $x_1^3 + x_2^3$ ёфта шаванд (дар ин ҷо x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи додашуда мебошанд).

Ҳал. Дискриминанти муодилаи додашуда $D = b^2 - 4ac = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 8 = 9 + 128 > 0$ мебошад, пас, муодила ду решаи ҳақиқии гуногуни x_1 ва x_2 -ро дорад.

Дар асоси теоремаи Виет

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 + x_2 = \frac{3}{4};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{8}{4} = -2.$$

мебошанд. Он гоҳ:

$$\text{а) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{3}{4}}{-2} = -\frac{3}{8};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2(-2) = \frac{9}{16} + 4 = \\ &= \frac{9+64}{16} = \frac{73}{16}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \times \\ &\times (x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot (-2) \right) = \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{9}{16} + 6 \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{9+96}{16} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{105}{16} = \frac{315}{64}. \end{aligned}$$

Мисоли 9. Аз рӯи решаҳои додашудаи $x_1 = 1$ ва $x_2 = 4$, муодилаи квадратии ислоҳкардашударо тартиб диҳед.

Ҳал. Барои тартиб додани муодилаи квадратӣ аз формулаҳои теоремаи Виет

$$x_1 + x_2 = -p \Rightarrow p = -(x_1 + x_2);$$

$$x_1 \cdot x_2 = q \Rightarrow q = x_1 \cdot x_2$$

истифода мебарем. Азбаски, $x_1 = 1$ ва $x_2 = 4$ мебошад, пас,
 $p = -(x_1 + x_2) = -(1 + 4) = -5$, $q = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 4 = 4$.

Он гоҳ дар асоси қиматҳои $p = -5$ ва $q = 4$ ифодаи муодилаи квадратии ислоҳшудаи (7), ҳосил мекунем:
 $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Мисоли 10. Қимати p ёфта шавад, агар суммаи квадратҳои решаҳои муодилаи квадратии $x^2 + px - 3 = 0$ ба 10 баробар бошад.

Ҳал. Адади p - и дар муодила буда, бо истифодаи теоремаи Виет ёфта мешавад: $x_1 + x_2 = -p$ ва $x_1 \cdot x_2 = q$ Мувофиқи шарти масъала $x_1^2 + x_2^2 = 10$ ва $q = x_1 \cdot x_2 = -3$ аст, пас

$$x_1^2 + x_2^2 = 10;$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 10$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10;$$

$$(-p)^2 - 2 \cdot (-3) = 10;$$

$$p^2 + 6 = 10;$$

$$p^2 = 10 - 6 \text{ ё } p^2 = 4.$$

Аз ин ҷо, $|p| = 2$ ё ки $p_1 = -2$ ва $p_2 = 2$ мешавад.

§4. Ба зарбкунандаҳо ҷудо намудани сеузваи квадратӣ

1. Бисёрузваи дараҷаи дуум сеузваи квадратӣ номида мешавад. Сеузваи квадратии зеринро дида мебароем:

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Дар аввал сеузваи квадратиро ба нол баробар карда, решаҳои муайян мекунем. Бигзор дискриминанти муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, $D = b^2 - 4ac > 0$ бошад, он гоҳ муодила ду решаҳои ҳақиқии гуногуни x_1 ва x_2 - ро дорад, ки дар асоси теоремаи Виет

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ ва } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ мебошад.}$$

Аз теоремаи Виет истифода бурда, дар сеузваи квадратии $ax^2 + bx + c$ тағдилдиҳиҳоро иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1x_2\right) = \\ &= a\left(x^2 - (x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1x_2)\right) = \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Теорема. Агар x_1 ва x_2 - решаҳои сеузваи квадратии $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ бошад, он гоҳ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (a \neq 0) \quad (10)$$

мешавад.

Баробарии (10)- ро формулаи ба ҳамзарбҳои хаттӣ ҷудо кардани сеузваи квадратӣ меноманд.

2. Намуди умумии муодилаи алгебравиро дида мебароем. Муодилаи намуди

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (11)$$

муодилаи алгебравии дараҷаи n - ум номида мешавад.

Тарафи чапи муодилаи (11) нисбат ба x бисёрузваи дараҷаи n -ум мебошад.

Ҳангоми $n=1$ будан, муодилаи (11) ба муодилаи хаттии $a_0x + a_1 = 0$ мубаддал мегардад.

Ҳангоми $n=2$ будан, муодилаи (11) ба муодилаи квадратии $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ табдил меёбад. Мо бо тарзҳои ҳалли ин муодилаҳо дар §1 шинос будем.

Агар дар муодилаи (11) $n > 2$ бошад, он гоҳ ҳалли ин гуна муодилаҳо хеле мураккаб мешаванд.

Дар ҳолати хусусӣ, ин гуна муодилаҳоро бо ёрии ба зарбкунандаҳо чудо кардан, ё ки бо воситаи дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал мекунам.

Ҳангоми $n \geq 5$ будан, формулаҳои дар ҳолати умумӣ ифодакунандаи решаҳои муодилаи (11) аз рӯи коэффитсиентҳо мавҷуд нестанд.

Мисоли 11. Ифодаи $\frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4}$ -ро сода кунед.

Ҳал. Дискриминанти сеузваи квадратии $3x^2 - 7x + 2$ $D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25 > 0$ мебошад, бинобар он муодилаи квадратии $3x^2 - 7x + 2 = 0$ ду решаҳои ҳақиқии гуногуни x_1 ва x_2 -ро дорад. Решаҳои муодиларо бо формулаи (3) меёбем:

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Он гоҳ дар асоси формулаи (10) навишта метавонем:

$$3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}\right)$$

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 2) = (3x - 1)(x - 2).$$

$$\text{Аз ин ҷо: } \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(3x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{3x - 1}{x + 2}, (x \neq -2).$$

Мисоли 12. Бигузур $x=3$ яке аз решаҳои сеузван $3x^2 - 5x + q$ бошад. Адади q -ро ёфта, сеузван квадратиро ба зарбкунандаҳо чудо мекунем.

Ҳал. Аз сабаби он ки $x=3$ яке аз решаҳои сеузван $3x^2 - 5x + q = 0$ мебошад, бинобар он $x=3$ -ро ба он гузошта, ҳосил мекунем:

$$3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + q = 0 \Rightarrow 27 - 15 + q = 0 \Rightarrow q = -12.$$

Пас, дар асоси теоремаи Виет

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{3} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{12}{3} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -4.$$

Агар $x_1 = 3$ бошад, он гоҳ $x_2 = -\frac{4}{3}$ мешавад, чунки

$$3 \cdot x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} \text{ аст.}$$

Аз киматҳои $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{4}{3}$ ва формулаи (10) истифода бурда, сеузван квадратии $3x^2 - 5x - 12$ -ро ба ҳамзарбҳо чудо мекунем:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x - 12 &= 3(x-3)\left(x + \frac{4}{3}\right) = \\ &= (x-3)\left(3 \cdot x + 3 \cdot \frac{4}{3}\right) = (x-3)(3x+4). \end{aligned}$$

Мисоли 13. Муодилаи $x^3 + 2x - 12 = 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодиларо бо тарзи ба ҳамзарбҳо чудо кардан ҳал мекунем:

$$x^3 + 2x - 12 = 0;$$

$$x^3 - 8 + 2x - 4 = 0;$$

$$(x^3 - 8) + 2(x - 2) = 0;$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 2(x - 2) = 0;$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 2) = 0;$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки

$x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 6) = 0$ мебошад. Он гоҳ аз $x-2=0$, $x^2 + 2x + 6 \neq 0$ мебарояд, ки $x_1 = 2$ ва аз $(x-2) \neq 0$, $x^2 + 2x + 6 = 0$ хулоса мебарояд, ки муодилаи квадратии $x^2 + 2x + 6 = 0$ дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад, чунки дискриминанташ хурд аз нол мебошад: $D < 0$. Инак, муодилаи $x^3 + 2x - 12 = 0$ якто ҳалли ҳақиқии $x = 2$ -ро доштааст.

Мисоли 14. Муодилаи $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар тарафи чапи муодилаи додашуда қоидаи ба квадрати пурра ҷудокуниро татбиқ намуда, муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3;$$

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} - 2x \cdot \frac{x}{x+1} + 2x \cdot \frac{x}{x+1} = 3;$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2} + 2x \cdot \frac{x}{x+1} = 3;$$

$$\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} - 3 = 0;$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2x \cdot \frac{x}{x+1} - 3 = 0.$$

Муодилаи ҳосил кардашударо бо тарзи дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал мекунем. Дар ин ҷо $\frac{x^2}{x+1} = t$ ишора карда, муодилаи квадратии $t^2 + 2t - 3 = 0$ -ро ҳосил мекунем, ки ду решаҳои ҳақиқии гуногуни $t_1 = -3$ ва $t_2 = 1$ -ро дорад, чунки дискриминанти муодилаи квадратӣ $D > 0$ мебошад. Он гоҳ қиматҳои t_1 ва t_2 -ро ба муодилаи $\frac{x^2}{x+1} = t$ гузошта, муодилаҳои $\frac{x^2}{x+1} = -3$ ва $\frac{x^2}{x+1} = 1$ -ро ҳосил мекунем. Ҳалҳои ин муодилаҳоро меорем:

$$a) \frac{x^2}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+1) \neq 0, x^2 - x - 1 = 0.$$

Аз сабаби он ки дискриминанти муодилаи квадратии $x^2 - x - 1 = 0$, $D > 0$ аст, пас муодила ду решаҳои ҳақиқии гуногунро дорад. Решаҳои муодилаи $x^2 - x - 1 = 0$ чунинанд:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ва } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$б) \frac{x^2}{x+1} = -3; \frac{x^2}{x+1} + 3 = 0; \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} = 0; \\ x+1 \neq 0, x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Аз сабаби он ки дискриминанти муодилаи квадратии $x^2 + 3x + 3 = 0$, $D < 0$ мебошад, бинобар он муодилаи $x^2 + 3x + 3 = 0$ дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад.

Инак, муодилаи матлуб решаҳои $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ва $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ро доштааст.

§5. Муодилаи биквадратӣ

Муодилаи намуди

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0) \quad (12)$$

-ро муодилаи биквадратӣ меноманд.

Муодилаи биквадратии (12) бо тарзи дохил кардани тағйирёбандаи нав ба яке аз намудҳои муодилаҳои квадратӣ оварда, ҳал карда мешавад.

Ду тарзи ба муодилаи квадратӣ овардани муодилаи (12)-ро хотиррасон мекунем.

Тарзи якум. Бузургии x^2 -ро бо y ишора карда, нисбат ба y муодилаи квадратии $ay^2 + by + c = 0$ -ро ҳосил мекунем, ки ҳангоми дискриминанташ $D \geq 0$ будан, решаҳои аз рӯи формулаҳои

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ ва } y_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad (13)$$

ёфта мешаванд. Қиматҳои ёфташударо ба $x^2 = y$ гузошта, решаҳои муодилаи $x^2 = y$ - ро меёбем, ки онҳо решаҳои муодилаи биквадрати $ax^4 + bx^2 + c = 0$ мешаванд.

Тарзи дуюм. Бигузор муодилаи биквадрати $x^4 + px^2 + q = 0$ ($p \neq 0, q \neq 0$) дода шуда бошад. Он гоҳ, аввал ду тарафи муодиларо ба $x^2 \neq 0$ тақсим мекунем ва баъд тағйирёбандии навро дохил карда, муодиларо ба муодилаи квадратӣ меоварем.

$$x^4 + px^2 + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + p + \frac{q}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{q}{x^2} + p = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{q} + \frac{q}{x^2} - 2\sqrt{q} + p = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\sqrt{q}}{x}\right)^2 - 2\sqrt{q} + p = 0.$$

$$\text{Яъне, } x^4 + px^2 + q = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\sqrt{q}}{x}\right)^2 - 2\sqrt{q} + p = 0.$$

Он гоҳ, $x + \frac{\sqrt{q}}{x}$ - ро бо y ишорат карда, нисбат ба y муодилаи квадратии $y^2 - 2\sqrt{q}y + p = 0$ - ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш дар §2 оварда шудааст.

Мисоли 15. Муодилаи $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Тарзи якум. Барои ҳал кардани муодила аз гузориши $x^2 = y$ истифода бурда, муодиларо ба муодилаи квадратии $y^2 - 13y + 36 = 0$ табдил медиҳем. Азбаски он дискриминанти муодила

$$D = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 > 0$$

аст, пас муодила ду решаи ҳақиқии гуногунро дорад. Решаҳои муодиларо аз рӯи формулаи (13) меёбем:

$$y_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$y_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Акнун қиматҳои $y_1 = 4$ ва $y_2 = 9$ -ро ба $x^2 = y$ гузошта, решаҳои муодилаи $x^2 = y$ -ро меёбем:

$$x^2 = y_1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 2.$$

$$x^2 = y_2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x_3 = -3; x_4 = 3.$$

Инак, $x_1 = -2; x_2 = 2; x_3 = -3; x_4 = 3$ ҳаҷҳои муодилаи биквадратии додашуда мебошанд.

Тарзи дуюм. Ду тарафи муодилаи матлубро ба $x^2 \neq 0$ тақсим карда, муодиларо дар намуди муодилаи зерин менависем:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} - 13 = 0.$$

Муодилаи охиرونро бо тарзи ба квадрати пуррачудоқунӣ ба муодилаи квадратӣ табдил медиҳем:

$$x^2 + \frac{36}{x^2} - 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12 + \frac{36}{x^2} - 12 - 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12 - 13 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 25 = 0.$$

Дар муодилаи охирон $x + \frac{6}{x}$ -ро бо y ишорат карда, нисбат, y муодилаи квадратии $y^2 - 25 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Аз муодилаи охирон $y_1 = -5$ ва $y_2 = 5$ -ро ҳосил мекунем. Он гоҳ қиматҳои $y_1 = -5$ ва $y_2 = 5$ -ро пайдарпай ба $x + \frac{6}{x} = y$ гузошта, решаҳои муодилаҳои $x + \frac{6}{x} = -5$ ва $x + \frac{6}{x} = 5$ -ро меёбем.

$$x + \frac{6}{x} = -5 \Leftrightarrow x + \frac{6}{x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 6}{x} = 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

$$(x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -2.$$

$$x + \frac{6}{x} = 5 \Leftrightarrow x + \frac{6}{x} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x} = 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x \neq 0, (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_3 = 2; x_4 = 3.$$

Инак, $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$ ҳалҳои муодилаи биквадрати $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ мебошанд.

МАШҚҲО

1. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2 + 5x + 6}$;

б) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = 0$;

в) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$;

г) $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

2. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\frac{x^2 + 6x - 91}{x^2 + 8x - 105}$; б) $\frac{a^2 + 9ab + 14b^2}{a^2 + ab - 2b^2}$;

в) $\frac{6c^2 + 11c + 3}{3 + 5c - 12c^2}$.

3. Муодилаҳои биквадрати ҳал намоед:

а) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$; б) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$;

в) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

4. Бигузор $x = 2$ яке аз решаҳои муодилаи квадратии $4x^2 - 14x + q = 0$ бошад. Қимати q -ро ёфта, баъд тарафи чапи онро ба зарбкунандаҳои хаттӣ ҷудо намоед.

5. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $(x^2 - 5x)^2 - 30(x^2 - 5x) - 216 = 0$;

б) $x^3 + 27 = 0$;

в) $x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 2) + 1 = 0$;

г) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 840$;

ғ) $x^4 - 81 = 0$;

д) $x^6 - 64 = 0$;

е) $x^4 + 4 = 0$;

ё) $x^3 + x - 2 = 0$;

ж) $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2$;

з) $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2,9$.

БОБИ VI СИСТЕМАИ МУОДИЛАҶО

§1. Муодилаи хаттии дутағйирёбандадор

Агар a, b, c ададҳои дилхоҳ, x ва y тағйирёбандаҳо бошанд, он гоҳ муодилаи

$$ax + by = c \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0) \quad (1)$$

-ро муодилаи хаттии дутағйирёбандадор меноманд.

Таърифи 1. *Ҷуфти қиматҳои тағйирёбандаҳо $(x; y)$, ки муодилаи дутағйирёбандадорро ба баробарӣ табдил медиҳад, ҳалли муодила номида мешавад.*

Масалан, муодилаи $3x - 4y = 2$, муодилаи дутағйирёбандаи x ва y мебошад. Нуқтаҳои $(-2; -2)$, $(0; -\frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}; 0)$ ва $(2; 1)$ муодилаи $3x - 4y = 2$ -ро қонеъ мекунонанд, лекин $(0; 1)$ онро қонеъ намекунонад. Бинобар он дар асоси таърифи 1 ҳар яке аз ҷуфтҳои $(-2; -2)$, $(0; -\frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}; 0)$ ва $(2; 1)$ ҳалли муодила ҳастанд, аммо $(0; 1)$ ҳал шуда наметавонад.

Муодилаи дараҷаи якуми дутағйирёбандадор ҳалли бисёр дорад. Аз сабаби он, ки

$$ax + by = c \Leftrightarrow by = c - ax \Rightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$$

мебошад, маҷмӯи ҳалҳои муодилаи $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ ($b \neq 0$) бо маҷмӯи ҳалҳои муодилаи $ax + by = c$ яхела мебошад. Чӣ хеле, ки дар боби V кайд кардем, муодилаҳо фақат ҳамон вақт баробарқувва номида мешаванд, ки агар маҷмӯи ҳалҳои онҳо аиниятан яхела бошанд. Масалан, муодилаҳои $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ ва $ax + by = c$ ($b \neq 0$) баробарқувваанд.

Аз муодилаи $ax + by = c$ ($b \neq 0$) хосиятҳои зерин бармеояд: агар $a \neq 0, c \neq 0$ бошад, он гоҳ,

$$ax + by = c \Leftrightarrow by = c - ax \Rightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x;$$

агар $a \neq 0, c = 0$ бошад, он гоҳ,

$$ax + by = 0 \Leftrightarrow by = -ax \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x;$$

агар $a = 0$, $c \neq 0$ бошад, он гоҳ, $by = c$ ё ки $y = \frac{c}{b}$ мешавад.

§2. Мафҳуми системаи муодилаҳо ва ҳалҳои он

Бигуздор ёфтани буриши маҷмуи ҳалҳои муодилаҳои дутағйирёбандадори $2x + y = 3$ ва $2x - y = 1$ талаб карда шавад.

Барои буриши маҷмуи ҳалҳои ин ду муодиларо ёфтан, мо бояд ин ду муодилаҳоро ҳамчоя (системаро) ҳал кунем. Системаи муодилаҳоро бо ёрии қавси фигуравӣ менависанд, масалан:

$$1. \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - y = 1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - 2 = 0, \\ x^2 + x + 6 = 0. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + y = z, \\ 3x - y = 3z. \end{cases}$$

Дар ин ҷо, системаи (1) системаи ду муодилаи дутағйирёбандадор номида мешавад, системаи (2) бошад, системаи ду муодилаи яктағйирёбандадор номида мешавад ва дар охир системаи (3) системаи ду муодилаи сетағйирёбандадор ном дорад. Ҳал кардани системаҳо ин ёфтани маҷмуи ҳалҳои он мебошад.

Таърифи 2. *Ҷуфти қиматҳои тағйирёбандаҳо, ки ҳар як муодилаи системаро ба баробарӣ табдил медиҳад, ҳалли системаи дутағйирёбандадор номида мешавад.*

Масалан, барои системаи (1) ҷуфти қиматҳои тағйирёбандаҳо $(1; 1)$ ҳал шуда метавонад, чунки ҳар як муодилаи системаи (1)-ро ба баробарӣ табдил медиҳад.

Таърифи 3. *Ду системаи муодилаҳо баробарқувва номида мешаванд, агар ҳаргуна ҳалли як система ҳалли системаи дуюм бошад ва баръакс.*

Агар ҳар ду система ҳал надошта бошанд, онҳоро низ баробарқувва номидан мумкин аст.

§3. Системаи ду муодилаи хаттии дутағйирёбандадор

Ҳар гуна системаи ду муодилаҳои хаттии дараҷаи якуми дутағйирёбандадорро дар намуни

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ - ададҳои додашуда, x ва y тағйирёбандаҳои мебошанд.

Баъзе шаклдигаркуниҳоро, ки пас аз иҷро намудани онҳо системаи нави ҳосилшуда ба системаи додашуда баробарқувва мешавад, дида мебароем. Ин шаклдигаркуниҳоро дар асоси қоидаҳои зерин гузаронидан мумкин аст:

1. Яке аз муодилаҳои системаро ба муодилаи ба он баробарқувва иваз кардан мумкин аст. **Масалан**, системаҳои

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 2x + y = 14. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x - 2y = 2, \\ 4x + 2y = 28. \end{cases}$$

баробарқувва мебошанд, чунки муодилаи дуюми системаи якум бо муодилаи дуюми системаи дуюм баробарқувва мебошад.

2. Ҳар яке аз муодилаҳои системаро бо ҳосили ҷамъ ё бо фарқи муодилаҳои додашуда (муодилаи дигарро бетағйирот нигоҳ дошта) иваз кардан мумкин аст. **Масалан**, системаҳои

$$\begin{cases} 5x - 6y = 3, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 14x = 42, \\ 5x - 6y = 3. \end{cases}$$

баробарқувва мебошад, чунки муодилаи якуми системаи дуюм аз ҳосили ҷамъи муодилаҳои системаи якум ва муодилаи дуюми системаи дуюм (муодилаи якуми системаи якум) ҳосил шудааст.

3. Ягон тағйирёбандан як муодилаи системаро бо тағйирёбандан дигар ифода карда, онро ба муодилаи дуюм гузоштан мумкин аст. Муодилаи нав бо муодилаи якум (ё дуюм) якҷоя системаро ташкил медиҳад, ки бо системаи додашуда баробарқувва мебошад. **Масалан**, системаҳои

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 2x - y = 1. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 3x + 4(2x - 1) = 7, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

баробарқувва мебошад (дар муодилаи якум y бо ифодаи аз муодилаи дуюм, ки нисбат ба x ёфта шудааст, иваз карда шудааст).

§4. Тарзҳои гуногуни ҳалкунии системаи муодилаҳо

Системаи муодилаҳоро бо тарзҳои гуногун ҳал кардан мумкин аст. Дар ин ҷо системаи муодилаҳоро бо тарзҳои ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ), гузориш ва графикӣ нишон медиҳем:

I. Тарзи ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ). Системаи ёфтани ҳал бо тарзи ҷамъкунии (тарҳкунии) системаи муодилаҳо чунин аст:

а) аввал модули коэффитсиентҳои яке аз тағйирёбандаҳоро якхела кардан лозим аст;

б) бо тарзи аъзо бо аъзо ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ) ҳосил кардани муодилае, ки як тағйирёбанда дорад;

в) ёфтани он тағйирёбанда;

г) қимати ёфташударо ба яке аз муодилаҳои система гузошта, тағйирёбанди дигар ёфта мешавад.

Мисоли 1. Бо тарзи ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ) системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$1. \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - 5y = -3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 2y - 3x = 5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}, \\ 2\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{13}{6}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 0,3x - 0,75y = 1,05, \\ 2,5x + 0,4y = 2,1. \end{cases}$$

Ҳал. 1. $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - 5y = -3; \end{cases} \begin{cases} 6x + 4y = 10, \\ -6x + 15y = 9; \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 10, \\ 6x + 4y - 6x + 15y = 10 + 9; \end{cases} \begin{cases} 6x + 4y = 10, \\ 19y = 19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} 3x + 2 \cdot 1 = 5, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} 3x = 3, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ҷавоб: (1; 1).

$$2. \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 2y - 3x = 5; \end{cases} \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 6y = 6; \end{cases} \begin{cases} 3x + 4 \cdot 1 = 1, \\ y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = -3, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = 1; \end{cases}$$

Ҷавоб: (-1; 1).

$$3. \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}, \\ 2\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{13}{6}; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}, \\ \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{13}{6}; \end{cases} \begin{cases} \frac{5x}{2} + \frac{5y}{3} = \frac{25}{6}, \\ \frac{5x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{13}{6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} + \frac{5y}{3} = \frac{25}{6}, \\ \frac{5x}{2} + \frac{5y}{3} - \left(\frac{5x}{2} - \frac{y}{3}\right) = \frac{25}{6} - \frac{13}{6}; \end{cases} \begin{cases} \frac{5x}{2} + \frac{5y}{3} = \frac{25}{6}, \\ 2y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{3}{6}, \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ҷавоб: (1; 1)

$$4. \begin{cases} 0,3x - 0,75y = 1,05, \\ 2,5x + 0,4y = 2,1; \end{cases} \begin{cases} 0,12x - 0,3y = 0,42, \\ 1,875x + 0,4y = 2,1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,995x = 1,995, \\ 1,875x + 0,4y = 2,1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ 2,5x + 0,4y = 2,1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ 2,5 \cdot 1 + 0,4y = 2,1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ 0,4y = 2,1 - 2,5; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ 0,4y = -0,4; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ҷавоб: (1; -1)

II. Тарзи гузориш. Схемаи ёфтани ҳал бо тарзи гузориш дар системаи муодилаҳо чунин аст:

а) дар яке аз муодилаҳои система, яке аз тағйирёбандаро нисбат ба дигараш ифода кардан;

б) ифодаи ёфташударо ба муодилаи дигари ҳамин система гузошта, муодилаи яктағйирёбандадорро ҳосил кардан;

в) муодилаи яктағйирёбандадорро ҳал карда, номаълумро ёфтан;

г) қимати ёфташудани номаълумро ба ифодаи ёфташудани пункт (а) гузошта, қимати тағйирёбандаи дуюмро ёфтан.

Мисоли 2. Бо тарзи гузориш ҳал кардани системаҳои зеринро нишон медиҳем:

$$1. \begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 2x + y = 3. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{7}{6}, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 1,5x + 0,3y = 1,2, \\ 2x + y = 1. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Ҳал. 1. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 2x+y=3; \end{cases} \begin{cases} 3x-2y=1, \\ y=3-2x; \end{cases} \begin{cases} 3x-2(3-2x)=1, \\ y=3-2x; \end{cases}$
 $\begin{cases} 3x-6+4x=1, \\ y=3-2x; \end{cases} \begin{cases} 7x=7, \\ y=3-2x; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=3-2 \cdot 1; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

Ҷавоб: (1; 1).

2. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{7}{6}, \\ x-y=0; \end{cases} \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{7}{6}, \\ y=x; \end{cases} \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{7}{6}, \\ y=x; \end{cases}$
 $\begin{cases} 9x-2x=7, \\ y=x; \end{cases} \begin{cases} 7x=7, \\ y=x; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

Ҷавоб: (1; 1).

3. $\begin{cases} 1,5x+0,3y=1,2, \\ 2x+y=1; \end{cases} \begin{cases} 1,5x+0,3y=1,2, \\ y=1-2x; \end{cases}$
 $\begin{cases} 1,5x+0,3(1-2x)=1,2, \\ y=1-2x; \end{cases} \begin{cases} 1,5x+0,3-0,6x=1,2, \\ y=1-2x; \end{cases}$
 $\begin{cases} 0,9x=0,9, \\ y=1-2x; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=1-2x; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=1-2 \cdot 1; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$

Ҷавоб: (1; -1).

4. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x-y=1; \end{cases} \begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ y=x-1; \end{cases}$
 $\begin{cases} x^2-x(x-1)+(x-1)^2=7, \\ y=x-1; \end{cases} \begin{cases} x^2-x^2+x+x^2-2x+1=7, \\ y=x-1; \end{cases}$
 $\begin{cases} x^2-x-6=0, \\ y=x-1; \end{cases} \begin{cases} x^2+2x-3x-6=0, \\ y=x-1; \end{cases}$
 $\begin{cases} x(x+2)+3(x+2)=0, \\ y=x-1; \end{cases} \begin{cases} (x+2)(x+3)=0, \\ y=x-1. \end{cases}$

Системаи муодилаҳои ҳосилшуда, ба ду системаи муодилаҳои зерин баробар мешавад:

$$\begin{cases} x+2=0, \\ y=x-1. \end{cases} \text{ ё ки } \begin{cases} x+3=0, \\ y=x-1. \end{cases}$$

Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

1. $\begin{cases} x+2=0, \\ y=x-1; \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=x-1; \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-2-1; \end{cases} \begin{cases} x=-2, \\ y=-3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+3=0, \\ y=x-1; \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ y=x-1; \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ y=-3-1; \end{cases} \begin{cases} x=-3, \\ y=-4. \end{cases}$

Ҷавоб: $(-2; -3), (-3; -4)$.

III. Тарзи графикӣ. Системаи муодилаҳои хаттии дутағйирёбандаеро дида мебароем, ки дар ҳар як муодилаи он ақаллан яке аз коэффисентҳо ғайринолӣ аст. Ҳалли графикии чунин системаҳо аз ёфтани координатаҳои нуқтаҳои умумии ду хати рост иборат аст.

Тарзи графикии ҳалли системаи муодилаҳо чунин аст:

- а) графикии ҳар як муодилаи системаро месозем;
- б) координатаҳои нуқтаҳои буриши хатҳои рости сохтешударо меёбем;
- в) координатаҳои нуқтаи буриши хатҳои рост ҳалли системаи муодилаҳо мебошанд.

1. Ҳангоми сохтани хатҳои рост мумкин аст, ки хатҳои рости сохтешуда ҳамдигарро дар як нуқта буранд, он гоҳ системаи муодилаҳо ҳалли ягона дорад. Дар ин ҳолат координатаҳои нуқтаи буриши хатҳои рост ҳалли системаи муодилаҳои додашуда мебошад.

2. Ҳангоми сохтани хатҳои рост мумкин аст, ки хатҳои рости сохтешуда ҳамчоя шаванд. Дар ин ҳолат системаи муодилаҳо ҳалли беохир дорад.

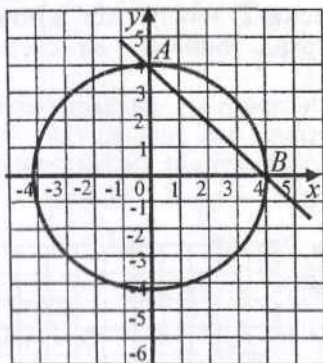
3. Ҳангоми сохтани хатҳои рост мумкин аст, ки хатҳои рости сохтешуда параллел бошанд. Дар ин ҳолат системаи муодилаҳо ҳал надорад.

Мисоли 3. Ҳалли графикии системаи зеринро меорем.

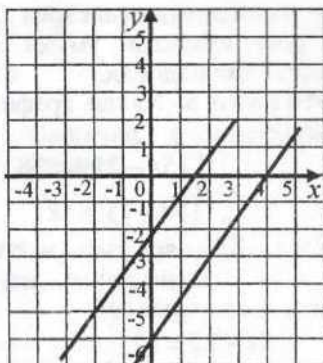
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Ҳал. Графикии ҳар яке аз ин муодилаҳоро месозем. Графикии муодилаи якум давраи марказаш дар ибтдои координатаҳо ҳобида, радиусаш ба 4 баробар мебошад. Графикии муодилаи

дуом бошад, хати рости AB аст, ки вай аз нуктаҳои $A(4; 0)$ ва $B(0; 4)$ мегузарад. Пас, координатаҳои нуктаҳои буриши давра ва хати рости AB маҷмуи ҳалҳои муодилаи якум ва дуом мебошанд.



Расми 1



Расми 2

Агар ин ду муодила ҳалли умумӣ дошта бошанд, он гоҳ нуктаи ба ҳал мувофиқ буда, ҳам дар давра ва ҳам дар хати рости AB бояд ҷойгир бошад, яъне, давра ва хати рости AB нуктаҳои умумӣ (нуктаи буриш) доштанишон лозим аст. Аз нақшаи кашидашуда (нигаред ба расми 1) маълум аст, ки чунин нуктаи умумӣ (нуктаи буриши хатҳо) нуктаҳои A ва B мебошанд, ки координатаҳои онҳо $(x_1 = 4; y_1 = 0)$ ва $(x_2 = 0; y_2 = 4)$ мебошанд. Ин нуктаҳо ҳалҳои системаи ташкил медиҳанд.

Мисоли 4. Ҳалли графикии системаи зеринро меорем.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 6x - 4y = 11. \end{cases}$$

Ҳал. 1. Дар ҳар як муодила y -ро ба воситаи x ифода карда, пайдо мекунем:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, & \begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 6x - 4y = 11; \end{cases} & \begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 4y = 6x - 11; \end{cases} & \begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ y = 1,5x - 2,75. \end{cases} \end{cases}$$

2. Чи хеле, ки маълум аст, хатҳои рости $y = 1,5x - 6$ ва $y = 1,5x - 2,75$ коэффитсиентҳои кунҷии (коэффитсиентҳои назди

х) баробарро доранд, пас, ин хатҳои рост баъни худ параллеланд.

3. Хати рости $y = 1,5x - 6$ тири Oy -ро дар нуқтаи $(0; -6)$ ва хати рости $y = 1,5x - 2,75$ дар нуқтаи $(0; -2,75)$ мебурад. Аз расми кашидашуда (нигаред ба расми 2) маълум аст, ки ин ду хати рост нуқтаҳои умумӣ надоранд. Бинобар он системаи додашуда ҳал надорад.

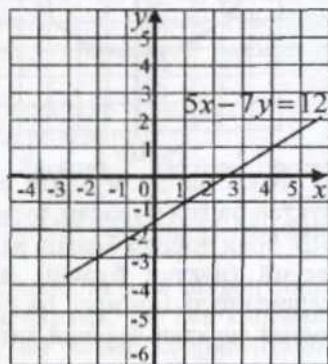
Мисоли 5. Ҳалли графики системаи муодилаҳои зеринро меорем:

$$\begin{cases} 15x - 21y = 36, \\ 5x - 7y = 12. \end{cases}$$

Ҳал. Ҳар як узви муодилаи якумро ба 3 тақсим карда, системаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 5x - 7y = 12, \\ 5x - 7y = 12. \end{cases}$$

Чӣ хеле, ки мебинем, системаи ҳосилшуда аз муодилаи якхела иборат аст. Агар графики ин муодилаҳоро созем, он гоҳ мебинем, ки графикҳои ин муодилаҳо ҳамчун мешаванд. Пас, координатаҳои нуқтаи дилхоҳи график ҳар як муодилаи системаро қаноат мекунонанд, яъне ҳалли система мешаванд. Бинобар он системаи додашуда ҳалҳои беҳад зиёд дорад.



Расми 3

IV. Ба ғайр аз системаҳои муодилаҳои дутағйирёбандадор боз системаҳои муодилаҳои сетағйирёбандадор низ мавҷуданд. Системаҳои муодилаҳои сетағйирёбандадор ҳам монанди системаҳои муодилаҳои дутағйирёбандадор бо тарзҳои ҷамъкунӣ, тарҳкунӣ ва ҳам гузориш ҳал карда мешаванд.

Акнун системаи се муодилаи сетағйирёбандадорро дида мебароем:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 6z = 16, \\ x + y + z = 3, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Ҳал. Системаи додашударо бо тарзҳои ҷамъкунӣ, тарҳкунӣ ва ҳам гузориш ҳал кардан мумкин мебошад. Мо яке аз роҳҳои ҳал кардани система ро меорем:

1. Муодилаи дуҷуми система ро бо (-3) зарб зада, баъд бо муодилаи якуми система ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 6z = 16, \\ -3x - 3y - 3z = -9, \\ z = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3z = 7, \\ z = 2y. \end{cases}$$

2. Муодилаи дар натиҷаи ҷамъкунӣ ҳосилшударо бо муодилаи сеҷуми система якҷоя ҳал мекунем:

$$\begin{cases} y + 3z = 7, \\ z = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3 \cdot 2y = 7, \\ z = 2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y = 7, \\ z = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ z = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

3. Қиматҳои $y = 1$ ва $z = 2$ -ро ба яке аз муодилаҳои системаи додашуда, ки x -ро дорад, гузошта қимати тағйирёбандаи дигарро меёбем, яъне, қиматҳои $y = 1$ ва $z = 2$ -ро ба муодилаи $x + y + z = 3$ гузошта, қимати x -ро меёбем:

$$x + 1 + 2 = 3 \Rightarrow x = 0.$$

Инак, қиматҳои $x = 0$; $y = 1$; $z = 2$ ҳалли система мебошанд.

Дар охир қайд мекунем, ки муодилаҳои дутағйирёбандадор, сетағйирёбандадор ва ҳоказои хаттиро муодилаҳои дараҷаи якуми дутағйирёбандадор, сетағйирёбандадор ва ҳоказо меноманд.

Мисоли 6. Ҳалли системаҳои зеринро меорем.

$$1. \begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 y^3 = 8, \\ x^3 y^2 = 4. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Ҳал. 1. Аз тарзи гузориш истифода бурда, система ро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x(x+1) + 3(x+1)^2 - 7x - 12(x+1) + 1 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x^2 - x + 3x^2 + 6x + 3 - 7x - 12x - 12 + 1 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 14x - 8 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 7x - 4 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+1)(x-4) = 0, \\ y = x + 1. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $\begin{cases} 2x+1=0, \\ y=x+1. \end{cases}$ ё ки $\begin{cases} x-4=0, \\ y=x+1 \end{cases}$

мешавад.

Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал карда, $x_1 = -\frac{1}{2}$,

$y_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 4$ ва $y_2 = 5$ -ро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $(-0,5; 0,5)$, $(4; 5)$.

2. Системаро бо роҳи аъзо ба аъзо зарбзани ҳал мекунем.

$$\begin{cases} x^2 y^3 = 8, \\ x^3 y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 y^3 \cdot x^3 y^2 = 8 \cdot 4, \\ x^3 y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} (xy)^5 = 2^5, \\ xy = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^3 y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^3 \cdot \frac{4}{x^2} = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ҷавоб: $(1; 2)$.

3. Системаи муодилаҳоро бо тарзи дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал мекунем. Гузориши $\frac{1}{x} = u$ ва $\frac{1}{y} = 9$

истифода бурда, системаро дар намуди зерин менависем:

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 + v^2 = 13; \end{cases} \begin{cases} u = 5 - v, \\ u^2 + v^2 = 13; \end{cases} \begin{cases} u = 5 - v, \\ (5 - v)^2 + v^2 = 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 5 - v, \\ 25 - 10v + v^2 + v^2 = 13; \end{cases} \begin{cases} u = 5 - v, \\ 2v^2 - 10v + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 5 - v, \\ v^2 - 5v + 6 = 0; \end{cases} \begin{cases} u = 5 - v, \\ v^2 - 2v - 3v + 6 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 5 - v, \\ v(v - 2) - 3(v - 2) = 0; \end{cases} \begin{cases} u = 5 - v, \\ (v - 2)(v - 3) = 0. \end{cases}$$

Аз ин ҷо: 1. $\begin{cases} u = 5 - v, \\ v - 2 = 0. \end{cases}$ ё ки 2. $\begin{cases} u = 5 - v, \\ v - 3 = 0. \end{cases}$

Аз системаи муодилаҳои якум: $u_1 = 3, v_1 = 2$ ва аз системаи муодилаҳои дуҷум $u_2 = 2, v_2 = 3$ -ро ҳосил мекунем.

Акнун ба тағйирёбандаҳои ибтидоӣ гузашта, қиматҳои x ва y -ро меёбем:

$$1. \begin{cases} u = 2, \\ v = 3; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{x} = 2, \\ \frac{1}{x} = 3; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u = 3, \\ v = 2; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{x} = 3, \\ \frac{1}{x} = 2; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ҷавоб: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

4. Муодилаи дуҷуми системаро бо 2 зарб зада, системаҳои баробарқувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2xy = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 10 + 6, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 10 - 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 16, \\ (x-y)^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = \pm 4, \\ x-y = \pm 3. \end{cases}$$

Аз системаи муодилаҳои ҳосилшуда чор системаҳои муодилаҳои ҳаттиро тартиб медиҳем:

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=3. \end{cases} & 2. \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-3. \end{cases} \\ 3. \begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=3. \end{cases} & 4. \begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=-3. \end{cases} \end{array}$$

Бо тарзи ҷамъкунии (тарҳкунии) алгебравӣ системаҳои муодилаҳои ҳосилшударо ҳал карда, мувофиқан 4-то ҳалҳои

$$x_1 = 3, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = 3, x_3 = -3, y_3 = -1, x_4 = -3, y_4 = -1$$

-ро меёбем, ки онҳо ҳалли системаи додашуда мебошанд.

Ҷавоб: $(3; 1), (1; 3), (-3; -1), (-1; -3)$.

МАШҚҶО

1. Системаи муодилаҳоро бо тарзи ҷамъкунии (тарҳкунии) ҳал кунед:

$$а) \begin{cases} 3x+4y=7, \\ y-3x+2=0. \end{cases} \quad б) \begin{cases} 4x+5y=14, \\ 3x-y=1. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 2y-x=1, \\ 3x-5y=1. \end{cases} \quad г) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

2. Системаи муодилаҳоро бо тарзи гузориш ҳал кунед:

$$\begin{array}{ll} а) \begin{cases} 4x+3y=6, \\ y+x=2. \end{cases} & б) \begin{cases} x+2y=11, \\ 5x-3y=3. \end{cases} \\ в) \begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 3x-4y=7. \end{cases} & г) \begin{cases} x:y=3:4, \\ (x-1):(y+2)=1:2. \end{cases} \\ г) \begin{cases} xy-3^0=0, \\ x+y=3\frac{1}{3}. \end{cases} & д) \begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x-y+4z=1, \\ -x+6y+z=5. \end{cases} \end{array}$$

БОБИ VII НОБАРОБАРИҲО

§1. Нобаробариҳои ададӣ ва хосиятҳои он

Таърифи 1. Ду адад, ки байни худ бо аломатҳои «>» (калон) ё «<» (хурд), ё ки бо аломатҳои «≥» (калон ё баробар) «≤» (хурд ё баробар) алоқаманданд, нобаробариҳоро ташкил медиҳад.

Масалан: $a > b$; $a < b$; $a \geq b$; $a \leq b$; $4 > 3$; $2 < 3$

мисолҳои нобаробариҳои ададӣ шуда метавонанд.

Нобаробариҳои $a > b$ ва $c < d$ нобаробариҳои муқобил ва нобаробариҳои $a < b$ ва $c < d$ ё $a > b$ ва $c > d$ нобаробариҳои якхела номида мешаванд.

Бигузор $a \in R$ ва $b \in R$ бошад. Он гоҳ барои ҳаргуна ду адади ҳақиқии a ва b фақат яке аз муносибатҳои $a = b$; $a < b$; $a > b$ ҷой дорад.

Нобаробариҳое, ки бо ёрии аломатҳои «>» ва «<» тартиб дода шудаанд, нобаробариҳои қатъӣ номида мешаванд.

Нобаробариҳое, ки бо ёрии аломатҳои «≥» ва «≤» тартиб дода шудаанд, нобаробариҳои ғайриқатъӣ номида мешаванд.

Масалан: $7 < 11$; $8 > 3$; $3 < 25$; $9 > 2$ мисолҳои нобаробариҳои қатъӣ ва $13 \geq 12$; $7 \geq 7$; $3 \leq 4$; $5 \leq 5$ мисолҳои нобаробариҳои ғайриқатъӣ шуда метавонанд.

Акнун хосиятҳои асосии нобаробариҳои ададиро номбар мекунем:

1. Агар $a > b$ бошад, $b < a$ аст ва баръакс, агар $a < b$ бошад, $b > a$ аст.

2. Агар $a > b$ ва $b > c$ бошад, он гоҳ $a > c$ аст.

Ин хосияти нобаробариҳоро муносибати транзитивии нобаробариҳо меноманд.

3. Агар $a > b$ бошад ва адади c чи хеле ки набошад, он гоҳ $a + c > b + c$ аст. Инак, агар ба ҳар ду қисми нобаробарии дуруст як ададро ҷамъ намоем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

4. Агар $a \in R$ ва $b \in R$ бошанд, он гоҳ:

а) аз $a - b > 0 \Rightarrow a > b$ ва $a - b < 0 \Rightarrow a < b$;

6) аз $a - b \geq 0 \Rightarrow a \geq b$ ва $a - b \leq 0 \Rightarrow a \leq b$.

Инак, агар ягон чамъшавандаро аз як қисми нобаробарии дуруст ба қисми дигараш бо аломати муқобил гузаронем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

5. Агар $a > b$ ва $c > 0$ бошад, он гоҳ $ac > bc$ аст ва агар $c < 0$ бошад, он гоҳ $ac < bc$ аст.

Инак, агар ҳар ду қисми нобаробарии дурустро ба як адади мусбат зарб занем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад. Агар ҳар ду қисми нобаробарии дурустро бо як адади манфӣ зарб намоем ва аломати нобаробарию ба муқобилаш иваз кунем, он гоҳ нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

Агар $-a > -b$ бошад, он гоҳ $a < b$ аст ва баръакс, агар $-a < -b$ бошад, он гоҳ $a > b$ аст.

Инак, агар аломати ҳар ду қисми нобаробарии дурустро ба муқобилаш иваз кунем ва аломати нобаробарию ҳам бо муқобилаш иваз намоем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

7. Агар $a > 0, b > 0$ ва $a > b$ бошад, он гоҳ барои ҳар гуна $n \in \mathbb{N}$ нобаробарии $a^n > b^n$ ҷой дорад.

8. Агар $a > 0, b > 0$ ва $a > b$ бошад, он гоҳ барои ҳар гуна $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) нобаробарии $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ҷой дорад.

Акнун якчанд мисолҳоро доир ба амалҳо бо нобаробариҳои ададӣ дида мебароем:

1. $15 > 9,$

$-3 < 2,$

$15 - (-3) > 9 - 2,$

$15 + 3 > 9 - 2,$

$18 > 7.$

3. $3 > -2,$

$+10 > -21,$

$3 + (-10) > -2 + (-21),$

$3 - 10 > -2 - 21,$

$-7 > -23.$

2. $-3 > -7,$

$5 < 9,$

$-3 - 5 > -7 - 9,$

$-8 > -16,$

4. $-12 > -19,$

$+3 > -17,$

$-12 + (-3) > -19 + (-17),$

$-12 - 3 > -19 - 17,$

$-15 > -36.$

$$5. \ 9 > 4,$$

$$\times \ 4 > 3,$$

$$\times \ -5 > -9,$$

$$\times \ -2 > -7,$$

$$\times \ 5 > 3,$$

$$\times \ -2 > -5,$$

$$9 \cdot 4 > 4 \cdot 3,$$

$$36 > 12.$$

$$-5 \cdot (-2) > -9 \cdot (-7),$$

$$10 < 63.$$

$$5 \cdot (-2) > 3 \cdot (-5),$$

$$-10 > -15.$$

§2. Нобаробариҳои хаттӣ ва ҳалҳои он

Таърифи 1. Ду адад ё ду ифодаи алгебравӣ, ки байни худ бо аломатҳои «<» ё «>», ё ки бо аломатҳои «≥» ё «≤» алоқаманданд, нобаробариҳоро таъкил медиҳанд.

Нобаробариҳои хаттӣ ва квадратии як тағйирёбандадор нобаробариҳои оддитарин мебошанд.

Таърифи 2. Нобаробариҳои намуди $ax > b$ ё $ax < b$ - ро, ки дар ин ҷо a ва b ададҳои дилхоҳанд, нобаробариҳои хаттӣ меноманд.

Намуди умумии нобаробариҳои хаттӣ яктағйирёбандадор чунин аст:

$$ax + b > 0 \ (a \neq 0)$$

Дар ин ҷо аломати $>$ шуда метавонад: «<» ё «>», «≥» ё «≤».

Барои муайяни ҳалли яке аз нобаробариҳои хаттӣ $ax + b > 0 \ (a \neq 0)$ -ро меорем:

$$1. \ ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Rightarrow x > -\frac{b}{a};$$

2. Агар $a > 0$ бошад, он гоҳ аз

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow x > -\frac{b}{a};$$

3. Агар $a < 0$ бошад, он гоҳ аз

$$ax + b > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \text{ мешавад.}$$

Мисоли 1. Ҳалли нобаробариҳои хаттӣ зеринро меорем.

$$1. \ 2x + 1 > 0; \quad 2. \ x - 12 > 3x + 1;$$

$$3. \ \frac{x-3}{5} + 2 > \frac{x-1}{10};$$

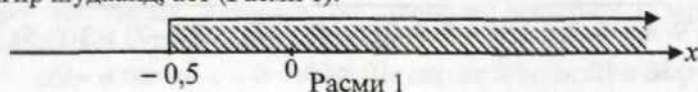
$$4. \ 2(x-1) + 1 > 3 - (1-2x);$$

$$5. \ 2(x+8) - 5x < 4 - 3x.$$

1. Ҳал. $2x + 1 > 0$; $2x > -1$. Аз ин ҷо, $x > -0,5$ мешавад.

Ҳалли ин нобаробарӣ маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ мебошанд, ки аз адади $-0,5$ калонанд: $(-0,5; +\infty)$. Маънои геометрияш

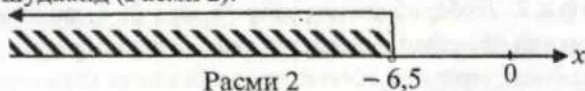
тамоми нуқтаҳои тири ададӣ, ки дар тарафи рости нуқтаи $-0,5$ ҷойгир шудаанд, аст (Расми 1).



