256143

Маҳкамов М.
Камолиддинов Ч.
Бойматов К.
Раззоқов А.А.
Каримов Т.Х.

МАТЕМАТИКА



ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
МАРКАЗИ ҶУМҲУРИЯВИИ ТАЪЛИМИЮ МЕТОДӢ



БА ҶАШНИ XXV СОЛАГИИ ИСТИҚЛОЛИЯТИ ДАВЛАТИИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН БАХШИДА МЕШАВАД

**Маҳкамов М., Камолиддинов Ҷ.,
Бойматов К., Раззоқов А.А., Каримов Т.Х.**

МАТЕМАТИКА

Дастури таълимӣ барои муассисаҳои таҳсилоти миёнаи касбӣ

Душанбе
“Маориф”
2016

ББК 22.1+74.262+92я2+74.200.58
М-47

Маҳкамов М., Камолиддинов Ҷ., Бойматов К., Раззоқов А.А., Каримов Т.Х. Математика. Дастури таълимӣ барои муассисаҳои таҳсилоти миёнаи касбӣ. - Душанбе: "Маориф", 2016. -332 с.

Китоби мазкур барои хонандагоне, ки синфи 9-ро хатм намудаанд, пешбинӣ карда шудааст. Маводи дар китоб овардашуда ба барномаи математика, алгебра ва ибтидои анализ мувофиқ аст. Китоби мазкур бо мақсади расонидани ёрии амалӣ ба хонандагон ва донишҷӯёни муассисаҳои таҳсилоти миёнаи касбӣ таълиф карда шудааст. Дар китоб маводи назарӣ ва намунаи ҳалли мисолу масъалаҳо оварда шудааст, ки он барои кори мустақилонаи хонандагон ва донишҷӯён пешбинӣ шудааст.

Китоби мазкур барои хонандагон, донишҷӯёни муассисаҳои таҳсилоти миёнаи касбӣ ва олии касбӣ пешниҳод шудааст.

МУАССИСАИ ДАВЛАТИИ «КИТОБХОНАИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН»
НУСХАИ ҲАТМӢ

Муҳаррирон: Норов Қ., Нурматов М.

Мукарризон:

Рачабов Т. - *номзади илмҳои педагогӣ, дотсент, мудири кафедраи методикаи таълими ибтидоии ДДОТ ба номи С. Айнӣ;*

Бегимов Ҳ. - *номзади илмҳои педагогӣ, дотсенти кафедраи математика ва информатикаи Коллечи омӯзгории назди ДДОТ ба номи С. Айнӣ*

Таррох: Умаров К.А.
Хуруфчини компютерӣ: Шодиева З.

МУАССИСАИ ДАВЛАТИИ «КИТОБХОНАИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН»
256143
51(075)

ISBN 978-99947-1-441-4

© Маҳкамов М., Камолиддинов Ҷ., Бойматов К., Раззоқов А.А., Каримов Т.Х., 2016

000182534
Китобхонаи миллии Точикистон

Кори ҳамсояатро мушоҳида карда, математикаро омӯхтан ғайриимкон аст.

Нисен А.

ПЕШГУФТОР

Китоби мазкур аз рӯи барномаи имтиҳоноти қабул аз математика барои дохилшавандагон навишта шуда, он чун дастурамали ёрирасон барои дохилшавандагони муассисаҳои миёна ва олии касбӣ пешниҳод карда мешавад.

Бо дар назардошти барномаи омӯзишии Коллеҷҳо ва курсҳои тайёрӣ, дар китоби мазкур амалҳои арифметикӣ бо ададҳои гуногун, ҳисобкунии тақрибӣ, амалҳои арифметикӣ бо касрҳо, масъалаҳо доир ба протсент, прогрессияҳо, дараҷа, реша, муодилаҳо, системаи муодилаҳо, нобаробариҳо, функсия, ифодаҳои тригонометрӣ, назарияи ҳудудҳо, ҳосила, интеграл ва амсоли ин ба таври пурра шаҳру тавзеҳ дода шудааст.

Дар дастур то ҳадди имкон қисми назариявии маводро мухтасар баён намуда, доир ба онҳо намунаи ҳалли мисолу масъалаҳо оварда шудааст. Мисолу масъалаҳое, ки дар ин китоб оварда шудааст, ба барномаи таҳсилоти миёнаи умумӣ мувофиқ ва ба қадри имкон сода буда, ҳаллашон бо тарзҳои гуногун оварда шудааст.