Ҷавоб: $(-0,5; +\infty)$.

2. Ҳал. $x - 12 > 3x + 1$; $x - 3x > 12 + 1$; $-2x > 13$; $x < -6,5$

Ҳалли нобаробарии маҷмӯи маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ мебошанд, ки аз адади $-6,5$ хурданд. Маҷмӯи геометрияш тамоми нуқтаҳои тири ададӣ, ки дар тарафи чапи нуқтаи $-6,5$ ҷойгир шудаанд (Расми 2).



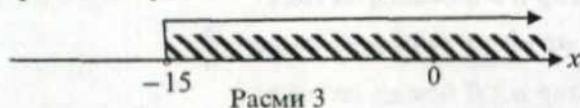
Ҷавоб: $(-\infty; -6,5)$.

3. Ҳал. $\frac{x-3}{5} + 2 > \frac{x-1}{10}$; $\frac{x-3+10}{5} > \frac{x-1}{10}$;

$$\frac{2(x+7)}{10} > \frac{x-1}{10}; \quad 2(x+7) > x-1; \quad 2x+14 > x-1;$$

$$2x - x > -1 - 14; \quad x > -15.$$

Маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ, ки аз адади -15 калонанд, ҳамаи нобаробарии додашуда мебошанд (Расми 3).



Ҷавоб: $(-15; +\infty)$.

4. Ҳал. $2(x-1)+1 > 3-(1-2x)$; $2x-2+1 > 3-1+2x$;

$$2x-2x > 3-1+2-1; \quad 0 \cdot x > 3.$$

Ин нобаробарӣ ҳақ надорад, чунки тарафи чапи он $0 \cdot x$ барои ҳар гуна x ба нол баробар мебошад, пас нобаробарии $0 > 3$ нодуруст аст. Инак, нобаробарӣ ҳақ надорад, яъне маҷмӯи ҳамаи он ҳолист.

Ҷавоб: $\emptyset$.

5. Ҳал. $2(x+8)-5x < 4-3x$; $2x+16-5x < 4-3x$;

$$-3x+16 < 4-3x; -3x+3x < 4-16; 0 \cdot x < -12.$$

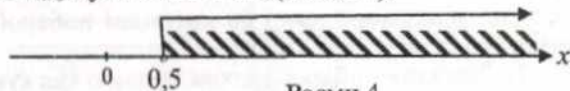
Нобаробарии $0 \cdot x < -12$ ҳал надорад, чунки барои ягон қимати x он ба баробарии дуруст табдил намеёбад. Пас, нобаробарии $2(x+8) - 5x < 4 - 3x$ ҳам ҳал надорад, яъне маҷмуи ҳалҳои он холист.

Ҷавоб: $\emptyset$.

Мисоли 2. Барои кадом қиматҳои x касри $\frac{2x-1}{3}$ мусбат аст?

Ҳал. Мувофиқи шарт $\frac{2x-1}{3} > 0; 2x-1 > 0; 2x > 1; x > \frac{1}{2}$.

Яъне, касри додашуда барои ҳамаи қиматҳои x , ки аз адади $\frac{1}{2}$ калонанд, мусбат мебошад (Расми 4).



Расми 4

Ҷавоб: $(0,5; +\infty)$.

§3. Системаи нобаробариҳои яктағйирёбандадор

Агар дар ягон масъала ёфтани маҷмуи ҳалҳои умумии ду ё якчанд нобаробариҳо талаб карда шавад, он гоҳ мегӯянд, ки системаи нобаробариҳоро ҳал кардан лозим аст.

Таърифи 1. Қимати тағйирёбандаро, ки дар вақти онро қабул кардан ҳар як нобаробарии система ба нобаробарии ададии дуруст табдил меёбад, ҳалли системаи нобаробариҳо меноманд.

Ҳангоми ҳалли системаи нобаробариҳо аз мафҳуми баробаркувва будани нобаробариҳо истифода мебаранд.

Баробаркувва будани ду нобаробариҳоро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисол. Нобаробариҳои $12x - 25 > 0$ ва $12x > 25$, ки нобаробариҳои дорои тағйирёбандаи x мебошанд, баробаркувва мешаванд. Инро исбот мекунем. Дар §2 омадааст, ки агар ягон ҷамъшавандаро аз як қисми нобаробарии дуруст ба қисми дигараш бо аломати муқобил гузаронем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад. Чӣ хеле, ки аз нобаробариҳои додашуда маълум аст, нобаробарии дуюм аз нобаробарии якум ҳангоми (-25) - ро аз як қисм ба қисми дигараш бо аломати муқобилаш гузаронидан ҳосил шудааст. Пас, нобаробарии дуюм натиҷаи нобаробарии

якум ва нобаробарии якум натиҷаи нобаробарии дуҷум мебошад, яъне, ин нобаробариҳо баробарқувваанд:

$$12x - 25 > 0 \text{ ё ки } 12x > 25.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки агар ҳар як ҳалли нобаробарии якум ҳалли нобаробарии дуҷум бошад, он гоҳ нобаробарии якум натиҷаи нобаробарии дуҷум аст. Баробарқуввагии нобаробариҳоро дар намуни умумӣ ин тавр баён кардан мумкин аст.

Фақат ҳамон нобаробариҳо баробарқувва мебошанд, ки агар маҷмӯи ҳалҳои он мувофиқ оянд.

Қайд. Нобаробариҳое, ки тағйирёбандаҳои яхела доранд аммо ҳал надоранд, низ баробарқувва ҳисобида мешаванд.

Акнун якчанд мисолҳоро доир ба системаи нобаробариҳои хаттии яктағйирёбандадор дида мебароем.

Мисоли 1. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4, \\ 5x + 3 > 8x + 21. \end{cases}$$

Ҳал. Ҳар як нобаробарию ба нобаробарии оддитарини ба он баробарқувва иваз карда, системаи нобаробариҳои ба системаи додашуда баробарқувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4, & \begin{cases} 2x - 3x > 4 - 1, \\ -x > 3, \\ x < -3, \end{cases} \\ 5x + 3 > 8x + 21; & \begin{cases} 5x - 8x > 21 - 3; \\ -3x > 18; \\ x < -6. \end{cases} \end{cases}$$

Фосилаи ададии $(-\infty; -3)$ маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии $x < -3$ ва фосилаи ададии $(-\infty; -6)$ маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии $x < -6$ мебошад.

Аз хати ростии ададӣ истифода бурда, нишон медиҳем, ки фосилаи ададии $(-\infty; -6)$ буриши фосилаҳои ададии $(-\infty; -3)$ ва $(-\infty; -6)$ мебошад (Расми 5).



Расми 5

Ҷавоб: $(-\infty; -6)$.

Мисоли 2. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1, \\ 2x + 3 < 18 - 3x. \end{cases}$$

Ҳал. а) Ҳар яке аз нобаробариҳои дар система додашударо ба нобаробариҳои содатарини ба он баробаркувва иваз карда, системаи баробаркувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1, \\ 2x + 3 < 18 - 3x; \end{cases} \begin{cases} 5x - 2x > 1 + 2, \\ 2x + 3x < 18 - 3; \end{cases} \begin{cases} 3x > 3, \\ 5x < 15; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x < 3. \end{cases}$$

б) Фосилаи ададии $(1; +\infty)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробариин $x > 1$ ва фосилаи ададии $(-\infty; 3)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробариин $x < 3$ мебошад.

в) Пас, фосилаи ададии $(1; 3)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробариин системаи додашуда мебошад (Расми 6).



Расми 6

Ҷавоб: $(1; 3)$.

Мисоли 3. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 7x - 14 < 0, \\ -5x < -35. \end{cases}$$

Ҳал. а) Ҳар як нобаробариҳои дар система додашударо ба нобаробариҳои содатарини ба он баробаркувва иваз карда, системаи баробаркувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 7x - 14 < 0, \\ -5x < -35; \end{cases} \begin{cases} 7x < 14, \\ 5x > 35; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ x > 7. \end{cases}$$

б) Аз ин ду нобаробарӣ бармеояд, ки фосилаи ададии $(-\infty; 2)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробариин $x < 2$ ва фосилаи ададии $(7; +\infty)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробариин $x > 7$ мебошад.

в) Пас, чӣ ҳеле, ки аз фосилаҳои ададии $(-\infty; 2)$ ва $(7; +\infty)$ маълум аст, буриши ин маҷмуъҳо ҳолист (Расми 7).



Расми 7

Ҷавоб: $\emptyset$.

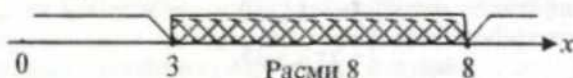
Мисоли 4. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0, \\ 5x - 15 \geq 0, \\ 1,7x - 13,6 \leq 0. \end{cases}$$

Ҳал. а) Ҳар як нобаробариҳои дар системаи нобаробариҳои додашударо ба нобаробариҳои соддатарини ба он баробарқувва иваз карда, системаи ба системаи додашуда баробарқувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0, \\ 5x - 15 \geq 0, \\ 1,7x - 13,6 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} 2x \geq 3, \\ 5x \geq 15, \\ 1,7x \leq 13,6; \end{cases} \begin{cases} x \geq 1,5, \\ x \geq 3, \\ x \leq 8. \end{cases}$$

б) Аз нобаробариҳои $x \geq 1,5$; $x \geq 3$ ва $x \leq 8$ маълум мешавад, ки фосилаи ададии $[3; 8]$ ҳалли системаи нобаробариҳои додашуда мебошад (Расми 8).



Ҷавоб: $[3; 8]$.

§4. Нобаробариҳои квадратии яктағйирёбандадор

Таърифи 1. Нобаробариҳои квадратӣ гуфта, нобаробариҳои намуди

$$ax^2 + bx + c \vee 0 \quad (a \neq 0) \quad (2)$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо рамзи $\vee$ яке аз аломатҳои « $<$ », « $>$ », « $\geq$ », « $\leq$ »-ро ифода мекунад.

Бигузор сеузвҷи квадратии зерин дода шуда бошад:

$$ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

Аз (3) квадрати пурра ҷудо карда, ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \\ &- a \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Инак,

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right], \quad (4)$$

дар ин ҷо $D = b^2 - 4ac$ дискриминанти сеузваи квадратӣ мебошад. Ҳолатҳои $D < 0$, $D > 0$ ва $D = 0$ -ро дида мебароем.

I. Агар $D < 0$ бошад, он гоҳ аз (4) бармеояд, ки аломати сеузва бо аломати адади a якхела аст, чунки барои ҳар гуна x ифодаи

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0 \quad \text{ва} \quad \left(-\frac{D}{4a^2} \right) > 0$$

мебошад. Аз ин ҷо:

а) Агар $a > 0$ бошад, он гоҳ, барои ҳар гуна x $ax^2 + bx + c > 0$ аст;

б) Агар $a < 0$ бошад, он гоҳ, барои ҳар гуна x $ax^2 + bx + c < 0$ аст.

Аз ин ҷо бармеояд, ки ҳангоми $D = b^2 - 4ac < 0$ будан, нобаробариҳои квадратии $ax^2 + bx + c > 0$ ва $ax^2 + bx + c \geq 0$ барои ҳар гуна $x \in (-\infty; +\infty)$ дурустанд, агар $a > 0$ бошад ва ҳал надоранд, агар $a < 0$ бошад.

Ҳамин тариқ, дар ҳолати $D = b^2 - 4ac < 0$ будан, нобаробариҳои квадратии $ax^2 + bx + c \leq 0$ ва $ax^2 + bx + c < 0$ ҳал надоранд.

II. Агар $D = 0$ бошад, он гоҳ аз баробарии (4) бармеояд, ки

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \quad (5)$$

мешавад.

а) нобаробарии $ax^2 + bx + c > 0$ ҳангоми $a > 0$ будан, дорои ҳалли $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$ буда, ҳангоми $a < 0$ будан, ҳал надорад.

б) нобаробарии $ax^2 + bx + c < 0$ ҳангоми $a < 0$ будан, дорон ҳалли $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ буда, ҳангоми $a > 0$ будан, ҳал надорад.

в) ҳангоми $a > 0$ будан, ҳалли нобаробарии $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x$ буда, ҳангоми $a < 0$ будан, ҳалли он нуқтаи $x = -\frac{b}{2a}$ мебошад.

г) ҳангоми $a < 0$ будан $\forall x$ ҳалли нобаробарии $ax^2 + bx + c \leq 0$ буда, ҳангоми $a > 0$ будан, $x = -\frac{b}{2a}$ мешавад.

III. Агар $D > 0$ бошад, он гоҳ, сеузви квадратиро дар намуни

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (6)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо x_1 ва x_2 решаҳои ҳақиқии сеузви квадратӣ мебошанд. Дар ин ҷо ҳам агар $a > 0$ ва $ax^2 + bx + c > 0$ бошад, он гоҳ, $x \notin [x_1; x_2]$ мешавад. Инчунин, агар $ax^2 + bx + c < 0$ ва $a < 0$ бошад, $x \in [x_1; x_2]$ мешавад.

Ба монанди ҳамин агар $ax^2 + bx + c > 0$ ва $a < 0$ бошад $x \in [x_1; x_2]$ шуда, $ax^2 + bx + c < 0$ ва агар $a > 0$ бошад, $x \notin [x_1; x_2]$ мешавад.

Акнун мисолҳоро доир ба нобаробариҳои квадратӣ муоина мекунем.

Мисоли I. Нобаробарии $x^2 - x - 6 > 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Дискриминанти муодилаи квадратии $x^2 - x - 6 = 0$ -ро ҳисоб мекунем:

$$D = b^2 - 4ac; D = 1 + 24; D = 25 > 0.$$

Азбаски $D > 0$ аст, пас дар асоси баробарии (6) ҳосил мекунем:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Ҳамин тавр, нобаробарии додашуда, намуди зеринро мегирад:

$$(x - 3)(x + 2) > 0.$$

Нобаробарии $(x-3)(x+2) > 0$ ба нобаробариҳои зерин баробарқувва мешавад:

$$\text{а) } \begin{cases} x-3 > 0, \\ x+2 > 0. \end{cases} \quad \text{ё ки} \quad \text{б) } \begin{cases} x-3 < 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$$

Системаи нобаробариҳоро ҳал карда, пайдо мекунем:

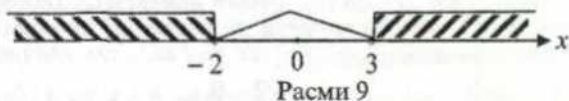
$$\text{а) } \begin{cases} x-3 > 0, \\ x+2 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x > -2. \end{cases}$$

Аз ин ҷо $x > 3$ мешавад.

$$\text{б) } \begin{cases} x-3 < 0, \\ x+2 < 0; \end{cases} \begin{cases} x < 3, \\ x < -2. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x < -2$ мешавад.

Аз қиматҳои ёфташуда, қиматҳои x , ки барояшон $x < -2$ ё $x > 3$ ҳастанд, ҳалҳои нобаробарии $x^2 - x - 6 > 0$ шуда метавонанд (Расми 9).



Ҷавоб: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $3x^2 - 4x + 5 < 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Решаҳои муодилаи квадрати $3x^2 - 4x + 5 = 0$ -ро меёбем.

$$D = 16 - 60; D = -44; D < 0.$$

Аз сабаби он, ки $a = 3 > 0$ аст, пас $3x^2 - 4x + 5$ фақат қиматҳои мусбатро қабул мекунад, бинобар ҳамин нобаробарӣ ҳал надорад.

Ҷавоб: $\emptyset$.

Мисоли 3. Нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 > 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. а) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

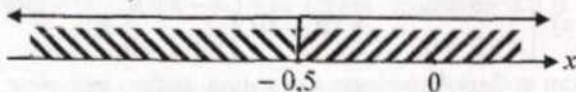
б) $D = 16 - 16; D = 0$.

в) $4x^2 + 4x + 1 > 0$ ё ки $(2x+1)^2 > 0$.

г) Аз ин ҷо мебарояд, ки фосилаи ададии $(-\infty; +\infty)$, $x \neq -0,5$ маҷмун ҳалҳои нобаробарии

$$4x^2 + 4x + 1 > 0 = (2x+1)^2 > 0$$

мебошад, пас ҳалли нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x \neq -0,5$ мешавад (Расми 10).



Расми 10

Ҷавоб: $x \neq -0,5$.

§5. Ҳалли нобаробариҳо. Методи интервалҳо

Мисоли 1. Нобаробарии $\frac{2x-1}{x+1} < 1$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. а) Нобаробарии додашударо ба тарикки зерин табдил медиҳем:

$$\frac{2x-1}{x+1} - 1 < 0; \quad \frac{2x-1-x-1}{x+1} < 0; \quad \frac{x-2}{x+1} < 0.$$

б) Қаср ҳамон вақт манфӣ мешавад, ки агар сурат ва махраҷаш аломатҳои гуногун дошта бошанд. Бинобар он нобаробарии ҳосилшуда ба маҷмӯи ду системаи нобаробариҳои зерин баробаркувва мебошад:

$$1) \begin{cases} x-2 > 0, \\ x+1 < 0. \end{cases} \quad \text{ва} \quad 2) \begin{cases} x-2 < 0, \\ x+1 > 0. \end{cases}$$

в) Системаҳои нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал карда, пайдо мекунем:

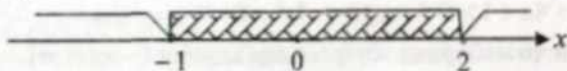
$$1) \begin{cases} x-2 > 0, \\ x+1 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x < -1. \end{cases}$$

Системаи нобаробариҳои охириро ҳал надорад.

$$2) \begin{cases} x-2 < 0, \\ x+1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > -1. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $-1 < x < 2$ мешавад.

Инак, нобаробарии матлуб дорои ҳалли $-1 < x < 2$ мебошад (Расми 11).



Расми 11

Ҷавоб: $(-1; 2)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $|2x - 5| \leq 7$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. а) Аз хосияти модули ададҳо истифода бурда, нобаробарии матлубро дар намуди зерин менависем:

$$-7 \leq 2x - 5 \leq 7.$$

б) $-7 + 5 \leq 2x \leq 7 + 5; -2 \leq 2x \leq 12; -1 \leq x \leq 6.$

в) Фосилаи ададии $[-1; 6]$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $|2x - 5| \leq 7$ мебошад (Расми 12).

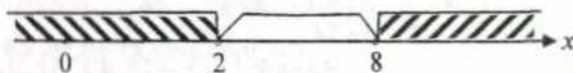


Расми 12

Ҷавоб: $[-1; 6]$

Мисоли 3. Нобаробарии $|5 - x| \geq 3$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз хосияти модули ададҳо истифода бурда, нобаробарии $|5 - x| \geq 3$ -ро ҳал мекунем. Азбаски $|5 - x| = |x - 5|$ аст, пас нобаробарии аввала ба нобаробарии $|x - 5| \geq 3$ баробарқувва аст. Он гоҳ аз $|x - 5| \geq 3$ бармеояд, ки $x - 5 \geq 3$ ё $x - 5 \leq -3$, ё ки $x \geq 8$ ва $x \leq 2$. Аз ин ду нобаробарӣ маълум аст, ки фосилаҳои ададии $(8; +\infty)$ ва $(-\infty; 2)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $|5 - x| \geq 3$ мебошанд (Расми 13).



Расми 13

Ҷавоб: $(-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$

Мисоли 4. Нобаробарии $|x^2 - 5x| \geq 6$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз хосиятҳои модули ададҳо истифода бурда, нобаробарии додашударо дар намуди ду нобаробарии зерин менависем:

$$x^2 - 5x \geq 6 \text{ ва } x^2 - 5x \leq -6.$$

Нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

1) $x^2 - 5x \geq 6; x^2 - 5x - 6 \geq 0; (x - 6)(x + 1) \geq 0.$

Аз ин ҷо, системаи нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

$$a) \begin{cases} x-6 \geq 0, \\ x+1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 6, \\ x \geq -1. \end{cases} \text{ Аз ин ҷо: } x \geq 6.$$

$$б) \begin{cases} x-6 \leq 0, \\ x+1 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 6, \\ x \leq -1. \end{cases} \text{ Аз ин ҷо: } x \leq -1.$$

$$2) x^2 - 5x \leq -6; x^2 - 5x + 6 \leq 0; (x-2)(x-3) \leq 0.$$

Нобаробарии ҳосилшударо дар шаклҳои зерин менависем:

$$a) \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-3 \leq 0. \end{cases} \quad \text{ва} \quad б) \begin{cases} x-2 \leq 0, \\ x-3 \geq 0. \end{cases}$$

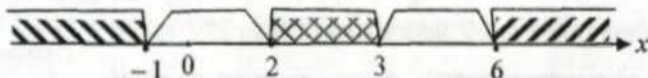
Системаҳои нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$a) \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-3 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 3. \end{cases} \text{ Аз ин ҷо, } 2 \leq x \leq 3 \text{ мешавад.}$$

$$б) \begin{cases} x-2 \leq 0, \\ x-3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Системаи нобаробариҳои ҳосилшудаи охириро ҳал надорад.

Аз ин ҷо ҳамин қиматҳои x , ки онҳо ё $2 \leq x \leq 3$ ё $x \geq 6$ ва ё $x \leq -1$ - ро қонеъ мекунанд, ҳалҳои нобаробарии додашудаанд (Расми 14).



Расми 14

Ҷавоб: $(-\infty; -1] \cup [2; 3] \cup [6; +\infty)$.

Методи интервалҳо. Методи интервалҳо бо чунин ҳосиятҳои бисёрузваҳо асос қарда шудааст.

Бигузур $P(x)$ - бисёрузва бошад. Адади $x = x_0$ яке аз решаҳои ҳақиқии бисёрузваи $P(x)$ номида мешавад, агар бисёрузваро ба нол табдил диҳад, яъне $P(x) = 0$ шавад. Ҳосиятҳои решаҳои ҳақиқии бисёрузваро меорем.

Бигузур x_1 ва x_2 ($x_1 < x_2$) решаҳои бисёрузва бошанд. Агар бисёрузва дар интервали $(x_1; x_2)$ дигар реша надошта бошад, он гоҳ барои ҳар гуна $x \in (x_1; x_2)$ бисёрузва қиматҳои аломаташон яхселаро қабул мекунанд.

Барои аломатро муайян намудан аз интервали $(x_1; x_2)$ як ададро интихоб карда, дар он аломати бисёрузваро муайян кардан кифоя мебошад.

Ин хосияти решаҳои бисёрузваро ин хел ҳам фаҳмидан мумкин аст:

Агар $x = x_0$ яке аз решаҳои ҳақиқии бисёрузваи $P(x)$ бошад, он гоҳ бисёрузваи $P(x)$ фақат ҳангоми аз нуқтаи $x = x_0$ гузаштан аломаташро тағйир медиҳад. Инро дар мисоли зерин дида мебарем:

Агар $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ решаҳои ҳақиқии бисёрузваи дараҷаи дууми $x^2 - 3x + 2$ бошад, он гоҳ дар асоси теоремаи Виет навишта метавонем:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

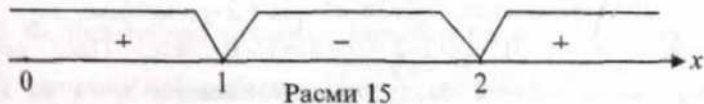
Нуқтаҳои $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ фосилаи ададӣ $(-\infty; +\infty)$ -ро ба се фосилаҳои ададӣ $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ ва $(2; +\infty)$ тақсим мекунанд.

Аз баробарии $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ бармеояд, ки дар ҳар як фосилаи ададӣ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2$ аломаташро нигоҳ медорад:

а) барои ҳар гуна $x \in (-\infty; 1)$ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) > 0$ аст;

б) барои ҳар гуна $x \in (1; 2)$ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) < 0$ аст;

в) барои ҳар гуна $x \in (2; +\infty)$ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) > 0$ мебошад (Расми 15).



Расми 15

Аз методи интервалҳо ҳалли нобаробариҳои намуни

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \quad (7)$$

ки дар ин ҷо $P(x)$ ва $Q(x)$ - бисёрузва, рамзи $\vee$ яке аз аломатҳои « $<$ », « $>$ », « $\geq$ », « $\leq$ » мебошад, низ истифода бурда мешавад.

Барои нобаробарии (7)- ро бо методи интервалҳо ҳал кардан бояд:

1. Ҳамаи решаҳои ҳақиқии бисёрузваҳои $P(x)$ ва $Q(x)$ - ро ёфтан лозим аст;

2. Аз решаҳои ёфтанида, ҳамаи решаҳои боқӣ гузоштан лозим аст, ки дар як вақт решаҳои $P(x)$ ва ҳам $Q(x)$ набоянд ва дар намунаи зиёдаи асоси навишта шуда бошанд;

3. Тибқи адади ро дар асоси решаҳои ёфтанида ба фосилаҳои ададӣ тақсим кардан лозим аст, ки дар ҳар яке онҳо касри $\frac{P(x)}{Q(x)}$ аломаташро нигоҳ медорад;

4. Аз ҳар як фосилаи ададӣ як нуқтаи интихоб карда аз рӯи он аломати касри $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - ро дар ҳар як фосилаҳои ададӣ ёфтан лозим аст;

5. Пайдарпаки аломатҳои касро тасвир карда ҳамаи фосилаҳое, ки онҳо ҳалли нобаробарии (7) мебошанд, ёфтан даркор аст.

Мисоли 5. Нобаробарии зеринро ҳал кунед:

$$\frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 2x + 2)}{(x - 3)(x - 1 - 2x^2)} \geq 0.$$

Ҳал. Нобаробарии додашударо бо методи интервалҳо ҳал мекунем:

1. Дискриминанти сеузваҳои квадратии $x^2 - 3x + 2$, $x^2 + 2x + 2$ ва $-2x^2 + x - 1$ - ро ҳисоб мекунем:

а. Дискриминанти сеузваи $x^2 - 3x + 2$ - ро меёбем:
 $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ аст. Пас, сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2$ ба ду решаҳои ҳақиқии $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ дороанд. Бинобар он $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ мешавад.

• Дискриминанти сеузваҳои квадратии $x^2 + 2x + 2$ ва $-2x^2 + x - 1$ манфӣ мебошад.

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Бинобар он сеузваҳои квадратӣ барои ҳамаи x -ҳо аломатҳои бо аломати коэффитсиенти назди x^2 якхеларо дорад. Бинобар ин нобаробарии додашударо бо нобаробарии баробаркувваи

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} \leq 0$$

иваз карда, ҳосил мекунем: $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \leq 0$.

2. Дар тири ададӣ нуқтаҳои $x=1$; $x=2$; $x=3$ - ро тасвир карда фосилаҳои ададии $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ ва $(3; +\infty)$ ҳосил мекунем.

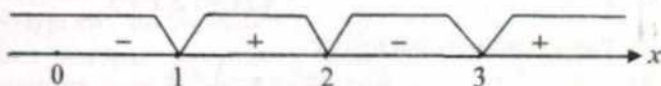
3. Аз фосилаҳои ададӣ нуқтаҳои $x=0$; $x=\frac{3}{2}$; $x=\frac{5}{2}$; $x=4$ -ро интихоб мекунем.

4. Дар нуқтаи $x=0$ касри $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} = -\frac{2}{3}$ мебошад.

Инак, барои ҳар гуна $x \in (-\infty; 1)$ каср манфӣ аст.

Айнан ба монанди ҳамин аломати касрро дар дигар нуқтаҳои низ нишон додан лозим аст.

5. Пайдарпаии аломатҳои касрро дар тири ададӣ тасвир мекунем (Расми 16).



Расми 16

6. Аз сабаби он, ки касри $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$ дар нуқтаҳои $x=1$ ва $x=2$ ба нол табдил мешавад, бинобар он нуқтаҳои $x=1$ ва $x=2$ решаҳои нобаробарии $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \leq 0$ мебошад ва дар нуқтаи $x=3$ нобаробарӣ маънояшро гум мекунад.

Аз ин ҷо фосилаҳои ададии $(-\infty; 1]$ ва $[2; 3)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошанд.

Ҷавоб: $(-\infty; 1] \cup [2; 3)$.

МАШҚО

1. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

- а) $5(x-1)+7 \leq 1-3(x+2)$; б) $\frac{4-x}{5}-5x > 0$;
 в) $4(b-1,5)-1,2 > 6b-1$; г) $4(a+8)-7(a-1) < 12$;
 ғ) $x - \frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{10} < 4$.

2. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

- а) $\begin{cases} 5(x-2)-x > 2, \\ 1-3(x-1) < -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x+3 \geq 5x-19, \\ 4x+1 \leq 22-3x. \end{cases}$
 в) $\begin{cases} 2x-(x-4) < 6, \\ x > 3(2x-1)+18. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(2-3x)-2(3-2x) > x, \\ 6 < x^2-x(x-8). \end{cases}$
 ғ) $\begin{cases} \frac{5x}{4} - \frac{6x-1}{4} < \frac{4x+1}{12}, \\ \frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{5} > 1. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6-x-x^2 \geq 0, \\ 3x+6 \geq 0. \end{cases}$
 е) $\begin{cases} (x+2)(x-5) \geq 0, \\ 8-x < 0. \end{cases}$ ё) $\begin{cases} |x+4| > 6, \\ x-4 > 0. \end{cases}$
 ж) $\begin{cases} \frac{3x-4}{2} \geq x+3, \\ 2x-4 \leq x+11. \end{cases}$ з) $\begin{cases} 5x-8 \leq \frac{13x+4}{3}, \\ 2x-1 \geq x+3. \end{cases}$

3. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

- а) $3x^2-4x+5 > 0$; б) $-2x^2+x-1 \leq 0$;
 в) $x^2+2x+1 > 0$; г) $5-x-\frac{6}{x} \geq 0$.
 ғ) $7x^2-4(x+2) \geq 4x(2x+3)-5x-8$;
 д) $4x(x+3)-2x+1 \geq 5x(x+4)+3x-13$;
 е) $x(x+3)+2(3x-4) \geq 2x^2-3x+3$;
 ё) $3x+1 \geq \frac{2x-1}{2} - \frac{4-5x}{3} + x$; ж) $\frac{5x+3}{x} \leq \frac{7+15x}{2x} - 3$;
 з) $\frac{7x-8}{x+3} < \frac{5x+3}{x+3} + 1$; и) $-1 < \frac{5x+8}{4} - x < 2$.

БОБИ VIII ФУНКСИЯ

§1. Бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбанда

Вақте ки мо ягон ҳодисаи табиатро мушоҳида менамоем, ё ба рафти протсессҳои техникӣ диққат медиҳем, ҳар дафъа мебинем, ки бузургиҳои дар ин ҳодиса ё протсесс иштирок дошта гуногунанд. Яке аз онҳо бо гузаштани протсесс қимати доимии худро нигоҳ медорад, аммо дигарашон қиматҳои адабии гуногунро қабул карда метавонанд, яъне тағйир меёбанд.

Масалан, ҳангоми парвози самолёт шумораи пассажирон, миқдори ҷойҳои холӣ, дарозии қанотҳои самолёт тағйир намеёбад, лекин суръат ва баландии парвоз, захираи сӯзишворӣ, ҳарорати ҳавои атроф тағйир меёбад.

Инак, аз мисоли овардашуда маълум мешавад, ки ҳангоми мушоҳидаи доим ба мо лозим меояд, ки бо бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбанда кордор шавем.

Таърифи 1. *Бузургие, ки қимати доимии худро нигоҳ медорад, бузургии доимӣ номида мешавад.*

Бузургии доимиро бо ададҳо ва ҳарфҳо: $a, b, c, d, \dots$ ишорат мекунанд.

Масалан, дар мисоли овардашуда шумораи пассажирон, миқдори ҷойҳои холӣ, дарозии қанотҳои самолёт ва дигарҳо мисолҳои бузургиҳои доимӣ шуда метавонанд.

Таърифи 2. *Бузургие, ки қиматҳои адабии гуногунро қабул карда метавонад, бузургии тағйирёбанда номида мешавад.*

Бузургии тағйирёбандаро бо ҳарфҳои $x, y, z, u, \dots$ ва ғайраҳо ишорат мекунанд. Масалан, дар мисоли дар боло овардашуда суръат ва баландии парвоз, захираи сӯзишворӣ, ҳарорати ҳавои атроф ва дигарҳо мисолҳои бузургиҳои тағйирёбанда шуда метавонанд.

§2. Мафҳуми функсия

Ҳангоми омӯзиши қонуниятҳои, ки дар табиат дучор меоянд, одатан бо маҷмӯи бузургиҳои тағйирёбандадор кордор мешавем. Бузургиҳои дар худ ҳамон як ҳодиса ё ки маҷмӯи иштирок дошта, одатан аз якдигар мустақил не, балки бузургиҳои ба ҳамдигар вобастаанд, чунки тағйирёбии яке аз онҳо ба тағйироти мувофиқи дигарашон сабаб мешаванд. **Масалан**, ҷӣ хеле, ки ба ҳонандагон маълум аст, дарозии давра, $C = 2\pi R$ аст (2π -

бузургин доимӣ). Агар радиуси давра R - ро зиёд кунем, он гоҳ дарозии давра C ҳам зиёд мешавад. Инак, дар вақти муқоиса кардани ду бузургин тағйирёбанда якеашро чун бузургин тағйирёбандан мустақил ва дигарашро чун бузургин тағйирёбандан вобаста дида баромадан мумкин мебошад. Масалан, дар мисоли овардашуда радиуси давра R - ро бузургин тағйирёбандан мустақил ва дарозии давра C - ро бузургин тағйирёбандан вобаста ҳисоб кардан мумкин аст.

Таърифи 1. Агар ба ҳар як қимати муоинашавандаи бузургин тағйирёбандаи x қимати ягонаи қомилан муайяни бузургин тағйирёбандаи дигар y бо ягон тарз мувофиқ ояд, пас мегӯянд, ки *функсия дода шудааст*.

Дар ин маврид бузургини y - ро бузургини тағйирёбандан вобаста ё функсия ва бузургини x - ро бузургини тағйирёбандан мустақил, ё аргумент меноманд. Барои ифодаи он, ки y функсияи аргументи x аст, одатан аз аломатҳои $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$ ва ғайраҳо истифода мебаранд.

Бояд қайд кард, ки интиҳоби ҳарфҳо барои ишорат кардани функсия (f , g , φ , ...) он қадар муҳим нест. Муҳимаш дар он аст, ки ин ҳарф чӣ гуна алоқамандии бузургихои x ва y - ро ифода мекунад.

Қимати функсияи дилхоҳи $f(x)$ - ро, ки ҳангоми $x = a$ будан функсия қабул мекунад, бо $f(a)$ ишорат мекунанд. Агар, масалан, $f(x) = x^3 + 5$ бошад, пас, $f(0) = 0^3 + 5 = 5$; $f(2) = 2^3 + 5 = 8 + 5 = 13$; $f(a) = a^3 + 5$; $f(a+2) = (a+2)^3 + 5$ ва ғайра мешавад.

§3. Тарзи дода шудани функсия

Дода шудани функсия ин нишон додани он аст, ки аз рӯи қиматҳои аргумент қиматҳои мувофиқи функсия чӣ тавр муайян карда мешаванд.

Дар ин ҷо се тарзи дода шудани функсияро муоина мекунем: тарзи аналитикӣ, ҷадвали ва графикӣ.

1. Тарзи аналитикӣ. Ба ҳонандагон аз курси мактабии математика маълум аст, ки функсия бо тарзи аналитикӣ дода мешавад, яъне бо ёрии формулае, ки вай бузургини тағйирёбандаи вобаста (функсия) - ро бо бузургини тағйирёбандаи мустақил

(аргумент) пайваст мегардонад. Масалан, $y = \sqrt{x+4}$, $y = \log_a x$, $S = \pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ва гайра мисолҳои бо тарзи аналитикӣ дода шудани функсия мебошанд.

Агар функсияи дилхохи $y = f(x)$ дар намуди формула дода шуда бошад, он гоҳ ҳарфи f маҷмуи амалҳои ифода мекунад, ки ба аргумент x қиматҳои гуногун дода, қиматҳои мувофиқи функсияи $f(x)$ - ро ҳисоб мекунем.

Масалан, агар $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 5}$ бошад, пас,

$$f(0) = \sqrt{2 \cdot 0^2 - 0 + 5} = \sqrt{5};$$

$$f(1) = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 1 + 5} = \sqrt{2 - 1 + 5} = \sqrt{6};$$

$$f(-2) = \sqrt{2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5} = \sqrt{2 \cdot 4 + 2 + 5} = \sqrt{15}$$

ва гайра.

2. Тарзи ҷадвали. Агар функсия ба намуди ҷадвале дода шуда, дар он ба қиматҳои гуногуни аргумент x гузоштани қиматҳои мувофиқи функсия y мумкин бошад, он гоҳ чунин тарзро тарзи ҷадвалии дода шудани функсия меноманд.

Дар техника ва амалияи инсонӣ баъзан ба воситаи таҷриба ё бо ёрии ҷенкуни қиматҳои аргумент ва қиматҳои мувофиқи функсияро дар намуди ягон ҷадвал навишта, дар натиҷа ҷадвали аз ададҳо ташкилшударо ҳосил мекунанд. Масалан, ба ин ҷадвали логарифмҳо, ҷадвали функсияҳои тригонометрӣ ва гайраҳо мисол шуда метавонанд. Яке аз хусусиятҳои арзандан тарзи ҷадвалӣ дода шудани функсия дар он аст, ки бевосита, бе ҳеҷ як ҳисоббарорӣ аз рӯи қиматҳои мувофиқи аргумент, қиматҳои мувофиқи функсияро муайян кардан мумкин аст.

3. Тарзи графикӣ. Тарзи аналитикӣ ва ҷадвалии дода шудани функсияҳо аёнӣ надоранд, чунки дар онҳо мувофиқати байни аргумент x ва функсия y бо ёрии график муқаррар (тасвир) карда нашудааст. Тасвири графикии мувофиқати байни аргумент x ва функсия y -ро тарзи графикии дода шудани функсия меноманд. Тарзи графикии дода шудани функсия ҳамон вақт қулай аст, ки агар ба таври аналитикӣ додани функсия хеле душвор бошад. Баъзан, ҳангоми мушоҳида бо чунин асбобҳои кордор мешавем, ки онҳо ин мушоҳидаро фақат ба таври графикӣ тасвир карда метавонанд. Масалан, ба ин барометр

(навишти асбоби худнавис – барограф), ки хангоми мушоҳида бо гузаштани вақт тағйирёбии фишори атмосфераро ба таври графикӣ тасвир мекунад, мисол шуда метавонад. Дар математика бошад, барои тасвир кардани ин ё он хосияти функсия аксар вақт аз тарзи графикӣ дода шудани функсия истифода мебаранд.

§4. Соҳаи муайянӣ ва соҳаи тағйирёбии функсия

Функсияи $y = f(x)$ дар кадом тарзе, ки дода шуда набошад, мо дар вақти дида баромадани он доимо бо ду маҷмӯъ кордор мешавем: маҷмӯи қиматҳое, ки аргумент x ва маҷмӯи қиматҳое, ки функсия y қабул карда метавонад.

Таърифи 1. Маҷмӯи ҳамаи он қиматҳои аргумент (x), ки барои элементҳои онҳо қиматҳои функсия $y = f(x)$ муайян аст, соҳаи муайянӣ ё соҳаи мавҷудияти функсия меноманд.

Барои ифода кардани он, одатан аз ишоратҳои $D(f)$ ё ки $D(y)$ истифода мебаранд. Аксаран, соҳаи муайянии функсия фосилаи $(a; b)$, ё порчаи (сегмент) - и $[a; b]$, ё ки маҷмӯи кушоди беохирӣ $(-\infty; +\infty)$ шуда метавонанд. Масалан, барои функсияи $f(x) = x^2 + 4$ маҷмӯи кушоди беохирӣ $(-\infty; +\infty)$ соҳаи муайянии ин функсия мебошад, чунки барои $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ қимати функсия муайян аст.

Бинобар соҳаи муайянии функсияро бо $D(f)$ ишорат карда, менависем: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ё ки $D(f) = R$.

Таърифи 2. Маҷмӯи ҳамаи қиматҳое, ки ҳади функсия y қабул мекунад, соҳаи тағйирёбии ин функсия номида мешавад.

Барои ифодаи он одатан аз ишоратҳои $E(f)$ ё ки $E(y)$ истифода мебаранд. Масалан, барои функсияи $f(x) = x^2 + 4$ инсегменти $[4; +\infty)$ маҷмӯи қиматҳои функсия мебошад, чунки барои $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ нобаробарии $x^2 + 4 \geq 0$ ҳамеша ҷой дорад. Бинобар он маҷмӯи қиматҳои функсияро бо $E(f)$ ишорат карда менависем: $E(f) = [4; +\infty)$.

Барои ёфтани соҳаи муайянии функсияҳо истифодаи ҷадвали зеринро истифода кардан мумкин аст:

Функсияҳо	Соҳаи муайяни функсияҳо
$y = \sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
$y = \log_a f(x)$	$f(x) > 0$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$y = \arcsin f(x)$	
$y = \arccos f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$

Барои он, ки нисбат ба соҳаи муайяни функсия маълумоти муфасссал гирем, ҳалли якчанд мисолҳоро меорем.

Мисоли 1. Соҳаи муайяни функсияҳои зеринро ёбед:

- $y = \sqrt{4-x^2}$;
- $y = \log_4(81-x^2)$;
- $y = \log_3(x+4) + \log_6(3-x)$;
- $y = \arcsin \frac{4x-3}{5}$;
- $y = \arcsin 2x + \sqrt{3x}$;
- $y = \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+3}$.

Ҳал. 1. Функсияи $y = \sqrt{4-x^2}$ ҳангоми $4-x^2 \geq 0$ будан, маъно дорад. Нобаробарии $4-x^2 \geq 0$ -ро ҳал карда, пайдо мекунем: $4-x^2 \geq 0$; $4 \geq x^2$; $|x| \leq 2$. Пас, порчаи $-2 \leq x \leq 2$ соҳаи муайяни функсия мебошад.

Ҷавоб: $D(y) = [-2; 2]$.

2. Функсияи $y = \log_4(81-x^2)$ ҳангоми $81-x^2 > 0$ будан, маъно дорад. Он гоҳ нобаробарии $81-x^2 > 0$ -ро ба монанди мисоли 1 ҳал карда, пайдо мекунем:
 $-9 < x < 9$.

Яъне, соҳаи муайяни функсияи матлуб интервали $(-9; 9)$ мебошад.

Ҷавоб: $D(y) = (-9; 9)$.

3. Функсияи $y = \log_3(x+4) + \log_6(3-x)$ ҳангоми

$$\begin{cases} x+4 > 0, \\ 3-x > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -4, \\ x < 3 \end{cases}$$

муайян мешавад.

Пас, соҳан муайянии функсия интервали $(-4; 3)$ мебошад.

Ҷавоб: $D(y) = (-4; 3)$.

4. Функсияи $y = \arcsin \frac{4x-3}{5}$ ҳангоми $\left| \frac{4x-3}{5} \right| \leq 1$ будан,

маъно дорад. Бинобар он, ин нобаробарии ҳосилшударо ҳал карда, ҳосил мекунем:

$$-1 \leq \frac{4x-3}{5} \leq 1 \text{ ё ки } -5 \leq 4x-3 \leq 5;$$

$$\begin{cases} 4x-3 \geq -5, \\ 4x-3 \leq 5; \end{cases} \begin{cases} 4x \geq -2, \\ 4x \leq 8; \end{cases} \begin{cases} x \geq -0,5, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $-0,5 \leq x \leq 2$ мешавад.

Пас, порчаи $-0,5 \leq x \leq 2$ соҳан муайянии функсияи додашуда мебошад.

Ҷавоб: $D(y) = [-0,5; 2]$.

5. Функсияи $y = \arcsin 2x + \sqrt{3x}$ барои ҳамаи қиматҳои $|2x| \leq 1$ ва $3x \geq 0$ маъно дорад. Аз ин ду нобаробарии ҳосилшуда, системаи нобаробариҳо тартиб дода, онро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} |2x| \leq 1, \\ 3x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -1 \leq 2x \leq 1, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geq -1, \\ 2x \leq 1, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -0,5, \\ x \leq 0,5, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $0 \leq x \leq 0,5$ мешавад.

Пас, барои функсияи додашуда, порчаи $0 \leq x \leq 0,5$ соҳан муайяний мешавад.

Ҷавоб: $D(y) = [0; 0,5]$.

6. Функсияи $y = \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+3}$ ҳангоми $x+2 \geq 0$ маъно дорад, чунки барои ҳамаи қиматҳои $x \geq -2$ ин функсия муайян

аст. Пас, ниминтервали $[-2; +\infty)$ соҳаи муайяни функсияи додшуда мешавад.

Ҷавоб: $D(y) = [-2; +\infty)$.

§5. Хосиятҳои функсия

Фарз мекунем, ки функсияи дилхоҳи $y = f(x)$ дар маҷмуи D дода шуда бошад. Маҷмуи D аз интервали $(a; b)$, порчаи $[a; b]$ ва ё аз ниминтервали $(a; b]$ иборат шуда метавонад.

1. Функсияҳои ҷуфт ва тоқ

а) Агар барои ҳамаи қиматҳои $x \in D$ баробарии $f(-x) = f(x)$ иҷро шавад, он гоҳ $f(x)$ - ро функсияи ҷуфт меноманд.

Масалан, функсияҳои $y = x^2$; $y = x^2 \pm 4$; $y = 3x^2 \pm 2$; $y = \cos x$; $y = 7x^4$; $y = |x|$ ва ғайра мисолҳои функсияи ҷуфт шуда метавонанд.

Мисоли 1. Функсияи $f(x) = x^2 + 4$ функсияи ҷуфт мебошад, чунки баробарии $f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$ иҷро мегардад.

б) Агар барои ҳамаи қиматҳои $x \in D$ баробарии $f(-x) = -f(x)$ иҷро шавад, он гоҳ $f(x)$ - ро функсияи тоқ меноманд.

Масалан, функсияҳои $y = x^3$; $y = x^3 \pm x$; $y = \sin x$ ва ғайра мисолҳои функсияи тоқ мебошанд.

Мисоли 2. Функсияи $f(x) = x^3 + x$ функсияи тоқ мебошад, чунки баробарии

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$

иҷро мегардад.

в) Функсияҳои ҷуфт ва тоқ дар навбати худ хосиятҳои зеринро дорад:

1. Суммаи ду ё якчанд функсияҳои ҷуфт, боз функсияи ҷуфт мебошад.

2. Сумма ва фарқи функсияҳои тоқ, боз функсияи тоқ мебошад.

3. Ҳосили зарби функсияҳои ҷуфт, боз функсияи ҷуфт мебошад.

4. Хосили зарб ва тақсими функцияҳои тоқ, функцияи ҷуфтро медиҳад.

5. Функцияи дилхоҳро чун суммаи функцияҳои ҷуфт ва тоқ ифода кардан мумкин аст.

Бояд дар хотир дошт, ки на ҳар як функция ҳатман ҷуфт ё ки тоқ аст. Функцияҳое ҳам ҳастанд, ки на ҷуфт ва на тоқ мебошанд.

Мисоли 3. Функцияи $f(x) = x^3 + x^2$ дар соҳаи муайяниаш $(-\infty; +\infty)$ на ҷуфт ва на тоқ мебошад, чунки

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$$

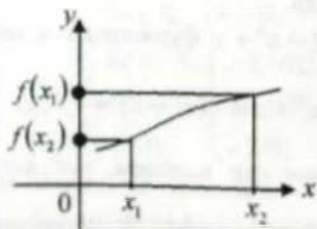
буда, баробариҳои $f(-x) = -f(x)$ ва $f(-x) = f(x)$ иҷро намешаванд.

2. Функцияҳои монотонӣ

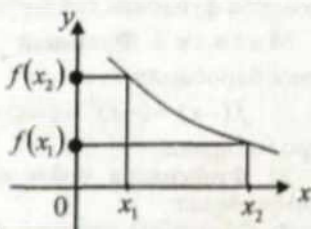
Фарз мекунем, ки функцияи дилхоҳи $y = f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ дода шуда бошад.

а) Функцияи $y = f(x)$ -и дар порчаи $a \leq x \leq b$ муайян буда, афзуншаванда (камшаванда) номида мешавад, агар барои $\forall x_1, x_2 \in [a; b]$ дар ҳолати $x_1 < x_2$ будан, нобаробариҳои $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) иҷро шавад (Расми 1).

б) Функцияи $y = f(x)$ -и дар порчаи $a \leq x \leq b$ муайян буда, камшаванда (афзуншаванда) номида мешавад, агар барои $\forall x_1, x_2 \in [a; b]$ дар ҳолати $x_1 < x_2$ будан, нобаробариҳои $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$) иҷро шавад (Расми 2).



Расми 1

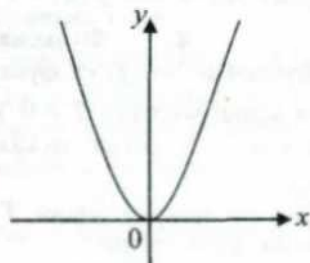


Расми 2

в) Функцияро, ки дар порчаи $[a; b]$ фақат меафзояд ё фақат кам мешавад, функцияи дар ҳамин порча монотонӣ меноманд.

Масалаи, функцияи $y = x^2$ дар соҳаи муайяниаш $(-\infty; +\infty)$ монотонӣ мебошад, чунки вай дар ниминтервали $[0; +\infty)$ афзуншаванда ва дар ниминтервали $(-\infty; 0]$ камшаванда мебошад (Расми 3).

Дар ин ҷо мо функцияи $y = f(x)$ -ро дар порчаи $[a; b]$ дида баромадем. Порчаи $a \leq x \leq b$ ё ки $[a; b]$ -ро интервали сарбасти ҳам меноманд, чунки ба ин гуна интервал нуқтаҳои канории $x = a$ ва $x = b$ дохил мешаванд. Лекин дар баъзе мавридҳо функцияро дар интервали сарбасти $a \leq x \leq b$ дида баромадан хуб нест. **Масалаи,** функцияи $y = \operatorname{tg} x$ дар



Расми 3

интервали сарбасти $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ монотонӣ меафзояд гуфтан хатост, чунки ин функция ҳангоми $x = -\frac{\pi}{2}$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ умуман муайян карда нашудааст. Бинобар он ба ҷои интервали сарбасти $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ дар бораи интервали кушоди $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ сухан рондан лозим аст, чунки ин интервал нуқтаҳои канории $x = -\frac{\pi}{2}$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ надорад.

3. Порчаи аломаташ доимӣ. Нолҳои (решаҳои) функция

а) Порчаеро, ки дар он функция аломаташро доимӣ нигоҳ медорад, порчаи аломаташ доимӣ меноманд.

Масалаи, функцияи $f(x) = x^2 + 2$ дар ҳамаи соҳаи муайяниаш $(-\infty; +\infty)$ мусбат мебошад, аммо функцияи $f(x) = x^3$ барои қиматҳои $x > 0$ мусбат ва барои қиматҳои $x < 0$ манфӣ мебошад, бинобар он порчаи аломаташ доимӣ интервалҳои $(-\infty; 0]$ ва $[0; +\infty)$ мебошанд.

б) Он киматҳои аргумент, ки барояшон қимати функсия ба нол табдил мебардад, нолҳои (решаҳои) функсия номида мешаванд.

Масалан, нолҳои функсияи $f(x) = x^2$, $x = 0$ мебошад, чунки дар ҳолати $x = 0$ будан, қимати функсия ҳам ба нол мубаддал мебардад. Функсияи $f(x) = x^2 + 4$ решаҳо (нолҳо) надорад.

4. Функсияҳои даврӣ

Функсияи $y = f(x)$ функсияи даври номида мешавад, агар чунин адади мусбати $T \neq 0$ мавҷуд бошад, ки барои ҳама гуна қиматҳои x -и соҳаи муайяни ин функсия $f(x+T) = f(x)$ бошад.

Дар ин маврид адади T даврӣ функсия номида мешавад. **Масалан**, функсияҳои

$$f(x) = \sin x; \quad f(x) = \cos x; \quad f(x) = \operatorname{tg} x; \quad f(x) = \operatorname{ctg} x$$

функсияҳои даврӣ буда, даври хурдтаринашон барои функсияҳои $f(x) = \sin x$ ва $f(x) = \cos x$ адади $T = 2\pi$, барои функсияҳои $f(x) = \operatorname{tg} x$ ва $f(x) = \operatorname{ctg} x$ бошад, адади $T = \pi$ мебошад. Агар T даври функсияи $f(x)$ бошад, он гоҳ 2π , 3π , 4π ; ... ва ғайра ҳам даврҳои ин функсия мебошанд, чунки

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x),$$

$$f(x+3T) = f(x+2T+T) = f(x+2T) = f(x),$$

ва ғайра. Ба ғайр аз ин ҳар яке аз ададҳои $-T$; $-2T$; $-3T$; ... ва ғайра ҳам даврӣ функсияи $y = f(x)$ шуда метавонанд, чунки

$$f(x-T) = f((x-T)+T) = f(x),$$

$$f(x-2T) = f((x-2T)+2T) = f(x),$$

ва ғайра.

Пас, аз баробарии $f(x+T) = f(x)$ чунин хулоса мебарояд, ки ҳамаи қиматҳои функсияи $y = f(x)$ бо даври T даври такрор мешудаанд. Инак, агар T даври функсияи $f(x)$ бошад, он гоҳ барои ҳар гуна $n \in \mathbb{N}$ адади nT ҳам даври функсияи $f(x)$ мебошад, яъне $f(x+nT) = f(x)$ аст. Бинобар ин гуфтаи мумкин аст, ки ҳар як функсияи даврӣ маҷмӯи беохори даврҳои дорад. **Масалан:**

$$\begin{aligned}\sin(x \pm 2\pi) &= \sin x; & \cos(x \pm 2\pi) &= \cos x; \\ \sin(x \pm 4\pi) &= \sin x; & \cos(x \pm 4\pi) &= \cos x; \\ \operatorname{tg}(x \pm \pi) &= \operatorname{tg} x; & \operatorname{ctg}(x \pm \pi) &= \operatorname{ctg} x; \\ \operatorname{tg}(x \pm 2\pi) &= \operatorname{tg} x; & \operatorname{ctg}(x \pm 2\pi) &= \operatorname{ctg} x.\end{aligned}$$

§6. Функцияхон чаппа

Агар функции $y = f(x)$ дар соҳаи муайяниаш додашуда бошад, он гоҳ маълум аст, ки ба ҳар як қимати имконпазири x қимати комилан муайяни тағйирёбандаи y мувофиқ меояд.

Аммо дар баъзе мавридҳо баробарии $y = f(x)$ -ро ба таври дигар дида баромадан мумкин аст, ки ба ҳар як қимати имконпазири тағйирёбандаи y қимати муайяни тағйирёбандаи x мувофиқ меояд. Ин дар натиҷаи баробарии $y = f(x)$ -ро нисбат ба x ҳал кардан ҳосил мешавад. Инак, агар баробарии $y = f(x)$ -ро нисбат ба x ҳал кунем, дар натиҷа функции аргументаш y -ро ҳосил мекунем: $x = f^{-1}(y)$. Дар ин ҷо ба ҳар як қимати имконпазири бузургини y якто ва фақат якто қимати бузургини x -ро пайдо кардан мумкин аст.

Дар ин ҳолат барои ин функция тағйирёбандаи y -ро аргумент ва тағйирёбандаи x -ро функция меноманд. Ҳамин тавр функции муайяни $x = f^{-1}(y)$ нисбат ба функции $y = f(x)$ функции чаппа номида мешавад. Азбаски дар математика одат шудааст, ки ҳарфи x -ро барои ишорати аргумент ва ҳарфи y -ро барои ишорати функция истифода бурда мешавад, бинобар он функции чаппаи $x = \varphi^{-1}(y)$ -ро ҳам дар намуди зерин навиштан мумкин аст: $y = \varphi(x)$.

Мисоли 1. Барои функции $y = 2x - 1$ функции чаппаро ёбед. Соҳаи муайяни ва соҳаи тағйирёбии функции додашуда ва функции ба он чаппаро нишон диҳед.

Ҳал. а) Функции $y = 2x - 1$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ муайян мебошад. Пас, $D(y) = R = (-\infty; +\infty)$.

б) Азбаски ба ҳар як қимати $x \in R$ як қимати муайяни y мувофиқ меояд, пас $E(y) = R = (-\infty; +\infty)$ аст.

в) Функция $y = 2x - 1$ - ро нисбат ба x ҳал карда функцияи ба он чаппаро ҳосил мекунем:

$$y = 2x - 1; 2x = y + 1; x = \frac{y+1}{2}.$$

г) Соҳаи муайяни ин функция $D(x) = R = (-\infty; +\infty)$ иборат буда, соҳаи тағйирёбиаш бошад, ба $E(x) = R = (-\infty; +\infty)$ баробар мебошад.

Аз мисоли муоина карда шуда хулоса мебарояд, ки соҳаи тағйирёбии функцияи $y = 2x - 1$ барои функцияи чаппа $x = \frac{y+1}{2}$ соҳаи муайянӣ ва соҳаи муайянии функцияи $y = 2x - 1$ барои функцияи чаппа $x = \frac{y+1}{2}$ соҳаи тағйирёбӣ мешаванд.

Мисоли 2. Функция ба $y = 2^x$ чаппаро ёбед. Соҳаи муайянӣ ва соҳаи тағйирёбии функцияи додашуда ва функцияи ба он чаппаро нишон диҳед.

Ҳал. а) Функцияи $y = 2^x$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ муайян мебошад. Пас, $D(y) = R$.

б) Азбаски дар функцияи додашуда ба ҳар як қимати $x \in R$ як қимати муайяни y мувофиқ меояд, пас соҳаи тағйирёбиаш маҷмӯи ҳамаи ададҳои мусбат мебошад: $E(y) = (0; +\infty)$.

в) Функцияи $y = 2^x$ - ро нисбат ба x ҳал карда функцияи ба он чаппаи $x = \log_2 y$ - ро ҳосил мекунем. Бинобар ин функцияи $x = \log_2 y$ нисбат ба $y = 2^x$ функцияи чаппа аст.

г) Барои функцияи чаппаи $\log_2 y$ бошад, баръакс маҷмӯи ҳамаи ададҳои мусбат ($D(x) = (0; +\infty)$) соҳаи муайянӣ ва маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи тағйирёбии он мебошад ($E(x) = R = (-\infty; +\infty)$).

г) Функцияи $y = 2^x$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ: $D(y) = R$ афзоида мебошад, аммо функцияи ба он чаппа $x = \log_2 y$ бошад, дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои мусбат $D(x) = (0; +\infty)$ афзоида мешавад (Расми 4).

Дар ин мисолҳои муоинакардашуда мо мафҳуми монотонӣ будани функсияи чаппаро истифода бурдем, ки вай аз математикаи курси мактабӣ ба мо маълум аст:

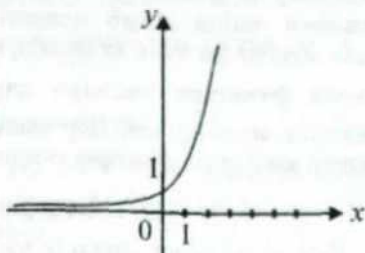
- агар функсияи $y = f(x)$ дар интервали сарбастан $[a; b]$ монотонӣ афзояд (ё кам шавад), пас ҳангоми $a \leq x \leq b$ будан функсияи ба он чаппа вучуд дорад;

- агар функсияи $y = f(x)$, $x \in R$ дар порчаи E монотонӣ ва $E(y) = Y$ бошад, пас ҳангоми $y \in Y$ будан функсияи ба он чаппа $x = f^{-1}(y)$ вучуд дорад, ки он ҳам дар порчаи Y монотонӣ мебошад.

Аз монотонӣ будани функсияи $y = f(x)$ бармеояд, ки ҳангоми $x_1 \neq x_2$ будан, $f(x_1) \neq f(x_2)$ аст.

Аз мисолҳои дар боло муоинакардашуда саволе бармеояд, ки оё барои ҳар гуна функсияи $y = f(x)$ функсияи чаппаи $x = f^{-1}(y)$ вучуд дорад? Барои ба ин савол ҷавоб додан мисоли зеринро дида мебароем.

Мисоли 3. Функсияи $y = x^2$ дар ҳамаи нуқтаҳои хати ростии ададӣ, яъне дар R муайян аст. Агар функсияи $y = x^2$ -ро нисбат ба x ҳал кунем, он гоҳ ду функсияи ба функсияи додашуда чаппаро ҳосил мекунем: $x = \sqrt{y}$ ва $x = -\sqrt{y}$. Чӣ хеле ки маълум аст, ба ҳар як қимати $y = y_1$ ду қимати x мувофиқ меояд: $x = \sqrt{y_1}$ ва $x = -\sqrt{y_1}$. Масалан, ба қимати $y = 1$ қиматҳои $x = 1$ ва $x = -1$, ба қимати $y = 2$ қиматҳои $x = \sqrt{2}$ ва $x = -\sqrt{2}$, ба қимати $y = 3$ қиматҳои $x = \sqrt{3}$ ва $x = -\sqrt{3}$, ба қимати $y = 4$ қиматҳои $x = 2$ ва $x = -2$ мувофиқ меояд ва ғайра. Бинобар ин, агар функсияи $y = x^2$ -ро дар маҷмӯи R , яъне дар ҳамаи нуқтаҳои хати ростии ададӣ дида бароем, он гоҳ ин функсия ба



Расми 4

функсияи чаппа доро намешавад. Лекин, агар ин функсияро фақат барои қиматҳои мусбати x дида бароем, он гоҳ вай ба функсияи чаппа соҳиб мешавад. Мувофиқи қимати квадрати адади мусбат ин адад якқимата муқаррар карда мешавад. Дар ин маврид функсияи чаппаро дар намуди $x = \sqrt{y}$ ва $x = -\sqrt{y}$ навиштан мумкин аст. Дар мисоли додашуда мо интервале ҷудо кардем, ки дар он функсия монотонӣ мебошад.

§7. Классификатсияи функсияҳо

Дар ин ҷо бори дигар баъзе синфи функсияҳоро хотиррасон мекунем, ки онҳо классификатсияи функсияҳоро муқаррар менамояд.

1. Функсияи ратсионалии бутун

Функсияи нисбат ба аргумент x бутун ифода шударо функсияи ратсионалии бутун (ё ки бисёрузва) меноманд.

Маслан, бисёрузван

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

функсияи ратсионалии бутун мебошад. Дар ин ҷо, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ададҳои ҳақиқии дилхоҳ мебошанд. Соҳаи муайяни ин гуна функсия маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

2. Функсияи ратсионалии касрӣ

Агар $P(x)$ ва $Q(x)$ функсияҳои ратсионалии бутун, яъне

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

бошанд, он гоҳ нисбати ин ду функсияро функсияи ратсионалии касрӣ меноманд.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}, (\forall x: Q(x) \neq 0).$$

Ин функсия барои ҳамаи қиматҳои x , ғайр аз он қиматҳое, ки дар онҳо махраҷ ба нол баробар мешавад, муайян аст.

3. Функсияи алгебравӣ

Функсияи алгебравии x гуфта, тағйирёбанди y - ро меноманд, агар он муодилаи

$$A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + \dots + A_n(x)y^n = 0$$

- ро қаноат кунонад. Дар ин ҷо, $n \in N$, $A_0(x)$, $A_1(x)y$, $A_2(x)y^2$, ..., $A_n(x)y^n$ функсияҳои раціонали бутун аз x ва $A_0(x) \neq 0$ мебошанд.

§8. Функсияи хаттӣ

Функсияи $y = kx + b$ - ро, ки дар он k ва b ададҳои ҳақиқӣ мебошанд, дида мебароем. Ин функсия бисёрузваи дараҷаи якум буда, онро функсияи хаттӣ меноманд.

Масалан, функсияҳои

$$y = 2x + 1; \quad y = -3x + 4; \quad y = 4x - \frac{5}{6}; \quad y = -\frac{3}{4} - x$$

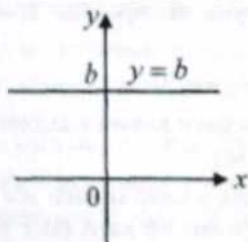
ва ғайраҳо мисолҳои функсияи хаттӣ шуда метавонанд.

Функсияи хаттӣ дорои хосиятҳои зерин мебошад:

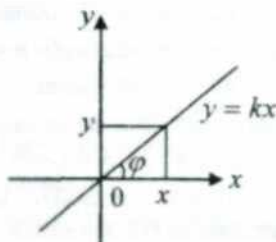
а) Соҳаи муайянии функсия маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ мебошад: $D(y) = R$. Соҳаи тағйирёбии функсия бошад, ба $E(y) = R = (-\infty; +\infty)$ баробар аст.

б) Графики функсия хати рост мебошад. Дар ҳолати $k > 0$ будан функсия афзуншаванда ва дар ҳолати $k < 0$ будан, камшаванда мебошад.

в) Ҳангоми $k = 0$ ва $b \neq 0$ будан, функсия $y = b > 0$ мешавад, ки графикаш дар расми 5 оварда шудааст.



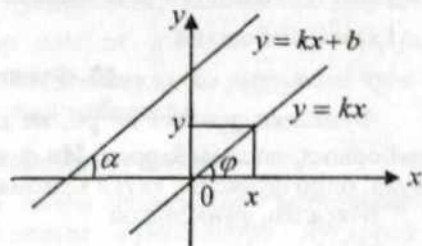
Расми 5



Расми 6

г) Ҳангоми $k \neq 0$ ва $b = 0$ будан, функсия намуди $y = kx$ - ро мегирад, ки графикаш хати рост буда, аз ибтидои координатаҳо гузашта, бо "тири $0x$ кунҷи φ - ро ташкил мекунад. Дар ин ҷо, $\operatorname{tg} \varphi = k$ аст, ки графикаш дар расми 6 оварда шудааст.

г) Агар $k > 0$ ва $b \neq 0$ бошад, он гоҳ графики функцияи $y = kx + b$ ба графики хати рости $y = kx$ параллел мебошад. Графики функцияи $y = kx + b$ дар ҳолати $b > 0$ будан, ба b воҳид боло ва дар ҳолати $b < 0$ будан, ба b воҳид поён ҷойгир мешавад (Расми 7).



Расми 7

Бузургии кунчи моили графики функцияи хаттӣ ба тири x аз коэффитсиенти k вобаста аст. Агар $k > 0$, яъне адади мусбат бошад, ин кунҷ тез аст. Агар $k < 0$, яъне адади манфӣ бошад, кунҷ кунд аст. Бинобар он дар ин маврид адади k - ро коэффитсиенти кунҷин хати рост меноманд.

§9. Функцияи дараҷагӣ

Функцияи $y = x^\alpha$ - ро функцияи дараҷагӣ меноманд. Дар ин ҷо, α - адади дилхоҳи ҳақиқӣ мебошад. Ҳангоми $\alpha = 0$ будан, адади доимии $y = x^0 = 1$ ҳосил мешавад, ки графикаш хати рост аст.

Дар ин ҷо, функцияи $y = x^\alpha$ - ро ҳангоми $\alpha = n$ ($n \in N$), $\alpha = p$ (p - адади бутуни манфӣ) ва $\alpha = r$ (r - адади касрӣ) будан дида мебароем.

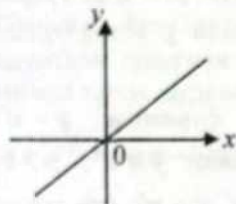
1. Функцияи $y = x^n$, $n \in N$.

а) Соҳаи муайяни ин функция маҷмун ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад, яъне $D(y) = R = (-\infty; +\infty)$ аст.

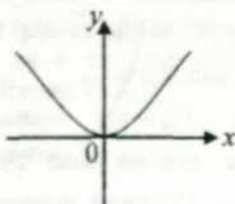
Аз математикаи мактабӣ мо медонем, ки дар ҳолати $n = 1$ будан, $y = x$ функцияи хаттӣ мебошад, ки графикаш хати рост (Расми 8) аст, дар ҳолати $n = 2$ будан, $y = x^2$ парабола аст, ки графикаш дар расми 9 ва дар ҳолати $n = 3$ будан, $y = x^3$ параболани кубӣ мебошад, ки графикаш дар расми 10 оварда шудааст. Хосиятҳои ин се функцияро дида намебароем, чунки бо он шинос ҳастем.

Дар ин ҷо, хосиятҳои функцияи $y = x^n$ - ро ҳангоми қиматҳои дилхоҳ ва намудҳои графики онро муайян мекунем.

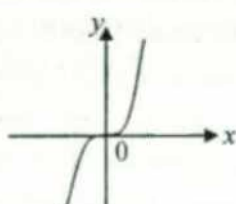
а) Агар $x = 0$ бошад, он гоҳ $y = 0$ аст. Бинобар ин, графики функсияи $y = x^n$ аз ибтидои координатаҳо мегузарад.



Расми 8



Расми 9



Расми 10

б) Агар $x \neq 0$ ва n адади чуфт бошад, он гоҳ функсияи $y = x^n$ функсияи чуфт мебошад: $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$. Пас, графики функсияи $y = x^n$ ҳангоми $x \neq 0$ ва n адади чуфт будан, тирӣ симметрия дорад, ки он тирӣ Oy мебошад.

в) Агар $x \neq 0$ ва n адади тоқ бошад, он гоҳ функсияи $y = x^n$ функсияи тоқ мебошад: $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$. Пас, графики функсияи $y = x^n$, ҳангоми n тоқ будан маркази симметрия дорад, ки он ибтидои координатаҳо мебошад.

г) Ҳангоми n тоқ будан, функсияи $y = x^n$ афзуншаванда мебошад ва ҳангоми n чуфт будан, функсияи $y = x^n$ дар маҷмуи ададҳои манфӣ кам мешавад ва дар маҷмуи ададҳои мусбат меафзояд.

г) Ҳангоми n тоқ будан маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи тағйирёбии функсияи $y = x^n$ мебошад.

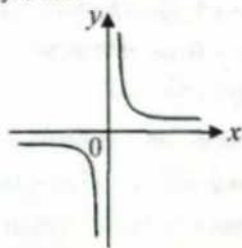
д) Ҳангоми n чуфт будан маҷмуи ададҳои ғайриманфӣ соҳаи тағйирёбии функсияи $y = x^n$ мебошад.

2. Функсияи $y = x^p$ (p - адади бутуни манфӣ)

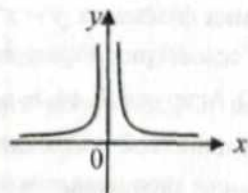
Агар p - адади бутуни манфӣ бошад, он гоҳ функсияро дар намуди $y = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$, $x \neq 0$ менависем. Соҳаи муайянии ин функсия фосилаҳои $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ иборат мебошад. Дар ин

чо, агар p - адади чуфт бошад, он гоҳ функсияи $y = x^{-p}$ ҳам чуфт мебошад ва агар p - адади тоқ бошад, он гоҳ функсияи $y = x^p$, функсияи тоқ аст. Функсияи $y = x^p$ дар ҳолати p - чуфт будан, дар соҳаи $(-\infty; 0)$ афзуншаванда ва дар ҳолати p - тоқ будан, функсияи $y = x^p$ камшаванда аст.

Аммо дар соҳаи $(0; +\infty)$ бошад, функсияи $y = x^p$ камшаванда аст, чунки дар ин соҳа функсияи $y = x^p$, $p > 0$ афзуншаванда мебошад. Графики функсияи $y = x^p$ дар соҳаи додашудааш барои қиматҳои муайяни $p = -1$ ва $p = -2$ намудҳои зеринро дорад, ки тасвири он дар расмҳои 11 ва 12 оварда шудааст.



Расми 11



Расми 12

3. Функсияи $y = x^r$ (r - адади касрӣ)

Агар r - адади касрӣ раціоналӣ, яъне $r = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

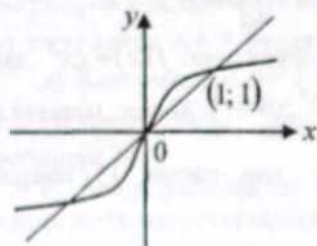
бошад, он гоҳ функсияи $y = x^r$ - ро дар намуди $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ навиштан мумкин аст.

Соҳаи муайяни ин функсия дар ҳолати n тоқ будан, аз фосилаи $(-\infty; +\infty)$ ва дар ҳолати n чуфт будан, аз нимсегменти $[0; +\infty)$ иборат аст. Агар дар функсияи додашуда m ва n тоқ бошад, он гоҳ функсияи $y = \sqrt[n]{x^m}$ тоқ ва агар n тоқу m чуфт бошад, он гоҳ функсия чуфт аст. Функсияи $y = \sqrt[n]{x^m}$ дар соҳаи $[0; +\infty)$ афзуншаванда мебошад. Аммо ин функсия дар ҳолати n

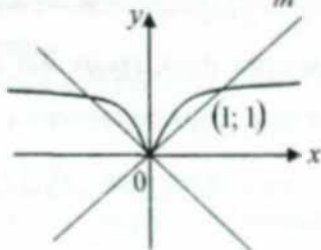
тоқ ва m чуфт будан, дар соҳаи $(-\infty; 0)$ камшаванда аст ва дар ҳолати m, n - тоқ будан, функсия афзуншаванда мебошад.

Графики функсияи $y = \sqrt[n]{x^m}$ дар соҳаи додашудааш барои қиматҳои гуногуни m ва n гуногун буда, дар намудҳои зерин тасвир карда шудааст (Расми 13 ва 14). Дар мавриди:

$$y = x^{\frac{n}{m}}, n \text{ ва } m - \text{ададҳои тоқ} \quad y = x^{\frac{n}{m}}, n - \text{тоқ ва } m - \text{чуфт}, \frac{n}{m} < 1$$



Расми 13



Расми 14

§10. Функсияи $f(x) = ax^2 + bx + c$

Пеш аз ҳама функсияи $f(x) = ax^2 + bx + c$ - ро дар асоси ба зарбкунандаҳо ҷудо кардани сеузван квадратӣ дар намуди зерин менависем:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

а) Соҳаи муайяни ин функсия маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ мебошад: $D(f) = R$.

б) Ҳангоми $a > 0$ будан, функсия дар фосилаи $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ монотонӣ камшаванда буда, дар фосилаи $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$ монотонӣ афзоида мебошад.

в) Ҳангоми $a < 0$ будан, функсия дар фосилаи $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ монотон афзоида буда, дар фосилаи $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$ монотонӣ камшаванда мебошад.

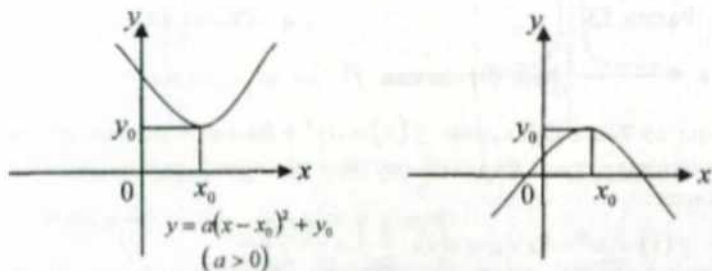
г) Ҳангоми $a > 0$ будан функсия дар нуқтаи $x = -\frac{b}{2a}$ дорои қимати хурдтарин $\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$ буда, дар ҳолати $a < 0$ будан, дар нуқтаи $x = -\frac{b}{2a}$ дорои қимати калонтарин $\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$ мебошад.

г) Азбаски функсияи $f(x) = ax^2$ чуфт ва графикаш нисбат ба тири ордината симметрӣ аст, пас функсияи

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

ҳам чуфт буда, графикаш аз графики функсияи $f(x) = ax^2$ дар натиҷаи параллелкӯчонии $\vec{r}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ ҳосил мешавад.

Тасвири функсияи $f(x) = ax^2 + bx + c$ дар расми 15 оварда шудааст.



Расми 15

§11. Функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он

Функсияи $f(x) = a^x$ -и ($0 < a \neq 1$) дар маҷмӯи ҳаман ададҳои ҳақиқии $(-\infty; +\infty)$ муайян бударо, функсияи нишондиҳандагӣ меноманд.

Функсияи нишондиҳандагӣ дорои хосиятҳои зерин мебошад:

а) Агар маҷмӯи $D(f) = R = (-\infty; +\infty)$ соҳаи муайянии функсия бошад, он гоҳ соҳаи тағйирёбии функсия $E(f) = (0; +\infty)$ мебошад.

б) Функсияи нишондиҳандагӣ фақат қиматҳои мусбат қабул мекунад.

в) Агар $x=0$ ва a чӣ хеле, ки набошад, $a^x=1$ аст, яъне $y=a^0=1$ аст.

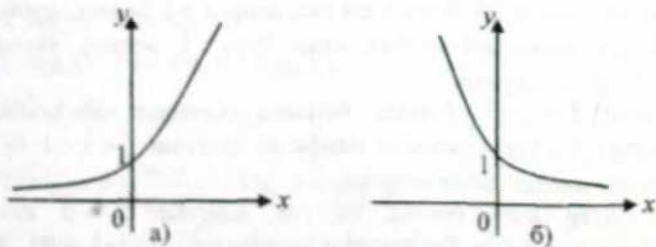
г) Агар $a>1$ бошад, он гоҳ функсияи нишондиҳандагии $f(x)=a^x$ монотонӣ меафзояд ва агар $a<1$ бошад, он гоҳ ин функсия монотонӣ камшаванда мебошад.

г) Агар $a>1$ бошад, он гоҳ дар ҳолати $x>0$ будан, $a^x>1$ мешавад ва дар ҳолати $x<0$ будан $a^x<1$ мешавад. Агар $a<1$ бошад, он гоҳ баръакс, дар ҳолати $x>0$ будан, $a^x<1$ мешавад ва дар ҳолати $x<0$ будан $a^x>1$ мешавад.

д) Ҳангоми $0<a<1$ будан, функсия дар интервали $(0; +\infty)$ камшаванда буда, дар интервали $(-\infty; 0)$ афзуншаванда мебошад.

е) Агар функсия аз соҳаи додашудааш қимати $x=r$ (r -адади дилхоҳи ратсионалӣ)-ро қабул кунад, он гоҳ:

- Ҳангоми $r \in \mathbb{N}$ будан, $a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{r\text{-мротоба}}$ мебошад;
- Ҳангоми $m, n \in \mathbb{N}$ ва $r = \frac{m}{n}$ будан, $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ мебошад;
- Ҳангоми r -адади манфӣ будан, $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$, $a \neq 0$ мебошад;
- Графикҳои функсияи $y=a^x$ ($0<a \neq 1$) дар соҳаи муайяниаш $D(f)=(-\infty; +\infty)$ барои қиматҳои $a=2$ ва $a=\frac{1}{2}$ дар расмҳои 16 а) ва б) оварда шудааст.



Расми 16

§12. Функцияи логарифмӣ ва хосиятҳои он

Функцияи намуни $f(x) = \log_a x$ функцияи логарифмӣ номида мешавад, ки дар ин ҷо, a ягон адади муайяни мусбати аз 1 фаркунанда аст, яъне $(0 < a \neq 1)$.

Формулаҳои $y = \log_a x$ ва $a^y = x$ ҳаммаъно мебошанд. Аз ин ҷо, вобастагии байни функцияи логарифмӣ $a^y = x$ ва функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ - ро нишон додан осон аст. Чӣ хеле, ки дар §6 мо дидем, функцияи логарифми $y = \log_a x$ барои функцияи нишондиҳандагии $y = a^x$ функцияи чаппа мебошад.

Функцияи логарифмӣ дорои хосиятҳои зерин мебошад:

а) Соҳаи муайянии функцияи логарифмӣ маҷмӯи ҳаман ададҳои мусбат мебошад.

б) Маҷмӯи ҳаман ададҳои ҳақиқӣ соҳаи тағйирёбии функцияи логарифмӣ мебошад: $E(f) = R = (-\infty; +\infty)$.

в) Агар $a > 1$ бошад, он гоҳ функцияи логарифми $y = \log_a x$ монотонӣ меафзояд ва агар $0 < a \neq 1$ бошад, он гоҳ функцияи логарифми $y = \log_a x$ монотонӣ камшаванда аст.

г) Агар логарифми ду адад аз рӯи ҳамон як асоси a ($0 < a \neq 1$) байни худ баробар бошанд, он гоҳ ҳуди ададҳо низ баробаранд:

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y \quad (x > 0; y > 0)$$

г) Ҳангоми $x=1$ будан, қимати функцияи логарифми $y = \log_a x$ ба нол баробар мешавад: $\log_a 1 = 0$.

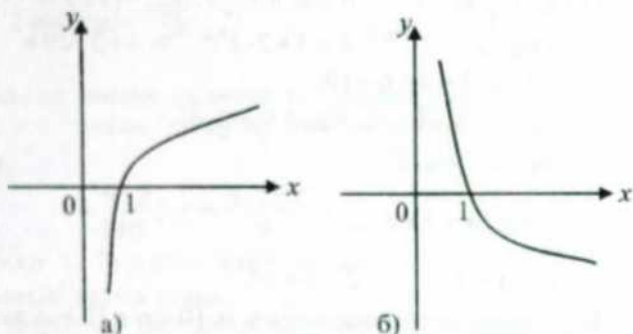
д) Бигузор $a > 1$ бошад, он гоҳ, агар $x > 1$ бошад, функцияи $y = \log_a x$ қиматҳои мусбат, агар $0 < x < 1$ бошад, қиматҳои манфӣ қабул мекунад.

Агар $0 < a < 1$ бошад, баръакс, ҳангоми $x > 1$ будан, функцияи $y = \log_a x$ қимати манфӣ ва ҳангоми $0 < x < 1$ будан, қиматҳои мусбат қабул мекунад.

е) Агар $a > 1$ бошад, он гоҳ, ҳангоми $x \rightarrow 0$ қимати функцияи $y = \log_a x$ беохир кам мешавад ($y = f(x) \rightarrow 0$). Агар

$0 < x < 1$ бошад, он гоҳ ҳангоми $x \rightarrow 0$ қимати функсияи $y = \log_a x$ беохир меафзояд ($y = f(x) \rightarrow \infty$).

ё) Графики функсияи $y = \log_a x$ дар соҳаи муайяниаш $D(f) = (0; +\infty)$ барои қиматҳои муайяни $a = 2$ ва $a = \frac{1}{2}$ намудҳои зеринро дорад, ки тасвираш дар расмҳои 17 а) ва б) оварда шудааст.



Расми 17

ж) Функсияи логарифмиаш $y = \log_a x$ ($x > 0$, $0 < a \neq 1$) дорои хосиятҳои зерин мебошад ($x > 0$; $y > 0$, $a \neq 1$, $a > 0$):

1. $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$;
2. $a^{\log_a x} = x$; $\log_a 1 = 0$;
3. $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$;
4. $\log_a x^m = m \log_a x$;
5. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
6. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$; $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$;
8. $\log_a x = \log_a \sqrt[k]{x}$; $\log_{a^k} x = \log_a x^k$;

$$9. \log_a x^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a x.$$

Мисол. Қиматҳои ифодаҳои зерин:

$$1. \log_3 81 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \log_3 81 + \frac{3}{2} = \log_3 3^4 + \frac{3}{2} =$$

$$= 4 \log_3 3 + \frac{3}{2} = 4 \cdot 1 + \frac{3}{2} = 4 + 1,5 = 5,5.$$

$$2. \log_2 16 + (\sqrt{2})^{\log_2 9 + 2} = \log_2 16 + (\sqrt{2})^{\log_2 9} \cdot (\sqrt{2})^2 =$$

$$= \log_2 2^4 + 2^{\frac{1}{2} \log_2 9} \cdot 2 = 4 + 2 \cdot 2^{\log_2 3} = 4 + 2 \cdot \sqrt{9} =$$

$$= 4 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10.$$

$$3. \log_4 x - \log_2 8 = 0; \log_4 x = \log_2 8;$$

$$\log_{2^2} x = \log_2 2^3;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \log_2 x = 3 \log_2 2;$$

$$\log_2 x = 3 \cdot 2; x = 2^6; x = 64.$$

Ба ғайр аз логарифми асосаш a ($0 < a \neq 1$) бо логарифмҳои ҳастанд, ки онҳо логарифмҳои натуралӣ ва даҳӣ ном доранд.

Агар асоси логарифми $\log_a x$ ба адади e баробар бошад, он гоҳ логарифмро логарифми натуралӣ ё логарифми неперӣ (аз номи олими математик шотландӣ Непер гирифта шудааст) меноманд ва чунин ишорат карда шудааст:

$$\log_e x = \ln x$$

$$a) \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x, (a > 0, a \neq 1, x > 0).$$

$$б) \text{ Ҳангоми } x = e \text{ будан, } \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \ln e = 1 \text{ чунки}$$

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x; \log_a e = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln e; \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

мебошад.

$$в) \text{ Ҳангоми } a = 10 \text{ будан, } \log_{10} x = \lg x, \text{ ки дар ин ҷо,}$$

$$\lg x = M \ln x, M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0,43429 \text{ мебошад. Дар ин ҷо,}$$

$M = \ln e = \frac{1}{\ln 10}$ - ро модули гузариш аз логарифми натуралӣ ба логарифми даҳӣ меноманд.

§13. Мафҳуми ченак ва функсияҳои тригонометрӣ

I. Дар курси математикаи мактабӣ, хонандагон дар синфи 9 бо мафҳуми ченаки радианӣ кунҷ шинос шудаанд. Бори дигар хотиррасон мекунем, ки

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \quad (1)$$

мебошад.

Вобастагии ченаки радианӣ ва градусӣ кунҷ (α - ченаки радианӣ, γ - ченаки градусӣ) бо формулаҳои зерин дода мешаванд:

$$\alpha = \frac{\pi \cdot \gamma}{180^\circ}; \quad \gamma = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi} \quad (2)$$

Мисоли 1. Бузургии кунҷҳои 45° , 30° ва 20° - ро бо ченаки радианӣ ифода кунед.

Ҳал. Формулаи (2) - ро татбиқ карда, бузургиҳои кунҷҳои (ченаки градусӣ) 45° , 30° ва 20° - ро бо ченаки радианӣ ифода мекунем. Ҳангоми $\gamma = 45^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ ва $\gamma = 20^\circ$ будан,

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha = \frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}; \quad \alpha = \frac{\pi \cdot 20^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{9}$$

мешавад.

Мисоли 2. Ченакҳои радианӣ $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{2}{3}\pi$ - ро бо ченаки градусӣ ифода кунед.

Ҳал. Формулаи (2) - ро татбиқ карда, ченаки радианӣ $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{2}{3}\pi$ - ро бо ченаки градусӣ ифода мекунем.

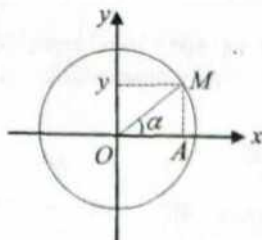
Ҳамин тариқ, ҳангоми $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ва $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ будан,

$$\gamma = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ; \quad \gamma = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ;$$

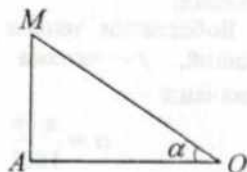
$$\gamma = \frac{2\pi \cdot 180^\circ}{3} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ \text{ мешавад.}$$

П. Агар дар давраи воҳидӣ нуқтаи дилхоҳи M - ро интихоб карда, онро бо ибтидои координатаҳо пайваст кунем, дар натиҷа секунҷаи росткунҷаи дорон кунҷи теzi MOA - ро ҳосил мекунем (Расми 18).

Дар ин ҷо тарафҳои OA ва AM - ро катетҳои секунҷа, OM - ро гипотенузаи секунҷа ва $\angle MOA = \alpha$ - ро кунҷи теzi секунҷа меноманд.



Расми 18



Расми 19

Агар MOA (Расми 19) секунҷаи росткунҷаи дорон кунҷи теzi дорон тез бошад, он гоҳ маълум аст, ки функсияҳои тригонометрӣ ба воситаи тарафҳои секунҷа бо формулаҳои зерин ифода карда мешаванд:

1. $\frac{AM}{OM} = \sin \alpha;$
2. $\frac{OA}{OM} = \cos \alpha;$
3. $\frac{AM}{OA} = \operatorname{tg} \alpha;$
4. $\frac{OA}{AM} = \operatorname{ctg} \alpha;$
5. $\frac{OM}{OA} = \sec \alpha;$
6. $\frac{OM}{AM} = \operatorname{cosec} \alpha.$

§14. Хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ

1. Хосиятҳои функсияи $y = \sin x$ ($y = \cos x$) ва графики он.

а) Соҳан муайянини функсияи $y = \sin x$ ($y = \cos x$) маҷмуи ҳаман ададҳои ҳақиқӣ мебошад:

$$D(y) = R = (-\infty; +\infty), \quad D(x) = D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$$

б) Аз сабаби он ки абсиссаҳо ва ординатаҳои нуқтаҳои даврани воҳидӣ ҳаман қиматҳои дар порчаи $[-1; 1]$ бударо қабул мекунад, пас соҳаи қиматҳои ҳар яке аз ин функсияҳо порчаи $[-1; 1]$ мебошад:

$$E(\sin x) = [-1; 1] \quad (E(\cos x) = [-1; 1]).$$

в) Синус (косинус) барои ҳаман $x \in \mathbb{R}$ функсияи даврий буда, хурдтарин даври мусбаташ ба 2π баробар мебошад:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x; \quad (\cos(x + 2\pi) = \cos x)$$

г) Синус (косинус) барои ҳаман $x \in \mathbb{R}$ функсияи тоқ (ҷуфт) мебошад:

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad (\cos(-x) = \cos x)$$

г) Барои ҳаман $x = \pi k$, ки $k \in \mathbb{Z}$ мебошад, $\sin x = 0$ ($\cos x \neq 0$).

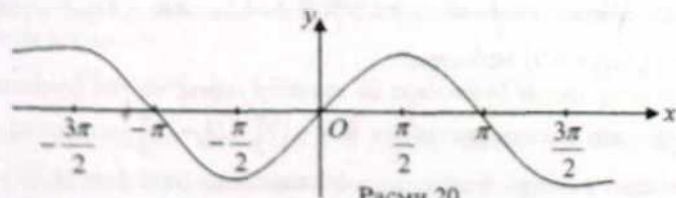
д) Барои ҳаман $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $(x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k))$, ки $k \in \mathbb{Z}$ мебошад, $\sin x > 0$ ($\cos x > 0$) аст.

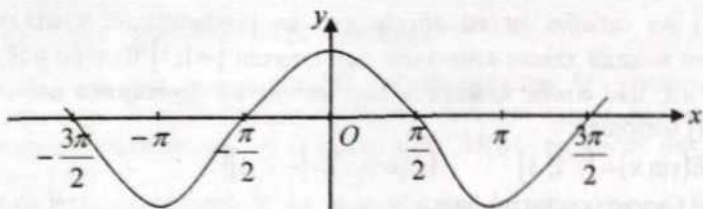
е) Барои ҳаман $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $(x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k))$, ки $k \in \mathbb{Z}$ мебошад, $\sin x < 0$ ($\cos x < 0$) аст.

ё) Дар фосилаҳои $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $([-\pi + 2\pi k; 2\pi k])$, ки $k \in \mathbb{Z}$ мебошад, функсияи $\sin x$ ($\cos x$) аз -1 то 1 меафзояд.

ж) Дар фосилаҳои $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$, $([2\pi k; \pi + 2\pi k])$, ки $k \in \mathbb{Z}$ мебошад, функсияи $\sin x$ ($\cos x$) аз 1 то -1 кам мешавад.

з) Тасвири графикҳои функсияҳои $\sin x$ ва $\cos x$ мувофиқан дар расми 20 ва 21 оварда шудааст.





Расми 21

2. Хосиятҳои функсияи $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) ва графיקи он

а) Маҷмун ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, гайр аз ададҳои намуди $\frac{\pi}{2} + \pi k$ (πk), ки $k \in \mathbb{Z}$ аст, соҳаи муайяни функсияи $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) мебошад.

б) Соҳаи тағйирёбии функсияи $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) аз ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ иборат мебошад:

$$E(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R} \quad (E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}).$$

в) Функсияи $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) барои ҳамаи $x \in D(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$ ($x \in D(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$) тоқ мебошад:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

г) Функсияи $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$) барои ҳамаи $x \in D(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$ ($x \in D(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$) функсияи даврӣ буда, ҳурдтарин даври мусбаташ ба π баробар мебошад:

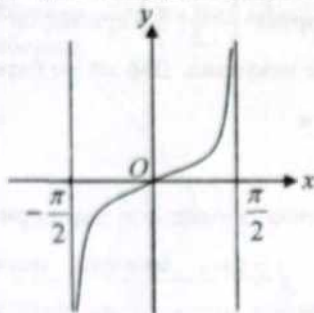
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \quad (\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x)$$

г) Барои ҳамаи πk ($x = \frac{\pi}{2} + \pi k$), ки $k \in \mathbb{Z}$ мебошад, $\operatorname{tg} x = 0$ ($\operatorname{ctg} x = 0$) аст.

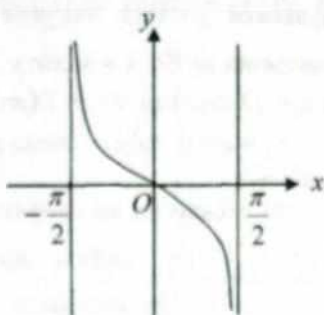
д) Барои ҳамаи $x \in (\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, ки $k \in \mathbb{Z}$ аст, $\operatorname{tg} x > 0$ ($\operatorname{ctg} x > 0$) мебошад.

е) Агар даври функсияро ба эътибор гирем, он гоҳ функсияи $y = \operatorname{tg} x$ дар фосилаи ихтиёрии $((2k - 1)\frac{\pi}{2}; (2k + 1)\frac{\pi}{2})$ меафзояд ва функсияи $y = \operatorname{ctg} x$ бошад, дар фосилаи ихтиёрии $(\pi k; (k + 1)\pi)$ кам мешавад.

ё) Тасвири графики функсияҳои $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ мувофиқан дар расмҳои 22 ва 23 оварда шудааст.



Расми 22



Расми 23

§15. Функсияҳои тригонометрии чаппа

Дар §14 хосиятҳои функсияҳои тригонометриро баён карда, тасвири графики ҳар яке аз онҳоро овардем.

Аз графикҳои тасвир кардашуда маълум мешавад, ки функсияҳои тригонометрӣ дар тамоми тирӣ ададӣ функсияҳои ғайримонотонанд. Бинобар ин, функсияҳо дар тамоми тирӣ ададӣ функсияи чаппаи худро надоранд. Аз ҳамин сабаб, фосилаҳои монотонии функсияҳои тригонометриро дар назар дошта, функсияҳои тригонометрии чаппаро баён мекунем.

Функсияҳои $f(x)$ ва $g(y)$ байни худ чаппа номиди мешаванд, агар $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$ ва барои $\forall x_0 \in D(f)$ ва $\forall y_0 \in D(g)$ $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = g(y_0)$ шавад. Ин нишон медиҳад, ки агар функсияи $g(y)$ ба функсияи $f(x)$ чаппа бошад, он гоҳ функсияи $f(x)$ ҳам ба функсияи $g(y)$ чаппа мебошад. Инро дар функсияҳои тригонометрӣ ва тригонометрии чаппа дида мебароем.

1. Функсияи $y = \sin x$ - ро дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ дида мебароем. Барои ҳамаи $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функсияи $y = \sin x$ муайян ва монотонӣ афзуншаванда буда, қиматҳои функсия дар порчаи

$[-1; 1]$ меҳобад. Пас, функсияи чаппааш ҳам дар порчаи $[-1; 1]$ муайян ва афзуншаванда мебошад. Чунин функсияи нисбат ба функсияи $y = \sin x$ чаппаро дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ арксинуси y меноманд ва бо $x = \arcsin y$ ишорат мекунад. Дар ин ҷо барои $\forall x_0 \in D(\sin x)$ ва $\forall y_0 \in D(\arcsin y)$

$$y_0 = \sin x_0 \Leftrightarrow x_0 = \arcsin y_0$$

мебошад.

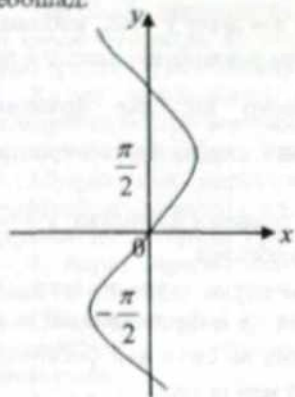
Аз сабаби он ки графики функсияи $x = \arcsin y$ дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ бо графики функсияи $y = \sin x$ мувофиқ меояд, бинобар он, аз ишораҳои муқаррарии аргумент ва функсия истифода бурда, функсияи тригонометрии чаппаро дар намуди $y = \arcsin x$ менависем. Инак, функсияи $y = \arcsin x$ нисбат ба $x = \sin y$ функсияи чаппа аст.

Агар функсияи $x = \sin y$ дар порчаи $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ муайян ва афзуншаванда буда, порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ -ро ба порчаи $-1 \leq x \leq 1$ инъикос кунонад, он гоҳ функсияи тригонометрии чаппаи $y = \arcsin x$ ҳам дар порчаи $-1 \leq x \leq 1$ муайян ва афзуншаванда буда, порчаи $-1 \leq x \leq 1$ -ро ба порчаи $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ инъикос менамояд.

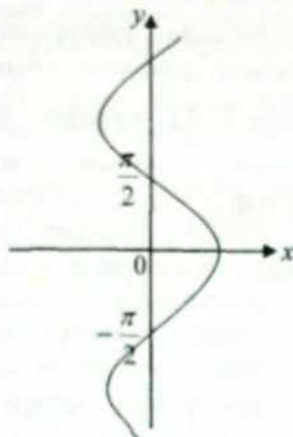
Функсияи $y = \arcsin x$ тоқ мебошад. Графикаш ба графики функсияи $x = \sin y$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ нисбат ба хати ростии $x = y$ симметрӣ аст (Расми 24).