Қайд кардан зарур аст, ки китоби номбурда пеш аз ҳама барои дохилшавандагони Коллеҷҳо пешниҳод шуда бошад ҳам, вале он барои шунавандагони шуъбаҳои тайёрии муассисаҳои олӣ ва миёнаи касбӣ, барои худомӯзии хонандагони мактабҳои миёна ва миёнаи махсус ва умуман барои он шахсоне, ки мароқи аз худ кардани математикаи курси мактабӣ доранд, хизмат карда метавонад.

Ачаб, нест, ки дастури номбурда аз камбудиҳо холӣ набошад. Бинобар он муаллифон фикру мулоҳизаҳои хонандагонро, ки боиси боз ҳам беҳтар шудани сифати дастур мегардад, бо камоли қаноатмандӣ қабул хоҳанд кард.

Муаллифон

АРИФМЕТИКА
БОБИ I. АДАДҲОИ БУТУН ВА КАСРӢ

§1. Фанни арифметика

Арифметика фаннест, ки дар бораи ададҳо, хосиятҳои онҳо ва амалҳо бо онҳо баҳс мекунад. Бинобар ин вазифаи асосии ин фан аз муқаррар намудани мафҳуми адад, инкишофи ин мафҳум, омӯхтани вобастагии байни ададҳо ва хосияти амалҳои арифметикӣ иборат мебошад. Мафҳуми адад яке аз фаслҳои муҳимтарин ва мушкилтарини математикаи муосир ба шумор меравад. Бинобар ин омӯхтани он вобастагиҳои ададӣ ва хосияти амалҳо ҷолиби қайд аст, чунки онҳо на фақат барои ададҳои конкретӣ, балки барои ададҳои дилхоҳ низ татбиқшавандаанд. Барои ҳамин ҳам, ҳангоми омӯхтани вобастагиҳои умумии арифметикӣ аз ифодаҳои ҳарфӣ истифода мебаранд. Масалан, баробарии $a+b=8$ фақат барои баъзе қиматҳои a ва b, масалан, ҳангоми $a=6$ ва $b=2$ будан дуруст аст. Баробарии $a+b=b+a$ бошад, барои қиматҳои дилхоҳи a ва b, аз ҷумла, барои қимати $a=6$ ва $b=2$ ҳам дуруст мебошад.

Дар ин ҷо агар баробарии якум ҳеҷ гуна хосияти умумии ададро баён накунад ҳам, лекин баробарии дуюм хосияти умумии ба ҳамаи ададҳо мансуб бударо баён мекунад, яъне вай нишон медиҳад, ки суммаи ададҳо аз дигар кардани ҷои ҷамъшавандаҳо тағйир намеёбад.

Аз ҳамин сабаб, дар оянда ҳангоми омӯхтани хосиятҳои арифметикии барои ҳамаи ададҳо мансуб аз ифодаҳои ҳарфӣ истифода мебарем.

§2. Маҷмуъ. Амалҳо бо маҷмуҳо

2.1. Маҷмуъ ва элементҳои он

Маҷмуъ - як аз мафҳумҳои асосии математикаи муосир мебошад. Ин мафҳум ба мафҳумҳои дигар оварда намешавад ва таъриф дода намешавад.

Мафҳуми «маҷмуъ» ҳамчун ҷамъбасти баъзе предметҳо, объектҳо аз мафҳуми «адад» пеш меистад. Калимаи «маҷмуъ» дар математика на ба маънои синонимии «бисёр» кор фармуда мешавад, балки маънои вай якҷоя, ҷамъбаст мебошад. Масалан, маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ; маҷмуи нуқтаҳои ҳамворӣ; маҷмуи ҳарфҳои алифбои тоҷикӣ; маҷмуи хонандагони синф, маҷмуи хонаҳои истиқоматӣ; маҷмуи дарахтони боғ; маҷмуи донишҷӯён;

маҷмуи ададҳои якракама; маҷмуи ададҳои натуралӣ; маҷмуи қитъаҳои олам; маҷмуи сайёраҳои системаи офтобӣ; маҷмуи ҳамаи секунҷаҳое, ки ба давраи додашуда дарункашидашуда ва ғайраҳо. Чӣ хеле ки маълум аст, маҷмуъҳо аз объектҳои гуногун иборат шуда метавонанд. Умуман, предметҳо, объектҳо ва ададҳо ки аз онҳо маҷмуъ ташкил ёфтааст, узвҳои маҷмуъ, ё ки элементҳои маҷмуъ номида мешаванд. Масалан, ба таркиби маҷмуи қитъаҳои олам элементҳои зерин дохил мешаванд: Аврупо, Осиё, Африка, Америка, Австралия (бо Океания) ва Антрактида; ба таркиби маҷмуи ададҳои якракама бошад элементҳои (рақамҳои) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 дохил мешаванд. Бинобар ин барои навиштани маҷмуъҳои элементҳои гуногундошта аз қавси фигуравӣ истифода мебаранд. Масалан, маҷмуи сайёраҳои системаи офтобро дар намуди зерин менависем: {Зӯҳра, Замин, Миррих, Аторуд, Нептун, Зуҳал, Уран, Муштарӣ}; Маҷмуи ададҳои якракамаро дар намуди {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} менависанд.

Ҳамин тариқ, ҳамаи он чизе ки мо тасаввур карда метавонем, элементҳои маҷмуъ шуда метавонанд. Элементи маҷмуъҳоро бо тартиби гуногун навиштан мумкин аст. Масалан, $\{a;b;c\}$ ва $\{b;c;a\}$ - ҳардуи ин ҳамон як маҷмӯеро ифода мекунад, ки онҳо аз a; b; c таркиб ёфтаанд.

Барои аз ҳамдигар фарқ кардани маҷмуъҳо ва элементҳои онҳо, бо ҳарфҳои калони лотинии $A, B, C, X, \ldots$ маҷмуъҳо ва бо ҳарфҳои хурди лотинии $a, b, c, x, \ldots$ ё бо ҳарфҳои индексдори $a_1, a_2, a_3, \ldots$ элементҳояшон ишорат карда мешаванд. Ибораи «объекти a элементи маҷмуи A аст» бо рамзи $a \in A$ ишора карда мешавад. Агар объекти a ба маҷмуи A тааллуқ надошта бошад, ин хел менависанд: $a \notin A$.

Масалан, маҷмуи ададҳои натуралии аз рақами 7 хурдро бо ҳарфи А ишора намуда, дар намуди зерин менависем:

$$A = \{1;2;3;4;5;6\}.$$

Маҷмуъ ин тавр хонда мешавад: “маҷмуи А аз ададҳои 1; 2; 3; 4; 5; 6 иборат аст”. Чӣ хеле ки дида мешавад, адади 6 ба маҷмуи A тааллуқ дорад, вале адади 7 ба маҷмуи A тааллуқ надорад. **Масалан**, ҷумлаи “Адади 6 ба маҷмуи A тааллуқ дорад”-ро мухтасар бо ёрии ишораи $\in$ менависанд: $6 \in A$.

Ҷумлаи “Адади 7 ба маҷмуи A тааллуқ надорад”-ро ҳам мухтасар бо ёрии ишорати $\notin$ менависанд: $7 \notin A$.

Бигузор E-маҷмуи дилхоҳ бошад. Агар x элементи маҷмуи E бошад, пас $x \in E$ менависанд (чунин хонда мешавад: x ба маҷмуи E тааллуқ дорад). Агар x элементи маҷмуи E набошад, пас $x \notin E$ навишта мешавад (чунин хонда мешавад: x ба маҷмуи E тааллуқ надорад).

Мисоли дигар, агар N - маҷмуи ададҳои натуралӣ бошад, пас аз ишораҳо истифода бурда менависем: $1 \in N$; $3 \in N$; $7 \in N$; $-4 \notin N$; $-8 \notin N$. Маҷмуъҳо охирнок ва беохир мешаванд. **Масалан**, шумораи хонандагони синф охирноканд, аммо маҷмуи ададҳои бутун, маҷмуи секунҷаҳои дарункашидашудаи давра ва шумораи нуқтаҳои хати рост маҷмуи беохиранд.