2. Функсияи $y = \cos x$ - ро дар порчаи $[0; \pi]$ дида мебароем. Ин функсия дар ҳамаи порчаи $[0; \pi]$ муайян ва камшаванда буда, маҷмун қиматҳои дар порчаи $[-1; 1]$ бударо қабул мекунад. Пас, чунин функсияи ба функсияи $y = \cos x$ чаппа вучуд дорад, ки он ҳам дар порчаи $[-1; 1]$ муайян ва камшаванда мебошад. Бинобар он, функсияи нисбат ба функсияи $y = \cos x$ чаппаро дар порчаи

$[0; \pi]$ арккосинуси y меноманд ва бо $x = \arccos y$ ишорат мекунам. Дар ин ҷо, $D(\arccos y) = [-1; 1]$ ва $E(\arccos y) = [0; \pi]$ мебошад.



Расми 24



Расми 25

Азбаски графики функсияи $x = \arccos y$ бо графики функсияи $y = \cos x$ мувофиқ меояд, бинобар ин, ҷойҳои x ва y ро иваз карда, функсияи тригонометрии чаппаи $y = \arccos x$ - ро ҳосил мекунем.

Функсияи $y = \arccos x$ ҷуфт мебошад. Графикаш ба графики функсияи $x = \cos y$ $y \in [0; \pi]$ нисбат ба хати ростии $x = y$ симметрӣ аст (Расми 25).

3. Функсияи $y = \operatorname{tg} x$ - ро дар фосилаи $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ дида мебароем.

Ин функсия дар ҳаман фосилаи додашуда муайян ва афзуншаванда мебошад ва маҷмӯи ҳаман қиматҳои дар тирӣ ададӣ бударо қабул мекунад. Бинобар ин, функсияи тригонометрии чаппаро бо арктангенс y ишорат карда, дар намуди $x = \operatorname{arctg} y$ менависанд.

Азбаски барои $\forall x_0 \in D(\operatorname{tg} x)$ ва $\forall y_0 \in D(\operatorname{arctg} y)$

$$y_0 = \operatorname{tg} x_0 \Leftrightarrow x_0 = \operatorname{arctg} y_0$$

мебошад, пас соҳаи муайяни функсияи тригонометрии чаппаи $x = \arctg y$ маҷмуи ҳамаи тирӣ ададӣ шуда метавонад:

$$D(\arctg y) = R. \text{ Соҳаи тағйирёбнаш } E(\arctg y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ аст.}$$

Функсияи тригонометрии чаппа $x = \arctg y$ тоқ мебошад. Графики функсияи $x = \arctg y$ бо графики функсияи $y = \tg x$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ мувофиқ меояд. Бинобар ин, дар функсияи $x = \arctg y$ ҷойҳои x ва y -ро иваз карда, функсияро дар намуди $y = \arctg x$ менависем.

Графики функсияи $x = \arctg y$ ба графики функсияи $y = \tg x$ нисбат ба хати ростии $y = x$ симметрӣ мебошад.

Ҳамин тавр, функсияҳои $y = \operatorname{arccotg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$ ва $y = \operatorname{arccosec} x$ нисбат ба функсияҳои $y = \cotg x$, $y = \sec x$ ва $y = \operatorname{cosec} x$ мувофиқан чаппа мебошанд ва онҳо дар фосилаҳои муайяни интиҳоб кардашуда монотонӣ мебошанд.

М А Ш Қ Х О

1. Соҳаи муайяни функсияҳоро ёбед:

а) $y = \sqrt{4-x}$;

б) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-6}}$;

в) $y = \sqrt{4x-x^2}$;

г) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$;

р) $y = \sqrt{6x-x^2} + \sqrt{\frac{x-1}{x-6}}$.

2. Нишон диҳед, ки кадоме аз ин функсияҳо ҷуфт ва кадоме аз ин онҳо тоқ аст:

а) $y = 2^x - 2^{-x}$; б) $y = \sqrt[3]{x} + 2x^5$;

в) $y = 5^{x^2}$; г) $y = a^x + a^{-x}$; р) $y = \frac{x}{x^2 + 2}$.

3. Графики функсияҳои зерин сохта шаванд:

а) $y = x^3 - x$;

б) $y = \sqrt{1-x^2}$;

в) $y = \frac{x}{x}$, $x > 0$;

г) $|y| = |x|$;

р) $y = |x|$;

д) $y = |2x + 1|$.

Б О Б И IX

МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҶОИ ИРРАТСИОНАЛИ

§1. Муодилаи ирратсионалӣ

Муодилаи ирратсионалӣ гуфта, чунин муодилаеро меноманд, ки баъзе ифодаҳои аз тағйирёбандаҳо вобаста буда, дар тахти реша (радикал) мебошанд.

Ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ гуфта, он қиматҳои тағйирёбандаҳоро меноманд, ки ҳангоми ба муодила гузоштан, муодила ба нол табдил мегардад.

Муодилаҳои ирратсионалӣ дар намудҳои гуногун дода шуданишон мумкин аст. Бинобар он, ҳар як муодилаҳои ирратсионалӣ тарз ва услуби хоси ҳалли худро дорад.

1. Барои муодилаҳои ирратсионалиро ҳал кардан, пеш аз ҳама бо усули аз тахти реша (радикал) озод намудани ифода, яъне ба воситаи ҳар ду тарафро ба дараҷаи реша бардоштан – муодилаҳои ирратсионалиро ба муодилаи ратсионалӣ меоваранд.

2. Муодилаҳои ирратсионалиро бо усули дохил кардани тағйирёбандан нав (бо усули гузориш) ба муодилаи соддатар (бе реша) оварда мешавад.

Дар вақти ҳал намудани муодилаҳои ирратсионалӣ решаҳои бегона пайдо шуданишон мумкин аст. Он решаҳои, ки муодиларо ба нол табдил намерасонанд, решаҳои бегона номида мешавад. Барои ҳамин санҷидани дурустии ҳалҳои ёфташуда ҳатмист. Дар натиҷаи худ ҳангоми ҳал намудани муодилаҳо яке аз ҳалҳои гум шуданишон мумкин аст. Гум шудани яке аз ҳалҳои муодила дар натиҷаи ду тарафи муодиларо ба ифодаи яхсебан тағйирёбандадор тақсим намудан рӯй меорад.

Дар хотир бояд дошт, ки пеш аз ҳал кардани муодилаҳои ирратсионалӣ аввал соҳаи муайяни муодиларо нишон додан лозим аст.

Барои он ки доир ба тарзи ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ маълумоти муфасссал пайдо кунем, ҳалли якчанд муодилаҳоро меорем.

Мисоли 1. Муодилаи $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3x$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Пеш аз ҳама маҷмуи қиматҳои x - ро меёбем, ки барояшон муодила маъно дорад.

$$x^2 + 3x \geq 0; \quad x(x+3) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x+3 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -3. \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x+3 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ x \leq -3. \end{cases}$$

Аз қиматҳои ёфташудани $x \geq 0$, $x \geq -3$, $x \leq 0$ ва $x \leq -3$ маълум мешавад, ки муодила дар маҷмӯъҳои $(-\infty; -3)$ ва $(0; +\infty)$ маъно доштааст. Бинобар он, ҳалли муодиларо дар ҳамин маҷмӯъ ҷустуҷӯ менамоем.

Барои ҳалҳои ягона ёфтани муодилаи додашударо дар намуди

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3x \quad \text{ё} \quad \sqrt{x^2 + 3x} = 3x - 1$$

навишта, баъд ду тарафи муодилаи ҳосилшударо ба квадрат бардошта, муодилаи $x^2 + 3x = (3x - 1)^2$ - ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо, $8x^2 - 9x + 1 = 0$ мебошад.

Аз сабаби он, ки дискриминанти муодилаи квадратӣ

$$D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 81 - 32 = 49 > 0$$

аст, пас вай ду решаҳои ҳақиқии гуногунро дорад:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-9) - \sqrt{49}}{2 \cdot 8} = \frac{9 - 7}{16} = \frac{1}{8},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-9) + \sqrt{49}}{2 \cdot 8} = \frac{9 + 7}{16} = 1.$$

Аз решаҳои ёфташуда фақат решаи $x = 1$ ҳалли муодилаи иррационалӣ шуда метавонад, чунки, ҳангоми ба он гузоштан тарафи чап ба нол табдил мебарояд. Решаи $x = \frac{1}{8}$ бошад, ҳалли бегонаи муодилаи иррационалӣ аст, чунки, вай дар натиҷаи ба дараҷа бардоштан ҳосил шудааст, решаи $x = \frac{1}{8}$ муодилаи

$\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3x$ - ро қаноат намекунонад, аммо решаи муодилаи $x^2 + 3x = (3x - 1)^2$ мебошад.

Санҷиш: а) $\sqrt{x_1^2 + 3x_1 + 1} = 3x_1$; $\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{8} + 1} = 3 \cdot \frac{1}{8}$; $\frac{13}{8} \neq \frac{3}{8}$;

б) $\sqrt{x_2^2 + 3x_2 + 1} = 3x_2$; $\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1 + 1} = 3 \cdot 1$; $3 = 3$.

Ин нишон медиҳад, ки қимати $x = 1$ ҳалли муодилаи додашуда мебошад.

Мисоли 2. Муодилаи $\sqrt{x+3} + \sqrt{22-x} = 7$ - ро ҳал кунед.

Ҳаял. Маҷмуи қиматҳои x - ро меёбем, ки дар он муодила маъно дорад, яъне,

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, & \begin{cases} x \geq -3, \\ 22-x \geq 0; & \begin{cases} 22 \geq x. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $-3 \leq x \leq 22$ мешавад.

Пас, муодилаи додашуда дар фосилаи $[-3; 22]$ муайян аст. Бинобар ин, ҳалли муодиларо дар ин маҷмӯи ҷустуҷӯ менамоем.

Муодилаи додашударо бо тарзҳои гуногун ҳал кардан мумкин аст. Се тарзи ҳалли муодиларо нишон медиҳем:

Тарзи якум. Ду тарафи муодиларо ба дараҷаи реша бардошта, ҳосил мекунем.

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{22-x})^2 = 7^2;$$

$$(x+3) + 2\sqrt{(x+3)(22-x)} + (22-x) = 49;$$

$$2\sqrt{(x+3)(22-x)} = 24;$$

$$\sqrt{(x+3)(22-x)} = 12.$$

Бори дигар баробарии охириро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$(\sqrt{(x+3)(22-x)})^2 = 12^2;$$

$$(x+3)(22-x) = 144;$$

$$22x + 66 - x^2 - 3x = 144;$$

$$x^2 - 19x + 78 = 0.$$

Муодилаи квадратиро ҳал мекунем. Дискриминанти он

$$D = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4 \cdot 78 \cdot 1 = 361 - 312 = 49 > 0$$

мебошад, пас вай ду решаҳои ҳақиқии гуногунро дорад, яъне:

$$x_1 = \frac{-(-19) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{19-7}{2} = 6;$$

$$x_2 = \frac{-(-19) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{19+7}{2} = 13.$$

Дар ин ҷо, $x_1 = 6$ ва $x_2 = 13$ решаҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Тарзи дуюм. Дар муодилаи додашуда яке аз решаҳоро ба тарафи дигари баробарӣ бо аломати муқобилаш гузаронида, баъд ба квадрат бардошта, пайдо мекунем:

$$\sqrt{x+3} = 7 - \sqrt{22-x};$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (7 - \sqrt{22-x})^2;$$

$$x+3 = 49 - 14\sqrt{22-x} + 22 - x;$$

$$14\sqrt{22-x} = 68 - 2x;$$

$$7\sqrt{22-x} = 34 - x.$$

Муодилаи ҳосилшударо бори дигар ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$(7\sqrt{22-x})^2 = (34-x)^2;$$

$$49(22-x) = 1156 - 68x + x^2;$$

$$1078 - 49x = 1156 - 68x + x^2;$$

$$x^2 - 19x + 78 = 0.$$

Чӣ хеле, ки дар боло муоина кардем, муодилаи квадратӣ решаҳои $x_1 = 6$ ва $x_2 = 13$ - ро дорад ва ин решаҳо ҳаҷли муодилаи додашуда мебошанд.

Тарзи сеюм. Муодиларо бо воситаи дохил намудани тағйирёбандан нав (методи гузориш) ҳал мекунем. Дар муодилаи додашуда, $\sqrt{x+3} = y$ -ро ишорат карда, муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$(\sqrt{x+3})^2 = y^2;$$

$$x+3 = y^2; \quad x = y^2 - 3.$$

$$y + \sqrt{22 - y^2 + 3} = 7;$$

$$y + \sqrt{25 - y^2} = 7;$$

$$\sqrt{25 - y^2} = 7 - y;$$

$$(\sqrt{25 - y^2})^2 = (7 - y)^2;$$

$$25 - y^2 = 49 - 14y + y^2;$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0;$$

$$(y-3)(y-4)=0.$$

Аз ин ҷо, $y_1 = 3$ ва $y_2 = 4$ мешавад.

Қиматҳои $y = 3$ ва $y = 4$ -ро ба муодилаи $x = y^2 - 3$ гузошта, қиматҳои x -ро меёбем:

$$x_1 = y_1^2 - 3 \Rightarrow x_1 = 3^2 - 3 \Rightarrow x_1 = 9 - 3 \Rightarrow x_1 = 6;$$

$$x_2 = y_2^2 - 3 \Rightarrow x_2 = 4^2 - 3 \Rightarrow x_2 = 16 - 3 \Rightarrow x_2 = 13.$$

Қиматҳои $x_1 = 6$ ва $x_2 = 13$ ҳаҷҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Санҷиш. а) $x_1 = 6$: $\sqrt{6+3} + \sqrt{22-6} = 7$;

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7; \quad 3 + 4 = 7; \quad 7 = 7;$$

б) $x_2 = 13$: $\sqrt{13+3} + \sqrt{22-13} = 7$;

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7; \quad 4 + 3 = 7 \Rightarrow 7 = 7.$$

Санҷиш нишон медиҳад, ки қиматҳои $x_1 = 6$ ва $x_2 = 13$ ҳаҷҳои муодилаи иррационалӣ мебошанд.

Ҷавоб: 6; 13.

Мисоли 3. Муодилаи $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳял. Муодила дар ҳамаи маҷмӯи R маъно дорад. Ду тарзи ҳалли муодиларо меорем.

Тарзи якум. Муодилаи матлубро дар намуни

$$4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = -3$$

навишта, баъд ду тарафи муодиларо ба дараҷаи реша, яъне, ба куб бардошта дар асоси

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ё ки

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

меёварем.

$$(4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2})^3 = (-3)^3;$$

$$(4\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{x^2})^3 - 3 \cdot 4\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot (4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}) = 27;$$

$$64x - 12x(4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}) - x^2 = 27.$$

Агар x муодилаи додашудаи ирратсионалиро қаноат кунонад, пас аз баробарии

$$4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = -3$$

истифода бурда, муодилаи ҳосилшударо дар намуди $64x - 12x \cdot 3 - x^2 = 27$ навишта, ҳал мекунем:

$$64x - 12x \cdot 3 - x^2 = 27;$$

$$64x - 36x - x^2 = 27;$$

$$64x - 36x - x^2 - 27 = 0;$$

$$x^2 - 28x + 27 = 0.$$

Муодилаи квадратиро ҳал мекунем. Дискриминанти он

$$D = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \cdot 27 \cdot 1 = 784 - 108 = 676 > 0$$

мебошад, пас, вай ду решаҳои гуногуни ҳақиқӣ дорад, яъне:

$$x_1 = \frac{-(-28) - \sqrt{676}}{2 \cdot 1} = \frac{28 - 26}{2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-(-28) + \sqrt{676}}{2 \cdot 1} = \frac{28 + 26}{2} = 27.$$

Дар ин ҷо, $x_1 = 1$ ва $x_2 = 27$ ба маҷмӯи R тааллуқ дорад, бинобар он онҳо ҳалҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Тарзи дуюм. Муодиларо ба воситаи дохил кардани тағйирёбандан нав (яъне, бо усули гузориш) ҳал мекунем.

Ишораи $\sqrt[3]{x} = y$ - ро дохил карда, муодиларо чунин менависем:

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Муодилаи квадратиро ҳал мекунем.

Дискриминанти муодила

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$$

мебошад, пас, муодила ду решаҳои (ҳалҳои) гуногуни ҳақиқиро дорад, яъне:

$$y_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1;$$

$$y_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Қиматҳои y_1 ва y_2 - ро ба $\sqrt[3]{x} = y$ гузошта, қиматҳои x - ро меёбем:

$$\sqrt[3]{x} = y_1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x_1 = 1;$$

$$\sqrt[3]{x} = y_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x_2 = 3^3 \Rightarrow x_2 = 27.$$

Санҷиш: а) $x_1 = 1$; $\sqrt[3]{1} - 4\sqrt[3]{1} + 3 = 0 \Rightarrow 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$;

б) $x_2 = 27$; $\sqrt[3]{27} - 4\sqrt[3]{27} + 3 = 0 \Rightarrow 3 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Санҷиш нишон медиҳад, ки қиматҳои $x_1 = 1$ ва $x_2 = 27$ ҳамаи муодилаи додашуда мебошанд.

Ҷавоб: 1; 27.

Мисоли 4. Муодилаи $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7} = 5$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодилаи иррационалӣ ду решаи квадратиро дарбар мегирад. Муодила дар маҷмӯи $x \geq 7$, яъне, дар фосилаи $[7; +\infty)$ ҳал доштаниш мумкин аст. Бинобар он, ҳаллашро дар ҳамин маҷмӯъ дида мебароем. Муодилаи матлубро бо тарзҳои гуногун ҳал кардан мумкин аст.

Тарзи якум. Дар муодилаи додашуда, яке аз решаҳоро ба тарафи дигари баробарӣ бо аломати муқобилаш гузаронида, баъд муодилаи ҳосилшударо ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$\sqrt{x+6} = 5 + \sqrt{x-7};$$

$$(\sqrt{x+6})^2 = (5 + \sqrt{x-7})^2;$$

$$x+6 = 25 + 10\sqrt{x-7} + (x-7);$$

$$x+6-25-x+7 = 10\sqrt{x-7};$$

$$5\sqrt{x-7} = -6.$$

Азбаски, тарафи чапи муодила мусбат ва тарафи росташ манфӣ мебошад, бинобар он, муодилаи додашуда дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад.

Тарзи дуюм. Ду тарафи муодилаи додашударо ба квадрат бардошта, дар асоси формулаи $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ менависем:

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7})^2 = 5^2;$$

$$(x+6) - 2\sqrt{(x+6)(x-7)} + (x-7) = 25;$$

$$2x-1-2\sqrt{(x+6)(x-7)} = 25;$$

$$2x-1-25=2\sqrt{(x+6)(x-7)};$$

$$2x-26=2\sqrt{(x+6)(x-7)};$$

$$x-13=\sqrt{(x+6)(x-7)}.$$

Ҳар ду тарафи муодилаи $x-13=\sqrt{(x+6)(x-7)}$ - ро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$(x-13)^2=(\sqrt{(x+6)(x-7)})^2;$$

$$(x-13)^2=(x+6)(x-7);$$

$$x^2-26x+169=x^2-x-42;$$

$$25x=211 \Rightarrow x=\frac{211}{25}.$$

Қимати $x=\frac{211}{25}$ ба маҷмун $x \geq 7$, яъне $[7; +\infty)$ тааллуқ дорад, лекин барои муодилаи додашуда ҳалли бегона мебошад, чунки муодилаи додашударо каноат намекунонад.

Тарзи сеюм. Муодиларо бо воситаи дохил намудани тағйирёбандаи нав ҳал мекунем. Ишораи $\sqrt{x+6}=y$ - ро дохил намуда, муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$x+6=y^2;$$

$$x=y^2-6;$$

$$y-\sqrt{y^2-6-7}=5;$$

$$y-\sqrt{y^2-13}=5;$$

$$y-5=\sqrt{y^2-13}.$$

Ҳар ду тарафи муодилаи охириро ба квадрат бардошта, қимати y - ро меёбем:

$$(y-5)^2=(\sqrt{y^2-13})^2;$$

$$y^2-10y+25=y^2-13;$$

$$-10y=-38; -5y=-19;$$

$$5y=19 \Rightarrow y=\frac{19}{5}.$$

Қимати $y = \frac{19}{5}$ - ро ба $\sqrt{x+6} = y$ гузошта, қимати x - ро меёбем:

$$\sqrt{x+6} = y \Rightarrow \sqrt{x+6} = \frac{19}{5} \Rightarrow x+6 = \frac{361}{25} \Rightarrow x = \frac{211}{25}.$$

Қимати ҳосилшудани $x = \frac{211}{25}$ решаи бегона мебошад.

Тарзи чорум. Ду тарафи муодиларо ба зарбкунандан ҳамроҳшудааш $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}$ зарб зада менависем:

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7})(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}) = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7})$$

$$(x+6) - (x-7) = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7})$$

$$13 = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7})$$

ё ки $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} = \frac{13}{5}.$

Аз муодилаи ҳосилшуда ва муодилаи додашуда, системаи муодилаҳо тартиб дода, онро бо тарзи ҷамъкунии ҳал мекунем:

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} = 5, \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} = \frac{13}{5}. \end{cases}$$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} = \frac{13}{5}.$$

$$2\sqrt{x+6} = \frac{13+25}{5} \text{ ё ки } \sqrt{x+6} = \frac{19}{5}.$$

Ду тарафи муодилаи охириро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$(\sqrt{x+6})^2 = \left(\frac{19}{5}\right)^2 \Rightarrow x+6 = \frac{361}{25} \Rightarrow x = \frac{361}{25} - 6 \Rightarrow x = \frac{211}{25}.$$

Чӣ ҳоле, ки дар боло қайд кардем, қимати $x = \frac{211}{25}$ барои муодилаи додашуда ҳалли бегона мебошад.

Санҷини: Ҳангоми $x = \frac{211}{25}$: $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7} = 5$;

$$\sqrt{\frac{211}{25}+6} - \sqrt{\frac{211}{25}-7} = 5; \sqrt{\frac{211+150}{25}} - \sqrt{\frac{211-175}{25}} = 5;$$

$$\sqrt{\frac{361}{25}} - \sqrt{\frac{36}{25}} = 5; \frac{19}{5} - \frac{6}{5} = 5; \frac{19-6}{5} = 5; \frac{13}{5} \neq 5.$$

Пас, муодилаи матлуб ҳал надораст.

Ҷавоб: $\emptyset$.

§2. Ҳалли нобаробариҳои иррационали

Мисоли 1. Нобаробарии $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Пеш аз ҳама маҷмуи қиматҳои x -ро меёбем, ки дар он нобаробарии додашуда маъно дорад. Бинобар ин, аввал нобаробарии $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ - ро ҳал мекунем. Аз он $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0$ бармеояд. Аз ин ҷо:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq 2. \end{cases} \Rightarrow x \geq 2 \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x-2 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 1, \\ x \leq 2. \end{cases} \Rightarrow x \leq 1.$$

Аз қиматҳои ёфташудаи $x \leq 1$ ва $x \geq 2$ маълум аст, ки нобаробарии додашуда дар маҷмуи $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ маъно доштааст. Бинобар он ҳалли нобаробариҳо дар ин маҷмӯъ дида мебароем.

Нобаробарии додашуда, ба ҷамъбасти системаҳои нобаробариҳои

$$\begin{cases} x+3 < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > (x+3)^2 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад. Аз сабаби он, ки нобаробарии дуёми системаи дуум натиҷаи нобаробарии сеюми системаи дуум мебошад, бинобар он, мо фақат нобаробариҳои якуми системаи якум ва нобаробариҳои якум ва сеюми системаи дуумро ҳал мекунем, яъне, ҳалҳои

$$\begin{cases} x+3 < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > (x+3)^2 \end{cases}$$

-ро меорем. Аз $x+3 < 0$ бармеояд, ки $x < -3$ аст.

Ақнуи системаи нобаробариҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > (x+3)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > x^2 + 6x + 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x^2 - 9x - x^2 > 9 - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ -9x > 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x < -\frac{7}{9}. \end{cases}$$

Аз системаи нобаробариҳои охири $-3 \leq x < -\frac{7}{9}$ мешавад.

Аз ҳалҳои ёфташудаи $x < -3$ ва $-3 \leq x < -\frac{7}{9}$ маълум мешавад,

ки маҷмуи $-\infty \leq x < -\frac{7}{9}$ ё ки $(-\infty; -\frac{7}{9})$ ҳалли нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(-\infty; -\frac{7}{9})$.

Мисоли 2. Нобаробарии $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Соҳаи муайяни нобаробарии додашударо муайян мекунем:

$$x^2 - x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) \geq 0.$$

Аз ин ҷо:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq 4. \end{cases} \Rightarrow x \geq 4$$

$$\text{ва} \begin{cases} x+3 \leq 0, \\ x-4 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq -3, \\ x \leq 4. \end{cases} \Rightarrow x \leq -3.$$

Аз қиматҳои ёфташудаи $x \leq -3$ ва $x \geq 4$ фақат маҷмуи $[4; +\infty)$ соҳаи муайяни нобаробарии додашуда мебошад. Бинобар ин, ҳалҳои нобаробарии додашударо дар маҷмуи $x \geq 4$ дида мебароем.

Аз сабаби он, ки нобаробарӣ бо системаи нобаробариҳои

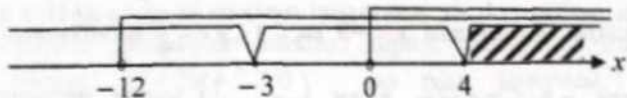
$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases}$$

баробаркува мебошад, ҳалли системаи нобаробариҳои зеринро меорем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \geq 0, \\ x^2 - x^2 - x - 12 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \geq 0, \\ -x-12 < 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \geq 0, \\ -x < 12; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \geq 0, \\ x > -12. \end{cases}$$

Ҳалли системаи нобаробариҳои охириро дар тирӣ координатӣ тасвир мекунем:



Пас, ҳалли нобаробарии додашуда аз $[4; +\infty)$ мешавад.

Ҷавоб: $[4; +\infty)$.

Мисоли 3. Нобаробарии $\sqrt{3x-1} < 2$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Соҳаи муайяни нобаробарии додашударо меёбем:
 $3x-1 \geq 0$; $3x \geq 1$ ё $x \geq \frac{1}{3}$. Аз сабаби он, ки тарафи ростии нобаробарӣ адади мусбат аст, бинобар он, ду тарафи нобаробариро ба квадрат бардошта, онро ҳал мекунем:

$$(\sqrt{3x-1})^2 < 2^2; 3x-1 < 4; 3x < 5 \text{ ё } x < \frac{5}{3}.$$

Дар ин маврид маҷмуи $[\frac{1}{3}; \frac{5}{3})$ ҳалли нобаробарӣ шуда метавонад.

МАШҚҶО

I. Муодилаҳои ирратсионалиро ҳал кунед:

- $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$;
- $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$;
- $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;
- $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$;
- $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+3} = 3$;
- $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$;
- $\sqrt{x^2+x-5} + \sqrt{x^2+8x-4} = 5$;
- $\sqrt{x^2+5} = 5-x$;
- $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-12=0$;
- $\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{x-2}=2$;
- $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$;
- $\frac{x-2}{\sqrt{2x-5}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-5}$.

II. Нобаробарихоро ирратсионалиро ҳал кунед:

- $\sqrt{x^2+3x} > 2$;
- $\sqrt{x^2-7x} > -3$;
- $\sqrt{3x-1} < \sqrt{x}$;
- $\sqrt{x^2-4x} > x-3$;
- $\sqrt{x^2-x-12} < x$;
- $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$;
- $\sqrt{9x^2+6x+1} < 2-x$;
- $\sqrt{\frac{1+4x}{x}} < 1$.

БОБИ Х МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

§1. Хосиятҳои асосии функсияи нишондиҳандагӣ

Аз сабаби он ки дар ҳалли муодилаҳо ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣ аз мафҳуми функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он истифода мебаранд, бинобар он, бори дигар маълумотро доир ба функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он ба таври мухтасар ба хотир меорем:

Бигузор функсияи $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) дар маҷмуи R дода шуда бошад. Он гоҳ:

1. Агар $x = 0$ бошад, он гоҳ $a^0 = 1$ аст.
2. Барои ҳар гуна $x \in R$, $a^x > 0$ мебошад.
3. Барои ҳар гуна $x_1, x_2 \in R$ ва $x_1 < x_2$, $a > 1$:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2, \quad a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2.$$

4. Барои ҳар гуна $x_1, x_2 \in R$ ва $0 < a < 1$:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2, \quad a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2.$$

5. Барои ҳар гуна $x \in R$ ва $0 < a \neq 1$:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2};$$

$$a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2};$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2} = (a^{x_2})^{x_1}.$$

6. Барои ҳар гуна $x \in R$ ва $a > 0$, $b > 0$:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

§2. Муодилаи нишондиҳандагӣ

Бори дигар ба хотир меорем, ки муодилаи диҳҳои муодилаҳои нишондиҳандагӣ бо тарзи баробаркунии асосҳои нишондиҳанда ҳал карда мешавад. Ҳангоми ҳал аз воситаи дохил кардани тағйирёбандан навад ва дигаргунсозӣҳо, ки муодиларо ба муодилаи содатар меоварад, истифода бурдан мумкин аст.

Муодилаи нишондиҳандагӣ гуфта, муодилаи намуди

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (0 < a \neq 1)$$

ва муодилаҳои ба ин намуд овардашавандаро меноманд.

Умуман, асоси ҳалли муодилаи нишондиҳандагии $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ва муодилаҳои ба ин намуд овардашавандаро теоремаҳои зерин ташкил медиҳанд.

Теорема (бе исбот). Муодилаи нишондиҳандагии

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (0 < a \neq 1) \quad (1)$$

ба муодилаи

$$f(x) = g(x) \quad (2)$$

баробаркува мебошад.

Аз теоремаи овардашуда бармеояд, ки агар ду тарафи муодилаи нишондиҳандагӣ асосҳои якхеларо дошта бошад, он гоҳ нишондиҳандаҳои асосҳоро баробар карда, муодиларо ҳал кардан мумкин аст.

Барои он, ки доир ба тарзи ҳалли муодилаҳои нишондиҳандагӣ маълумоти муфасссал пайдо кунем, ҳалли якчанд муодилаҳоро меорем:

Мисоли 1. Муодилаи $3^{x^2-x} = 3^{2x-2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар асоси хосияти функсияи нишондиҳандагӣ муодилаи додашуда ба муодилаи $x^2 - x = 2x - 2$ баробаркува аст. Бинобар он, муодилаи квадратии зеринро ҳосил мекунем:

$$x^2 - x = 2x - 2.$$

Муодилаи ҳосилшударо бо тарзи ба ҳамзарбҳо ҷудокунии ҳал мекунем:

$$x(x-1) = 2(x-1);$$

$$x(x-1) - 2(x-1) = 0;$$

$$(x-1)(x-2) = 0.$$

Аз ин ҷо, $x-1=0$ ё ки $x-2=0$.

Аз муодилаҳои ҳосилшуда, $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ -ро меёбем.

Санҷиш: ҳангоми $x=1$ будан, $3^{1-1} = 3^{2-2}$; $3^0 = 3^0$; $1=1$ мешавад, пас $x=1$ ҳалли муодилаи додашуда мебошад.

Агар $x=2$ бошад, он гоҳ, $3^{4-2} = 3^{4-2}$; $3^2 = 3^2$; $9=9$ мешавад, бинобар он, $x=2$ ҳалли муодилаи додашуда мешавад.

Ҷавоб: 1; 2.

Мисоли 2. Муодилаи $\frac{(0,5)^{x-0,5}}{\sqrt{2}} = 2 \cdot 0,25^{x-1}$ - ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ ҳар ду тарафи муодиларо ба асоси $\frac{1}{2}$ меорем.

$$(0,5)^{x-0,5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot 0,25^{x-1};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5+0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{x-1};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \text{ ё ки } \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}.$$

Аз ин ҷо, $x = 2x - 3$ ё ки $x = 3$ мешавад.

Ҷавоб: 3.

Мисоли 3. Муодилаи $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$ - ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ муодилаи додашударо ба намуди зерин табдил медиҳем:

$$2 \cdot 2^{2x} + 2^2 \cdot 2^x = 16;$$

$$2 \cdot (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x = 16$$

$$\text{ё ки } (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 8 = 0.$$

Гузориши $2^x = y$ - ро истифода кунем, муодилаи охириро ба намуди зерин менависем:

$$y^2 + 2y - 8 = 0.$$

Муодиларо бо тарзи гурӯҳбандӣ ҳал мекунем:

$$y^2 + 2y \cdot 1 + 1 - 8 - 1 = 0;$$

$$(y+1)^2 - 3^2 = 0;$$

$$(y+1-3)(y+1+3) = 0;$$

$$(y-2)(y+4) = 0.$$

Аз ин ҷо, $y_1 = 2$ ва $y_2 = -4$ -ро ҳосил мекунем. Азбаски $2^x = y$ барои $\forall x$ мусбат ($2^x > 0$) мешавад, бинобар он, аз ҳалҳои

$$1. \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}.$$

$$\text{Хал. } \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{7x-3}; \quad \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{7-7x}.$$

Аз ин ҷо: $3x-7=3-7x$; $3x+7x=3+7$; $10x=10$ ё $x=1$.

Ҷавоб: 1.

$$2. (0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$$

$$\text{Хал. } (2^{-1})^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = (2^6)^{-1};$$

$$2^{-x^2} \cdot 2^{2x+2} = 2^{-6};$$

$$2^{-x^2+2x+2} = 2^{-6}..$$

Аз ин ҷо, $-x^2+2x+2=-6$ ё ки $x^2-2x-8=0$.

Муодилаи охириро бо тарзи ба ҳамзарбҳо ҷудокунии ҳал мекунем:

$$x^2-4x+2x-8=0;$$

$$x(x-4)+2(x-4)=0;$$

$$(x+2)(x-4)=0.$$

Аз ин ҷо, $x+2=0$ ё ки $x-4=0$ мешавад.

Аз муодилаҳои охириро қиматҳои x -ро меёбем:

$$x_1=-2; \quad x_2=4.$$

Ҷавоб: -2; 4.

$$3. 0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$$

$$\text{Хал. } \frac{1}{8} \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x};$$

$$2^{-3} \cdot 4^{2x-3} = (2^{0,5} \cdot 2^{-3})^{-x};$$

$$2^{-3} \cdot 2^{2(2x-3)} = (2^{0,5-3})^{-x};$$

$$2^{-3+4x-6} = 2^{2,5x}.$$

Аз ин ҷо, $-3+4x-6=2,5x$, ё ки $1,5x=9$ шуда, $x=6$ мешавад.

Ҷавоб: 6.

4. $(0,1)^x = 1000$.

Хял. Муодиларо ба намуди зерин менависем:

$$(0,1)^x = 10^3 \text{ ё ки } 10^{-x} = 10^3$$

Аз ин ҷо, $-x = 3$ ё ки $x = -3$ мешавад.

Ҷавоб: -3 .

5. $100^{4-8x} = 1$.

Хял. $100^{4-8x} = 100^0$.

Аз ин ҷо, $4-8x = 0$ ё ки $x = 0,5$ мешавад.

Ҷавоб: $0,5$.

6. $(0,3)^x = \sqrt[3]{0,027}$.

Хял. $(0,3)^x = \sqrt[3]{0,3^3}$ ё ки $(0,3)^x = 0,3^1$. Аз ин ҷо: $x = 1$.

Ҷавоб: 1 .

7. $3^{1-2x} = \frac{1}{243}$.

Хял. $3^{1-2x} = 3^{-5}$; $1-2x = -5$; $-2x = -6$; $x = 3$.

Ҷавоб: 3 .

8. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2-1}$.

Хял. $-5 = -x^2 - 1$; $x^2 = 4$.

Аз ин ҷо, $x_{1,2} = \pm 2$ мешавад.

Ҷавоб: ± 2 .

§3. Нобаробарии нишондиҳандагӣ

Ҳар гуна нобаробариҳои нишондиҳандагиро ба воситаи табдилдиҳиҳо ба нобаробарии намуди

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad (a^{f(x)} < a^{g(x)}), \quad (0 < a \neq 1) \quad (1)$$

оварда, ҳал кардан мумкин аст. Ҳалли нобаробарии (1) аз қиматҳои $a > 1$ ва $0 < a < 1$ вобаста мебошад.

Ҳангоми ҳал намудани нобаробариҳои нишондиҳандагӣ намуди (1) ин ду теорема ро ба хотир овардан лозим аст:

Теорема 1 (бе исбот). Агар $a > 1$ бошад, он гоҳ нобаробарии

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad (a^{f(x)} < a^{g(x)})$$

ба нобаробарии

$$f(x) > g(x) \quad (f(x) < g(x)) \quad (2)$$

баробарқувва мебошад.

Теоремаи 2 (бе исбот). Агар $0 < a < 1$ бошад, он гоҳ, нобаробарии

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad (a^{f(x)} < a^{g(x)}) \quad (3)$$

ба нобаробарии

$$f(x) < g(x) \quad (f(x) > g(x)) \quad (4)$$

баробарқувва мебошад.

Акнун тарзи ҳалли якчанд нобаробариҳои нишондиҳандагиро дар зер меорем.

Мисоли 1. Нобаробарии $27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Нобаробарии додашударо дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ дар намуди зерин менависем:

$$3^{3x} \cdot 3^{1-x} < 3^{-1}$$

$$\text{ё ки,} \quad 3^{1+2x} < 3^{-1}.$$

Азбаски, асоси функсияи нишондиҳандагӣ $a = 3 > 1$ мебошад, бинобар он, дар асоси хосияти функсияи нишондиҳандагӣ ҳосил мекунем:

$$1 + 2x < -1.$$

Нобаробарии $1 + 2x < -1$ -ро ҳал карда, маҷмуи ҳалҳои онро меёбем:

$$2 + 2x < 0; \quad 2x < -2 \text{ ё ки, } x < -1.$$

Ҷавоб: $(-\infty; -1)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $2^x \cdot 5^x > (0,1) \cdot (10^{x-1})^5$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ тарафҳои рост ва чапи нобаробариро табиқ мекунем:

$$2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x = 10^x; \quad 0,1 = 10^{-1};$$

$$(10^{x-1})^5 = 10^{5(x-1)} = 10^{5x-5}.$$

Акнун нобаробарии додашуда ба намуди зерин дорад:

$$10^x > 10^{-1} \cdot 10^{5x-5} \text{ ва ё ки } 10^x > 10^{5x-6}.$$

Нобаробарии охириро ба нобаробарии $x > 5x - 6$ баробарқувва аст.

Инак, нобаробарии охириро ҳал карда, маҷмун ҳалҳоиро меёбем:

$$x > 5x - 6; \quad -4x > -6, \quad \text{ё ки } x < 1,5.$$

$$\text{Ҷавоб: } (-\infty; 1,5).$$

Мисоли 3. Нобаробарии $3^{x^2-2x} - \frac{1}{9} \geq 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Азбаски, $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ аст, пас, нобаробарии додашударо ба намуди зерин табдил медиҳем:

$$3^{x^2-2x} \geq 3^{-2}.$$

Дар асоси хосияти функсияи нишондиҳандагӣ ин нобаробарӣ бо нобаробарии $x^2 - 2x \geq -2$ ё ки $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ баробарқувва аст.

Дар тарафи чапи нобаробарии $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ квадрати пурра ҷудо карда, нобаробарии $x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 0$, ё ки $(x-1)^2 + 1 \geq 0$ -ро ҳосил мекунем, ки барои ҳар гуна $\forall x$ дуруст аст. Инак, маҷмун ҳалҳои ин нобаробарӣ фосилаи $(-\infty; +\infty)$ мебошад.

Азбаски, нобаробарии додашуда, бо нобаробарии $(x-1)^2 + 1 \geq 0$ баробарқувва аст, бинобар он, маҷмун ҳалҳои ёфтанида, маҷмун ҳалҳои нобаробарии додашуда мешавад.

$$\text{Ҷавоб: } (-\infty; +\infty).$$

Мисоли 4. Нобаробарии $2^{2x-1} > 1 - 2^{x-1}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ, нобаробарии додашуда намуди зеринро мегирад:

$$2^{2x-1} > 1 - 2^{x-1};$$

$$2^{2x} \cdot 2^{-1} > 1 - 2^x \cdot 2^{-1}$$

$$(2^x)^2 \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-1} > 1.$$

Дар нобаробарии ҳосилшуда, $2^x = y$ - ро ишорат карда, нобаробарии квадратии $y^2 + y - 2 > 0$ - ро ҳосил мекунем. Нобаробарии ҳосилшуда ба системаҳои нобаробариҳои

$$\begin{cases} y+2 > 0, \\ y-1 > 0. \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} y+2 < 0, \\ y-1 < 0 \end{cases}$$

баробарқувва мебошад.

Ҳалҳои нобаробарии системаи якум $y > 1$ ва нобаробарии системаи дуюм $y < -2$ мебошанд. Азбаски 2^x барои $\forall x$ мусбат аст, пас, ҳалли нобаробарии аввала $y > 1$, ҳалли нобаробарии $2^x > 1$ ё ки $x > 0$ аст. Ҳалли ёфташуда маҷмун ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(0; +\infty)$

Аз ҳалли нобаробариҳои дар боло муоина кардашуда ва ҳам аз хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ истифода бурда, ҳалҳои нобаробариҳои зеринро меорем.

1. $36^{1-x} < 216$.

Ҳал. $36^{1-x} < 6^3$; $6^{2-2x} < 6^3$.

Аз ин ҷо, $2-2x < 3$; $-2x < 3-2$; $-2x < 1$, ё ки $x > -0,5$.

Ҷавоб: $(-0,5; +\infty)$.

2. $81^{1-x} < 3$.

Ҳал. Нобаробариро ба намуди зерин меорем: $3^{4(1-x)} < 3^1$.

Аз ин ҷо, $4(1-x) < 1$; $4-4x < 1$; $-4x < 1-4$; $-4x < -3$, ё

$x > \frac{3}{4}$ мешавад.

Ҷавоб: $(0,75; +\infty)$.

3. $16^{1-2x} > 4$.

Ҳал. $4^{2-4x} > 4^1$; $2-4x > 1$; $-4x > 1-2$; $-4x > -1$.

Аз ин ҷо, $x < 0,25$ мешавад.

Ҷавоб: $(-\infty; 0,25)$.

4. $(0,3)^x < 0,027$.

Ҳал. Нобаробариро ба намуди зерин менависем: $(0,3)^x < (0,3)^3$. Азбаски, асоси дараҷа $a = 0,3 < 1$ аст, бинобар ин, $x > 3$ мешавад.

Ҷавоб: $(3; +\infty)$.

$$5. (0,5)^x \leq 128.$$

Ҳаял. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 128$; $2^{-x} \leq 2^7$. Аз ин ҷо, $-x \leq 7$ ё ки $x \geq -7$,

мешавад.

Ҷавоб: $[-7; +\infty)$.

$$6. \left(\frac{2}{7}\right)^x < 12,25.$$

Ҳаял. $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \frac{1225}{100}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \frac{49}{4}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{7}{2}\right)^x$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$. Азбаски,

асоси даража хурд аз 1 аст, бинобар он, $x > -2$ мешавад.

Ҷавоб: $(-2; +\infty)$.

$$7. 2^{x^2-3} < 32.$$

Ҳаял. $2^{x^2-3} < 2^5$; $x^2 - 3 < 5$; $x^2 < 8$; $x^2 < 2^3$;

$$x^2 - 2^3 < 0;$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) < 0.$$

Азбаски, дискриминанти $x^2 + 2x + 4$ хурд аз нол аст, бинобар ин, ҳар ду тарафи нобаробарии охириро ба $x^2 + 2x + 4$ тақсим карда, нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$x - 2 < 0$, ё ки $x < 2$ мешавад.

Ҷавоб: $(-\infty; 2)$.

$$8. 3^{x^2-3x} > 81$$

Ҳаял. $3^{x^2-3x} > 3^4$. Аз ин ҷо, $x^2 - 3x > 4$ мешавад.

$$x^2 - 3x - 4 > 0;$$

$$x^2 + x - 4x - 4 > 0;$$

$$x(x+1) - 4(x+1) > 0;$$

$$(x+1)(x-4) > 0.$$

Нобаробарии ҳосилшуда ба системаи нобаробариҳои зерин баробаршуда мебошад:

$$a) \begin{cases} x+1 > 0, & \begin{cases} x > -1, \\ x-4 > 0, & \begin{cases} x > 4. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x > 4$ мешавад.

$$б) \begin{cases} x+1 < 0, \\ x-4 < 0; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x < 4. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x < -1$ мешавад.

Бинобар он, қиматҳои $x < -1$ ва $x > 4$ ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошанд.

Ҷавоб: $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

МАШҚҲО

1. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\sqrt{2^x} = 1024$;

б) $2^x \cdot 3^x = 216$;

в) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$;

г) $4^x + 2^{x+1} = 24$;

г) $5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24$;

д) $3^{-2x+1} + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$;

е) $2^{-2x+3} = 2^{-x+1} + 1$;

ё) $6 \cdot 5^{-2x+3} - 1 = 5^{-x+1}$;

ж) $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

з) $5 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 15^x - 3 \cdot 5^{2x} = 0$;

и) $2 \cdot 5^{x^2} - 3 \cdot 10^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} = 0$;

й) $14 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 14^{x+1} - 2 \cdot 49^{x+1} = 0$;

й) $27 \cdot 2^{4(x^2+1)} - 3 \cdot 6^{2(x^2+1)} - 4 \cdot 3^{4(x^2+1)} = 0$;

к) $9 \cdot 256^{x^2} - 6 \cdot 144^{x^2} - 8 \cdot 81^{x^2} = 0$;

қ) $10 \cdot 81^x + 9 \cdot 225^x - 9 \cdot 625^x = 0$;

л) $9 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0$;

м) $3^{x+1} - 2 = \sqrt{10 - 3^{x+5}}$;

н) $5^x - 1 = \sqrt{6 + 2 \cdot 5^x}$.

2. Маҷмуи ҳалҳои нобаробариҳои зеринро ёбед:

а) $16^x > 0,125$;

б) $\left(\frac{1}{49}\right)^{6x} > 7\sqrt[3]{49}$;

в) $(0,1)^x = 100$;

г) $10^{x-2} > 0,01$;

г) $0,1 \leq 10^x \leq 10000$;

д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} > 25$.

БОБИ XI МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ ЛОГАРИФМӢ

§1. Логарифмиронидан ва потенсирионидан

Бори дигар таъриф ва хосиятҳои асосии логарифмро мухтасар хотиррасон мекунем.

Муодилаи

$$a^x = N \quad (1)$$

- ро дида мебароем, ки дар он ҷо, a ($0 < a \neq 1$) ва N - ададҳои мебошанд.

а) Ҳангоми $N \leq 0$ будан, муодилаи (1) ҳал надорад.

б) Ҳангоми $N > 0$ будан, муодилаи (1) соҳиби ҳалли ягона мебошад.

Ҳалли муодилаи $a^x = N$ - ро логарифми адади N аз рӯи асоси a ($a > 0, a \neq 1$) меноманд.

Таъриф. Логарифми адади N аз рӯи асоси дилхоҳи a ($a > 0, a \neq 1$) гуфта, нишондиҳандаи дараҷа C - ро меноманд, ки барои ҳосил кардани адади N адади a - ро ба ҳамон дараҷа C бардоштан лозим аст.

$$\log_a N = C \Leftrightarrow N = a^C \quad (2)$$

Дар ин ҷо, ишорати $\log_a N$ - логарифми адади N аз рӯи асоси a - ро мефаҳмонад, C - нишондиҳандаи дараҷа мебошад, ки ҳангоми a - ро ба ҳамон дараҷа бардоштан, адади N ҳосил мешавад.

Масалан, мувофиқи таъриф $\log_2 16 = 4$, чунки, $2^4 = 16$; $\log_3 \frac{1}{27} = -3$, чунки, $3^{-3} = \frac{1}{27}$ ва $\log_7 1 = 0$, чунки, $7^0 = 1$ мебошад.

Бояд дар хотир дошт, ки логарифми адади манфӣ ва нол маъно надорад.

Умуман, ифодаи $\log_a N$ ($0 < a \neq 1$), фақат ҳангоми $N > 0$ будан, маъно дорад.

Агар дар таъриф $a = 10$ бошад, он гоҳ логарифми адади N аз рӯи асоси 10-ро логарифми даҳӣ номида, бо $\lg N$ ишорат мекунанд:

$$\lg N = C \Leftrightarrow N = 10^C \quad (3)$$

Масалан, $\lg 10 = 1$, чунки, $10^1 = 10$; $\lg 1 = 0$, чунки, $10^0 = 1$;
 $\lg 100 = 2$, чунки, $10^2 = 100$; $\lg 10000 = 4$, чунки, $10^4 = 10000$;
 $\lg 0,1 = -1$, чунки, $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $\lg(0,001) = -3$, чунки,
 $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ мешавад.

Агар дар таъриф $a = e$ бошад, он гоҳ, логарифми адади N аз рӯи асоси e -ро, ки логарифми натуралӣ номида, бо $\ln N$ ишорат мекунанд:

$$\ln N = C \Leftrightarrow N = e^C.$$

Масалан, $\ln e = 1$; $\ln e^k = k$; $\ln \frac{1}{e} = -1$; $\ln 1 = 0$ мебошад.

М А Ш Қ Қ О

а) $\log_3(2x) = \log_3(x+4) \Rightarrow 2x = x+4 \Rightarrow x = 4$;

б) $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 \Rightarrow x = 32$;

в) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$;

г) $\log_4 n = \log_2 \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log_2 n$;

г) $\log_4 n = \log_{2^2} n = \frac{1}{2} \log_2 n$.

1. Хосиятҳои логарифм дар ҳисобкунии ифодаҳои мураккаб, ҳалли муодила ва нобаробариҳои логарифмӣ мавқеи муҳимро мебошад. Масалан, ифодаҳои мураккаб бо ёрии хосиятҳои логарифм, ба воситаи логарифмҳои ададҳои дар он буда, ифода карда, ҳисоб карда мешаванд. Ин ҳел намуни дигаргунсозиро логарифмиронидани ифода меноманд.

Мисоли 1. Ифодаи $A = \frac{a^3 \cdot \sqrt[3]{b^2}}{c \cdot \sqrt[4]{k \cdot d^3}}$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Ду тарафи ифодаи додашударо аз рӯи логарифми асосаш дилҳои n ($n > 0$, $n \neq 1$) логарифмирониди, баъд дар асоси хосияти логарифма онро дар намуни зерин менависем:

$$\log_n A = \log_n \frac{a^3 \cdot \sqrt[3]{b^2}}{c \cdot \sqrt[4]{k \cdot d^3}};$$

$$\log_n A = \log_n (a^3 \cdot \sqrt[3]{b^2}) - \log_n (c \cdot \sqrt[4]{k \cdot d^3}).$$

Дар асоси хосиятҳои логарифмҳо тарафи ростии баробарии охириро табдил медиҳем:

$$\begin{aligned}\log_n(a^3 \cdot \sqrt[3]{b^2}) &= \log_n a^3 + \log_n \sqrt[3]{b^2} = \\ &= 3\log_n a + \log_n b^{\frac{2}{3}} = 3\log_n a + \frac{2}{3}\log_n b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_n(c \cdot \sqrt[4]{k \cdot d^3}) &= \log_n c + \log_n \sqrt[4]{k \cdot d^3} = \log_n c + \log_n (kd^3)^{\frac{1}{4}} = \\ &= \log_n c + \frac{1}{4}\log_n(kd^3) = \log_n c + \frac{1}{4}(\log_n k + 3\log_n d).\end{aligned}$$

Дар натиҷа, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\log_n A = 3\log_n a + \frac{2}{3}\log_n b - \log_n c - \frac{1}{4}(\log_n k + 3\log_n d).$$

Дар ин ҷо, ҳисобкунии логарифми ифодаи A нисбат ба ҳисобкунии логарифмҳои ададҳои a, b, c, d ва k оварда шудааст.

Мисоли 2. Ифодаи $A = \sqrt[3]{\frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}}$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Монанди мисоли якум, ифодаи додашударо аз рӯи логарифми асосаш n ($n > 0, n \neq 1$) логарифмиронида, мувофиқи хосиятҳои логарифм онро сода мекунем:

$$\begin{aligned}\log_n A &= \log_n \sqrt[3]{\frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}} = \\ &= \frac{1}{3}\log_n \frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)} = \\ &= \frac{1}{3}(\log_n a^2(a+b)^2 - \log_n b(a-b)) = \\ &= \frac{1}{3}(\log_n a^2 + \log_n (a+b)^2 - (\log_n b + \log_n (a-b))) = \\ &= \frac{1}{3}(2\log_n a + 2\log_n (a+b) - \log_n b - \log_n (a-b)) = \\ &= \frac{2}{3}\log_n a - \frac{1}{3}\log_n b + \frac{2}{3}\log_n (a+b) - \frac{1}{3}\log_n (a-b). \\ \log_n A &= \frac{2}{3}\log_n (a+b) - \frac{1}{3}\log_n (a-b) + \frac{2}{3}\log_n a - \frac{1}{3}\log_n b.\end{aligned}$$

IV. Потенсиронидан. Дар ҳалли бисёр масъалаҳои амалӣ ва назарӣ лозим меояд, ки дар ҳисобкуниҳо табилолоти ба амали логарифмиронидан ҷаппаро иҷро намоем.

Агар якҷанд логарифми ифодаҳои содаи асосҳои якхела доштаро аз рӯи аломаташон дар асоси ҳосиятҳои логарифм ба логарифми як ифода табилол дихем, он гоҳ аз логарифм озод намудани ифода, яъне, амали ба амали логарифмиронидан ҷаппаро, амали потенсиронидан меноманд.

Масалан, агар $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ бошад, он гоҳ,

$$\log_n A = \log_n a + \log_n b - \log_n c \Rightarrow \log_n A = \log_n \frac{a \cdot b}{c} \Rightarrow A = \frac{a \cdot b}{c}$$

мешавад.

Мисоли 3. A - ро ёбед, агар,

$$\log_n A = 2 \log_n a + \frac{1}{2} \log_n b - \frac{2}{3} \log_n c - \frac{1}{3} \log_n d$$

бошад.

Ҳал. Баробарии додашударо дар асоси ҳосиятҳои логарифм бо логарифми як ифода, ки намуни

$$\begin{aligned} \log_n A &= \log_n a^2 + \log_n \sqrt{b} - \frac{1}{3} (\log_n c^2 + \log_n d) = \\ &= \log_n (a^2 \cdot \sqrt{b}) - \frac{1}{3} \log_n (c^2 \cdot d) = \\ &= \log_n (a^2 \cdot \sqrt{b}) - \log_n \sqrt[3]{c^2 \cdot d} = \\ &= \log_n \frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2 \cdot d}} \end{aligned}$$

-ро дорад, навишта, дар натиҷа, $\log_n A = \log_n \frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2 \cdot d}}$ - ро пайдо

мекунем. Аз сабаби он, ки ду тарафи баробарии ҳосилшуда логарифмҳои асосҳои якхеларо доранд, бинобар он, онро потенсиронида ҳосил мекунем:

$$A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2 \cdot d}}.$$

Мисоли 4. Ҳангоми $\log_n A = \log_n c + 5$ будан, A - ро ёбед.

Ҳал. Дар асоси ҳосияти логарифм $n = \log_n a^n$ ($\log_n a = 1$) баробарии додашударо дар намуни

$$\log_a A = \log_a c + \log_a a^5$$

навишта, дар натиҷа

$$\log_a A = \log_a (c \cdot a^5)$$

-ро пайдо мекунем. Баробарии охириро потенсирунида, дорой

$$A = c \cdot a^5$$

мешавем.

Мисоли 5. Агар $\log_5 x = 2\log_5 6 + 3\log_5 b - 2\log_5 3$ бошад, x -ро ёбед.

Ҳал. Дар ифодаи додашуда, хосиятҳои логарифмро татбиқ намуда, баробариҳои зеринро навиштан мумкин аст:

$$\log_5 x = \log_5 6^2 + 3\log_5 b - \log_5 3^2;$$

$$\log_5 x = \log_5 36 + \log_5 b^3 - \log_5 9;$$

$$\log_5 x = \log_5 \frac{36 \cdot b^3}{9};$$

$$\log_5 x = \log_5 (4b^3)$$

Баробарии ҳосилшударо потенсирунида, $x = 4b^3$ -ро ҳосил мекунем.

§2. Муодилаҳои логарифмӣ

Муодилаи логарифмӣ гуфта, муодилаи намуди

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad (0 < a \neq 1) \quad (1)$$

ва муодилаи ба ин намуд овардашавандаро меноманд.

Барои муодилаи логарифмӣ ҳал кардан пеш аз ҳама соҳаи қиматҳои имконпазири функсияҳои $f(x)$, $g(x)$ ва параметрҳоро тадқиқ кардан ва дар асоси хосиятҳои логарифм муодилаи додашударо ба намуди (1) овардан лозим аст.

Ду теоремаро меорем, ки истифодаи онҳо дар иҷрои корҳои амалӣ фойданок мебошад.

Теоремаи 1 (бе исбот). Муодилаи $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ба системаи омехтаи

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (2)$$

баробарқувва мебошад.

Аз тарафи дигар системаи (2) дар навбати худ ба ҳар яке аз системаҳои

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (3)$$

баробарқувва мебошад.

Агар муодила дар намуди

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x) \quad (4)$$

дода шуда бошад, он гоҳ, дар асоси хосияти логарифм муодиларо дар намуди

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a h(x) \quad (5)$$

навиштан мумкин аст. Дар ин ҳолат муодилаҳои (4) ва (5) баробарқувва нашуданашон ҳам мумкин, чунки, соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи муодилаи (4) аз рӯи системаи

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

ёфта мешавад, аммо соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи муодилаи (5) бошад, аз рӯи $f(x) \cdot g(x) > 0$ ёфта мешавад, ки вай дар навбати худ бо системаҳои нобаробарҳои

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad (6)$$

баробарқувва мебошад. Ҳангоми ҳалли муодилаи (5) решаи бегона пайдо шуданаш мумкин аст, бинобар он аз решаҳои ёфташуда, он решаҳо ҳалли муодилаи (4) мешаванд, ки онҳо ба соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи муодилаи (4) тааллуқ дошта бошанд, яъне, системаи омехтаи

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ f(x)g(x) = h(x) \end{cases}$$

- ро қаноат кунонанд.

Теоремаи 2 (бе исбот). *Муодилаи*

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

ба системаи омехтаи

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) = g(x), \\ a > 0, \\ a \neq 1 \end{cases}$$

баробарқувва мебошад.

Мисоли 1. Муодилаи $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Соҳаи қиматҳои равои муодиларо меёбем:

$$\begin{cases} x+4 > 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 1-2x > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -4, \\ x > -1,5, \\ x < 0,5; \end{cases} \begin{cases} x > -1,5, \\ x < 0,5. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, СКР-и муодила $-1,5 < x < 0,5$ мешавад.

Акнун муодилаи матлубро ҳал мекунем:

$$\lg((x+4) \cdot (2x+3)) = \lg(1-2x).$$

Баробарии охириро потенсирунида, ҳосил мекунем:

$$(x+4) \cdot (2x+3) = (1-2x).$$

Аз ин ҷо, $2x^2 + 13x + 11 = 0$ шуда, решаҳои он, $x_1 = -5,5$ ва $x_2 = -1$ мебошад.

Азбаски қимати $x = -1$ ба фосилаи $(-1,5; 0,5)$ тааллуқ дорад, пас, $x = -1$ ҳалли муодилаи додашуда мебошад. Қимати $x = -5,5$ ба фосилаи $(-1,5; 0,5)$ тааллуқ надорад, бинобар он, $x = -5,5$ барои муодилаи матлуб ҳалли бегона мебошад.

Ҷавоб: -1 .

Мисоли 2. Муодилаи $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Соҳаи қиматҳои равои муодиларо меёбем:

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ x+14 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x > -14 \end{cases} \text{ ё ки СКР } (-2; +\infty) \text{ мешавад.}$$

Маҷмун қиматҳои x , ки барои онҳо муодила маъно дорад, фосилаи $(-2; +\infty)$ аст, чунки, функсияи логарифмӣ дар соҳаи

ададҳои ҳақиқӣ, фақат барои аргументҳои мусбат муайян карда шудааст.

Акиун тарафи рости муодилаи матлубро дар асоси хосияти логарифм дар намуди $6 = \log_2 2^6$ навишта, баъд дар асоси хосияти логарифм, муодиларо дар намуди зерин меорем:

$$\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = \log_2 2^6;$$

$$\log_2((x+14) \cdot (x+2)) = \log_2 2^6.$$

Муодилаи охириро потенсирунида, дорони $(x+14) \cdot (x+2) = 2^6$ мешавем. Аз ин ҷо, $x^2 + 16x - 36 = 0$ шуда, решаҳои он ба $x_1 = -18$ ва $x_2 = 2$ баробар мешаванд.

Азбаски, аз решаҳои ёфташуда, $x_2 = 2$ ба фосилаи $(-2; +\infty)$ тааллуқ дошта, $x_1 = -18$ ба фосилаи $(-2; +\infty)$ тааллуқ надорад. Бинобар он, решаи $x_2 = 2$ ҳалли муодилаи логарифмӣ мешавад.

Ҷавоб: 2.

Мисоли 3. Муодилаи $\lg(x^2 - 3x - 5) = \lg(7 - 2x)$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодилаи додашуда, дар асоси шартҳои теоремаи 1 ба системаи омехтаи

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x, \\ x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0 \end{cases} \quad \text{ё ки} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x, \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад. Системаи омехтаро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 7 - 2x > 0, \\ x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x > -7, \\ x^2 - x - 12 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3,5, \\ (x+3)(x-4) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Аз ин ҷо, } \begin{cases} x < 3,5, \\ x = -3. \end{cases} \quad \text{ё ки} \quad \begin{cases} x < 3,5, \\ x = 4 \end{cases} \quad \text{мешавад.}$$

Решаи $x = 4$ ба СКР дохил намешавад. Бинобар он, фақат решаи $x = -3$ нобаробарии $x < 3,5$ -ро қаноат мекунонад.

Ҷавоб: -3.

Мисоли 4. Муодилаи $x^{\lg x - 4} = 100$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Маҷмӯи қиматҳои x , дар фосилаи $(0; +\infty)$ муайян аст.

Он гох, хар ду тарафи муодилаи додашударо бо логарифми асосаш 10 логарифмиронида, ҳосил мекунем:

$$\lg x^{\lg x - 1} = \lg 100;$$

$$(\lg x - 1)\lg x = \lg 100;$$

$$(\lg x - 1)\lg x = \lg 10^2;$$

$$(\lg x - 1)\lg x = 2\lg 10;$$

$$(\lg x - 1)\lg x = 2;$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Дар баробарии охирон $\lg x = y$ -ро ишорат карда, муодилаи квадратии $y^2 - y - 2 = 0$ - ро ҳосил мекунем, ки решаҳои $y_1 = -1$ ва $y_2 = 2$ мебошанд. Решаҳои $y_1 = -1$ ва $y_2 = 2$ - ро ба $\lg x = y$ гузошта, қиматҳои x - ро меёбем:

$$1) \text{ Ҳангоми } y_1 = -1: \lg x_1 = -1; \lg x_1 = \lg 10^{-1};$$

$$x_1 = 10^{-1}; x_1 = 0,1.$$

$$2) \text{ Ҳангоми } y_2 = 2: \lg x_2 = 2; \lg x_2 = \lg 10^2;$$

$$\lg x_2 = \lg 100; x_2 = 100.$$

Азбаски, қиматҳои $x = 0,1$ ва $x = 100$ ба фосилаи $(0; +\infty)$ тааллуқ доранд, бинобар он, $x = 0,1$ ва $x = 100$ ҳалҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Ҷавоб: 0,1; 100.

Мисоли 5. Муодилаи $\log_4(x+12)\log_x 2 = 1$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x > 0$ ва $x \neq 1$ муайян аст. Барои ҳал намудани муодила, аввал онро ба асосҳои якхела меоварем. Бинобар ин, $\log_x 2$ -ро ба логарифми асосаш 4 меорем.

$$\log_x 2 = \frac{\log_4 2}{\log_4 x} = \frac{\log_4 \sqrt{4}}{\log_4 x} = \frac{\frac{1}{2} \log_4 4}{\log_4 x} = \frac{1}{2 \log_4 x} = \frac{1}{\log_4 x^2}.$$

Инак, муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$$\log_4(x+12) \cdot \frac{1}{\log_4 x^2} = 1.$$

Ду тарафи муодилаи ҳосилшударо ба $\log_4 x^2$ зарб зада, муодилаи

$$\log_4(x+12) = \log_4 x^2$$

-ро пайдо мекунем. Муодилаи охиронро потенсиронида ба $x+12 = x^2$ доро мешавем. Аз ин ҷо, $x^2 - x - 12 = 0$ шуда, решаҳои $x_1 = -3$ ва $x_2 = 4$ мешавад. Аз сабаби он, ки x мусбат аст, фақат $x = 4$ ҳалли муодилаи додашуда мешавад.

Ҷавоб: 4.

Мисоли 6. Муодилаи $\log_2^2 x - \log_{1/2} x + 2 = 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. СКР: $x > 0$. Дар ҷамъшавандани дуҷум ба асоси 2 гузашта, гузориши $\log_2 x = y$ -ро истифода мекунем, он гоҳ

$$\log_{1/2} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt[3]{2}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{3} \log_2 2} = 3 \log_2 x = 3y$$

мешавад. Акнун муодилаи додашударо ба намуди $y^2 - 3y + 2 = 0$ навишта мешавад. Решаҳои муодилаи квадратии ҳосилшуда ададҳои 1 ва 2 мебошанд. Муодилаҳои $\log_2 x = 1$ ва $\log_2 x = 2$ -ро ҳал карда, меёбем:

$$x_1 = 2^1 = 2 \text{ ва } x_2 = 2^2 = 4.$$

Ҷавоб: 2; 4.

Мисоли 7. Муодилаи $\log_{(x+4)}(x^2 - 1) = \log_{(x+4)}(5 - x)$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Барои ҳал намудани муодила аз шарти теоремаи 2 истифода мебарем.

Муодила дар асоси теоремаи 2 ба системаҳои зерин баробарқувва мебошанд:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ (x-1)(x+1) > 0, \\ x < 5, \\ x > -4, \\ x \neq -3; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x > 1, \\ x < -1, \\ x < 5, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Пас, $СКР (-4; -3) \cup (-3; -1) \cup (1; 5)$ мешавад. Решаҳои муодилаи квадратии $x^2 + x - 6 = 0$ ба $x_1 = 2$ ва $x_2 = -3$ баробар мебошанд. Аз решаҳои ёфташуда, фақат қимати $x_1 = 2$ ҳалли муодила шуда метавонад, чунки, $x = 2$ ҳамаи дигар нобаробариҳои дар системаи омехта бударо қаноат мекунонад.

Ҷавоб: 2.

§3. Нобаробариҳои логарифмӣ

Ҳар гуна нобаробариҳои логарифмиро бо ёрии табдилдиҳиҳо ба намуди

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad (0 < a \neq 1)$$

овардан мумкин аст.

Ҳангоми ҳал намудани нобаробариҳои логарифмӣ ҳам аз хосиятҳои функсияи логарифмӣ истифода мебаранд. Дар ин ҷо ду теоремаро (бе исбот) меорем, ки истифодаи онҳо ҳангоми ҳалли нобаробариҳои логарифмӣ зарур аст.

Теоремаи 1 (бе исбот). Агар $a > 1$ бошад, он гоҳ, нобаробариҳои

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

ба системаи нобаробариҳои

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

баробарқувва мебошад.

Теоремаи 2 (бе исбот). Агар $0 < a < 1$ бошад, он гоҳ, нобаробариҳои

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

ба системаи нобаробариҳои

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

баробарқувва мебошад.

Мисоли 1. Нобаробариҳои $\log_2(2x^2 - 4x - 14) \leq -1$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз айнӣяги $-1 = \log_2 2$ истифода бурда, нобаробариро дар намуди

$$\log_2(2x^2 - 4x - 14) \leq \log_2 2$$

менависем. Азбаски, асосҳои логарифм адади аз воҳид хурд аст, пас, дар асоси теоремаи 2 нобаробарии

$$\log_2(2x^2 - 4x - 14) \leq \log_2 2$$

ба системаи

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 14 > 0, \\ 2x^2 - 4x - 14 \geq 2 \end{cases}$$

баробарқувва мебошад.

Аз сабаби он, ки система ба нобаробарии $2x^2 - 4x - 14 \geq 2$ баробарқувва мебошад, пас, аз нобаробарии $2x^2 - 4x - 14 \geq 2$ ҳосил мекунем:

$$2x^2 - 4x - 14 - 2 \geq 0;$$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0;$$

$$(x + 2)(x - 4) \geq 0.$$

Пас, қиматҳои $x \leq -2$ ва $x \geq 4$ ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошанд. Аз ин ҷо, маҷмуи $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$ ҳалли нобаробарии додашуда мебошад.

Мисоли 2. Нобаробарии $x^{1/2} > 10^4$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Маҷмуи қиматҳои x , ба фосилаи $(0; +\infty)$ мутааллиқ аст. Пас, нобаробарии додашударо бо логарифми асосаш 10 логарифмиронида ҳосил мекунем:

$$\lg x^{1/2} > \lg 10^4;$$

$$\lg x \lg x > \lg 10^4;$$

$$\lg x \lg x > 4 \lg 10;$$

$$\lg^2 x > 4;$$

$$\lg^2 x - 2^2 > 0;$$

$$(\lg x - 2)(\lg x + 2) > 0.$$

Нобаробарии охири ба ду системаи нобаробариҳои зерин баробарқувва мебошад:

$$а) \begin{cases} \lg x - 2 > 0; \\ \lg x + 2 > 0; \end{cases} \begin{cases} \lg x > 2; \\ \lg x > -2; \end{cases} \begin{cases} x > 10^2; \\ x > 10^{-2}. \end{cases} \text{ Аз ин ҷо: } x > 100.$$

$$б) \begin{cases} \lg x - 2 < 0; \\ \lg x + 2 < 0; \end{cases} \begin{cases} \lg x < 2; \\ \lg x < -2; \end{cases} \begin{cases} x < 10^2; \\ x < 10^{-2}. \end{cases} \text{ Аз ин ҷо: } x < 0,01.$$

Азбаски, x мусбат аст, бинобар он фосилаи $(0; 0,01) \cup (100; +\infty)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(0; 0,01) \cup (100; +\infty)$.

Мисоли 3. Муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$1. \lg \frac{x}{4} = -2.$$

$$\text{Ҳал. СҚР: } \frac{x}{4} > 0, \text{ ё ки } x > 0. \frac{x}{4} = 10^{-2}; \frac{x}{4} = \frac{1}{100}; x = \frac{1}{25}.$$

Ҷавоб: 0,25.

$$2. \lg(x^2 - 26) = 1.$$

$$\text{Ҳал. СҚР: } (-\infty; -\sqrt{26}) \cup (\sqrt{26}; +\infty). x^2 - 26 = 10; x^2 = 36.$$

Аз ин ҷо $x_1 = -6; x_2 = 6$.

Ҷавоб: -6; 6.

$$3. \lg(x^2 + 1) = 1.$$

$$\text{Ҳал. СҚР: } (-\infty; +\infty). x^2 + 1 = 10; x^2 = 9, \text{ ё ки } x_1 = -3 \text{ ва } x_2 = 3.$$

Ҷавоб: -3; 3.

$$4. \lg(676 - x^2) = 2.$$

$$\text{Ҳал. СҚР: } (-26; 26). 676 - x^2 = 10^2; 676 - x^2 = 100;$$

$$x^2 = 576; x_1 = -24; x_2 = 24.$$

Ҷавоб: -24; 24.

$$5. \lg x = \lg 2,4 + \lg 15.$$

$$\text{Ҳал. СҚР: } x > 0. 5. \lg x = \lg(2,4 \cdot 15); x = 2,4 \cdot 15 \text{ ё } x = 36.$$

Ҷавоб: 36.

$$6. \lg(2x + 10) = 4 \lg 2 + \lg 3.$$

$$\text{Ҳал. СҚР: } 2x + 10 > 0, \text{ ё ки } 2x > -5.$$

$$\lg(2x + 10) = \lg(2^4 \cdot 3);$$

$$2x + 10 = 48; 2x = 38; x = 19.$$

Ҷавоб: 19.

$$7. \lg(5-x) = \frac{1}{3} \lg 27 - 1.$$

Ҳал. СКР: $5-x > 0$, ёки $x < 5$. $\lg(5-x) = \lg 27^{\frac{1}{3}} - 1$;

$$\lg(5-x) = \lg \sqrt[3]{27} - 1; \lg(5-x) = \lg 3 - \lg 10; \lg(5-x) = \lg \frac{3}{10};$$

$$5-x = \frac{3}{10}; 5 - \frac{3}{10} = x; x = \frac{50-3}{10}; x = \frac{47}{10}.$$

Ҷавоб: 4,7.

$$8. \lg x = \frac{1}{3} \lg 24 + \frac{2}{3} \lg 6.$$

Ҳал. СКР: $x > 0$. $\lg x = \lg(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{6^2})$; $x = \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{6^2}$;

$$x = \sqrt[3]{24 \cdot 36} = \sqrt[3]{6 \cdot 4 \cdot 36} = 6\sqrt[3]{4}.$$

Ҷавоб: $6\sqrt[3]{4}$.

Мисоли 4. Нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

$$1. \lg(1-2x) < 2.$$

$$\text{Ҳал. а) } \begin{cases} 1-2x > 0, & \begin{cases} -2x > -1, \\ 1-2x < 10^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0,5, \\ -2x < 99; \end{cases} & \begin{cases} x < 0,5, \\ x > -49,5. \end{cases} \end{cases}$$

Аз ин ҷо, фосилаи $(-49,5; 0,5)$ маҷмӯи ҳалҳои нобаробариҳо додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(-49,5; 0,5)$.

$$2. -\lg \frac{5x}{4} > 1.$$

$$\text{Ҳал. } \begin{cases} \frac{5x}{4} > 0, \\ \lg \frac{5x}{4} < -1; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ \frac{5x}{4} < 10^{-1}; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ \frac{5x}{4} < \frac{1}{10}; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x < \frac{2}{25}. \end{cases}$$

Аз ин ҷо фосилаи $(0; 0,08)$ маҷмӯи ҳалҳои нобаробариҳо додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(0; 0,08)$.

$$3. \lg(x-8) > 0.$$

Хал. $x-8 > 10^0$; $x-8 > 1$; $x > 9$. Пас, фосилаи $(9; +\infty)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарӣ мебошад.

Ҷавоб: $(9; +\infty)$.

$$4. \lg \frac{x+2}{5} < -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Хал. } \begin{cases} \frac{x+2}{5} > 0, \\ \lg \frac{x+2}{5} < -1 \cdot \lg 10; \end{cases} & \begin{cases} x+2 > 0, \\ \lg \frac{x+2}{5} < \lg 10^{-1}; \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 > 0, \\ \frac{x+2}{5} < 10^{-1}; \end{cases} & \begin{cases} x+2 > 0, \\ \frac{x+2}{5} < \frac{1}{10}; \end{cases} & \begin{cases} x+2 > 0, \\ x+2 < 0,5; \end{cases} & \begin{cases} x > -2, \\ x < -1,5. \end{cases} \end{aligned}$$

Аз ин ҷо, фосилаи $(-2; -1,5)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(-2; -1,5)$.

$$5. -\lg(5-x) > 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Хал. } \begin{cases} 5-x > 0, \\ \lg(5-x) < -2; \end{cases} & \begin{cases} -x > -5, \\ \lg(5-x) < -2 \cdot \lg 10; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5, \\ \lg(5-x) < \lg 10^{-2}; \end{cases} & \begin{cases} x < 5, \\ 5-x < 10^{-2}; \end{cases} & \begin{cases} x < 5, \\ 5-x < 0,01; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5, \\ -x < 0,01-5; \end{cases} & \begin{cases} x < 5, \\ -x < 4,99; \end{cases} & \begin{cases} x < 5, \\ x > 4,99. \end{cases} \end{aligned}$$

Аз ин ҷо фосилаи $(4,99; 5)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(4,99; 5)$.

$$6. \lg(31-2x) - \lg 11 > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Хал. } \begin{cases} 31-2x > 0, \\ \lg(31-2x) > \lg 11; \end{cases} & \begin{cases} -2x > -31, \\ 31-2x > 11; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 15,5, \\ -2x > 11-31; \end{cases} & \begin{cases} x < 15,5, \\ -2x > -20; \end{cases} & \begin{cases} x < 15,5, \\ x < 10. \end{cases} \end{aligned}$$

Аз ин ду нобаробарии охирон, нобаробарии $x < 10$, яъне, фосилаи $(-\infty; 10)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарӣ шуда метавонад.

Ҷавоб: $(-\infty; 10)$.

7. $\log_{x+0,5}(3-x) > 1$.

Ҳал. Нобаробарии додашуда, ба нобаробариҳои зерин баробаркувва мебошад:

$$\begin{cases} 3-x > 0, \\ x+0,5 > 1, \\ 3-x > x+0,5 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 3-x > 0, \\ 0 < x+0,5 < 1, \\ 3-x < x+0,5. \end{cases}$$

Нобаробарии якумро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 3-x > 0, \\ x+0,5 > 1, \\ 3-x > x+0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x > 0,5, \\ -2x > -2,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x > 0,5, \\ x < 1,25 \end{cases} \quad \text{ё ки } (0,5; 1,25).$$

Нобаробарии дуюмро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 3-x > 0, \\ 0 < x+0,5 < 1, \\ 3-x < x+0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x+0,5 > 0, \\ x+0,5 < 1, \\ -2x < -2,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x > -0,5, \\ x < 0,5, \\ x > 2,5 \end{cases} \quad \text{ё ки } x \in \emptyset.$$

Ҷавоб: $(0,5; 1,25)$.

МАШҚҲО

1. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\log_{x-2}(x^2 - 6x + 10) = 1$;

б) $2 \log_7 \sqrt{x} = \log_7(9 - 2x)$

в) $\lg(4,5 - x) = \lg 4,5 - \lg x$;

г) $\log_2^2 x = 4 - \log_2 x$;

р) $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1$;

д) $x^{\log_2 x} = 16$;

е) $x^{\lg x - 2} = 27$;

ё) $x^{(\lg x)} = 900$.

2. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\lg x + \lg(x-1) < \lg 6$;

б) $\log_{0,5} x > \log_2(3-2x)$

в) $\log_{0,3}(2,3-2x) < 1$;

г) $\ln^2 x - 2 < \ln x$;

р) $\ln(3+2x-x^2+e^2) > 2$.

БОБИ XII МУОДИЛА ВА НОБАРОВАРИҶОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

§1. ИФОДАҶОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

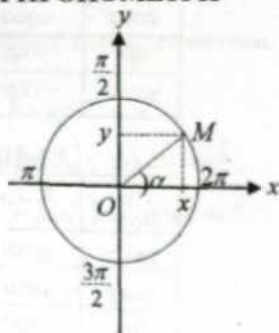
1. ТАЪРИФИ ФУНКСИЯҶОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0);$$

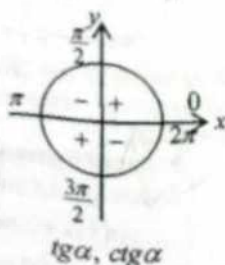
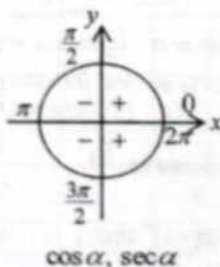
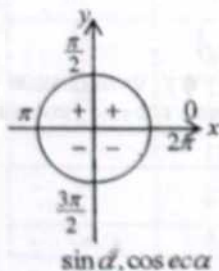
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$



Расми 1

2. Аломатҳои функсияҳои тригонометрӣ:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	+	-	-	-
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	-	-	+	+
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	-	+	-	-



3. Формулаҳои мувофиқоварӣ:

3.1. Номи функсия тағйирнопазир аст:

x	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi \pm \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

3.2. Номи функсия тағйир меёбад:

x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Дар ҳақиқат:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ + \alpha) &= \sin 90^\circ \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos 90^\circ = \\ &= 1 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot 0 = \cos \alpha;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ + \alpha) &= \cos 90^\circ \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin 90^\circ = \\ &= 0 \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot 1 = -\sin \alpha.\end{aligned}$$

4. Ҷуфт ва тоқии функсияҳои тригонометрии

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sec(-\alpha) = \sec \alpha \quad \left(\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}\right);$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha \quad \left(\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}\right).$$

Функсияҳои $\cos$ (косинус) ва $\sec$ (секанс) **ҷуфт**, функсияҳои $\sin$ (синус), tg (тангенс), ctg (котангенс) ва cosec (косеканс) **тоқанд**.

5. Даврии будани функсияҳо

Барои ҳамаи $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(\pm \alpha + 2\pi n) = \pm (-1)^n \sin \alpha;$$

$$\cos(\pm \alpha + 2\pi n) = (-1)^n \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\pm \alpha + \pi) = \pm \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(\pm \alpha + \pi) = \pm \operatorname{ctg} \alpha.$$

Мисоли 1. Қимати ифодаи $\sqrt{3}\operatorname{tg} 780^\circ - 2\sin 750^\circ + \cos 1170^\circ$ -ро ёбед.

Ҳал. Формулаҳои мувофиқовариро татбиқ карда, қиматҳои функсияҳоро меёбем:

$$\operatorname{tg} 780^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 720^\circ) = \operatorname{tg}(60^\circ + 4 \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sin 750^\circ = \sin(30^\circ + 720^\circ) = \sin(30^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 1080^\circ) = \cos(90^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0.$$

$$\text{Пас, } \sqrt{3}\operatorname{tg} 780^\circ - 2\sin 750^\circ + \cos 1170^\circ =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 3 - 1 + 0 = 2.$$

6. Қиматҳои функсияҳои тригонометрии баъзе кунҷҳо:

Радиянҳо	Градусҳо	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0	0°	0	1	0	в/н
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	в/н	0
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
π	180°	0	-1	0	в/н
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	в/н	0
2π	360°	0	1	0	в/н

Эзоҳ: в/н - вуҷуд надорад.

Барои ёфтани кимати функсияҳое, ки дар ин ҷадвал нестанд, аз формулаҳои мувофиқоварӣ истифода бурдан лозим аст.
Масалан:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ ё ки}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

7. Формулаҳои сумма ва фарқи аргумент

а) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha;$

б) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha;$

в) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta;$

г) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta;$

г) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$

д) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$

е) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha};$

ё) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$

Исботи баъзе айниятҳо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}}{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}. \end{aligned}$$

8. Формулаҳои кунчи дучанда ва нисфи кунҷ

а) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

б) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

в) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;

г) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

Исботи ин формулаҳо аз формулаҳои синус, косинус ва тангенсӣ суммаи ду аргументҳо, ҳангоми $\beta = \alpha$ будан, бармеоянд.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

р) $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$;

д) $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$;

е) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$;

ё) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$.

Исботи формулаҳо барои $\sin \frac{\alpha}{2}$ ва $\cos \frac{\alpha}{2}$ аз ду айниятҳои зерин, ҳангоми узв ба узв ҷамъ ва тарҳ кардан, бармеояд:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1;$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}};$$

$$2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

9. Формулаҳои табдилдиҳии сумма ва фарк ба ҳосили зарб

$$a) \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2};$$

$$б) \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2};$$

$$в) \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2};$$

$$г) \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

Исботи яке аз ин формулаҳоро меорем. Аз формулаҳои

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

бармеояд, ки $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$ мебошад. Дар ин ҷо,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \quad (1)$$

ишора намуда, қиматҳои α ва β - ро меёбем:

$$2\alpha = x + y \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2};$$

$$2\beta = x - y \Rightarrow \beta = \frac{x-y}{2}. \quad (2)$$

Қиматҳои (1) ва (2) - ро ба формулаи охириро гузошта, суммаи синусҳоро ба ҳосили зарб табдил медиҳем:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}.$$

Аз формулаҳои

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

бармеояд, ки $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$ мебошад. Дар ин ҷо ҳам, аз ишоратҳои (1) ва (2) истифода бурда, баробарии охириро дар ин намуд менависем:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}.$$

10. Формулахон табдилдихи хосили зарб ба сумма ва фарк

$$a) \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$б) \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$в) \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Мисол. Ҳисоб кунед: а) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$; б) $\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ$.

$$\text{Ҳал. а) } \sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{60^\circ}{2} \cdot \cos \frac{90^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$б) \operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ}{\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(75^\circ - 15^\circ)}{\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(90^\circ - 15^\circ) \cdot \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sin(2 \cdot 15^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

Ҷавоб: $2\sqrt{3}$.

Мисоли 3. Қимати касри $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ -ро ҳангоми $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$

будан, ҳисоб кунед.

Ҳал. Сурат ва махраҷи касри додашударо ба $\cos \alpha$ ($\cos \alpha \neq 0$) тақсим карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1}.$$

Анкун қимати $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$ - ро мегузорем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{\frac{2}{5} - 1}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{3}{7}.$$

Ҷавоб: $-\frac{3}{7}$.

Мисоли 4. Агар $\operatorname{tg} \alpha = 2$ бошад, қимати $\frac{2 \sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ - ро ёбед.

$$\begin{aligned} \text{Ҳал. } \frac{2 \sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} &= \frac{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{2 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{4 \cdot 2}{2 - 2^2} = \frac{8}{2 - 4} = \frac{8}{-2} = -4. \end{aligned}$$

Ҷавоб: -4 .

Мисоли 5. Агар $\sin \alpha + \cos \alpha = -0,7$ бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Азбаски, $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ва $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ мебошад, пас аз

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha \text{ бармеояд, ки}$$

$$(-0,7)^2 = 1 + \sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 0,49 - 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = -0,51$$

мешавад.

Ҷавоб: $-0,51$.

§2. Муодилаҳои тригонометрии

1. Муодилаҳои содатарини тригонометрии

Муодилаи содатарини тригонометрия гуфта, муодилаи намуни $f(x) = a$ - ро, ки $f(x)$ яке аз функцияҳои содатарини тригонометрии $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ аст, меноманд.

А. Агар $\sin x = a$ ($-1 \leq a \leq 1$) бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳоиаш бо формулаи

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

ифода мешавад.

Мисоли 1. Муодилаи $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз формулаи (1) меёбем:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z. \quad \text{Ҷавоб: } (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Мисоли 2. Муодилаи $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. $3x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z;$

$$3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} n, n \in Z.$$

$$\text{Ҷавоб: } (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} n, n \in Z.$$

Мисоли 3. Муодилаи $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Ба монанди мисоли 1 рафтор намуда, ҳаллашро аз рӯи формулаи (1) муайян мекунем:

$$\frac{x}{4} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ҷавоб: } (-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$$

Мисоли 4. Муодилаи $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Ба монанди муодилаҳои дар боло муоина кардашуда рафтор намуда, маҷмун ҳалҳои муодилаи додашударо муайян мекунем:

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ҷавоб: } (-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

Б. Агар $\cos x = a$ ($-1 \leq a \leq 1$) бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳақиқияш бо формулаи

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z \quad (2)$$

навишта мешавад.

Мисоли 5. Маҷмуи ҳақиқии муодилаҳои зеринро меорем:

$$1. \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ҳал. } x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$2. \cos \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ҳал. } \frac{x}{3} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z.$$

$$3. \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$$

$$4. \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Х а л. } 2x + \frac{\pi}{2} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2x = \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

В. Агар $\operatorname{tg} x = a$ ($\operatorname{ctg} x = a$) бошад, он гоҳ барои ҳар гуна қимати a ($\forall a$) маҷмуи ҳалҳои бо формулаҳои

$$x = \arctg a + \pi \quad (x = \operatorname{arccctg} a + \pi), n \in Z \quad (3)$$

ифода карда мешавад.

Мисоли 6. Маҷмуи ҳалҳои муодилаҳои зеринро меорем.

$$1. \operatorname{tg} 3x = 1.$$

$$\text{Х а л. } 3x = \arctg 1 + \pi n, n \in Z;$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n, n \in Z.$$

$$2. \operatorname{tg} \frac{x}{3} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Х а л. } \frac{x}{3} = \arctg \sqrt{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \pi + 3\pi n, n \in Z.$$

$$3. \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}.$$

$$\text{Х а л. } x - \frac{\pi}{4} = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in Z;$$

$$x - \frac{\pi}{4} = -\arctg \sqrt{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z.$$

$$4. \operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ҳа.л. } 4x + \frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, n \in Z;$$

$$4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$4x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$4x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n, n \in Z.$$

Аз муодилаҳои содатарини дар боло муовина кардашуда бармеояд:

$$1. \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z.$$

$$2. \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$3. \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$4. \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$5. \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in Z.$$

$$6. \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

$$7. \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z.$$

$$8. \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

2. Муодилаи тригонометрии гуногун

Барои ҳал намудани муодилаҳои дилхоҳи тригонометрӣ аз табдилдиҳиҳо истифода бурда, муодила ба намуди яке аз муодилаҳои содатарини тригонометрӣ оварда мешаванд. Инчунин, муодиларо ба воситаи дохил намудани тағйирёбандаи нав (гузориш) ё ки бо тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан ҳам, ҳал мекунанд.

Яке аз тарзҳои умумии ҳал кардани муодилаҳои дитҳои тригонометрӣ, ин тарзи дохил намудани тағйирёбандаи нав мебошад. Ойро дида мебароем.

Агар,

$$f(\sin x) = 0, f(\cos x) = 0, f(\operatorname{tg} x) = 0, f(\operatorname{ctg} x) = 0,$$

бошад, ки дар он ҷо, f - функсияи алгебравиро ифода мекунад, он гоҳ, ин ҳел муодилаҳо бо ишораи $\sin x = z$, ки дар ин ҷо z - тағйирёбандаи нав мебошад, ҳал карда мешаванд. Бояд дар хотир дошт, ки дар ҳалли ин гуна муодилаҳои тригонометрӣ интихоби функсия, ки бо он дигар функсияҳо ифода карда мешаванд, муҳим мебошад.

Мисоли 7. Муодилаи $3\sin x + \cos^2 x = 2$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз айнӣати $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ки дар он $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ аст, истифода бурда, муодиларо дар намуни

$$3\sin x + 1 - \sin^2 x = 2;$$

$$3\sin x - \sin^2 x = 1;$$

$$\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

менависем. Дар муодилаи квадратии ҳосилшуда $\sin x = y$ ишорат карда, муодилаи квадратии $y^2 - 3y + 1 = 0$ -ро пайдо мекунем, ки дорон решаҳои $y_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ ва $y_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ мебошад.

Азбаски, $|\sin x| \leq 1$ аст, бинобар он муодилаи $\sin x = y$ барои қимати $y_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ ҳал надорад, чунки, $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) > 1$ аст, аммо барои қимати $y_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ ҳал дорад.

$$\sin x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2};$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{(3 - \sqrt{5})}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Инак,

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{(3 - \sqrt{5})}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

маҷмӯи ҳалҳои муодилаи додашуда мешавад.

Мисоли 8. Муодилаи $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз формулаи $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ истифода бурда, муодилаи додашударо ҳал мекунем:

$$2\cos^2 x + 4\cos x = 3(1 - \cos^2 x)$$

$$5\cos^2 x + 4\cos x = 3;$$

$$5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0.$$

Дар муодилаи квадратии ҳосилшуда $\cos x = z$ ишора карда, муодилаи квадратии $5z^2 + 4z - 3 = 0$ -ро пайдо мекунем, ки

дори решаҳои $z_1 = -\frac{2 + \sqrt{19}}{5}$ ва $z_2 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{5}$ мебошад.

Азбаски, $z_1 = \left| -\frac{2 + \sqrt{19}}{5} \right| > 1$ мебошад, бинобар он фақат қимати

$z_2 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{5}$ -ро ба муодилаи $\cos x = z$ гузошта, решаи ро меёбем:

$$\cos x = \frac{-2 + \sqrt{19}}{5};$$

$$x = \pm \arccos \frac{-2 + \sqrt{19}}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Инак,

$$x = \pm \arccos \frac{-2 + \sqrt{19}}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

маҷмӯи ҳалҳои муодилаи додашуда мебошад.

3. Муодилаи тригонометрии якҷинса

Муодилаҳои тригонометрии якҷинса гуфта, гурӯҳи муодилаҳои намуди $R(\sin x, \cos x) = 0$ -ро меноманд.

Яке аз тарҳҳои умумии ҳал кардани муодилаҳои гурӯҳи $R(\sin x, \cos x) = 0$ чунин аст: муодиларо ба муодилаи алгебравӣ нисбат ба $\operatorname{tg} x$ овардан мумкин аст. Масалан, муодилаҳои тригонометрии намуди

$$a \sin x + b \cos x = 0;$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0;$$

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cdot \cos x + c \sin x \cdot \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$$

мисоли муодилаҳои тригонометрии якҷинса мебошанд.

Агар дар муодилаҳои ин гурӯҳ $a \neq 0$ бошад, он гоҳ ҳар яке аз ин муодилаҳоро мувофиқан ба $\cos x$, $\cos^2 x$ ва $\cos^3 x$ тақсим карда муодилаҳои нисбат ба $\operatorname{tg} x$ алгебравиро ҳосил мекунем, ки онҳо чуни намуд доранд:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0;$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0;$$

$$a \operatorname{tg}^3 x + b \operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg} x + d = 0.$$

Дар ин маврид бояд дар хотир дошт, ки ҳангоми $a \neq 0$ будан, ду тарафи муодиларо мувофиқан ба $\cos x$, $\cos^2 x$ ва $\cos^3 x$ тақсим намудан ба гум шудани решаҳо намеорад.

Мисоли 9. Муодилаи $\cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = 1$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Азбаски $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ аст, пас, муодила намуди зеринро мегирад:

$$\cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = 1;$$

$$1 - \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 1;$$

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x = 0.$$

Ду тарафи муодилаи ҳосилшударо ба $\cos^2 x$ тақсим карда, муодилаи квадратии $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 0$ -ро ҳосил мекунем.

Аз муодилаи ҳосилшуда ҳамзарби умумии $\operatorname{tg} x$ -ро аз қафс бароварда, онро ба намуди зерин менависем:

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 3) = 0.$$

Аз ин ҷо, $\operatorname{tg} x = 0$ ё ки $\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Акнун решаҳои муодилаи ҳосилшударо меёбем:

$$a) \operatorname{tg} x = 0; \quad x = \operatorname{arctg} 0 + \pi n, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$b) \operatorname{tg} x = 3; \quad x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

IV. Муодилаҳои гурӯҳи $R(\sin x, \cos x) = 0$ -ро бо тарзҳои дигар ҳам ҳал кардан мумкин аст. Яке аз онҳо бо тарзи дохил кардани тағйирёбандан нави (гузориш) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ ва аз айниятҳои зерин иборат аст:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Тарзи дигар ҳалли муодилаи $a \sin x + b \cos x = c$ ифодаи $a \sin x + b \cos x$ -ро дар намуди $A \sin(x + \varphi)$ навиштан мебошад, ки дар он ҷо,

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

аст.

Мисоли 10. Муодилаи $3 \sin x + 4 \cos x = 5$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Тарзи якум. Муодиларо бо тарзи дохил намудани тағйирёбандан нави $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ ($\cos \frac{x}{2} \neq 0$) ҳал мекунем. Азбаски,

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

мебошад, пас муодилаи додашуда ҳангоми $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ будан, намуди зеринро мегирад:

$$3 \cdot \frac{2u}{1+u^2} + 4 \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} = 5$$

Муодиларо ҳал карда, қимати u -ро меёбем:

$$\frac{6u}{1+u^2} + \frac{4-4u^2}{1+u^2} = 5;$$

$$6u + 4 - 4u^2 = 5(1+u^2);$$

$$6u + 4 - 4u^2 - 5 - 5u^2;$$

$$6u - 9u^2 - 1 = 0$$

ё ки $9u^2 - 6u + 1 = 0$ мешавад.

Аз ин ҷо, $(3u - 1)^2 = 0$ шуда, $3u - 1 = 0$, ё ки $u = \frac{1}{3}$ мешавад.

Қимати $u = \frac{1}{3}$ -ро ба муодилаи $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ гузошта, решаҳои муодилаи ҳосилшударо меёбем:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}; \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n,$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тарзи дуюм. Азбаски, $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ аст, пас, ду тарафи муодиларо бо адади 5 тақсим карда муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = 1.$$

Азбаски, $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ аст, пас, чунин қимати кунҷи φ мавҷуд аст, ки $\frac{3}{5} = \sin \varphi$ ва $\frac{4}{5} = \cos \varphi$ мебошад. Бинобар он, ба ҷои $\frac{3}{5}$ ва $\frac{4}{5}$ мувофиқан $\sin \varphi$ ва $\cos \varphi$ -ро гузошта, муодилаи $\sin \varphi \cdot \sin x + \cos \varphi \cdot \cos x = 1$, ё ки $\cos(x - \varphi) = 1$ -ро ҳосил мекунем.

Аз ин ҷо:

$$x - \varphi = \pm \arccos 1 + 2\pi n,$$

$$x - \varphi = 2\pi n,$$

$$x = 2\pi n + \varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аз сабаби он, ки $\frac{4}{5} = \cos \varphi$ ё ки $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$ аст, бинобар он, ҳалли муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$$x = 2\pi n + \arccos \frac{4}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Мисоли II. Муодилаи $\sin \frac{x}{3} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Тарзи якум: Маълум аст, ки $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ мебошад. Пас, муодиларо табдил дода, ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} = 1;$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{x}{3} = \cos \frac{\pi}{6} \quad \text{ё} \quad \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ва аз ин ҷо, $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Аз ин ҷо: $x_1 = \pi + 6\pi n$; $x_2 = 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тарзи дуюм. Муодилаи додашударо табиӣ дода, ин тавр ҳал мекунем:

$$\sqrt{3}\left(1 - \cos \frac{x}{3}\right) - \sin \frac{x}{3} = 0;$$

$$\sqrt{3} \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{6} - 2 \sin \frac{x}{6} \cdot \cos \frac{x}{6} = 0;$$

$$2 \sin \frac{x}{6} \left(\sqrt{3} \sin \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{6} \right) = 0.$$

Аз ин ҷо, 1) $\sin \frac{x}{6} = 0$;

$$2) \sqrt{3} \sin \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{6} = 0$$

мешавад.

Аз муодилаи якум меёбем: $x = 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Аз муодилаи дуюм меёбем: $\operatorname{ctg} \frac{x}{6} = \sqrt{3}$ ё $x = \pi + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ҷавоб: $6\pi n$, $\pi + 6\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

§3. Нобаробариҳои тригонометрия

Дар ин параграф бори дигар намуд ва ҳалҳои содатарини нобаробариҳои тригонометриро хотиррасон мекунем:

а) Агар $\sin x > a$ ($|a| < 1$) бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои аз рӯи формулаи

$$x \in (\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\sin x > -\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои дар асоси формулаи (1) ба намуди зерин навишта

$$x \in \left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \pi + \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n \right);$$

$$x \in \left(-\arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n, \pi + \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n \right);$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right);$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

мешавад.

2. Агар $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ бошад, он гоҳ, ба монанди мисоли 1 рафтор карда, ҳосил мекунем:

$$x \in \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n; \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n \right);$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right);$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

б) Агар $\sin x < a$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалли он аз рӯи формулаи

$$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\sin x < \frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳои аз рӯи формулаи (2) дар намуни зерин навишта мешавад:

$$x \in \left(-\pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n; \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

2. Агар $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳои дар асоси формулаи (2) ба

$$x \in \left(-\pi - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n; \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\pi + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n; -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

баробар мебошад.

в) Агар $\cos x > a$ ($|a| < 1$) бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои аз рӯи формулаи

$$x \in (-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n), n \in Z \quad (3)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ бошад, он гоҳ ба монанди нобаробарии якум рафтор карда, аз рӯи формулаи (3) маҷмӯи ҳалҳои шартро менависем:

$$x \in \left(-\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n\right), n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z;$$

мешавад.

$$\text{Ҷавоб: } x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$$

2. Агар $\cos x > -\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ ба монанди нобаробарии якум рафтор карда, аз рӯи формулаи (3) маҷмӯи ҳалҳои шартро менависем:

$$x \in \left(-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n\right), n \in Z;$$

$$x \in \left(-\arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n\right), n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Инак, маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии додашуда $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$ мебошад.

г) Агар $\cos x < a$ ($|a| < 1$) бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои аз рӯи формулаи

$$x \in (\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in Z \quad (4)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\cos x < -1$ бошад, он гоҳ, ба монанди нобаробарии якум рафтор карда, аз рӯи формулаи (4) менависем:

$$x \in (\arccos(-1) + 2\pi n, 2\pi - \arccos(-1) + 2\pi n), n \in Z;$$

$$x \in (\arccos 1 + 2\pi n, 2\pi - \arccos 1 + 2\pi n), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in (0 + 2\pi n, 2\pi - 0 + 2\pi n);$$

$$x \in (2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ҷавоб: } x \in (2\pi n, 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

2. Агар $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ бошад, он гоҳ, ба монанди нобаробарии якум кимати x -ро аз рӯи формулаи (4) меёбем:

$$x \in \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, 2\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n, 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ҷавоб: } x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

г) Агар $\operatorname{tg} x > a$ бошад, он гоҳ, маҷмун ҳаҷҳояш аз рӯи формулаи

$$x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

ёфта мешавад. Масалан:

1. Агар $\operatorname{tg} x > 2$ бошад, он гоҳ маҷмун ҳаҷҳояш дар асоси формулаи (5)

$$x \in \left(\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$$

ёфта мешавад.

2. Агар $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$ бошад, он гоҳ, маҷмун ҳаҷҳояш дар асоси формулаи (5) дар намуди зерин навишта мешавад:

$$x \in \left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ҷавоб: } x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

д) Агар $\operatorname{tg} x < a$ бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои аз рӯи формулаи зерин

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; \operatorname{arctg} a + \pi\right), n \in Z \quad (6)$$

ёфта мешавад. Масалан:

1. Агар $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои дар асоси формулаи (6) ёфта мешавад, ки вай ба маҷмӯи

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi\right), n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; \frac{\pi}{6} + \pi\right), n \in Z$$

баробар аст.

$$\text{Ҷавоб: } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; \frac{\pi}{6} + \pi\right), n \in Z.$$

2. Агар $\operatorname{tg} x < -1$ бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои дар асоси формулаи (6) ба маҷмӯи

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; \operatorname{arctg}(-1) + \pi\right), n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; -\frac{\pi}{4} + \pi\right), n \in Z$$

баробар аст.

$$\text{Ҷавоб: } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; -\frac{\pi}{4} + \pi\right), n \in Z.$$

е) Агар $\operatorname{ctg} x > a$ бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои аз рӯи формулаи

$$x \in (\pi; \operatorname{arccotg} a + \pi), n \in Z \quad (7)$$

ёфта мешавад. Масалан:

1. Агар $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$ бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои аз рӯи формулаи (7) дар намуни зерин навишта мумкин аст:

$$x \in (\pi; \operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \pi), n \in Z;$$

$$x \in (\pi; \frac{\pi}{3} + \pi), n \in Z.$$

$$\text{Ҷавоб: } x \in (\pi; \frac{\pi}{3} + \pi), n \in Z.$$

2. Агар $\operatorname{ctg} x > -1$ бошад, он гоҳ, маҷмӯи ҳалҳои аз рӯи формулаи (7) ёфта мешавад, ки вай ба маҷмӯи

$$x \in (\pi, \arccos(-1) + \pi), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in (\pi, -\arccos 1 + \pi), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(\pi, -\frac{\pi}{4} + \pi\right), n \in \mathbb{Z}$$

баробар аст.

$$\text{Ҷавоб: } x \in \left(\pi, -\frac{\pi}{4} + \pi\right), n \in \mathbb{Z}.$$

ё) Агар $\cos x < a$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳои аз рӯи формулаи зерин

$$x \in (\arccos a + \pi, \pi + \pi), n \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\cos x < -3$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳои дар асоси формулаи (8) ёфта мешавад, ки вай намуди зеринро дорад:

$$x \in (\arccos(-3) + \pi, \pi + \pi), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in (-\arccos 3 + \pi, \pi + \pi), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in (-\arccos 3 + \pi, \pi + \pi), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ҷавоб: } x \in (-\arccos 3 + \pi, \pi + \pi), n \in \mathbb{Z}.$$

2. Агар $\cos x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳои дар асоси

формулаи (8) ёфта мешавад.

$$x \in \left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi, \pi + \pi\right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi, \pi + \pi\right), n \in \mathbb{Z};$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi, \pi + \pi\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ҷавоб: } x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi, \pi + \pi\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Мисоли 1. Нобаробарии $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Нобаробарию бо тарзи дохил кардани тағйирёбанди нав ҳал мекунем. Инак, $\sin x = y$ нишора карда, нобаробарии $2y^2 - 7y + 3 > 0$ -ро ҳосил мекунем. Дар ин ҷо, $2y^2 - 7y + 3 > 0$, ё $(2y-1)(y-3) > 0$ аст. Нобаробарии $(2y-1)(y-3) > 0$ -ро ҳал мекунем. Нобаробарии охириро ба системаҳои

$$\begin{cases} 2y-1 > 0, \\ y-3 > 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 2y-1 < 0, \\ y-3 < 0 \end{cases}$$

баробаркува мебошад. Системаҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 2y-1 > 0, \\ y-3 > 0; \end{cases} \begin{cases} 2y > 1, \\ y > 3; \end{cases} \begin{cases} y > \frac{1}{2}, \\ y > 3. \end{cases} \text{Аз ин ҷо: } y > 3.$$

$$\begin{cases} 2y-1 < 0, \\ y-3 < 0; \end{cases} \begin{cases} 2y < 1, \\ y < 3; \end{cases} \begin{cases} y < \frac{1}{2}, \\ y < 3. \end{cases} \text{Аз ин ҷо: } y < \frac{1}{2}.$$

Қиматҳои ғишадаро ба $\sin x = y$ гузошта, нобаробариҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$y = \sin x < \frac{1}{2} \quad \text{ва} \quad y = \sin x > 3.$$

а) Нобаробари $\sin x > 3$ ҳал надорад, чунки, дар ин ҷо $a = 3 > 1$ мебошад.

б) Нобаробари $\sin x < \frac{1}{2}$ ҳал дорад, чунки, $a = \frac{1}{2} < 1$ буда, маҷмун ҳаҷҳояш аз рӯи формулаи (2) ғишад мешавад.

Инак, маҷмун ҳаҷҳои нобаробариҳои додашуда

$$x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$$

мебошад.

Ба ғайр аз ин нобаробариҳо дар ин ҷо мо намуд ва ҳаҷҳои содатарин нобаробариҳои тригонометрие, ки функсияи чапҳои тригонометриро доранд, меорем:

Намудҳои нобаробари:

Ҳаҷҳои нобаробариҳо:

$$1. \arcsin x > a \quad \left(|a| < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x \in (\sin a; 1].$$

$$2. \arcsin x < a \quad \left(|a| \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x \in [-1; \sin a).$$

$$3. \arccos x > a \quad (|a| < \pi)$$

$$x \in [-1; \cos a).$$

$$4. \arccos x < a \quad (|a| \leq \pi)$$

$$x \in [\cos a; 1].$$

$$5. \operatorname{arctg} x > a \quad \left(|a| < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x \in (\operatorname{tg} a; +\infty).$$

$$6 \arctg x < a \quad \left(a \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad x \in (-\infty; \operatorname{tg} a).$$

$$7. \arctg x > a \quad (0 < a < \pi) \quad x \in (-\infty; \operatorname{ctg} a).$$

$$8. \arctg x < a \quad (0 < a < \pi) \quad x \in (\operatorname{ctg} a; +\infty).$$

Мисоли 2. Нобаробарии $\arctg^2 x - 5\arctg x + 6 > 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар нобаробарӣ додашуда $\arctg x = y$ ишора карда, нобаробарии $y^2 - 5y + 6 > 0$ -ро ҳосил мекунем. Тарафи чапи нобаробарию ба ҳамзарбҳо ҷудо карда ҳосил мекунем:

$$y^2 - 2y - 3y + 6 > 0;$$

$$y(y-2) - 3(y-2) > 0;$$

$$(y-2)(y-3) > 0.$$

Нобаробарии охириро ба системаҳои нобаробариҳои

$$\begin{cases} y-2 > 0, \\ y-3 > 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} y-2 < 0, \\ y-3 < 0 \end{cases}$$

баробаркува мебошад. Системан нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал карда, ҳалли нобаробарии $(y-2)(y-3) > 0$ -ро меёбем.

$$1) \begin{cases} y-2 > 0, \\ y-3 > 0; \end{cases} \begin{cases} y > 2, \\ y > 3. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $y > 3$ мешавад.

$$2) \begin{cases} y-2 < 0, \\ y-3 < 0; \end{cases} \begin{cases} y < 2, \\ y < 3. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $y < 2$ мешавад.

Қиматҳои $y < 2$ ва $y > 3$ - ро ба $\arctg x = y$ гузошта, нобаробариҳои $\arctg x < 2$ ва $\arctg x > 3$ -ро ҳосил мекунем.

Маҷмӯи ҳалҳои нобаробариҳои $\arctg x < 2$ ва $\arctg x > 3$ мувофиқан аз рӯи формулаҳои дар боло овардашуда ёфта мешавад. Яъне, ҳалли ин нобаробариҳо мувофиқан ба

$$x \in (-\infty; \operatorname{tg} 2) \quad \text{ва} \quad x \in (\operatorname{tg} 3; +\infty)$$

баробар ҳастанд. Инак, маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии додашуда ҷуғиҷанд:

$$x \in (-\infty; \operatorname{tg} 2) \quad \text{ва} \quad x \in (\operatorname{tg} 3; +\infty).$$

МАШҚО

1. Қимати ифодаҳоро ёбед:

а) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 480^\circ - \cos 1200^\circ$;

в) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$;

б) $\sin 72^\circ \cdot \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \cdot \sin 42^\circ$.

2. Қимати $\cos 2\alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha$ хангоми, $\sin \alpha = 0,8$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) будан, ёбед.

3. $\sin 2\alpha$ -ро хангоми $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,4$ будан, ҳисоб кунед.

4. Қимати $\cos(\alpha - \beta)$, хангоми $\sin \alpha = 0,6$ ва $\sin \beta = -0,28$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ва $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ будан, ёбед.

5. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $2 \sin(2x - 1) = 1$; б) $3 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

в) $\cos x^2 = -1$; г) $\sin(3x - 1) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

6. Муодилаҳоро бо тарзи гузориш ҳал кунед:

а) $\cos^2 x - 3 \cos x = 4$; б) $\operatorname{tg} 3x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$;

в) $3 \sin^2 3x + 7 \cos 3x = 3$; г) $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

7. Муодилаҳои тригонометрии якҷинсаҳо ҳал кунед:

а) $2 \sin 3x + 3 \cos 3x = 0$;

б) $\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x - 15 \cos^2 x = 0$.

8. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{ctg} x > -3$; в) $\operatorname{tg} x > 2$; г) $\sin(x - 1) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Нобаробариҳои тригонометриро ҳал кунед:

а) $\arccos x > \frac{\pi}{6}$; б) $\arctg x > -\frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arccctg} x > 2$;

г) $\operatorname{arctg}^2 x - 4 \operatorname{arctg} x + 3 > 0$;

р) $\log_2(\operatorname{arctg} x) > 1$.

Б О Б И XIII ПРОГРЕССИЯХО

§1. Мафҳуми пайдарпани ададӣ

Бигузор $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ ададҳои ҳақиқӣ бошанд. Агар ба ҳар як адади натуралӣ n ягона адади ҳақиқӣ a_n мувофиқан гузошта шуда бошад,

$$1 \rightarrow a_1; 2 \rightarrow a_2; 3 \rightarrow a_3; \dots; n \rightarrow a_n \quad (1)$$

он гоҳ мегӯянд, ки пайдарпани ададин

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \quad (2)$$

дода шудааст. Дар ин ҷо $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - ро узвҳои пайдарпани (2) ва a_n - ро узви n -уми пайдарпани (ё ки узви умумии) (2) меноманд. Агар пайдарпани ададӣ дар намуди узви умумиаш (a_n) дода шавад, он гоҳ мегӯянд, ки пайдарпай бо формула дода шудааст. Яъне, $a_n = f(n)$, $n \in N$ ки дар ин ҷо n - рақами тартиби узвҳои ифода мекунад.

Таъриф. Функцияе, ки маҷмӯи ададҳои натуралӣ N ба маҷмӯи n -адади натуралӣ аввалин соҳаи муайяниаш мебошад, пайдарпай номида шуда, бо $f(n)$ ишора карда мешавад:

$$a_n = f(n), \quad n \in N \quad (3)$$

Дар ин ҷо, $f(n)$ функция буда, соҳаи муайяниаш маҷмӯи N ва соҳаи қиматҳоиаш маҷмӯи $\{a_n\}$ мебошад. Масалан, функциаи зерин

$$f(n) = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ \frac{1}{n}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad (k \in N)$$

пайдарпани зеринро медиҳад:

$$1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \dots; 2k; \frac{1}{2k-1}; \dots$$

Пайдарпанҳо афзуншаванда $\nearrow$ ва камшаванда $\searrow$ шуда метавонанд:

Пайдарпани $\{a_n\}$ афзуншаванда номида мешавад, агар ҳар як узваш (аз узви дуюм сар карда) аз узви пешояндаш калон бошад:

$$a_n < a_{n+1}, \quad n < n+1, \quad n \in N \quad (4)$$

Масалан, пайдарпани $\{a_n\}$, $n \in N$ пайдарпани афзуншаванда мебошад, чунки,

$$\{a_n\}: 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots; n; \dots; \dots \text{ аст.}$$

Пайдарпани $\{a_n\}$ камшаванда номида мешавад, агар ҳар як узви пайдарпай (аз узви дуюм сар карда) аз узви пешояндаш хурд бошад.

$$a_n > a_{n+1}, \quad n > n+1, \quad n \in N \quad (5)$$

Масалан, пайдарпани $\{a_n\} = \frac{1}{n}$, $n \in N$ пайдарпани камшаванда мебошад, зеро,

$$\{a_n\}: 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots; \frac{1}{n}; \dots; \dots \text{ аст.}$$

Пайдарпани $\{a_n\}$ - и дар маҷмӯи N муайян буда, пайдарпани беохир мебошад. **Масалан**,

$$\{a_n\} = n; \{a_n\} = \frac{1}{n}, \quad n \in N$$

мисоли пайдарпанҳои беохир шуда метавонад.

Пайдарпани $\{a_n\}$ охиринок номида мешавад, агар маҷмӯи N , маҷмӯи охиринок бошад. **Масалан**, пайдарпани $\{a_n\} = n$, $n < N = 7$ охиринок аст, чунки, он аз ададҳои 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 иборат мебошад.

§2. Прогрессияи арифметикӣ

Бигузор $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ - ададҳои ҳақиқӣ бошанд.

Таъриф. Прогрессияи арифметикӣ гуфта, пайдарпани ададиеро меноманд, ки ҳар як узви пасояндааш аз пешояндаш дар натиҷаи ҳамъ намудани адади доимӣ, ки фарқи прогрессия номида мешавад, ҳосил шудааст.

Прогрессияи арифметикиро бо рамзи $+$ ишорат карда, онро дар намуди зерин менависанд:

$$+ a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

Дар ин ҷо, $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ - ро узвҳои прогрессияи арифметикӣ, a_n - ро узви умумии прогрессияи арифметикӣ ва

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{n+1} - a_n = \dots = d$$

-ро фарқи прогрессия меноманд. Пас, мувофиқи таърифи прогрессияи арифметикӣ ҳосил мекунем:

$$a_1;$$

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = a_2 + d + d = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d.$$

Аз ин ҷо,

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in N \quad (2)$$

формулаи узви n -уми прогрессияи арифметикӣ (1) номида мешавад.

Бо формулаи (2) дишлоҳ узви прогрессияи арифметикиро ёфтан мумкин аст.

Суммаи n узви аввалин прогрессияи арифметикӣ (1) аз рӯи формулаи

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad n \in N \quad (3)$$

ёфта мешавад. Агар дар формулаи (3) ба ҷои узви a_n қиматаш $a_n = a_1 + (n-1)d$ - ро гузорем, он гоҳ формулаи (3) намуни зеринро мегирад:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \quad n \in N. \quad (4)$$

Акнун ҳалли масъалаҳоро доир ба прогрессияи арифметикӣ меорем.

Масъалаи 1. Агар фарқи прогрессияи арифметикӣ ба -4 баробар бошад, узви 18-уми прогрессияи зеринро ёбед:
 $+ 18; 14; 10; 6; \dots$

Ҳал. Аз формулаи (2) истифода бурда, ҳангоми $a_1 = 18$ ва $d = -4$ будан, ҳосил мекунем:

$$a_{18} = a_1 + 17d \Rightarrow a_{18} = 18 + 17 \cdot (-4) \Rightarrow a_{18} = -50.$$

Ҷавоб: -50 .

Масъалаи 2. Узви 12-уми прогрессияи арифметикӣ зеринро ёбед.

$$\div 5; 2; -1; -4; \dots$$

Ҳал. Дар ин маврид, аввал фарқи прогрессия, яъне, d -ро муайян мекунем ва баъд узви номаълуми прогрессияро меёбем.

а) Фарқи прогрессия, яъне, d -ро меёбем:

$$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 2 - 5 \Rightarrow d = -3;$$

б) Аз рӯи формулаи (7), узви a_{12} -уми прогрессияро меёбем:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{12} = 5 + 11 \cdot (-3) \Rightarrow a_{12} = -28.$$

Инак, узви 12-уми прогрессияи додашуда ба -28 баробар будааст.

Масъалаи 3. Суммаи 65-то узви аввалин прогрессияи арифметикии зеринро ҳисоб кунед:

$$\div 4; 8; 12; 16; 20; 24; \dots$$

Ҳал. Дар ин ҷо ҳам, барои суммаи 12-то узви аввалин прогрессияро ёфтаи, аввал бояд фарқи прогрессия, яъне, d -ро ва ҳам узви 65-уми прогрессияро муайян менамоем.

а) Фарқи прогрессия, яъне d -ро меёбем:

$$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 8 - 4 \Rightarrow d = 4.$$

б) Аз рӯи формулаи (2) истифода бурда, узви a_{65} -уми прогрессияро меёбем:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{65} = 4 + 64 \cdot 4 \Rightarrow a_{65} = 260.$$

в) Суммаи 65-то узви аввалин прогрессияро бо ёрии формулаи (3), яъне, бо формулаи

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

ҳисоб мекунем.

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{65}}{2} \cdot 65; \quad S_{65} = \frac{4 + 260}{2} \cdot 65 = \frac{52}{2} \cdot 65 = 262 \cdot 65 = 17030.$$

Инак, суммаи 65-то узви аввалин прогрессияи арифметикӣ ба 17030 баробар мебошад.

Ҷавоб: $S_{65} = 17030$.

Масъалаи 4. Суммаи узвҳои 2-ум ва 5-уми прогрессияи арифметикӣ ба адади 14 баробар буда, суммаи узвҳои 3-юм ва 7-ум ба адади 8 баробар аст. Прогрессияи арифметикиро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 14, \\ a_3 + a_7 = 8. \end{cases}$$

Аз формулаи (2) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_1 + 2d; \quad a_5 = a_1 + 4d; \quad a_7 = a_1 + 6d.$$

Ақиқун қиматҳои ёфташударо ба система гузошта, ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 14, \\ a_1 + 2d + a_1 + 6d = 8; \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ 2a_1 + 8d = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ -2a_1 - 8d = -8; \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ -3d = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ d = -2; \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 5 \cdot (-2) = 14, \\ d = -2; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -2. \end{cases}$$

Аз ин ҷо,

$$a_1 = 12;$$

$$a_2 = a_1 + d = 12 + (-2) = 10;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d = 12 + 2 \cdot (-2) = 12 - 4 = 8;$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 12 + 3 \cdot (-2) = 12 - 6 = 6;$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 12 + 4 \cdot (-2) = 12 - 8 = 4;$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 12 + 5 \cdot (-2) = 12 - 10 = 2;$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 12 + 6 \cdot (-2) = 12 - 12 = 0;$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 12 + 7 \cdot (-2) = 12 - 14 = -2;$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 12 + 8 \cdot (-2) = 12 - 16 = -4;$$

.....

Ақиқун прогрессияи арифметикани матлубро навишта метавонем:

$$+ 12; 10; 8; 6; 4; 2; 0; -2; -4; \dots$$

Санҷиш: $\begin{cases} a_2 + a_5 = 14, \\ a_3 + a_7 = 8; \end{cases} \begin{cases} 10 + 4 = 14, \\ 8 + 0 = 8; \end{cases} \begin{cases} 14 = 14, \\ 8 = 8. \end{cases}$

Ҷавоб: $+ 12; 10; 8; 6; 4; 2; 0; -2; -4; \dots$

Масъалаи 5. Суммаи се адад, ки прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад ба 16 баробар мебошад. Ҳосили зарби адади якум ба дуҷум ба $12\frac{4}{9}$ баробар аст. Ин ададхоро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала a_1, a_2, a_3 дода шудааст, ки дар ин ҷо, $a_1 + a_2 + a_3 = 16$ ва $a_1 \cdot a_2 = 12\frac{4}{9}$ мебошад. Пас, дар асоси формулаи (2) $a_1 = a_1$; $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$ мешаванд. Он гоҳ,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 16, \\ a_1 \cdot a_2 = 12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 16, \\ a_1 \cdot (a_1 + d) = 12\frac{4}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 16, \\ a_1 \cdot (a_1 + d) = 12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{16-3d}{3}, \\ \frac{16-3d}{3} \cdot \left(\frac{16-3d}{3} + d\right) = 12\frac{4}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{16-3d}{3}, \\ \frac{16-3d}{3} \cdot \frac{16}{3} = 12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{16-3d}{3}, \\ \frac{16}{9}(16-3d) = 12\frac{4}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{16-3d}{3}, \\ 16-3d = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{7}{3}, \\ -3d = 7-16; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{7}{3}, \\ d = 3. \end{cases}$$

Ҳамин тариқ, $a_1 = \frac{7}{3}$, $a_2 = \frac{7}{3} + 3 = \frac{16}{3}$ ва $a_3 = \frac{7}{3} + 2 \cdot 3 = \frac{25}{3}$

мешавад.

Санҷиш: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 16, \\ a_1 \cdot a_2 = 12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7}{3} + \frac{16}{3} + \frac{25}{3} = 16, \\ \frac{7}{3} \cdot \frac{16}{3} = 12\frac{4}{9}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{48}{3} = 16, \\ 112 = 12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} 16 = 16, \\ 12\frac{4}{9} = 12\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Ҷавоб: $\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, \frac{25}{3}$.

§3. Прогрессия геометрий

Таъриф. Пайдарпайи адади, ки ҳар як узви пасояндааш аз пешояндааш дар натиҷаи ба ягон адади доимӣ зарб намудан ҳосил мешавад, прогрессия геометрий номида мешавад. Зарбкунандаи умумӣ бошад, маҳраҷи прогрессия номида мешавад.

Масалаи, пайдарпайҳои

$$1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; \dots$$

$$27; 9; 3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \dots$$

$$12; -6; 3; -\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{8}; \frac{3}{16}; \dots$$

мисолҳои прогрессия геометрий шуда метавонанд. Маҳраҷи прогрессия геометрий бо q ва ҳуди прогрессия геометрий бо рамзи $\{b_n\}$ ишора карда мешавад. Агар пайдарпайи $\{b_n\}$ прогрессия геометрий бошад, он гоҳ, мувофиқи таърифи 2

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \dots$$

адади доимӣ буда (он бо q ишора карда мешавад), маҳраҷи прогрессия геометрий аст. Ҳамин тариқ, прогрессия геометрий $\{b_n\}$ аз рӯи шартҳои зерин муайян карда мешавад:

а) $b_1 = b$, ки $b \neq 0$ мебошад;

б) $b_{n+1} = b_n \cdot q$ ($q \neq 0 \forall n \geq 1$)

Масалаи, ҳангоми $b_1 = 2$ ва $q = \frac{1}{3}$ будан, прогрессия геометрий

$$2; 2 \cdot \frac{1}{3}; 2 \cdot \frac{1}{9}; 2 \cdot \frac{1}{27}; 2 \cdot \frac{1}{81}; \dots$$

-ро ҳосил мекунем.

Агар пайдарпайи $\{b_n\}$ - прогрессия геометрий бошад, он гоҳ, мувофиқи таърифи 2 ҳосил мекунем:

$$b_1 \neq 0;$$

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4;$$

$$\dots$$

$$b_{n+1} = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Аз ин чо маълум мешавад, ки барои $\forall n, b_1 \neq 0, q \neq 0$ формулаи

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in N \quad (1)$$

дуруст мебошад. Формулаи (1)-ро формулаи узви n -уми прогрессияи геометрии меноманд.

Прогрессияи геометрии дорои чунин хосиятҳо аст:

1. Квадрати узви дилхохи прогрессияи геометрии, аз узви дуҷумаш сар карда, ба ҳосили зарби узвҳои пешояндааш ва пасояндааш баробар мебошад. Яъне,

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2} \quad (n \geq 1) \quad (2)$$

2. Бигузур барои ҳар гуна се узвҳои ҳамсоияи ягон пайдарпаии $\{a_n\}$ баробарии (2) иҷро шавад, он гоҳ,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}, \quad n \geq 1 \quad (3)$$

мебошад.

Яъне, агар нисбати ҳар гуна узви пайдарпаии $\{b_n\}$ ба узви пешояндааш фақат ва фақат ба як адад баробар шавад, пас, пайдарпаии $\{b_n\}$ - прогрессияи геометрии номида мешавад.

3. Агар узвҳои прогрессияи геометрии мусбат бошанд, он гоҳ, баробарии (2) - ро дар намуди

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}, \quad n \geq 1 \quad (4)$$

навиштан мумкин аст.

Агар $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n, \dots$ узвҳои прогрессияи геометрии ба q -маҳраҷи прогрессияи геометрии $\{b_n\}$ бошанд, он гоҳ суммаи n узви аввалии прогрессияи геометрии аз рӯи формулаи

$$S_n = \frac{b_n \cdot q^n - b_1}{q - 1} \text{ ё ки } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1 \quad (5)$$

ёфта мешавад. Дар мавриди $q = 1$ ва $b_1 = b \neq 0$ будан, суммаи n -то узви аввалии прогрессия ба $S = nb$ баробар аст.

Агар,

$$b_1; b_1q; b_1q^2; b_1q^3; b_1q^4; \dots; b_1q^{n-1}; \dots \quad (6)$$

прогрессияи геометрии дилҳол бошад, он гоҳ хангоми $|q| < 1$ будан, вай прогрессияи геометрии беохир камшаванда номида

мешавад.

Суммаи n -то узви прогрессияи геометрии (6) бо формулаи

$$S_n = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1, b_1 \neq 0 \quad (7)$$

ёфта мешавад.

Акнун ҳалли якчанд масъалаҳоро доир ба прогрессияи геометрии меорем.

Масъалаи 1. Узви 8-ум ва суммаи 8-то узви аввалии прогрессияи геометрии зеринро ёбед:

$$+ 1; 3; 9; 27; \dots$$

Ҳал. Дар прогрессияи додашуда $b_1 = 1$ ва $q = 3$ мебошад. Бинобар он, мувофиқи формулаҳои

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ ва } S_n = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1}$$

навишта метавонем:

$$a) b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} \Rightarrow b_8 = b_1 \cdot q^7 \Rightarrow b_8 = 1 \cdot 3^7 \Rightarrow b_8 = 3^7;$$

$$б) S_8 = \frac{b_1 \cdot q^8 - b_1}{q-1} \Rightarrow S_8 = \frac{b_1 \cdot q^8 - b_1}{q-1} \Rightarrow S_8 = \frac{3^8 \cdot 3 - 1}{3-1} \Rightarrow S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} = 3280.$$

Инак, узви 8-уми прогрессия ба 3^7 ва суммаи 8-то узви прогрессия ба 3280 баробар мебошад.

Ҷавоб: 3280.

Масъалаи 2. Агар $b_1 = 36$ ва $b_7 = \frac{4}{81}$ бошад, маҳраҷ ва суммаи 7 узви аввалии прогрессияи геометрии ёфта шавад.

Ҳал. Аз рӯи формулаи (1) ва (5) ҳангоми $n = 7$ будан, ҳосил мекунем:

$$a) b_7 = b_1 \cdot q = 36 \cdot q^6; \quad \frac{4}{81} = 36 \cdot q^6; \quad 6q^6 = \pm \frac{2}{9};$$

$$q^6 = \pm \frac{1}{27} \text{ ё ки } q = \pm \frac{1}{3}.$$

Пас, $q_1 = \frac{1}{3}$ ва $q_2 = -\frac{1}{3}$ мешавад.

$$б) \text{ Ҳангоми } b_1 = 36 \text{ ва } q_1 = \frac{1}{3};$$

$$S_7 = \frac{b_7 \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{81 \cdot \frac{1}{3} - 36}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{36 - 81 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{(36 - 81 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 3}{2 \cdot 3 - 81} = \frac{18 \cdot 81 - 2}{81} = \frac{4372}{81}.$$

в) Ҳангоми $b_1 = 36$ ва $q_1 = -\frac{1}{3}$:

$$S_7 = \frac{b_7 \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 36}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{36 + 81 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{(36 + 81 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 3}{2 \cdot 3 - 81} = \frac{18 \cdot 81 + 2}{81} = \frac{4376}{81}.$$

Инак, махраҷи прогрессияи геометрӣ ҳангоми $q = \frac{1}{3}$ ва $b_1 = 36$ ба $S_7 = \frac{4372}{81}$ ва ҳангоми $q = -\frac{1}{3}$ ва $b_1 = 36$ суммаи 7 узви аввалии прогрессия ба $S_7 = \frac{4376}{81}$ баробар будааст.

Масъалаи 3. Агар махраҷаш $q = 3$ ва суммаи 7 узви аввалии прогрессия ба $S_7 = 2186$ баробар бошад, узвҳои якум ва ҳафтуми прогрессияи геометрӣ ёбед.

Ҳал. Дар асоси формулаи (5) навишта метавонем:

$$2186 = \frac{3 \cdot b_7 - b_1}{3 - 1};$$

$$2186 = \frac{1}{2}(3b_7 - b_1);$$

$$4372 = 3b_7 - b_1.$$

Аз формулаи узви n -уми прогрессия $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ истифода бурда, пайдо мекунем: $b_7 = b_1 \cdot 3^6$. Ақиқун қимати b_1 -ро ба баробарии $3b_7 - b_1 = 4372$ гузошта, қимати b_1 -ро меёбем.

$$3b_1 \cdot 3^6 - b_1 = 4372; \quad 3^7 \cdot b_1 - b_1 = 4372;$$

$$b_1(3^7 - 1) = 4372;$$

$$b_1 = \frac{4372}{3^7 - 1} = \frac{4372}{2187 - 1} = \frac{4372}{2186} = 2.$$

Пас, $b_1 = 2$ аст. Акиун қимати b_7 -ро ҳисоб мекунем:

$$b_7 = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458.$$

Ҳамин тариқ, $b_1 = 2$ ва $b_7 = 1458$ аст.

Ҷавоб: $b_1 = 2$ ва $b_7 = 1458$.

Мисъяли 4. Агар $a_1 = 3$; $q = 2$ ва $S_n = 189$ бошад, шумораи узвҳои прогрессияи геометрияро ёбед.

Ҳал. Агар ба формулаи суммаи узви n -уми прогрессияи геометрия

$$S_n = \frac{b_1 \cdot q - b_1}{q - 1}, q \neq 1$$

қимати $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ -ро гузорем, он гоҳ,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

ҳосил мешавад. Дар формулаи ҳосилшуда қиматҳои $S_n = 189$, $b_1 = 3$ ва $q = 2$ -ро гузошта пайдо мекунем:

$$189 = \frac{3 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}; \quad 189 = \frac{3 \cdot (2^n - 1)}{1};$$

$$189 = 3(2^n - 1)$$

$$63 = 2^n - 1; \quad 2^n = 64; \quad 2^n = 2^6.$$

Аз ин ҷо, $n = 6$ мешавад.

Ҷавоб: $n = 6$.

МАШҚО

1. Узви ҳафтум ва фарқи прогрессияи арифметикӣ зеринро ёбед:

$$+ 4; 6; 8; 10; \dots$$

2. Суммаи 14 узви аввалин прогрессияи арифметикӣ зеринро ёбед:

$$+ 2; 4; 6; 8; 10; \dots$$

3. Узви ҳаштум ва суммаи 8 узви аввалии прогрессияи арифметикии $\div 12; 10, 8, 6; \dots$ ёфта шавад.

4. Суммаи узвҳои 3-юм ва 6-уми прогрессияи арифметикӣ ба 3 баробар буда, суммаи квадратҳояшон бошад, ба 45 баробар аст. Прогрессияи арифметикиро ёбед.

5. Маҳраҷи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар $a_1 = 1$, $n = 3$ ва $S_3 = 157$ бошад.

6. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралӣ дурақамаро ёбед.

7. Исобот карда шавад, ки пайдарпайи дар намуди $b_n = 1,5 \cdot 2^n$ додашуда, прогрессияи геометрӣ мебошад.

8. Суммаи 3-го узви аввалии прогрессияи геометрӣ ба 21 баробар буда, суммаи квадратҳояшон ба 189 баробар аст. Маҳраҷ ва узви якуми прогрессияро ёбед.

9. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралӣ аз 200 калон набударо ёбед.

10. Суммаи ҳамаи ададҳои натуралӣ ба 3 карати аз 120 калон набударо ёбед.

11. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 + a_3 = -2$ ва $a_2 + a_6 = 2$ мебошад. S_{10} -ро ёбед.

12. Узви якуми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар $S_{13} = 240$ ва $d = 2$ бошад.

13. Суммаи се адад ба 111 баробар буда, прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Адади дуҷум аз якум 5 маротиба калон аст. Адади якумро ёбед.

14. Суммаи се адад, ки прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд ба 87 баробар аст. Адади сеюм аз суммаи ду адади дигар ба 5 воҳид хурд аст. Адади якумро ёбед.

15. Суммаи панҷ узви аввалини прогрессияи геометрӣро ёбед, агар, $q = 2$ ва $b_2 + b_4 = 30$ бошад.

16. Суммаи се узви аввалини прогрессияи геометрӣ ба 28, суммаи се узви оянда бошад ба 3,5 баробар аст. Узви дуҷумро ёбед.

17. Узви панҷуми прогрессияи геометрии афзуншавандаро ёбед, агар узви дуҷуми он 16 ва суммаи се узви аввалинаш ба 56 баробар бошад.

БОБИ XIV НАЗАРИЯИ ХУДУДҲО

§1. Худуди функсия

Хонандагон аз барномаи курси математикани мактабӣ доир ба пайдарпайҳои беохир маълумот доранд. Ғайр аз ин, дар мавзӯҳои дар боло муоина кардашуда доир ба пайдарпайҳо ва функсия маълумоти умумӣ гирифтаанд. Бинобар ин, дар ин ҷо бори дигар мафҳуми функсия ва пайдарпайҳоро хотиррасон карда, мафҳуми худуди функсия ва пайдарпайҳоро дида мебароем.

Фарз мекунем, ки функсияи дилхоҳи $y = f(x)$ -и дорон соҳан муайяни $D(f)$ ва соҳан тағйирёбанаш $E(f)$ дода шуда бошад.

Агар тағйирёбандан x аз соҳан $D(f)$ қиматҳои

$$x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; \dots \quad n \in N \quad (1)$$

-ро қабул кунад, он гоҳ, (1) пайдарпайи адалҳоро ташкил мекунад.

Пайдарпайи (1)-ро дар намуни маҷмӯи адалҳои $\{x_n\}$ ифода кардан мумкин аст.

Таърифи 1. Адади a худуди пайдарпайи $\{x_n\}$ номида мешавад, агар барои $\forall \varepsilon > 0$ -и хурд, ҳатман рақами N ($N = N(\varepsilon)$ аз ε вобаста) мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи $n > N$ нобаробарии

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (2)$$

иҷро гардад.

Ба a баробар будани худуди пайдарпайи $\{x_n\}$ -ро дар ҳолати $n > N$ (ё ки $n \rightarrow \infty$) ин тавр менависанд:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (3)$$

Мисоли 1. Иббот кунед, ки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{n} = 4$ аст.

Ҳал. Барои иббот аз нобаробарии (2) истифода бурда, менависем:

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{4n+3}{n} - 4 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{4n+3-4n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left| \frac{3}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon}.$$

Пас, ҳудуди пайдарпайи додашуда аз рақами $N = \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil$ сар карда, ба адади 4 баробар мешудааст. Масалан, дар ҳолати $\varepsilon = 0,1$ будан, $N = 30$ ва дар ҳолати $\varepsilon = 0,01$ будан, $N = 300$ ва ғайраҳо шуда метавонад.

Бигузор x соҳаи муайяни функсия ва a нуқтаи ҳудудии маҷмӯи додашуда бошад.

Таърифи 2. Адади b ҳудуди функсияи $f(x)$ дар ҳолати $x \rightarrow a$ ($x \neq a$) номида мешавад, агар барои $\forall \varepsilon < 0$ -и хурд ва ҳамаи $x \neq a$ -и ба a кифоя наздик нобаробарии

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (4)$$

ифро гардад. Дар ин ҷо, нобаробарии (4) барои ҳамаи он қиматҳои x , ки барояшон функсияи $f(x)$ маъно дорад, ҷой дорад.

Ин таърифро дар намуди ҳудудии мухтасар ин тавр менависанд:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad (5)$$

ё ки $f(x) \rightarrow b$ ҳангоми $x \rightarrow a$.

Таърифи 3. Тасдиқоти

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (6)$$

ба нобаробарии $|f(x) - b| < \varepsilon$ дар ҳолати $|x - a| < \delta$ будан эквивалент мешавад, ки дар ин ҷо, $\delta = \delta(\varepsilon)$ аз ε вобаста аст.

Лекин бояд дар хотир дошт, ки $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ на барои ҳама гуна функсияи $y = f(x)$ вуҷуд дорад. Масалан, ҳангоми $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ қимати функсияи $y = \lg x$ номаҳдуд мешавад (дар ҳолати $x < \frac{\pi}{2}$ будан), ё номаҳдуд кам мешавад (ҳангоми $x > \frac{\pi}{2}$ будан). Бинобар ин, барои ин функсия ҳеҷ адади b - ро нишон додан мумкин нест, ки қимати функсия ба он майл кунад.

Дар оянда хангоми дараҷа баромадани ҳудуди функсияҳо, мо доимо фарз мекунем, ки ҳудуд вуҷуд дорад.

§2. Теоремаҳои асосии ҳудуди функсияҳо

Дар ин ҷо фақат аз таърифи ҳудуди функсия истифода бурда, якчанд теоремаҳои асосии ҳудуди функсияҳоро дар нукта меорем. Теоремаҳое, ки бе исбот оварда мешаванд дар ҳисоби ҳудудҳо аҳамияти калон дошта, ҳисоби онҳоро осон мекунанд.

Фарз мекунем, ки ҳудуди функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ дар нуктаи a ($x \rightarrow a$) мавҷуд бошанд. Яъне,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ ва}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \quad B \neq 0$$

бошанд.

Теоремаи 1. *Ҳудуди бутургии доимӣ ба ҳудуди бутургии доимӣ баробар аст:*

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (c - \text{доимӣ}) \quad (1)$$

Теоремаи 2. *Ҳудуди суммаи (фарқи) функсияҳо ба суммаи (фарқи) ҳудудҳои ҳамон функсияҳо баробар мебошад:*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (2)$$

Теоремаи 3. *Ҳудуди ҳосили зарби функсияҳо ба ҳосили зарби ҳудудҳои ин функсияҳо баробар аст:*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (3)$$

Теоремаи 4. *Ҳудуди нисбати ду функсияҳо ба нисбати ҳудудҳои ин функсияҳо баробар аст, агар ҳудуди тақсимкунанда ба нол баробар набояд:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0. \quad (4)$$

Теоремаи 5. *Зарфикунадани доимиро аз сатҳи ишорати ҳудуд баровардан мумкин аст:*

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x). \quad (5)$$

Теоремаи 6. *Агар ҳудуди функсияи $f(x)$ дар нуктаи a мавҷуд бошад, он гоҳ ҳудуди дараҷаи мусбатии он дар нуктаи a ба ҳамон ҳал дараҷаи мусбатии ҳудуди функсия баробар мебошад, яъне*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n, \quad n \in N. \quad (6)$$

Ба ғайр аз теоремаҳои номбаркардашуда, ҳангоми ҳисоби ҳудуди функсияҳои тригонометрӣ дар нуқта аз ҳудудҳои зерин (ҳудуди шоян диққат) истифода кардан иқтидори мебошад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{ва} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x} = 1. \quad (7)$$

Умуман ҳангоми ҳисоб кардани ҳудуди функсияҳо, таърифи ва теоремаҳои асосии ҳудуди функсияҳо, ҳудудҳои сеҳзаии квадратӣ ба зарбунандаҳои ҳаттӣ, гурӯҳбандӣ, формулаҳои зарби мухтасар, формула ва ифодаҳои тригонометриро доништан ва дар хотир нигоҳ доштан лозим аст.

Натиҷаи ҳисоби ҳар гуна функсияи дорои ҳудуд буда, дар намуни адади ҳақиқӣ (a) ва беохир ($\pm \infty$) ёфта мешавад. Яқинд мисолҳо доир ба ёфтани ҳудуди функсияҳои ҳосро дида мебароем.

Мисол. Ҳудуди функсияҳои зеринро ҳисоб мекунем:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 + 3x - 5).$$

Ҳал. Дар асоси теоремаҳои 1, 2, 5 ва 6 ҳудуди функсияро ҳисоб мекунем.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 + 3x - 5) &= \lim_{x \rightarrow 1} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 3x - \lim_{x \rightarrow 1} 5 = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 1} x - 5 = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = 4 + 3 - 5 = 2. \end{aligned}$$

Ҷавоб: 2.

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5}{3 - 2x}.$$

Ҳал. Азбаски,

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 5) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 3 \cdot 1^2 + 5 = 3 + 5 = 8,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

аст, пас дар асоси теоремаи 4 ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5}{3 - 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)} = \frac{8}{1} = 8.$$

Ҷавоб: 8.

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$$

Ҳял. Дар аввал сеузван квадратин дар сурати каср бударо ба зарбкунандаҳои хаттӣ ҷудо мекунем. Барои ин муодилаи квадратии $x^2 - 5x + 6 = 0$ -ро ҳал карда, сеузван квадратиро дар намуди зерин менависем:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Он гоҳ, ҳудуди лодашударо ба намуди зерин навишта, онро ҳисоб мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1.$$

Ҷавоб: -1 .

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x - 15}{x^2 - 4x + 3}.$$

Ҳял. Дар аввал ба монанди мисоли 3 рафтор карда, сеузвонҳои дар сурат ва дар махраҷи каср бударо ба зарбкунандаҳои хаттӣ ҷудо карда менависем:

$$2x^2 - x - 15 = (x - 3)(2x + 5)$$

$$\text{ва} \quad x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Акнун ҳудуди лодашударо ҳисоб мекунем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x - 15}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(2x + 5)}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x + 5)}{(x - 1)} = \\ &= \frac{2 \cdot 3 + 5}{3 - 1} = \frac{11}{2} = 5,5. \end{aligned}$$

Ҷавоб: $5,5$.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}.$$

Ҳял. Сурат ва махраҷи касро ба ҳамроҳшудани махраҷи $\sqrt{x + 3} + 3$ зарб зада, мувофиқи формулаи $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ҳосил мекунем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 6)(\sqrt{x + 3} + 3)}{(\sqrt{x + 3} - 3)(\sqrt{x + 3} + 3)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6) \cdot (\sqrt{x+3} + 3)}{(x+3) - 9} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6) \cdot (\sqrt{x+3} + 3)}{x-6} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 6} (\sqrt{x+3} + 3) = \sqrt{6+3} + 3 = 3 + 3 = 6.
 \end{aligned}$$

Ҷавоб: 6.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

Ҳал. Азбаски, $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ аст, пас

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2
 \end{aligned}$$

мешавад.

Аз формулаи (7) ва ҳам аз теоремаи 5 истифода бурда, менависем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Ҷавоб: 0,5.

Ба гайр аз ҳудуди функсия дар нуқтаи a , дар бисёр маврид дар ин нуқта ҳудуди яктарафаи функсия $f(x)$ - ро муоина мекунам. Барои он ки ҳудуди яктарафаро фаҳмем, мо бояд таърифи ҳудуди функсия (таърифи 3) - ро ба таври дар курси анализи математикӣ нишондодашуда баён кунем, вай чуноин аст:

Таъриф. Адади A ҳудуди функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a номида мешавад, агар барои $\forall \varepsilon > 0$ -и дидаҳо $\delta > 0$ ёфт шавад, ки ($\delta = \delta(\varepsilon)$ аз ε вобаста аст), ки барои ҳамаи $x \neq a$ - и нобаробарии $|x - a| < \delta$ - ро қиёбаткунонда нобаробарии

$$|f(x)A| < \varepsilon$$

ичро шавад. Дар ин ҷо нобаробарии

$$|x-a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$$

дар атрофи нуқтаи a -ро мефаҳмонад.

Худуди яктаарафии функсияи $f(x)$ -ро муонина кардан ин ёфтани худуди рост ва худуди чапи функсия мебошад.

Бинобар он, ҳангоми муонина кардани худуди рости функсия дар таърифи доданида шарт $x \neq a$ -ро бо шарт $x > a$ (мувофиқан $x < a$) иваз мекунанд. Ҳамин тариқ,

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \text{ ва } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \quad (8)$$

меншавад.

Барои он ки худуди функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a мавҷуд бошад, зарур ва кифоя аст, ки баробарии

$$f(a-0) = f(a+0) \quad (9)$$

ичро шавад.

§3. Бефосилагии функсияҳо дар нуқта

Азбаски мафҳуми дар параграфҳои оянда муонинашаванда аз мафҳуми бефосилагии функсия вобаста аст, бинобар, он дар ин ҷо мафҳуми бефосилагии функсияҳоро дар нуқтаи доданида дида мебароем. Ҳангоми ҳисоби худуди функсияҳои параграфи 2 маълум шуд, ки худуди функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0 \in X$, яъне $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ба қимати функсия дар худ нуқтаи $x = x_0$ баробар шуда истодааст.

Таърифи 1. Функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ бефосилагии номӯда меншавад, агар:

- а) функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ муайян бошад;
- б) баробарии $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ иҷро шавад.

Мисол. Барои функсияи $f(x) = 3x + 4$ ҳангоми $x = x_0$ будан,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (3x + 4) = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \lim_{x \rightarrow x_0} 4 = 3 \cdot x_0 + 4 = 3x_0 + 4$$

меншавад. Пас, функсияи $f(x) = 3x + 4$ дар нуқтаи $x = x_0$ бефосила аст.

§4. Бифосилагин функсияҳо бо маънои афзоиш

Бигуздор x ягон қимати тағйирёбандаи мустақил (аргумент) аз соҳаи муайянии функсияи $y = f(x)$ бошад. Дар баробари x қимати дигари ин тағйирёбандаи мустақил, x_1 - ро муомла мекунем.

Таърифи 2. Фарқи $x_1 - x$ - ро афзоиши тағйирёбандаи мустақил (аргумент) дар нуқтаи x меноманд ва бо Δx ишорат менамоянд.

Ҳамин тариқ, $\Delta x = x_1 - x$ ва аз ин ҷо,

$$x_1 = x + \Delta x \quad (1)$$

мешавад.

Дар ин ҷо, x - ро қимати ибтидоӣ ва $x + \Delta x$ - ро қимати нави тағйирёбандаи мустақил (аргумент) меноманд.

Бигуздор функсияи $y = f(x)$ дар соҳаи муайяниаш X дода шуда бошад. Агар ба аргументи функсия x афзоиши Δx - ро диҳем, он гоҳ, y афзоиши мувофиқи Δy - ро мегирад. Ҳамин тариқ, агар $y = f(x)$ бошад, он гоҳ, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ мешавад. Аз ин ҷо, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ мешавад.

Таърифи 3. Фарқи байни қимати нави функсия $f(x + \Delta x)$ ва қимати аввалии он $f(x)$ -ро афзоиши функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x меноманд ва бо Δy ($\Delta f(x)$) ишорат менамоянд (Расми 1).

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (2)$$

Мисоли 1. Афзоиши аргумент (Δx) ва афзоиши функсия (Δy) дар нуқтаи x ҳангоми $x = 1,5$; $x = 3,5$ ва $y = x^2 + 5x + 6$ будан, ёфта шавад.

Ҳал. Мувофиқи таърифи афзоиши аргумент ва афзоиши функсия соҳиб мешавем:

а) $\Delta x = x_1 - x$; $\Delta x = 3,5 - 1,5 = 2$.

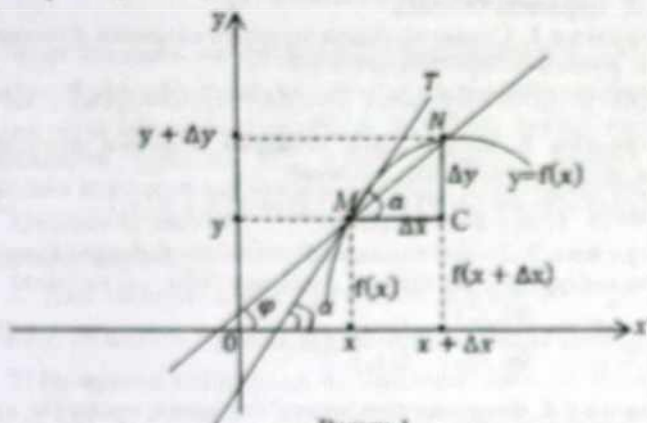
Яъне, $\Delta x = 2$.

б) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 6 - (x^2 + 5x + 6);$$

$$\Delta y = (3,5)^2 + 5 \cdot 3,5 + 6 - ((1,5)^2 + 5 \cdot 1,5 + 6)$$

$$\Delta y = 35,75 - 15,75 = 20.$$



Рисунг 1

Тайрифи 4. Функция дар нуқтаи додашуда бефосила номпада мешавад, агар дар ин нуқта ба афзоиши беохир хурди аргумент (Δx) афзоиши беохир хурди функция (Δy) мувофиқ ояд. Ҳамин тариқ,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0 \quad (3)$$

мешавад.

Мисоли 3. Иббот кунед, ки функцияи $y = 3x^2 + 4$ дар ҳамаи нуқтаҳои R бефосила аст.

Ҳал. Қадами 1. $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 4$;

Қадами 2. $\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 4 - (3x^2 + 4) =$
 $= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 4 - 3x^2 - 4 =$
 $= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 3\Delta x(2x + \Delta x)$

Қадами 3. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3\Delta x(2x + \Delta x)) = 3 \cdot 0(2x + 0) = 0.$

Пас, функцияи $y = 3x^2 + 4$ мувофиқи тайрифи 4 дар тамоми нуқтаҳои R бефосила мешавад.

§5. Теоремаҳо дар бораи функсияҳои бефосила

Бигуздор функсияҳои $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ дар ягон нуқтаи x_0 -и маҷмӯи X бефосила бошанд.

Теоремаи 1. Сумма ва фарқи шумораи охирноки функсияҳои бефосила, функсияи бефосила мебошад.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \pm f_2(x_0). \quad (1)$$

Теоремаи 2. Ҳосили зарби шумораи охирноки функсияҳои бефосила, функсияи бефосила мебошад.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \cdot f_2(x_0). \quad (2)$$

Теоремаи 3. Ҳосили тақсими функсияҳои бефосила (ҳангоми махраҷани нобаробарӣ нол будан), функсияи бефосила мебошад.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)} = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}, \quad f_2(x_0) \neq 0. \quad (3)$$

Теоремаи 4. Функсияи раціоналӣ дар ҳамаи нуқтаҳое, ки он муайян аст, бефосила мебошад. Масалан, функсияҳои дар намуди бисёрраъзӣ додашуда, мисоли функсияҳои раціоналӣ буда, онҳо дар ҳамаи маҷмӯи R бефосила мебошанд.

МАШҚҲО

Ҳудуди функсияҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 4x - 21}{2x - 14}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} (7 + 3x + x^2).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{11x - x^2}{x^3 + 3x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5x}{x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{3x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \cdot \sin 12x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\sin 18x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \cos x} - \sqrt{5}}{2x^2}.$$

БОБИ XV ҲОСИЛА ВА ТАДҚИКИ ФУНКСИЯ

§1. Ҳосила ва таърифи он

Фарз мекунем, ки функсияи муоинашавандаи $y = f(x)$ дар маҷмӯи $X = (a; b)$ (маҷмӯи $X = (a; b)$ интервали охиринок ва беохир шуда метавонад) муайян ва бефосила бошад. Аз мафҳуми бефосилагии функсия дар нукта истифода бурда, ҳосилаи функсияи дилхоҳро дар нуктаи доданшуда дида мебароем.

Ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ дар нуктаи $x_0 \in X$ аз рӯи схемани зерин ёфта мешавад:

1. Дар маҷмӯи доданшуда нуктаи $x = x_0 \in X$ - ро интихоб мекунем, ки қимати функсия дар он ба $y_0 = f(x_0)$ баробар аст.

2. Ба нуктаи қайдшудани x_0 афзоиши Δx - ро илова карда, нуктаи нав $x_0 + \Delta x \in X$ - ро ҳосил мекунем, ки қимати функсия дар он ба $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ баробар аст: $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

3. Аз қимати нави функсия $f(x_0 + \Delta x)$, қимати аввалин он $f(x_0)$ - ро кам карда, афзоиши функсия $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - ро пайдо мекунем.

4. Афзоиши функсия $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - ро ба афзоиши аргумент $\Delta x \neq 0$ тақсим карда, баробарини зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (\Delta x \neq 0). \quad (1)$$

5. Аз ду тарафи баробарини (1) дар асоси ба нол майл кардани Δx ($\Delta x \rightarrow 0$) ҳудуд мегирем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Таърифи 1. Агар ҳудуди нисбати афзоиши функсия Δy дар нуктаи x_0 бар афзоиши аргумент Δx , дар асоси $\Delta x \rightarrow 0$ суҷуд дошта бошад, он гоҳ ин ҳудудро ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар нуктаи $x = x_0$ меноманд.

Аз ишораҳои зерин y' ва $f'(x_0)$ истифода бурда, менависем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \right) \quad (3)$$

(Дар ин ҷо $f'(x_0)$ - адади маълум мебошад).

Ҳосилаи функсияро дар китобҳои дарсӣ, дастурҳо ва воситаҳои таълимӣ бо рамзҳои зерин ишоратҳо мекунам.

$$1. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \text{ ё ки } f'(x_0) \text{ (Лагранж);} \quad (4)$$

$$2. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ ё ки } \frac{df'(x_0)}{dx} \text{ (Лейбниц);} \quad (5)$$

$$3. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = dy \text{ ё ки } Df(x_0) \text{ (Кошӣ);} \quad (6)$$

$$4. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dot{y} \text{ (Нютон)} \quad (7)$$

Таърифи 2. Функсияе, ки дар ягон нуқтаи соҳаи муайяни ҳосила дорад, дар ҳамин нуқта дифференцирониданида ва номида мешавад.

Аз мафҳуми ҳудуд аз рост ва ҳудуд аз чапи функсия истифода бурда, ҳосила аз рост ва ҳосила аз чапи функсияро дар нуқта дида мебароем.

Дар асрон ба нол майл кардан ва мусбат будани Δx , ҳудуди

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow +0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \quad (8)$$

- ро ҳосилаи рост меноманд ва дар асрон ба нол майл кардан ва манфӣ будани Δx , ҳудуди

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow -0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \quad (9)$$

- ро ҳосилаи чапи функсия дар нуқтаи x_0 меноманд.

Агар,

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \quad (10)$$

бошад, он гоҳ функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи x_0 дорони ҳосила мебошад, яъне,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

мешавад.

Амали ёфтани ҳосилаи функсияро дифференсиронии функсия меноманд.

Мисоли 1. Иббот кунед, ки агар $y = x^2 + 4x + 5$ бошад, $y' = 2x + 4$ аст.

Ҳал. Ҳосилаи функсияро дар ососи схеман дар §1 нишондодашуда меёбем:

Қадами 1. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 5;$

Қадами 2. $\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 5 - (x^2 + 4x + 5) =$
 $= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x + 5 - x^2 - 4x - 5 =$
 $= 2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2;$

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 4 + \Delta x;$

Қадами 4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 4 + \Delta x)$

Мувофиқи таърифи 1 ва ишоран ҳосила мо навишта метавонем:

$$y' = 2x + 4.$$

Инак, иббот карда шуд, ки $y' = (x^2 + 4x + 5)' = 2x + 4$ аст.

§2. Маълуми геометрии ҳосила

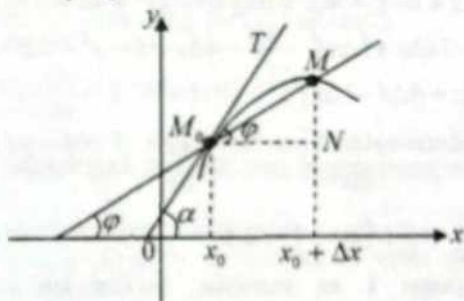
Фарз мекунем, ки хати кҷи l графиги ягон функсияи бефосилаи $y = f(x)$ дар ягон фосилаи X - и солаи муайянаш бошад. Дар хати кҷ нуктаи дилхоҳи беаҳақати $M(x, y)$ - ро мегишем. Агар ба абсиссаи нуктаи беаҳақат x афзоиши Δx - ро илова кунем, он гоҳ ординатаи ин нукта y мувофиқан афзоиши Δy - ро мегирад ва дар натиҷа нуктаи нави N - ро ҳосил мекунем, ки абсиссааш $x + \Delta x$ ва ординатааш $y + \Delta y$ мебошад: $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Нуқтаи N нуқтаи ҳаракаткунанда мебошад. Нуқтаҳои M ва N - ро пайваста, хати бурандаи MN - ро ҳосил мекунем.

Агар нуқтаи $N \rightarrow M$ ҳаракат кунад, он гоҳ хати бурандаи MN дар гирди нуқтаи беҳаракати M ҷарх зада, вазъиятҳои гуногунро қабул мекунад. Дар ин маврид лаҳзае мешавад, ки хати рости бурандаи MN вазъияти MT - хати рости расанда ба нуқтаи M - ро қабул мекунад.

Бинобар он, вазъияти ҳудудии хати бурандаро хати расанда ва хати MT - ро расанда ба хати қачи l дар нуқтаи M меноманд.

Вақте ки бурандаи MN бо самти мусбати тире Ox кунҷи φ - ро ташкил медиҳад, расандаи MT бо самти мусбати тире Ox кунҷи тез ё кундро ташкил медиҳад (Расми 1).



Расми 1

Аз $\triangle MNC$ бармеояд, ки $\angle CMN = \varphi$ мебошад. Агар коэффисиенти кунҷии бурандаи MN - ро бо k_1 ишорат кунем, он гоҳ аз $\triangle MNC$

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

мешавад.

Агар $N \rightarrow M$, он гоҳ, $\Delta x \rightarrow 0$ ва хати рости бурандаи MN ба мавқеи ҳудудии худ - ба хати рости расандаи MT дар нуқтаи M майл мекунад. Дар ин ҳолат, ҳангоми $\Delta x \rightarrow 0$ будан кунҷи байни буранда ва тире Ox (кунҷи φ) ба кунҷи байни расанда ва тире Ox (кунҷи α) майл мекунад: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha$ (расандаи MT ба

тири Ox перпендикуляр нест). Бинобар ин, дар асоси безфосилагии функсияи тригонометрии tgx навишта метавонем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\varphi = tg\alpha.$$

Дар ин ҷо, $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ мебошад.

$$\text{Пас, } tg\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \text{ мебошад.}$$

Ҳамин тариқ, ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x ба тангенс кунҷи монли расанда ба хати кҷи мувофиқ дар нуқтаи абсиссаи x баробар аст:

$$f'(x) = tg\alpha. \quad (2)$$

Азбаски, $tg\alpha$ - коэффитсиенти кунҷи расандан MT мебошад, пас баробарии (12) - ро ба таври зерин маънидод кардан мумкин аст:

Коэффитсиенти кунҷи расанда ба графиси функсия, ки дар нуқтаи x гузаронида шудааст, ба қимати ҳосилаи он дар ҳамон нуқта баробар мебошад.

§3. Маълум механикӣ ҳосила

Ҳаракати ростхаттан мунтазам - ҳаракати соддатарини ҷисм мебошад. Ҳаракати ростхаттан мунтазам ҳаракатест, ки ҷисм самти худро тағйир нақода, дар фосилаҳои баробари вақт масофаи баробарро тай мекунад. Аз курси физикаи мактабӣ маълум аст: *роҳе, ки ҷисм дар вақти вақт ҳақлаи ҳаракати ростхаттан мунтазам тай мекунад, ба суръати ин ҳаракат баробар аст.*

Аммо дар амалия ба ғайр аз ҳаракати мунтазам боз ҳаракати ғайримунтазам ҳаст, ки бо он бисёртар кордор мешавем. Азбаски, дар ҳаракати ғайримунтазам, дар фосилаҳои гуногуну аз ҷиҳати бузургӣ баробари вақт масофаи гуногун мувофиқ меояд, бинобар он аёсар вақт ҳаракати ғайримунтазам дар фосилаи муайини вақт бо суръати миёна ифода карда мешавад. Ҷе ҳақиқ, ки маълум аст, масофа S аз вақт t вобаста мебошад, яъне, $S = f(t)$. Инро қонуни ҳаракат ҳам меноманд. Аз ин ҷо,

$$x + \Delta x = f(t + \Delta t) \text{ ё } \Delta x = f(t + \Delta t) - f(t) \quad (1)$$

мешавад.

Агар дар лаҳзаи вақти t ҷисми ҳаракаткунанда масофаи ба S баробарро тай карда бошад, он гоҳ дар лаҳзаи вақти $t + \Delta t$ масофаи ба $S + \Delta s$ баробарро тай мекунад. Пас, $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ масофаи дар фосилаи вақти Δt тайкардашударо муайян мекунад.

Азбаски суръат бузургии тағйирёбанда мебошад, бинобар он нисбати масофаи тайкардашуда Δs бар муддати вақти сарфшуда Δt фақат суръати миёнаро муайян мекунад, пас,

$$g_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2)$$

мешавад.

Агар аз суръати миёна $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, дар мавриди $\Delta t \rightarrow 0$ будан худуд гирем, дар натиҷа суръати лаҳзавии ҷисми ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти t пайдо мекунем:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = g_t = f'(t). \quad (3)$$

Инак, суръати лаҳзавии ҷисми ҳаракаткунанда дар ягон лаҳзаи вақти t ба ҳосилаи функсияи масофаро ифодакунанда баробар аст.

§4. Бевосита ҳисобкунии ҳосила

Агар функсияи $y = f(x)$ дар маҷмуи $D(f)$ муайян буда, дар ҳамин маҷмуи ҳосилаи доништа бошад, он гоҳ бевосита ҳисобкунии ҳосилаи функсия аз рӯи схемаи дар §1 овардашуда гузаронида мешавад.

Инак, барои маълумоти пурраи доништан бори дигар схемаи ёфтани ҳосиларо барои функсияи дилхоҳ меорем:

1. $y = f(x_0), x_0 \in D(f)$;
2. $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$;
3. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)$;
5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$;
6. Дар асоси таърифи

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \text{ ёки } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

мешавад.

Мисоли 1. Ҳосиллаи функцияҳои зеринро бо роҳи бевосита ҳисобкунӣ ёбед:

а) $y = x^2$.

Ҳал. Қадами 1. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$;

Қадами 2. $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

Қадами 4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$;

Қадами 5. Инак, $y' = (x^2)' = 2x$.

б) $y = \sqrt{x}$.

Ҳал. Қадами 1. $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$;

Қадами 2. $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$;

Қадами 3. $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

Қадами 4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$
 $= \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$;

Қадами 5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

Қадами 6. Инак, $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ мешавад.

в) $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Ҳал. Қадами 1. $y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$;

Қадами 2. $\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x^2+x\Delta x};$

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2+x\Delta x};$

Қадами 4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2+x\Delta x} = -\frac{1}{x^2};$

Қадами 5. Инак, $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ мешавад.

г) $y = \frac{x+4}{5}.$

Ҳа.л. Қадами 1. $y + \Delta y = \frac{(x+\Delta x)+4}{5};$

Қадами 2. $\Delta y = \frac{(x+\Delta x)+4}{5} - \frac{x+4}{5} = \frac{x+\Delta x+4-x-4}{5} = \frac{\Delta x}{5};$

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5};$

Қадами 4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{5} = \frac{1}{5};$

Қадами 5. Инак, $y' = \left(\frac{x+4}{5}\right)' = \frac{1}{5}.$

г) $y = \frac{x^2}{2} + 12x - 3.$

Ҳа.л. Қадами 1. $y + \Delta y = \frac{(x+\Delta x)^2}{2} + 12(x+\Delta x) - 3;$

Қадами 2. $\Delta y = \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2}{2} + 12x+12\Delta x-3 - \frac{x^2}{2}-12x+3 =$
 $= \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2}{2} + 12\Delta x - \frac{x^2}{2} =$
 $= \frac{x^2}{2} + x\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2} + 12\Delta x - \frac{x^2}{2} =$
 $= x\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2} + 12\Delta x = \Delta x \left(x + 12 + \frac{\Delta x}{2}\right)$

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x \left(x + 12 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = x + 12 + \frac{\Delta x}{2};$

Қадами 4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + 12 + \frac{\Delta x}{2} \right) = x + 12;$

Қадами 5. Аз ин ҷо, $y' = \left(\frac{x^2}{2} + 12x - 3 \right)' = x + 12$ мешавад.

§5. Ҳосили функсияҳои элементарӣ

1. **Функсияи дараҷагӣ** ($y = x^n$, $n \neq 1$). Ҳосили функсияи дараҷагӣ аз рӯи формулаи

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (1)$$

ёфта мешавад. Масалан:

а) $(x^3)' = 3x^2$; б) $(x^{-4})' = -4x^{-5};$

в) $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}; \quad г) \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$

2. **Функсияи нишондихандагӣ** ($y = a^x$, $0 < a \neq 1$). Ҳосили функсияи нишондихандагӣ аз рӯи формулаи

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1) \quad (2)$$

ёфта мешавад.

Дар ҳолати $a = e$ будан, аз рӯи формулаи (2) ҳосил мекуним:

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln e = 1) \quad (3)$$

Масалан, а) $(5^x)' = 5^x \ln 5$; б) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{3}.$

3. **Функсияи логарифмӣ** ($y = \log_a x$). Ҳосили функсияи логарифмӣ аз рӯи формулаи

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, \quad (0 < a \neq 1) \quad (4)$$

ёфта мешавад.

Дар ҳолати $a = e$ будан, ҳосили $y = \ln x$ аз рӯи формулаи (4)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \quad \log_e e = 1 \quad (5)$$

ёфта мешавад.

Масалаи а) $(\log_3 x)' = \frac{1}{x} \log_3 e;$ 6) $(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e.$

4. Функцияи тригонометрия. Ҳосилаи функцияи тригонометрия аз рӯи формулаҳои

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x; & (\cos x)' &= -\sin x; \\ (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \\ (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \end{aligned} \quad (6)$$

ёфта мешавад.

§6. Ҳосилаи функцияҳои мураккаб

Фарз мекунем, ки функцияи $y = f(u)$, ки $u = \varphi(x)$ аст, дода шуда бошад. Функцияи мураккаби аз функцияҳои $f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ тартиб ёфта, намуди зеринро дорад:

$$y = f(\varphi(x)) = F(x) \quad (1)$$

(дар ин ҷо, $F(x)$ - функцияи мураккаб).

Агар функцияи $\varphi(x)$ дар нуқтаи x_0 ва функцияи $f(u)$ дар нуқтаи $u_0 = \varphi(x_0)$ ҳосила дошта бошанд, он гоҳ, функцияи мураккаби $f(\varphi(x))$ дар нуқтаи x_0 дорони ҳосила буда, ҳосилааш аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад.

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \quad (2)$$

Масалаи, дар мавриди $F(x) = f(ax+b)$ будан, ҳосилаи функцияи $f(ax+b)$ - ро дар асоси формулаи (2)

$$(f(ax+b))' = af'(ax+b) \quad (3)$$

ёфта мешавад.

Дар ин ҷо, адади a ҳосилаи функцияи $(ax+b)$ аст:

$$(ax+b)' = (ax)' + b' = a.$$

$$\begin{aligned}\text{Мисоли 1. } \left\{ (3x+4)^9 \right\}' &= 10(3x+4)^8 \cdot (3x+4)' = \\ &= 10(3x+4)^8 \cdot 3 = 30 \cdot (3x+4)^8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Мисоли 2. } \left(\frac{5}{(4x+4)^2} \right)' &= \left(5 \cdot (4x+4)^{-2} \right)' = \\ &= 5 \cdot (-2) \cdot (4x+4)^{-3} \cdot (4x+4)' = \\ &= -20 \cdot 4 \cdot (4x+4)^{-3} = -80 \cdot (4x+4)^{-3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Мисоли 3. } \left(\sqrt{x^2+5} \right)' &= \left((x^2+5)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} (x^2+5)^{\frac{1}{2}-1} (x^2+5)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.\end{aligned}$$

$$\text{Мисоли 4. } (\sin 4x)' = \cos 4x \cdot (4x)' = 4 \cos 4x.$$

$$\text{Мисоли 5. } \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) \right)' = -\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right)' = -\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Мисоли 6. } (\ln x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}.$$

$$\text{Мисоли 7. } (e^{4x+5})' = e^{4x+5} \cdot (4x+5)' = 4e^{4x+5}.$$

$$\begin{aligned}\text{Мисоли 8. } (2^{\sin x})' &= 2^{\sin x} \ln 2 \cdot (\sin x)' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x = \\ &= \cos x \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2.\end{aligned}$$

§7. Қоида ва формулаҳои дифференциалли қосималар

Ингузор функсияҳои $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ дар нуқтаи x -и соҳиб муайяннашон дорон қосималаро $u'(x)$ ва $v'(x)$ ($v'(x) \neq 0$) бошад. Он гоҳ яқинда қоида ва формулаҳои зерики оғдани қосималаро, ки ба шумоён маълум аст, қатъиян қилимиз:

1. $C' = 0$, (C - доимии ҳақиқӣ);

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

$$4. (C \cdot u)' = C \cdot u';$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2};$$

$$6. \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2};$$

$$7. (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';$$

$$8. (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

$$9. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$10. (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$11. (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};$$

$$12. (\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$13. (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$14. (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$15. (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$16. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$17. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$18. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$19. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$20. (\operatorname{arccctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Мисол. Ҳосилаи функсияҳои зеринро ҳисоб мекунем:

$$1. y = \sin 2x + \cos 4x.$$

Ҳал. Формулаҳои $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ва $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ -ро татбиқ карда, ҳосилаи функсияи додашударо меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 2x + \cos 4x)' = (\sin 2x)' + (\cos 4x)' = \\ &= \cos 2x \cdot (2x)' - \sin 4x \cdot (4x)' = \\ &= 2 \cos 2x - 4 \sin 2x = 2(\cos 2x - 2 \sin 4x) \end{aligned}$$

$$\text{Ҷавоб: } y' = 2(\cos 2x - 2 \sin 4x)$$

$$2. y = e^{2x} \cdot \cos 2x.$$

Хаял. Формулахон $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $(e^x)' = e^x \cdot u'$ ва $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ - ро истифода бурда, косинуси функцини матлубро меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= (e^{2x} \cdot \cos 2x)' = (e^{2x})' \cdot \cos 2x + e^{2x} \cdot (\cos 2x)' = \\ &= e^{2x} \cdot (2x)' \cdot \cos 2x + e^{2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \\ &= 2e^{2x} \cdot \cos 2x - 2e^{2x} \sin 2x = \\ &= 2e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x). \end{aligned}$$

$$\text{Ҷавоб: } y' = 2e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$3. y = \sqrt[3]{4x^2 + 5}.$$

Хаял. Формулахон $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, ва $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $n > m$ - ро татбиқ карда, косинуси функцини доданшударо меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt[3]{4x^2 + 5})' = \left((4x^2 + 5)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} (4x^2 + 5)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (4x^2 + 5)' = \\ &= \frac{1}{3} (4x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4 \cdot 2x = \frac{8}{3} x (4x^2 + 5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2 + 5)^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ҷавоб: } y' = \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2 + 5)^2}}$$

$$4. y = (2x^3 + 5)^{10}.$$

Хаял. Аз формулаи $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, истифода бурда, косинуси функцини матлубро меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= \left((2x^3 + 5)^{10} \right)' = 10(2x^3 + 5)^9 \cdot (2x^3 + 5)' = \\ &= 10 \cdot 6x^2 \cdot (2x^3 + 5) = 60x^2 \cdot (2x^3 + 5). \end{aligned}$$

$$\text{Ҷавоб: } y' = 60x^2 \cdot (2x^3 + 5)$$

$$5. y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}.$$

Ҳал. Аз формулаи $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$ истифода бурда, ҳосилаи функсияи додашударо меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}\right)' = \frac{(x^2 + 4)' \cdot (x^2 - 4) - (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4)'}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 4 - x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{16x}{(x^2 - 4)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ҷавоб: } y' = -\frac{16x}{(x^2 - 4)^2}.$$

$$6. y = \frac{5}{3x + 4}.$$

Ҳал. Аз формулаҳои $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$ ва $C' = 0$ истифода бурда, ҳосилаи функсияи матлубро меёбем:

$$y' = \left(\frac{5}{3x + 4}\right)' = \frac{-5 \cdot (3x + 4)'}{(3x + 4)^2} = \frac{-15}{(3x + 4)^2} = -\frac{15}{(3x + 4)^2}.$$

$$\text{Ҷавоб: } y' = -\frac{15}{(3x + 4)^2}.$$

$$7. y = 7^{2x+3} + e^{\sin x}.$$

Ҳал. Формулаҳои $(a^x)' = a^x \ln a \cdot u'_x$ ва $(e^x)' = e^x \cdot u'_x$ ро татбиқ карда, ҳосилаи функсияи матлубро меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= (7^{2x+3} + e^{\sin x})' = (7^{2x+3})' + (e^{\sin x})' = \\ &= 7^{2x+3} \ln 7 \cdot (2x+3)' + e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = \\ &= 2 \cdot 7^{2x+3} \ln 7 + e^{\sin x} \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$\text{Ҷавоб: } y' = 2 \cdot 7^{2x+3} \ln 7 + e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

$$8. y = 2x - \lg 2x.$$

Хая. Формулахон $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ ва $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ ро татбиқ карда, қосилан функсияи $y = 2x - \operatorname{tg} 2x$ ро меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= (2x - \operatorname{tg} 2x)' = (2x)' - (\operatorname{tg} 2x)' = 2 - \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \\ &= 2 - \frac{2}{\cos^2 2x} = 2 \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x} \right) = \frac{2(\cos^2 2x - 1)}{\cos^2 2x} = \\ &= -\frac{2\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = -\operatorname{tg}^2 2x. \end{aligned}$$

Ҷавоб: $y' = -\operatorname{tg}^2 2x$.

9. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

Хая. Аз формулахон $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ва $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ истифода бурда, қосилан функсияи матлубро меёбем:

$$\begin{aligned} y' &= (\arcsin \sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}. \end{aligned}$$

Ҷавоб: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

10. $y = \log_2(4x+5) + \ln(4x+5)$.

Хая. Аз формулахон зерин $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ва $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ истифода бурда, қосилан функсияи доландаро меёбем:

$$y' = (\log_2(4x+5) + \ln(4x+5))' = \frac{(4x+5)'}{(4x+5) \ln 2} + \frac{(4x+5)'}{4x+5} =$$

$$= \frac{4}{(4x+5)\ln 2} + \frac{4}{4x+5} = \frac{4}{4x+5} \left(\frac{1}{\ln 2} + 1 \right) =$$

$$= \frac{4}{4x+5} \cdot \frac{1+\ln 2}{\ln 2} = \frac{4}{4x+5} \cdot \frac{\ln e + \ln 2}{\ln 2} = \frac{4 \cdot \ln 2e}{(4x+5)\ln 2}.$$

Ҷавоб: $y' = \frac{4 \cdot \ln 2e}{(4x+5)\ln 2}.$

§8. Формула барои ҳисобкуниҳои тақрибӣ

Фарз мекунем, ки функсияи муоинашавандан $y = f(x)$ дар ягон маҷмӯи X (маҷмӯи охиринок ё беохир) муайян ва бефосила бошад. Он гоҳ, аз рӯи таърифи ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 , ки дар §1 дода шудааст,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

мешавад.

Хангоми ба кадри кифоя хурд будани Δx , аз мафҳуми афзӯиши функсия ва ҳосилаи функсия дар нуқта истифода бурда, меёбем:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow \Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Аз ин ҷо,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (1)$$

мешавад. Формулаи асосӣ барои ҳисобкуниҳои тақрибии функсияҳо формулаи (1) мебошад.

Масалан, барои функсияи ҷилҳои намуди $f(x) = \sqrt{x}$, хангоми $x > 0$, $x \neq 0$ будан, формулаи ҳисобкунии тақрибии зерин вучуд дорад:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0} \cdot \Delta x. \quad (2)$$

Мисоли 1. Ифодаи $\sqrt[3]{1,1}$ -ро тақрибӣ ҳисоб мекунем.

Ҳал. Тарзи якум. Дар формулаи ҳисобкунии тақрибии (1)

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x_0 = 1; \quad \Delta x = 0,1; \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

-ро ғузошта ҳисоб мекунем:

$$\sqrt[3]{1.1} = \sqrt[3]{1+0.1} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot 0.1 = 1 + \frac{0.1}{3} = 1.033.$$

Тарзи дуюм. Дар навбати аввал мисоли долитударо дар нигмуди зерин менависем:

$$\sqrt[3]{1.1} = \sqrt[3]{1+0.1}.$$

Аз ин ҷо фикрмост, ки $x_0 = 1$ ва $\Delta x = 0.1$ мебошад. Он гоҳ формулаи (2) - ро татбиқ карда, қимати $\sqrt[3]{1.1}$ -ро ҳисоб мекунем:

$$\sqrt[3]{1.1} = \sqrt[3]{1+0.1} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{\sqrt[3]{1}}{3 \cdot 1} \cdot 0.1 = 1 + \frac{0.1}{3} = 1.033.$$

§9. Шарти афтуношавии (камшавӣ) функсия

Фикр мекунем, ки дар фосилаи (a, b) функсияи муайян ва бефосилаи $f(x)$ дода шуда бошад. Барои муайян кардани фосилаҳои афтуношавии (камшавӣ) функсия аз ҳосилии функсияи натиҷагирӣбада истифода мебаранд. Дар ин ҷо шарти кофӣи афтуношавии (камшавӣ) функсияро дар намууди теорема (бе исбот) меорем.

Теорема. Агар функсияи $f(x)$ дар ҳар як нуқтаи фосилаи (a, b) ҳосилии мусбат (манфӣ) дошта бошад, он гоҳ, функсияи $f(x)$ дар ин фосила афтуношаванда (камшаванда) мешавад.

Агар дар функсия фосилаи афтуношавии (камшавӣ) дода нашуда бошад, он гоҳ аввал содаи муайянии функсия ва баъд ҳосилии функсияро мебинанд.

Агар дар фосилаи долитуд $f'(x) > 0$ бошад, пас дар ҳосилии шарти теорема функсия дар ин фосила афтуношаванда мебошад.

Агар дар фосилаи долитуд $f'(x) < 0$ бошад, пас дар ҳосилии шарти теорема функсия дар ин фосила камшаванда мешавад.

Ҳамин тариқ, натиҷагирӣбадаи $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) дар айнан ҳол фосилаи афтуношавии (камшавӣ) функсияро муайян мекунанд.

Мисол. Фосилаҳои афтуношавии (камшавӣ) функсияи $f(x) = x^3 - 27x$ -ро муайян.

Ҳал. Соҳан муайянини функсия $D(f) = R = (-\infty, +\infty)$ мебошад. Ҳосилаи функсияро ёфта, баъд ба нол баробар карда, ҳалҳои мувофиқро меёбем:

$$f'(x) = (x^3 - 27x)' = 3x^2 - 27.$$

$$\text{Ҳангоми } f'(x) = 0: 3x^2 - 27 = 0; x^2 = 9; x_1 = -3; x_2 = 3.$$

Инак, $f'(x)$ ҳангоми $x = -3$ ва $x = 3$ будан ба нол баробар мешавад. Пас, нуктаҳои $x = -3$ ва $x = 3$ соҳан муайянини функсияро ба се фосилаи $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ ва $(3; +\infty)$ ҷудо мекунад.

Мувофиқи шартҳои теорема $f'(x) = 3x^2 - 27$ дар фосилаҳои $(-\infty; -3)$ ва $(3; +\infty)$ мусбат ва дар фосилаи $(-3; 3)$ манфӣ мебошад (Расми 2).

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$		0		-10	
		max		min	

Расми 2

Азбаски, функсияи $f(x) = x^3 - 27x$ дар нуктаҳои $x = -3$ ва $x = 3$ бефосила мебошад, пас, функсия дар фосилаҳои $(-\infty; -3)$ ва $(3; +\infty)$ афзуншаванда ва дар фосилаи $(-3; 3)$ камшаванда мешавад.

§10. Нуктаҳои критикӣ ва экстрими функсия

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дар маҷмуи $X = (a; b)$ муайян ва бефосила бошад. Ҳамакунин муодилаи $f'(x) = 0$ нуктаҳои критикӣ (*ё нуқтаҳои нолӣ*) функсия номид мешаванд. Масалан, агар x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи $f'(x) = 0$ бошанд, он гоҳ, x_1 ва x_2 барои функсияи $f(x)$ нуктаҳои критикӣ мешаванд.

Максимум ва минимуми функсия аз рӯи аломати $f'(x)$ дар атрофи нуқтаҳои критикӣ муайян карда мешавад.

Агар, $x_0 \in X = (a; b)$ яке аз нуқтаҳои критикӣ функсияи $f(x)$ бошад, пас, x_0 маҷмуи $X = (a; b)$ -ро ба маҷмуҳои $(a; x_0)$ ва $(x_0; b)$ ҷудо мекунад.

Теоремаи 1 (бе исбот). Агар функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ бифосила буда, дар фосилаи $(a; x_0)$ $f'(x) > 0$ ва дар фосилаи $(x_0; b)$ $f'(x) < 0$ бошад, он гоҳ нуқтаи $x = x_0$ нуқтаи максимуми функсия мебошад.

Дар ин ҳолат қимати x_0 -ро ба функсияи $y = f(x)$ гузошта, қимати максимуми функсияро меёбем:

$$f_{\max} = f(x_0).$$

Теоремаи 2 (бе исбот). Агар функсияи $y = f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ бифосила буда, дар фосилаи $(a; x_0)$ $f'(x) < 0$ ва дар фосилаи $(x_0; b)$ $f'(x) > 0$ бошад, он гоҳ нуқтаи $x = x_0$ нуқтаи минимуми функсия мебошад.

Дар ин ҳолат қимати x_0 -ро ба функсияи $y = f(x)$ гузошта, қимати минимуми функсияро меёбем:

$$f_{\min} = f(x_0).$$

Мисол. Нуқтаҳо ва қимати экстремуми функсияи $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ -ро меёбем.

Ҳал. 1. Соҳаи муайяниаш $D(f) = R = (-\infty; +\infty)$ аст, чунки, $f(x)$ бисёрӯза мебошад.

$$2. f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' - (3x)' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 = x - 3;$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

3. Функсияи муоинашаванда якто нуқтаи критикӣ дорад: $x = 3$.

4. Нуқтаи $x = 3$ соҳаи муайянии функсияро ба фосилаҳои $(-\infty; 3)$ ва $(3; +\infty)$ ҷудо мекунад.

Азбаски дар фосилаи $(-\infty; 3)$ - $f'(x) = x - 3 < 0$ ва дар фосилаи $(3; +\infty)$ - $f'(x) = x - 3 > 0$ мебошад, бинобар он дар асоси теоремаи 2 нуктаи $x = 3$ нуктаи минимуми функсия мебошад.

Агар қимати функсияро ёфтан лозим бошад, он гоҳ қимати $x = 3$ -ро ба функсия гузошта, қимати минимуми функсияро меёбем:

$$f_{\min} = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x \right)_{x=3} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} - 9 = -4,5.$$

§11. Тадқиқи функсия ва графיקи он

Аз курси математикаи мактабӣ аниқтараш аз синфи 8 маълумотҳоро доир ба сохтани графикҳо ба хотир меорем. Графики функсия аз рӯи нуктаҳо сохта мешавад. Графики сохтанида на ҳама вақт нуктаҳоро дарбар мегирад, чунки дар вақти сохтани графики функсия нуктаҳои экстремумро партофтан ё ки нодуруст тасвир кардан мумкин аст. Барои он ки графики функсия саҳеҳ ва ҳамаи нуктаҳоро дарбар гирад, бояд сохтани графикро аз тадқиқи функсия сар кард.

Фарз мекунем, ки $f(x)$ дар маҷмӯи $X = (a; b)$ муайян бошад. Маҷмӯи $X = (a; b)$ - фосилаҳои охиринок ва беохир шуданаи мумкин аст.

Агар функсияи $f(x)$ дар маҷмӯи $X = (a; b)$ бефосила бошад, он гоҳ функсия аз рӯи схемани зерин тадқиқ карда шуда, графикаш сохта мешавад:

1. Соҳани муайяний ва қиматҳои функсия;
2. Чуфт, тоқ ва даврӣ будани функсия;
3. Нуктаҳои буриши графики функсия бо тирҳои координатаҳо;
4. Фосилаҳои доминанти аломат;
5. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсия;
6. Нуктаҳои экстремум ва қиматҳои функсия дар ин нуктаҳо.

Пас аз он дар асоси қиматҳои ёфтанида графики онро месозанд. Ҳангоми сохтани графики функсия дар бисёр мавридҳо ёфтани нуктаи буриши графики функсия бо тирҳои координат лозим ва фойдаовар мебошад.

Мисол. Функсияи $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ - ро тадқиқ карда, графики онро месозем.

Ҳал. Функцияи додашударо бо истифодабарии ҳосила тадқиқ мекунем:

1. $D(f) = R$ аст, чунки функцияи додашуда бисёрузва аст.

2. Функцияи додашуда на чуфт асту на тоқ.

3. Ҳосилаи функцияро меёбем:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 4x = x^2 - 4x.$$

4. Барои муайян кардани нуқтаҳои критикӣ, ҳосилаи ёфташударо ба нол баробар карда, решаҳои онро меёбем:

$$f'(x) = 0;$$

$$x^2 - 4x = 0; \quad x(x - 4) = 0.$$

Аз ин ҷо, $x_1 = 0$ ё ки $x_2 = 4$ мешавад.

Аз ин ҷо бармеояд, ки функцияи муоинашаванда дуто нуқтаи критикӣ 0 ва 4 дорад.

5. Қимати функцияро дар нуқтаҳои критикӣ ҳисоб мекунем:

$$f(0) = 0; \quad f(4) = -10\frac{2}{3}.$$

6. Барои ёфтани фосилаи афзуншавии (камшавӣ) функция нобаробариҳои $f'(x) > 0$ ва $f'(x) < 0$ - ро ҳал кардан лозим меояд:

а) Нобаробарии $x(x - 4) > 0$ - ро ҳал мекунем:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ x - 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x > 4. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x > 4$ мешавад.

$$2) \begin{cases} x < 0, \\ x - 4 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x < 4. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x < 0$ мешавад.

Ҳалли нобаробариҳо $x > 4$ ва $x < 0$ мефаҳмонад, ки функция дар фосилаҳои $(4; +\infty)$ ва $(-\infty; 0)$ афзуншаванда аст.

б) Нобаробарии $x(x - 4) < 0$ - ро ҳал карда пайдо мекунем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 4 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < 4. \end{cases} \quad (1)$$

Аз ин ҷо, $x > 0$ ва $x < 4$ мешавад.

Инак, ҳалли системаи нобаробариҳо ба фосилаи $(0; 4)$ тааллуқ доштааст. Системаи нобаробариҳои (1) ҳамчун нест. Бинобар он, функсия дар фосилаи $(0; 4)$ камшаванда мебошад.

6. Барои ёфтани нуқтаҳои минимум ва максимуми функсия ҷадвали зеринро тартиб медиҳем:

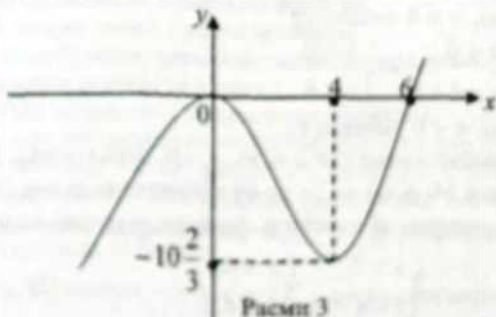
x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		0		$-10\frac{2}{3}$	
		max		min	

7. Барои ёфтани координатаҳои нуқтаи буриши графики функсия бо тирҳои координатаҳо, системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} y = x^2 \left(\frac{1}{3}x - 2 \right) \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} y = x^2 \left(\frac{1}{3}x - 2 \right) \\ x = 0 \end{cases}$$

Ҳалҳои система координатаҳои нуқтаи буриширо муайян мекунанд. Инак, графики функсияи долашуда, тирҳои координатро дар нуқтаи $A(6; 0)$ мебурад ва дар нуқтаи $O(0; 0)$ тирҳои абсисса ба графики функсия расанда аст.

8. Дар охир натиҷаҳои таҷриботро ба ҳисоб гирифта, графики функсияи мазкурро месозем (Расми 3).



Расми 3

§12. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия

Ҳангоми иҷрои корҳои амалӣ масъалаҳои вомехӯранд, ки ҳалли онҳо аз ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳо вобаста мебошад. Дар курси анализи математикӣ [20, сах.176] теоремаи дуҷуми Вейерштрасс тасдиқ мекунад, ки функсияи дар порчаи $[a; b]$ муайян ва бефосилаи $y = f(x)$ дар ин порча соҳиби сарҳади аниқи болоӣ ва поёӣ мебошад, яъне, дар порчаи $[a; b]$ чунин нуқтаҳои $x = x_0$ ва $x = x_1$ мавҷуданд, ки дар онҳо қиматҳои функсия $f(x_0)$ ва $f(x_1)$ дар байни ҳамаи қиматҳои функсияи $f(x)$ мувофиқан калонтарин ва хурдтарин мебошад.

Агар функсияи $f(x)$ дар ягон соҳаи $X = (a; b)$ муайян ва бефосила бошад, он гоҳ барои ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия дар ин соҳа аввал нуқтаҳои критикӣ функсияро меёбанд ва баъд қимати функсияро дар охири порча ҳисоб мекунад. Пас, аз ин ҷо барои муайян кардани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия аз ин ададҳои ёфташуда, калонтарин ва хурдтаринашро интихоб кардан зарур аст.

Мисол. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ - ро дар порчаи $[-4; 4]$ меёбем.

Ҳал. Аввал нуқтаҳои критикӣ функсияро меёбем:

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 35)' = 3x^2 - 6x - 9;$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = 4 + 12 \Rightarrow D = 16 > 0;$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1; \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Инак, функсия дуто нуқтаи критикӣ -1 ва 3 доштааст. Дар ин ҷо, $-1 \in [-4; 4]$ ва $3 \in [-4; 4]$ мебошад.

1. Қиматҳои функсияро дар нуқтаҳои критикӣ $x = -1$ ва $x = 3$ ва ҳам дар охири порчаи $[-4; 4]$ ҳисоб мекунем:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 35 = -1 - 3 + 9 + 35 = 40;$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 35 = 27 - 27 - 27 + 35 = 8;$$

$$f(-4) = (-4)^3 - 3 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) + 35 = -64 - 48 + 36 + 35 = -41;$$

$$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 35 = 64 - 48 - 36 + 35 = 15.$$

Инак, қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро мухтасар дар намуни зерин менависем:

$$\max_{[-4,4]} f(x) = f(-1) = 40; \quad \min_{[-4,4]} f(x) = f(-4) = -41.$$

М А Ш Қ Х О

1. Агар $f(x) = \sqrt{5-2x}$ бошад, $f'(-2)$ -ро ҳисоб кунед.

2. Ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y = (2x-3)^{1/2};$ б) $y = \sqrt{4x^2-1};$

в) $y = \ln(x^2+5x+6);$ г) $y = \sqrt[3]{9x^2-16};$

д) $y = \cos^2 2x - \cos 4x;$ е) $y = x^2 \cdot e^{3x}.$

3. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣи функсияҳои зеринро муайян кунед:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 5;$ б) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1;$ в) $f(x) = \frac{2}{x}.$

4. Нуқтаҳои критикӣи функсияҳои зеринро муайян кунед:

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^4;$

б) $f(x) = 4x^2 - 6x.$

5. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро дар фосилаҳои додашуда ёбед:

а) $y(x) = x + \frac{1}{x}, x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right];$

б) $y(x) = x^3 + 3x, x \in [0; 2];$

в) $y(x) = x^4 - 2x^2 + 3, x \in [-4; 3];$

г) $y(x) = 1 + \cos x, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right];$

д) $y(x) = 2 \sin x - 1, x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right];$

6. Функсияҳои зеринро таҷвиҳ карда, графикашро соzed:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 4;$ б) $f(x) = x^2 - 6x + 9;$

в) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2;$ г) $f(x) = x^2 + x + 1.$

Б О Б И XVI ИНТЕГРАЛ ВА ТАТБИҚИ ОН

§1. Мафҳуми функцияи ибтидоӣ

Ҳисобкунии дифференсиалӣ дар математика масъалаҳои аз рӯи функцияи дилхоҳи маълум $y = f(x)$, ёфтани ҳосила ва дифференсиали он мебошад. Ин дар физика ба аз рӯи қонуни ҳаракат $S = f(t)$ муайян кардани суръат ва шитоби ҳисми ҳаракаткунанда баробарқувва мебошад. Масалан, татбиқи дифференсиал дар механикаро ба хотир биёред. Дар курси мактабии физика гуфта шудааст: агар дар лаҳзаи вақти $t = 0$ суръати ҳисм ба 0 баробар бошад, яъне, $V(0) = 0$ дар ҳолати

афтиши озоди ҳисм дар лаҳзаи вақти t масофаи $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ - ро тай мекунад. Ин қонуни ҳаракатро дифференсиронида суръати ҳисми ҳаракаткунандаро ҳосил мекунем:

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2} \right)' = gt = g(t).$$

Вале, дар илм ва техника масъалаҳои ҳастанд, ки гузориши онҳо ба гузориши масъалаҳои дар боло муоинашаванда ҷаппа мебошад. Яке аз ин гузориши масъалаҳо, аз рӯи ҳосили функцияи $s(t)$ ($s'(t) = g(t)$), ёфтани ҳуди $s(t)$ мебошад.

Барои ҳал кардани чунин масъалаҳо аз амали интегронӣ, ки ба амали дифференсиронӣ ҷаппа аст, истифода мебаранд. Бинобар он, бори дигар мухтасар бо мафҳуми функцияҳои ибтидоӣ (интегралҳои номуайян) шинос мешавем.

Таъриф. Агар барои $\forall x$ - и фосилаи додашуда

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

бошад, он гоҳ функцияи $F(x)$ барои функцияи $f(x)$ функцияи ибтидоӣ номида мешавад.

Мисоли 1. Функцияи $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$ дар фосилаи $(-\infty; +\infty)$

барои функцияи $f(x) = x^3 + 1$ функцияи ибтидоӣ мебошад, чунки барои ҳамаи $x \in (-\infty; +\infty)$

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + x \right)' = \left(\frac{x^4}{4} \right)' + x' = \\ = \frac{4x^3}{4} + 1 = x^3 + 1 = f(x)$$

мешавад.

Мисоли 2. Функцияи $F(x) = \frac{5}{x}$ дар фосилаи $(-\infty; +\infty)$ барои функцияи $f(x) = -\frac{5}{x^2}$ функцияи ибтидоӣ шуда наметавонад, чунки дар нуқтаи 0 баробарии $F'(x) = f(x)$ ҷудо наметарсид.

§2. Хосияти асосӣ ва се қондаи ёфтани функцияҳои ибтидоӣ

Агар дар ягон фосилаи додашуда $F'(x) = 0$ бошад, он гоҳ функцияи $F(x)$ дар ин фосила доимӣ мебошад.

Агар функцияи $F_1(x)$ ва $F_2(x)$ дар фосилаи додашуда барои функцияи $f(x)$ функцияҳои ибтидоӣ бошанд, он гоҳ фарқи онҳо бузургии доимӣ мебошад:

$$F_2(x) - F_1(x) = C, \quad (C - \text{доимӣ}).$$

Маънои геометрии чуқури баробариро ба таври зерин баён кардан мумкин аст. Графикҳои ду функцияҳои ибтидоӣ дилхоҳи функцияи $f(x)$ аз ҳамдигар дар натиҷаи қад-қадӣ тирӣ Oy ба C - воҳид параллел ҷӯшонидан ҳосил мешавад.

Агар функцияи $F(x)$ дар фосилаи додашуда барои функцияи $f(x)$ яке аз функцияҳои ибтидоӣ бошад, он гоҳ ифодаи $F(x) + C$ - ро, ки C доимии дилхоҳ аст, намуни умумии функцияҳои ибтидоӣ барои функцияи $f(x)$ меноманд.

Масалан, функцияи $F(x) = x^3 + C$ дар фосилаи $(-\infty; +\infty)$ намуни умумии функцияҳои ибтидоӣ барои функцияи $f(x) = 3x^2$ мебошад.

Аз мафҳуми функцияи ибтидоӣ истифода бурда, се қондаи ёфтани функцияҳои ибтидоӣро меорем:

1. Агар $F(x)$ функцияи ибтидоии $f(x)$ ва $G(x)$ функцияи ибтидоии $g(x)$ бошад, он гоҳ, $F(x)+G(x)$ барои функцияи $f(x)+g(x)$, функцияи ибтидоӣ мебошад:

$$(F(x)+G(x))' = (F(x))' + (G(x))' = f(x)+g(x).$$

Агар $F(x)$ функцияи ибтидоии $f(x)$ ва k доимӣ бошад, он гоҳ, $kF(x)$ барои функцияи $kf(x)$ функцияи ибтидоӣ мебошад:

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

Агар $F(x)$ функцияи ибтидоии функцияи $f(x)$ ва k, b -доимиҳо бошанд, он гоҳ, $\frac{1}{k}F(kx+b)$ ($k \neq 0$) барои функцияи $f(kx+b)$, функцияи ибтидоӣ мебошад:

$$\left(\frac{1}{k} \cdot F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} \cdot F'(kx+b) \cdot (kx+b)' = \frac{1}{k} \cdot k \cdot F'(kx+b) = f(kx+b).$$

Хулоса, дар асоси мафҳуми функцияи ибтидоӣ ва ҳосиятҳои он гуфта метавонем: ифодаи $F(x)+C$ -ро, ки намуди умумии функцияҳои ибтидоии функцияи $f(x)$ мебошад, интегралӣ номуайян аз функцияи $f(x)$ меноманд ва бо рамзи $\int$ ишорат карда, менависанд:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad (C - \text{доимии дилҳо}). \quad (2)$$

§3. Ҷадвали интегралҳои асосӣ

- | | |
|--|---|
| 1. $\int dx = x + C.$ | 2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, (m \neq -1).$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$ | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1).$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C.$ | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$ | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$ | |

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x| < a)$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x + C \quad (a \neq 0)$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a \neq 0)$$

$$14. \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq b)$$

Дуруст ё нодуруст будани ҳар яке аз ин формулаҳоро бевосита дар асоси дифференсиронидан санҷидан мумкин аст.

МАШҚҲО

Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

$$1. \int 5 dx = 5 \int dx = 5 \int x^0 dx = 5 \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} = 5 \cdot \frac{x}{1} = 5x + C;$$

$$2. \int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C;$$

$$3. \int 2 \cdot 9^x dx = 2 \int 9^x dx = 2 \cdot \frac{9^x}{\ln 9} + C = 2 \cdot \frac{9^x}{2 \ln 3} + C = \frac{9^x}{\ln 3} + C;$$

$$4. \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$5. \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C; \quad (k \neq 0, k - \text{доимии ҷуғрофӣ});$$

$$6. \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C; \quad (k \neq 0, k - \text{доимии ҷуғрофӣ});$$

$$7. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C;$$

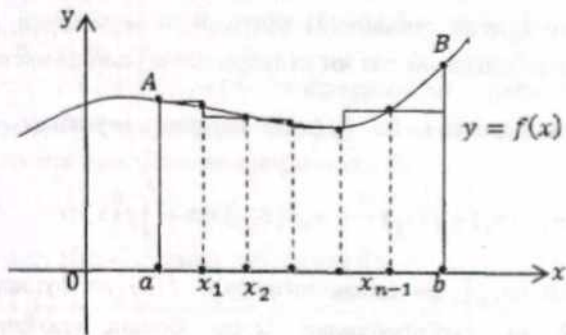
$$8. \int \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

§4. Мафҳуми интеграли муайян

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ бефосила ва гайриманфӣ бошад. Шакле, ки бо графики ин функсия, порчаи $[a; b]$ -и тири Ox ва хатҳои $x = a$ ва $x = b$ маҳдуд шудааст, трапетсияи қачхатта номида мешавад.

Барои ёфтани масоҳати трапетсияи қачхатта аз мафҳуми функсияҳои ибтидоӣ истифода мебаранд, чунки формулаҳои дар курси мактабии математика доир ба масоҳатҳо додашуда мувофиқ намеоянд. Дар ин ҷо яке аз роҳҳои ҳисоб кардани масоҳати трапетсияи қачхаттаро меорем (Расми 1).



Расми 1

а) Порчаи $[a; b]$ -ро ба воситаи нуқтаҳои $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{n-1}$ ба n порчаи дарозияшон якхела ҷудо мекунем:

$$x_0 = a; x_n = b; x_1 - x_0 = \Delta x_0; x_2 - x_1 = \Delta x_1; \dots; x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}.$$

Азбаски дарозии порчаҳо якхелаанд, онро дар намуни зерин ифода кардан мумкин аст:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1; 2; 3; \dots; n-1; n).$$

б) Дар ҳар як порчаи $[x_{k-1}; x_k]$ ($k = 1; 2; 3; \dots; (n-1); n$) росткунҷаи баландияш ба $f(x_{k-1})$ баробарро сохта, масоҳати росткунҷаҳоро ҳисоб мекунем.

в) Масоҳати росткунҷаҳоро дар асоси формулаи $S = a \cdot b$ -и курси мактабӣ навиштан мумкин аст. Масоҳати суммаи ҳамаи росткунҷаҳо ин тавр навишта мешавад:

$$f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

ё ки

$$(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \cdot \Delta x \quad (2)$$

Суммаи (2)-ро суммаи интегралӣ барои функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ меноманд.

Аз бефосилагии функсияи $f(x)$ маълум аст, ки ҳангоми зиёд шудани n дарозии порчаҳо Δx хурд мешавад, яъне ҳангоми яқояшавии росткунҷаҳо масоҳати ҳамаи росткунҷаҳо ба масоҳати трапетсияи қачхаттан додашуда "қариб мувофиқ меояд".

г) Агар ҳудуди суммаи (2) ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ($\Delta x \rightarrow 0$) вучуд дошта бошад, он гоҳ ин ҳудуди интегралӣ функсияи $f(x)$

аз a то b меноманд ва бо $\int_a^b f(x) dx$ ишорат мекунам:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \Delta x = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Дар ин ҷо, $\int$ -ро рамзи интеграл, $f(x)$ -ро функсияи зери интегралӣ ва тағйирёбанди x -ро бошад, тағйирёбанди интегралӣ меноманд. Агар дар порчаи $[a; b]$ $f(x) \geq 0$ бошад, он гоҳ, масоҳати трапетсияи қачхаттан $aABb$ -ро бо S ифода карда, аз рӯи формулаи

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

меёбем. Инак, формулаи (4) маънои геометрии интегралӣ муайяно мекунад.

Мисол. Интеграл $\int_0^1 x dx$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Интегралӣ додашуда бо роҳи сохтани суммаи интегралӣ ҳисоб мекунем: дар интегралӣ додашуда функсияи $f(x) = x$ дар порчаи $[0; 1]$ бефосила аст. Бинобар он, порчаи $[0; 1]$ -ро ба воситаи нуқтаҳои $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ ба

n порчаи дарозиашон якхела $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ тақсим мекунем.

Дар натиҷа нуқтаҳои тақсимоӣ $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{n}$;

$x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$ ҳосил мешавад. Қимати функсияи $f(x) = x$ - ро дар ин нуқтаҳо меёбем:

$$f(0) = 0; \quad f(1) = 1; \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}; \quad f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}; \quad \dots \quad f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}.$$

Қиматҳои ёфташударо ба формулаи (2) гузошта, суммаи интегралиро тартиб медиҳем:

$$\frac{1}{n} \left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1+2+3+\dots+n-1}{n^2}$$

дар ин ҷо, $1+2+3+\dots+(n-1)$ -прогрессияи арифметикӣ буда, узви якумаш ба 1 ва узви $(n-1)$ -умаш ба $n-1$ баробар мебошад. Суммаи чунин прогрессияи арифметикӣ ба

$$S_{n-1} = \frac{1+(n-1)}{2}(n-1) \Rightarrow S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

баробар аст. Инак, суммаи интегралӣ ба

$$\frac{1}{n} \left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

баробар аст. Дар ҳолати $n \rightarrow \infty$ ба ҳудуд гузашта, дар асоси формулаи (3) қимати интегралро меёбем:

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Инак, қимати интегралро додашуда, ба адади $\frac{1}{2}$ баробар мебошад:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

§5. Алоқаи байни интеграл ва функсияи ибтидоӣ

Агар функсияи $F(x)$ дар порчаи $[a, b]$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ бошад, он гоҳ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

аст. Формулаи (1)-ро формулаи Нютон - Лейбницс меноманд. Дар амалия бошад, бисёртар аз навишти

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

истифода бурда мешавад. Дар интегралҳои додашуда, ададҳои a ва b ҳудудҳои поёни ва болоӣ, порчаи $[a; b]$ -ро бошад, фосилаи интегралӣ меноманд.

Дар ин ҷо ҳангоми $b = a$ будан,

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (3)$$

мешавад.

Инчунин, барои ҳаргуна a ва b баробарин

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (4)$$

ҷой дорад.

Масъалаи 1. Интегралҳои зеринро ҳисоб мекунем:

$$1. \int_2^3 (x^2 + 4) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Ҳ.а.л. } \int_2^3 (x^2 + 4) dx &= \int_2^3 x^2 dx + 4 \int_2^3 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^3 + 4x \Big|_2^3 = \\ &= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) + (4 \cdot 3 - 4 \cdot 2) = \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3} \right) + (12 - 8) = \\ &= \frac{19}{3} + 4 = 6\frac{1}{3} + 4 = 10\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ҷавоб: $10\frac{1}{3}$.

$$2. \int_1^2 \frac{x+4}{3} dx.$$

$$\text{Ҳ.а.л. } \int_1^2 \frac{x+4}{3} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 (x+4) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 x dx + \frac{1}{3} \cdot 4 \int_1^2 dx =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 + \frac{4}{5} x \Big|_1^2 = \frac{x^2}{10} \Big|_1^2 + \frac{4}{5} x \Big|_1^2 = \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5} \right) =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{4}{5} = \frac{3+8}{10} = \frac{11}{10} = 1 \frac{1}{10}. \quad \text{Ҷавоб: } 1 \frac{1}{10}.$$

$$3. \int_0^1 x^8 dx.$$

$$\text{Ҳал. } \int_0^1 x^8 dx = \frac{x^{8+1}}{8+1} \Big|_0^1 = \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{0}{9} = \frac{1}{9}.$$

Ҷавоб: $\frac{1}{9}$.

$$4. \int_1^2 \frac{dx}{x+3}.$$

$$\text{Ҳал. } \int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \int_1^2 \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln(x+3) \Big|_1^2 =$$

$$= \ln(2+3) - \ln(1+3) = \ln 5 - \ln 4 = \ln \frac{5}{4}.$$

Ҷавоб: $\ln \frac{5}{4}$.

$$5. \int 6 \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$\text{Ҳал. Азбаски, } 6 \sin^2 \frac{x}{2} = 6 \cdot \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{2} = 3(1 - \cos x) \quad \text{аст,}$$

бинобар ин

$$\int 6 \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int 3(1 - \cos x) dx = 3 \left(\int dx - \int \cos x dx \right) = 3(x - \sin x) + C$$

мешавад.

Ҷавоб: $3(x - \sin x) + C$.

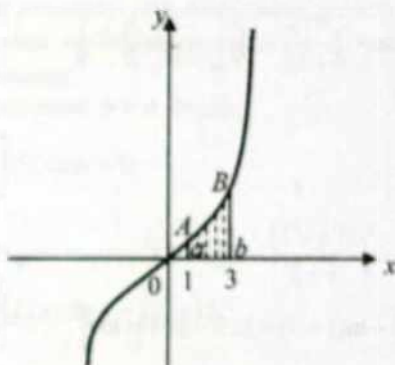
Масъалаи 2. Масоҳати фигурае, ки бо хатҳои $y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ маҳдуд аст, ёбед.

Ҳал. а) Аввал хатҳои додашударо месозем. Аз расм намоён аст, ки масоҳати матлуб $S = S_{\text{алло}}$ мебошад. Фигураи ҳосилшуда трапетсияи қатъатта мебошад (Расми 2).

б) Барои ҳисоб кардани масоҳат аз формулаи (1) истифода мебарем. Масоҳати матлубро бо формулаи (1) ҳангоми $f(x) = x^3$, $a = 1$ ва $b = 3$ будан, ҳисоб мекунем:

$$S = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

Инак, масоҳати фигураи матлуб ба 20 воҳиди квадратӣ баробар аст.



Расми 2

МАШҚО

Интегралҳои функсияҳои зеринро ёбед:

1. $\int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx$;
2. $\int_1^8 \frac{dx}{x^2}$;
3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx$;
4. $\int_1^2 (2x + 1)^2 dx$;
5. $\int_{-2}^1 (2x^3 + 3x - 4) dx$;
6. $\int_1^2 \left(x^6 + \frac{x^4}{x^4} - x^2 \right) dx$;
7. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \lg^2 x dx$;
8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;
9. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$;
11. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$.

Рамз, аломатҳо ва ишоратҳои истифодашуда

+ - ҷамъ	- - тарҳ
· - зарб (нукта)	$\times$ - зарб (зарби ҷиллиқӣ)
: - тақсим (дунукта)	/ - тақсим (хатчаи моил)
— - хатчаи каср	= - баробарӣ
$\neq$ - нобаробарӣ	$\approx$ - баробарии тахминӣ
$\equiv$ - конгруэнтӣ	$\equiv$ - айният
$>$ - калон	$<$ - хурд
$\geq$ - калон ё баробар	$\leq$ - хурд ё баробар
(- қавси хурди кушода	) - қавси хурди пӯшида
[- қавси квадратии кушода	] - қавси квадратии пӯшида
{ - қавси фигуравии кушода	} - қавси фигуравии пӯшида
% - рамзи протсент	$\angle$ - рамзи кунҷ
Δ - рамзи секунҷа	$\perp$ - аломати перпендикуляр
$\parallel$ - аломати параллел	$\nparallel$ - аломати нопаралел
$\cup$ - аломати камон	$\wedge$ - аломати бузургии кунҷ (дар болои сатр ҷойгир карда мешавад)
∞ - аломати монандии шаклҳо	$\rightarrow$ - аломати мувофиқ
$\rightarrow$ - аломати тирча дар болои сатр (барои ишораи вектор истифода мешавад)	$\longrightarrow$ - аломати тирчаи уфуқӣ (горизонталӣ)
- аломати тирчаи амудӣ (вертикалӣ)	$\sqrt{\quad}$ - аломати решаи квадратӣ
$\sqrt[3]{\quad}$ - аломати решаи кубӣ	$\sqrt[n]{\quad}$ - аломати решаи дараҷаи n -ум
∞ - аломати беохир (бенинӣ)	$\emptyset$ - аломати маҷмуи холи
$\forall$ - аломати ҳаргуна, дилхоҳ, ихтиёрӣ	$\exists$ - аломати вуҷуд дорад
Ξ - аломати вуҷуд надорад	$\in$ - аломати ба маҷмуи додашуда тааллуқ доштани элемент

- $\notin$ - аломати инкор намудани ба маҷмӯи додашуда тааллуқ доштани элемент
- $\subset$ - аломати дохил намудани як маҷмӯъ ба маҷмӯи дигари додашуда
- $\supset$ - аломати инкори дохил намудани як маҷмӯи додашуда ба дигараш
- $\cup$ - аломати якҷошавии маҷмӯъҳо
- $\cap$ - аломати буриши маҷмӯъҳо
- $\Rightarrow$ - аломати ҳулоса мебарояд
- $\Leftrightarrow$ - аломати баробарқувва
- $\setminus$ - аломати ғайрақувваи маҷмӯъ
- I - аломати инкор
- $\{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\}$ - аломати маҷмӯъ аз элементҳои $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.
- $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n)$ - аломати маҷмӯи тартибдодашуда аз элементҳои $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
- $!$ - аломати факториал
- Σ - аломати сумма
- Π - аломати ҳосили зарб
- $^\circ$ - аломати градус
- $'$ - аломати дақиқа
- $''$ - аломати сония
- $\log_a$ - аломати логарифм аз рӯи асоси a
- $\lg$ - аломати логарифми даҳӣ
- $\ln$ - аломати логарифми натуралӣ
- $\lim$ - аломати лимит
- $\int$ - аломати интегралҳои номутайян
- $\int_a^b$ - аломати интегралҳои муайян
- $\dots$ - аломати воҳунак
- $\bullet$ - аломати ситорача
- $\cdot$ - аломати вергул
- $:$ - аломати нукта вергул
- $:$ - аломати баён

! – аломати хитоб

? – аломати савол

· - аломати нукта

↗ - афзоянда.

↘ - камшаванда.

$65 : 2 = 32$ (1 бақия) тақсими бақиянок

$65 = 32 \cdot 2 + 1$ - (1 бақия) тақсими бақиянок

$a \in A$ - a ба A тааллуқ дорад

$A \subset B$ - A тахтмачмуи B аст

$n \in N$ - n ба маҷмуи N тааллуқ дорад

$n \notin N$ - n ба маҷмуи N тааллуқ надорад

$A \in \Phi$ - нуктаи A дар фигураи Φ меҳобад

$A \cup B$ - ҳамҷоягии маҷмуъҳо

N - маҷмуи ҳамаи ададҳои натуралӣ: 1; 2; 3; ...

Z - маҷмуи ададҳои бутун: 0; ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ...

Z_0 - маҷмуи ҳамаи ададҳои бутуни гайри-манфӣ: 0; 1; 2; 3; ...

Z_- - маҷмуи ҳамаи ададҳои бутуни манфӣ: -1 ; -2 ; -3 ; ...

Q - маҷмуи ҳамаи ададҳои раціоналӣ

Q_0 - маҷмуи ҳамаи ададҳои раціоналӣ гайриманфӣ

Q_+ - маҷмуи ҳамаи ададҳои раціоналӣ мусбат

Q_- - маҷмуи ҳамаи ададҳои раціоналӣ манфӣ

R - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ

R_0 - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ гайриманфӣ

R_+ - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мусбат

R_- - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ манфӣ

$N, n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ - касри даҳӣ бо қисми бутуни N

$N, n_1 n_2 n_3 \dots n_k (n_{k+1} \dots n_{k+p})$ - касри даҳӣ бо даври
 $n_{k+1} \dots n_{k+p}$

$\left\{ \begin{array}{l} |x| \\ \text{mod } x \end{array} \right\}$ - модул аз адади x

$[x]$ - қисми бутуни адади x

- $\{x\}$ - қисми қасри адади ҳақиқии x (m, n) ё ки ХКУ - хурдтарин қаратни умумий аз ададҳои m ва n
 (m, n) ё ки КТУ - калонтарин тақсимқунандаи умумий аз ададҳои m ва n
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ - пайдарпайи ададӣ аз n адад
 (a_n) - пайдарпайи беохир
 $n!$ - ишорати ҳосили зарби ададҳои $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$
 $n!!$ - ишорати ҳосили зарби ададҳои чуфти $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)$ ё токи $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$
 (a_n) - пайдарпайи $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
 P_n - ҷойивазқунӣ аз n элемент
 A_n^m - ҷойгирқунӣ аз n элемент m -тогӣ
 C_n^m - комбинатсия аз n элемент m -тогӣ
 $\overline{ab}$ - навишти адади дурақам (a, b - рақамҳо мувофиқи разрядҳо)
 $\overline{abc}$ - навишти адади сеарақам (a, b, c - рақамҳо мувофиқи разрядҳо)
 $\overline{ab, (mnkr)}$ - навишти қасри даврий ва ғайра
 $A \cap B$ - буриши ду маҷмуъ
 $\forall a \in A$ - барои ҳама гуна a аз A
 $\Rightarrow$ - аз ин ҷо бармеояд (хулоса мебарояд)
 $\Leftrightarrow$ - баробарқувва (эквивалент)
 $\Leftarrow$ - эквивалент
 $\vec{a}$ - ишорати вектор
 $\vec{d}$ - ишорати кунҷи рост
 $|\vec{a}|$ - бузургии мутлақии вектори $\vec{a}$
 $\overrightarrow{AB}$ - вектори AB , A нуқтаи A -ро ба нуқтаи B инъикос мекунад
 $|\overrightarrow{AB}|$ - дарозии вектори $\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{AA}, \vec{0}$ - вектори нолӣ
 $\vec{x}_a$ - абсиссияи вектори a

$\vec{y}_\alpha$ - ординатаи вектори a

$\vec{a}$ - вектор бо координатаҳои x , y ва z

$[a; b]$ - порча, фосилаи маҳдуди (порчаи бастаи) ибтидоаш a ва интиҳоаш b , $a < b$

$(a; b)$ - интервал, порчаи кушоди (фосилаи) ибтидоаш a ва интиҳоаш b , $a < b$.

$(a; b], [a; b)$ - ниминтервал, фосилаҳои нимкушодаи ибтидоашон a ва интиҳоашон b , $a < b$

$(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ - нури кушод

$[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ - нур

$(a; +\infty), [a; +\infty), (-\infty; b], (-\infty; b)$ - фосилаҳои беохир, нурҳои хатирости ададӣ

$(-\infty; +\infty)$ - фосилаи беохир, хатирости ададӣ

$(-\infty; a], [a; +\infty), (a; +\infty), (-\infty; a), [a; b),$

$(a; b], [a; b]$ ва $(a; b)$ - фосилаҳои ададӣ

$56 < x < 86$ - нобаробарии дукарата

$(-\infty; b) \cap (a; +\infty)$ - буриши ду нури кушод

$(-\infty; b) \cap [a; +\infty)$ - буриши ду нур

$(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$ - якҷояшавии интервалҳо

$(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ - якҷояшавии нурҳо

$85^\circ 6' 3'' - 85$ градусу 6 дақиқаю 3 сония

$\sin \alpha$ - синуси α

$\cos \alpha$ - косинуси α

$\operatorname{tg} \alpha$ - тангенс α

$\operatorname{ctg} \alpha$ - котангенс α

$\sec \alpha$ - секанс α

$\operatorname{cosec} \alpha$ - косеканс α

$\arcsin \alpha$ - арксинуси адади α

$\arccos \alpha$ - арккосинуси адади α

$\operatorname{arctg} \alpha$ - арктангенс адади α

$\operatorname{arccotg} \alpha$ - арккотангенс адади α

$\operatorname{arcsec} \alpha$ - арксеканси адади α

$\operatorname{arccosec} \alpha$ - арккосеканси адади α

$\sin x$ - қимати функсияи синус дар нуқтаи x

$\log_a P$ - логарифмаи адади P аз рӯи асоси a

$\lg P$ - логарифмаи адади P аз рӯи асоси 10

$\ln P$ - логарифмаи адади P аз рӯи асоси e

Адади $e = 2,718281828\dots$

Адади $\pi = 3,141592653\dots$

Адади M (модули гузарош) $= 0,434294481\dots$

$\det$ - муайянкунанда

sign - функсияи сигнум

Const - доимӣ

$\sqrt{a}$ - решаи квадратии арифметикӣ аз адади a

$\sqrt[3]{a}$ - решаи кубӣ аз адади a

$\sqrt[n]{a}$ - решаи дараҷаи n аз адади a

$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD}$ - вектори ҳамсамти $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD}$ - векторҳои муқобилсамти $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$

$(\hat{a}, \hat{b})$ - кунҷи байни векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$

$\vec{a}^2$ - квадрати скалярӣ (ҳосили зарби скалярӣ)

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ - ҳосили зарби скалярии векторҳои $\vec{a}$ ва $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$ - ҳосили зарби вектории ду вектори $\vec{a}$ ва $\vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - ҳосили зарби омехтаи векторҳои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{i}, \vec{j}$ - векторҳои базисии системаи координатаҳои росткунҷаи декартӣ дар ҳамворӣ

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - векторҳои базисии системаи координатаҳои росткунҷаи декартӣ дар ҷазо ($\vec{k}$ ни орта)

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ - базиси росткунҷа

E - нигеҷкоси айниятии ҳамворӣ ба худаш

S_a - симметрияи ҷазоӣ нисбат ба ҳамвории a

S_l - симметрияи тирӣ ҷазоӣ (ҳамворӣ) ба тирӣ симметрияи l

S_p - симметрияи тираш p

Z_o - симметрияи марказаш O

(ABC) - ҳамворие, ки аз нуқтаҳои A , B ва C мегузарад

S_{ABC} - масоҳати секунҷа

V - ҳаҷм

(AB) - хати росте, ки аз нуқтаҳои A ва B мегузарад

$[AB]$ - нури AB

$[AB]$ - порчаи рост бо охириҳои A ва B

$|AB|$ - дарозии порчаи AB

$(a; b)$ - ҷуфти тартибнок

$(a; b; c)$ - сегонаи тартибнок

$\triangle ABC$ - секунҷаи ABC

$\angle A$ - кунҷи A

$\angle ABC$ - кунҷи ABC

$\angle(\alpha, \beta)$ - кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β

$\angle(a, \alpha)$ - кунҷи байни хати рости a ва ҳамвориини α

$\angle\alpha a \beta$ - кунҷи дурӯи байни ҳамвориҳои α ва β бо тегҳои a

$\hat{ABC}$ - бузургии кунҷи $\angle ABC$

$\hat{B}$ - бузургии кунҷи B

$\cup ABC, \cup AB$ - камони ABC , камони AB

$\overset{\cup}{ABC}$ - бузургии кунҷи камони $\cup ABC$

$\overset{\cup}{AB}$ - бузургии кунҷи камони $\cup AB$

$\cup ACB$ - камон бо охириҳои A ва B

(O, R) - доираи марказаш O ва радиусаш R

$[p, A)$ - нимҳамвориини худудаш p , ки нуқтаи A -ро дарбар мегирад

$f(\cdot), F(\cdot)$ - функсияи яктағйирёбанда ё ки

якҷаидтағйирёбандадор

Δx - делта аз икс, афзоиши тағйирёбандаи x (афзоиши аргумент)

Δf - афзоиши функсия

$\Delta f(x_0)$ - афзоиши функсия дар нуқтаи x_0

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$ - адади b ҳудуди функсияи $f(x)$ аст

$f'(x)$ - ҳосилаи тартиби якуми функсияи $f(x)$

$f''(x)$ - ҳосилаи тартиби n -уми функсияи $f(x)$

$f'(x_0)$ - ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0

max - максимум

min - минимум

$\max_{[a; b]} f(x)$ - қимати калонтарини $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$

$\min_{[a; b]} f(x)$ - қимати хурдтарини $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$

$\int_a^b f(x) dx$ - интеграли $f(x)$ аз ҳудуди a то b .

$O(0; 0)$ - ибтидои координата

Ox - тирӣ абсисса

Oy - тирӣ ордината

Oz - тирӣ аппликата

z ва $\bar{z}$ - ададҳои комплексии ҳамроҳшуда ($z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$)

$|z|$ - модули адади комплексӣ

$\text{Arg } z$ - аргументи адади комплексӣ

i - воҳиди маъхум

$f(x)$ - қимати функсияи f дар нуқтаи x

$D(f)$ - соҳаи муайяни функсияи f

$E(f)$ - соҳаи қиматҳои функсияи f

E - табдилоти айнӣ

f^{-1} - табдилоти баръакс

СКР - Соҳаи қиматҳои раво

СКФ - Соҳаи қиматҳои функсия

- Боби I. 1. $29\frac{7}{12}$; 2. $36\frac{25}{72}$; 3. 144; 4. $2\frac{44}{83}$; 5. $7\frac{9}{11}$. 6. 20. 7. 1. 8. 0,5.
9. 5. Боби II. 1. а) 1. б) $\frac{1}{6}$. 2. а) 11. б) 36. 3. а) 6). 4. 1. 5. 4. 6. 4. 7. а) 2,25. б) 5. Боби III. §1. 1. а) 2^{14} . б) -64. в) 18. 2. $\frac{1}{16 \cdot 5^k}$. §2. 1. $\frac{41}{36}$. 2. $a^{-2}b^{-5}$. 3. 0,48. §3. 1. $\sqrt{ab}$. 2. $\sqrt{x}$. 3. 0. 4. $12\sqrt{3}$. 5. $-2\sqrt{3}$. §5. 1. а) $\frac{1}{6}$. б) $\frac{15}{29}$. 2. -1. 3. $4,5\sqrt{13}$. 4. $\frac{144}{161}$. §6. 1. $\frac{1}{8}$. 2. а) $6\sqrt{6}$; б) -22,5; в) 652. 3. 5. 4. а) -1. б) $x^4 - 5,5$. 6. Боби IV. §7. 1. а) $-\frac{3}{4}$. б) $\frac{2a+b}{2}$. в) 1. г) $x - y$. г) 1. д) $2(a+b-c)$. 2. 4. 3. 101. 6. а) 2. б) 2. в) 1. г) 1. Боби V. 1. а) 1. б) $\emptyset$. в) 2; 3. г) 1. 3. а) $\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. б) ± 2 . в) ± 1 ; $\pm\sqrt{2}$. 5. а) -4; 2; 3; 9. б) -3. в) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. г) 4. г) ± 3 . д) ± 2 . е) $\emptyset$. ё) 1. ж) -1; 2. з) 0,5; 2. Боби VI. §4. 1. а) (1; 1). б) (1; 2). в) (7; 4). г) (2; 3). 2. а) (0; 2). б) (3; 4). в) (1; -1). г) (6; 8). г) $(3; \frac{1}{3})$; $(\frac{1}{3}; 3)$. д) (1; 1; 0). Боби VII. 1. а) $(-\infty; -\frac{7}{8}]$. б) $(-\infty; \frac{2}{13})$. в) $(-\infty; -3,1)$. г) $(9; +\infty)$. г) $(-\infty; 3,5)$. 2. а) $(3; +\infty)$. б) $[-1; 3]$. в) $(-\infty; -3)$. г) $\emptyset$. г) $(2; +\infty)$. 3. а) x - адади дилхох. б) $\emptyset$. в) x - адади дилхох. г) $2 \leq x \leq 3$. Боби VIII. 1. а) $x \leq 4$. б) $(-\infty; 1] \cup (6; +\infty)$. в) $[0; 4]$. г) $x = 2$. г) $[0; 1]$. Боби IX. I. 1. 5. 2. 1. 3. 4. 4. -1. 5. -2; 1. 6. 7. 7. 2. 8. 2. 9. -4; 2. 10. -6; 2. 11. 1. 12. 3. II. 1. $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. 2. $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$. 3. $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$. 4. $(-\infty; 0) \cup (4,5; +\infty)$. 5. $(-\infty; -\frac{7}{9})$. 6. $[\frac{2\sqrt{21}}{3}; +\infty)$. 7. $(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4})$. 8. $-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4}$. Боби X. 1. а) 20. б) 3. в) 3. г) 2. г) 1. д) 1. е) 1. ё) 2. ж) 1. з) 1. и) 1. й) 0. к) 0,25. к) 0,5. л) 2. м) 0. н) 1. 2. а) $(-0,75; +\infty)$. б) $(-\infty; -\frac{5}{36})$. в) $(-\infty; -2)$. г) $(0; +\infty)$. г) $[-1; 4]$. д) $(3; +\infty)$. Боби

- XI. 1. a) 4. 6) 3. b) 1.5; 3. r) $\frac{1}{81}$; 3. r) 6. a) 0.25. e) $\frac{1}{3}$; 27. e) 30; 100. 2. a) (1; 3) 6) (0; 0.5) $\cup$ (1; 1.5) b) $(-\infty; 1)$ r) $(e^{-1}; e^2)$ r) $(-1; 3)$. Боги XII. 1. a) -2.5. 6) 0.5. b) 0. 2. 3. 7.2. 3. 0.84. 4. -0.96. 5. a) $\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{12}{\pi} + \frac{2}{\pi} n$, $n \in Z$. 6) $-\frac{4}{\pi} \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. b) $\pm \sqrt{\pi + 2\pi n}$, $n \in Z$. r) $\emptyset$. 6. a) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. 6) $\frac{12}{\pi} + \frac{3}{\pi} n$. $-\frac{1}{3} \arccos \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} n$, $n \in Z$. 6) $\frac{6}{\pi} + \frac{3}{\pi} n$, $n \in Z$. r) $(-1)^{n-1} \frac{6}{\pi} + \pi n$, $n \in Z$. 7. a) $\frac{1}{3} \arccos 3 + \frac{3}{\pi} n$, $n \in Z$. b) $\frac{6}{\pi} + \frac{3}{\pi} n$, $n \in Z$. r) $(-1)^{n-1} \frac{6}{\pi} + \pi n$, $n \in Z$. 8. a) $-\frac{1}{3} \arccos \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} n$, $n \in Z$. 6) $-\arccos 5 + \pi n$, $\arccos 3 + \pi n$, $n \in Z$. b) $x \in (-\frac{6}{\pi} + 2\pi n, \frac{6}{\pi} + 2\pi n)$, $n \in Z$. 6) $x \in (\pi n, \arccos(-3) + \pi n)$, $n \in Z$. a) $x \in (\arccos 2 + \pi n, \frac{2}{\pi} + \pi n)$, $n \in Z$. r) $x \in (1 - \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, 1 - \frac{3}{2}\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$. 9. a) $x \in [-1; \frac{2}{\sqrt{3}}]$. 6) $x \in (-\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty)$. b) $x \in (-\infty; \arccos 2)$. r) $x \in (-\infty; \arccos 2)$. Боги XIII. 1. $d = 2$; $a_1 = 16$. 2. $S_n = 210$. 3. $d = -2$; $a_1 = -2$. $S_8 = 40$. 4. a) $+ -9$; -6 ; -3 ; 0 ; ... 6) $+ 12$; 9 ; 6 ; 3 ; ... 5. $q_1 = -13$; $q_2 = 12$. 6. $S = 4905$. 7. $q = 2$; $b_1 = 3$. 8. $b_1 = 3$; $q = 3$. 9. $b_1 = 12$; $q = \frac{7}{1}$. 9. 20100. 10. 2460. 11. 40. 12. 2. 13. 7.4. 14. 17. 15. 93. 16. 8. 17. 128. Боги XIV. 1. 1.5. 2. 6. 3. 5. 4. 4. 5. 3. 6. 5. 7. $\frac{14}{3}$. 8. 5. 9. $\sin 2\alpha$. 10. $\frac{1}{2}$. 11. $\frac{1}{2}$. 12. 1.5. 13. $\frac{1}{2}$. 14. -0.8 . 15. Боги XV. 3. a) $(-\infty; 1)$ $\uparrow$; (1; $+\infty$) $\uparrow$. 6) $(-\infty; 0.3)$ $\uparrow$; (0.3; $+\infty$) $\uparrow$. b) $(-\infty; 0)$ $\uparrow$. na $(0; +\infty)$ $\uparrow$. 4. a) $x = -1$ на $x = 1$ не имеет макс., $x = 0$ не имеет min. 6) $x = \frac{4}{3}$ не имеет min. 5. a) 2.5; -2.5. 6) 14; 0. b) 227; 2. r) 1.5; 1. r) 0; -1. Боги XVI. 1. 2.4. 2. 3. 3. 1. 4. 16 $\frac{1}{3}$. 5. -24. 6. $2\frac{2}{3}$. 7. $\frac{1}{3}\sqrt{x+3} + x\sqrt{x} + C$. 8. $\lg x - \operatorname{ctg} x + C$. 9. $e^x - \frac{1}{x} + C$. 10. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} + C$. 11.

АДАБИЁТ

1. Баранов И.А., Богатыров Г.И., Боковнев О.А. Математика для подготовительных курсов техникумов. –М.: 1988.
2. Бачурин В.А. Задачи по элементарной математике и началам математического анализа. –М.: Физматлит, 2005. -712 с.
3. Башмаков М.И. Математика: Эксперимент. Учеб. Пособие для СПТУ. –М.: Высш. шк., 1987. -463 с.
4. Гончаров В.Л. Начальная алгебра. –М.: 1960. -452 с.
5. Гусак Г.М., Капуцкая Д.А. Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие. Под ред. А.А. Гусака. –Мн.: Выш. шк. 1989. -495 с.
6. Егоров В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие: Под ред. В.И. Сканава. –6-е изд. -М.: «ОНИКС 21 века», 2004. -608 с.
7. Калпин Р.А. Алгебра ва функцияҳои элементарӣ. –Д.: Ирфон, 1971.
8. Киреенко С.Г., Гриншпон И.Э. Элементы теории множеств. –Томск, 2003. – 42 с.
9. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М. ва ғ. Алгебра ва ибтидои анализ: Васонти таълим барои синфҳои 9 ва 10-уми мактаби миёна. Зери назари А.Н. Колмогоров. –Д.: Маориф, 1987. 284 с.
10. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра ва функцияҳои элементарӣ. Қисми 2. –Душанбе, 1975. – 292 с.
11. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. Пособие для техникумов. –М.: Высш. шк., 1991. -480 с.
12. Макарычев Ю.Н., Миндюк И.Г., Муравин К.С.. Алгебра китоби дарсӣ барои синфи 6-7. Душанбе: Маориф, 1982.
13. Махкамов М., Осимӣ Қ.У. Роҳнамои математика. –Душанбе: Аржанг, 2014. -336 с.
14. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. –М.: Высш. шк., 1987. -416 с.
15. Райхмист Р.Б. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы (с решениями и ответами): Учеб. пособие. –М.: Московский Лицей, 2007. -304 с.
16. Рузметов Э., Хаимов Б.Н. Курси мухтасари анализи математикӣ. Қисми 1. –Душанбе: Маориф, 1977. 424 с.
17. Сборник задач по математике. Для подготовительных курсов. Составители: Сигитов Р.В., Шершнев В. Г. –М.: Менеджер, 2007. -160 с.
18. Симонов А.Я., Бакаев С.И. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.
19. Тулинов Б.А. Арифметика. –Душанбе: Ирфон, 1969.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Издание седьмое, стереотипное. Том I. –М.: Наука, 1969. 608 с.
21. Хичин А.Я. Краткий курс математического анализа, –М.: 1957.

МУНДАРИЧА

Пешгуфтор.....	3
Арифметика. Боби I. Ададҳои бутун ва касрӣ...	4
§1. Фанни арифметика.....	4
§2. Маҷмуъ. Амалҳо бо маҷмуҳо.....	4
2.1. Маҷмуъ ва элементҳои он.....	4
2.2. Тарзҳои дода шудани маҷмуъ.....	6
2.3. Таҳтмаҷмуҳо.....	8
2.4. Буриши маҷмуҳо.....	11
2.5. Якҷояшавии маҷмуҳо.....	12
2.6. Фарқи маҷмуҳо.....	13
2.7. Маҷмуҳои ададӣ.....	15
2.8. Алгебраи маҷмуҳо.....	16
2.9. Формулаи дохилкунӣ ва хориҷкунӣ.....	17
§3. Ададҳои бутун ва амалҳо бо онҳо.....	19
I. Адади натуралӣ.....	20
II. Ададҳои бутун.....	21
III. Қонунҳои ҷамъ ва зарб.....	22
IV. Хосиятҳои асосӣ.....	24
V. Тақсими бақиянок.....	26
VI. Амалҳо бо ададҳои бутун.....	26
§4. Ададҳои сода ва таркибӣ.....	30
§5. Тақсимунандан умумӣ ва қаратноқӣ.....	32
§6. Аломатҳои тақсимаҷавӣ ба 2, 5, 10, 3 ва 9.....	32
§7. Қасрҳои одӣ.....	33
§8. Амалҳои арифметикӣ бо қасрҳои одӣ.....	36
§9. Қасрҳои дахӣ.....	41
§10. Муқовисаи қасрҳо. Аз қасри дахӣ ба қасри одӣ гузаштан.....	42
§11. Амалҳо бо қасрҳои дахӣ.....	43
Боби II. Ададҳои ҳақиқӣ.....	49
§1. Ададҳои раціоналӣ.....	49
§2. Ададҳои иррационалӣ.....	50
§3. Мафҳуми ададҳои ҳақиқӣ.....	50
§4. Қимати мутлақи адад.....	52
§5. Ҳисобкунии инфодаҳои арифметикӣ.....	54
§6. Ҳисобкунии тақрибӣ.....	56
§7. Протсент.....	60
§8. Таҷриба ва хосиятҳои он.....	64

	Алгебра. Боби III. Дараҷа ва реша.....	69
§1.	Дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ.....	69
§2.	Дараҷаи нишондиҳандааш бутун.....	72
§3.	Решаи квадратӣ ва ҳосиятҳои он.....	73
§4.	Решабарорӣ ҳамчун амали баръаксӣ бадараҷабардорӣ.....	76
§5.	Решаи дараҷаи n ва ҳосиятҳои он.....	78
§6.	Дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалӣ.....	80
	Боби IV. Адад ва табдилдиҳии алгебравӣ.....	83
§1.	Ифодаҳои ададӣ ва алгебравӣ.....	83
1.1.	Ифодаҳои ададӣ.....	83
1.2.	Ифодаҳои алгебравӣ.....	83
§2.	Якузва ва амалҳо бо он.....	84
§3.	Бисёрузва ва амалҳо бо он.....	88
§4.	Формулаҳои зарби мухтасар.....	91
§5.	Қасрҳои алгебравӣ.....	94
§6.	Амалҳо бо қасрҳои алгебравӣ.....	97
§7.	Ифодаҳои ирратсионалӣ.....	101
	Боби V. Муодилаҳо.....	106
§1.	Мафҳуми муодила ва ҳалҳои он.....	106
§2.	Муодилаи ҳаттӣ.....	107
§3.	Муодилаи квадратӣ.....	112
I.	Муодилаи квадратии нопурра.....	112
II.	Муодилаи квадратии пурра.....	117
III.	Муодилаи квадратии ислоҳқардашуда.....	120
IV.	Теоремаи Виет.....	120
§4.	Ба зарбкунандаҳо ҷудо намудани сеузвон квадратӣ.....	124
§5.	Муодилаи биквадратӣ.....	128
	Боби VI. Системи муодилаҳо.....	132
§1.	Муодилаи ҳаттии дутағйирёбандадор.....	132
§2.	Мафҳуми системаи муодилаҳо ва ҳалҳои он.....	133
§4.	Тарзҳои гуногуни ҳалкунии системаи муодилаҳо.....	134
	Боби VII. Нобаробариҳо.....	145
§1.	Нобаробариҳои ададӣ ва ҳосиятҳои он.....	145
§2.	Нобаробариҳои ҳаттӣ ва ҳалҳои он.....	147
§3.	Системаи нобаробариҳои	

	яктагйирёбандадор.....	149
§4.	Нобаробариҳои квадратии яктагйирёбандадор.....	152
§5.	Ҳалли нобаробариҳо. Методи интервалҳо.....	156
	Боби VIII. Функция.....	163
§1.	Бузургҳои доимӣ ва тагйирёбанда.....	163
§2.	Мафҳуми функция.....	163
§3.	Тарзи дода шудани функция.....	164
§4.	Соҳаи муайяни ва соҳаи тагйирёбии функция.....	166
§5.	Ҳосиятҳои функция.....	169
§6.	Функцияҳои ҷадвал.....	173
§7.	Классификацияи функцияҳо.....	176
§8.	Функцияи ҳағғӣ.....	177
§9.	Функцияи дараҷагӣ.....	178
§10.	Функцияи $f(x) = ax^2 + bx + c$	181
§11.	Функцияи нишондиҳандагӣ ва ҳосиятҳои он.....	182
§12.	Функцияи логарифмӣ ва ҳосиятҳои он.....	184
§13.	Мафҳуми ҷенак ва функцияҳои тригонометрӣ.....	187
§14.	Ҳосиятҳои функцияҳои тригонометрӣ.....	188
§15.	Функцияҳои тригонометрии ҷадвал.....	191
	Боби IX. Муодила ва нобаробариҳои иррационалӣ.....	195
§1.	Муодилаи иррационалӣ.....	195
§2.	Ҳалли нобаробариҳои иррационалӣ.....	203
	Боби X. Муодила ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣ.....	207
§1.	Ҳосиятҳои асосии функцияи нишондиҳандагӣ.....	207
§2.	Муодилаи нишондиҳандагӣ.....	207
§3.	Нобаробариҳои нишондиҳандагӣ.....	213
	Боби XI. Муодила ва нобаробариҳои логарифмӣ.....	219
§1.	Логарифмиронидан ва потенсиронидан.....	219
§2.	Муодилаҳои логарифмӣ.....	224
§3.	Нобаробариҳои логарифмӣ.....	229
	Боби XII. Муодила ва нобаробариҳои тригонометрӣ.....	235

§1.	Ифодаҳои тригонометрӣ	235
§2.	Муодилаҳои тригонометрӣ	242
§3.	Нобаробариҳои тригонометрӣ	251
	Боби XIII. Прогрессияҳо	261
§1.	Мафҳуми пайдарпаии ададӣ	261
§2.	Прогрессияи арифметикӣ	262
§3.	Прогрессияи геометрӣ	267
	Боби XIV. Назарияи ҳудудҳо	273
§1.	Ҳудуди функция	273
§2.	Теоремаҳои асосии ҳудуди функцияҳо	275
§3.	Бефосилагии функцияҳо дар нукта	279
§4.	Бефосилагии функцияҳо бо маънои афзоишаш	280
§5.	Теоремаҳо дар бораи функцияҳои бефосила	282
	Боби XV. Ҳосила ва таҷқиқи функция	283
§1.	Ҳосила ва таърифи он	283
§2.	Маънои геометрии ҳосила	285
§3.	Маънои механикии ҳосила	287
§4.	Бевосита ҳисобкунии ҳосила	288
§5.	Ҳосилаи функцияҳои элементарӣ	291
§6.	Ҳосилаи функцияҳои мураккаб	292
§7.	Қоида ва формулаҳои ҳисобкунии ҳосилаҳо	293
§8.	Формула барои ҳисобкунии тақрибӣ	298
§9.	Шарти афзуншавии (камшавӣ) функция	299
§10.	Нуктаҳои критикӣ ва экстримуи функция	300
§11.	Таҷқиқи функция ва графики он	302
§12.	Қиматҳои калонтарин ва хурдтарин функция	304
	Боби XVI. Интеграл ва таҷқиқи он	307
§1.	Мафҳуми функцияи ибтидоӣ	307
§2.	Ҳосияти асосӣ ва се қонди ёфтани функцияҳои ибтидоӣ	308
§3.	Ҷадвали интегралҳои асосӣ	309
§4.	Мафҳуми интегралҳои муайян	311
§5.	Алоқаи байни интеграл ва функцияи ибтидоӣ	313
	Рамз, аломатҳо ва ишоратҳои истифодашуда	317
	Ҷавобҳо	325
	Адабиёт	327

Маҳкамов Мамадҷон, Камолитдинов Ҷамолитдин, Бойматов
Комилҷон, Раззоқов Абдураззоқ Ашурович, Каримов Тоир
Худойназарович. Математика. Дастури таълимӣ барои
муассисаҳои таҳсилоти миёнаи касбӣ. - Душанбе: "Маориф",
2016. -332 с.

Ба ҷопхона 02.09.2016 с. супорида шуд. Ба
ҷопаш 07.09.2016 с. имзо шуд. Андозаи 60x84 1/16.
Ҷуғрафия ҷонӣ 20,75. Адади нашр 300. Супориши 64.
Нархаш шартномавӣ.

Китоб дар ҷопхонаи нашриёти «РТСУ» ба таъ
расидааст. 734025, ш. Душанбе



000182534

Библиотечная система Трансконтакт