Дар ҳаёти ҳаррӯза калимаи «маҷмуъ» шумораи зиёди предметҳоро мефаҳмонад. Дар математика маҷмуҳои дорои 3, 2, 1 элемент ва маҷмуҳои ягон элемент надошта дида баромада мешаванд.

Таърифи 1. *Маҷмӯе, ки ягонто элемент надорад, маҷмуи холӣ номида мешавад ва бо рамзи $\varnothing$ ишорат карда мешавад.*

Масалан, маҷмуи ададҳои тоқи ба 2 каратӣ, маҷмуи ҳалҳои натуралии мусбати муодилаи $x^2+1=-3$, маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $x^2+1<0$, маҷмуи нуқтаҳои умумии ду хати рости параллел мисолҳои маҷмуи холӣ шуда метавонад.

Агар маҷмуъ аз шумораи охирноки элементҳо ташкил ёфта бошад, онро маҷмуи охирнок ва агар аз шумораи беохири элементҳо ташкил ёфта бошад, маҷмуи беохир меноманд.

2.2. Тарзҳои дода шудани маҷмуъ

Барои дода шудани маҷмуъ пеш аз ҳама донистани он лозим аст, ки кадоме аз объектҳо ба маҷмуъ тааллуқ доранд ва кадоме аз онҳо тааллуқ надоранд. Агар маҷмуъ шумораи ками элементҳоро дарбар гирад, онро бо номбар намудани ҳамаи элементҳояш додан мумкин аст. **Масалан**, шумораи хонандагони синф - ин руйхати онҳо дар рӯзномаи синф, маҷмуи давлатҳои дунё - руйхати онҳо дар атласи географӣ мебошанд.

Агар маҷмуъ бо рӯйхати элементҳояш дода шуда бошад, элементҳои он дар қавси фигуравӣ бо нуқта - вергул навишта мешавад. **Масалан**, маҷмуи рақамҳо ин хел навишта мешавад:

$$A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 0\}.$$

Маҷмуъ фақат ҳамон вақт бо рӯйхат дода мешавад, ки агар вай шумораи охирноки элементҳоро дарбар гирад. Ин ҳангоми калон будани шумораи элементҳо хело ноқулай аст. Бинобар ин тарзи универсалӣ дода шудани маҷмуъ мавҷуд аст, ки бо он маҷмуи дилхоҳро додан мумкин аст. Маҷмуъ метавонад бо воситаи хосияти характеристикӣ, яъне ҳамин хел ҳосият, ки онро ҳамаи элементҳои ба ин маҷмуъ мутааллиқ доранд, дода шавад. Объектҳое, ки ба маҷмуъ тааллуқ надоранд ин хел навишта мешавад: $A=\{x\,|\,P(x)\}$, ки $P(x)$ - хосияти характеристикӣ мебошад.

Якчанд мисол меорем:

а) Бигузор A - маҷмуи бақияҳои тақсими ададҳои натуралӣ ба ададн 5 бошад, он гоҳ $A=\{0;\,1;\,2;\,3;\,4\}$ мешавад.

б) Агар $B=\{n\,|\,n\in N,\,3\le n\le 12\}$-маҷмуи ададҳои натуралии дар байни ададҳои 3 ва 12 ҷойгир буда бошад, он гоҳ $B=\{3;\,4;\,5;\,6;\,7;\,8;\,9;\,10;\,11;\,12\}$ мешавад.

в) Агар $D=\{x\,|\,x\in R,\,-3\le x\le 4\}$ бошад, он гоҳ D порчаи $[-3;\,4]$ мешавад.

г) Агар $X=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$ - маҷмуи решаҳои муодилаи квадратӣ бошад, он гоҳ $X=\{1;\,2\}$ мешавад.

Маҷмуи $A=\left\{\dfrac{n}{n^2-2}\,|\,n\in N\right\}$ -ро дида баромада, муайян менамоем, ки оё ададҳои $\dfrac{1}{4};\dfrac{2}{7}$ ба ин маҷмуъ мутааллиқанд ё не?

Ададн $\dfrac{1}{4}\in A$ мешавад, агар ҳамин хел ададн натуралии n мавҷуд бошад, ки $\dfrac{n}{n^2-2}=\dfrac{1}{4}$ шавад. Барои санҷиш муодилаи $\dfrac{n}{n^2-2}=\dfrac{1}{4}$-ро ҳал мекунем. Аз муодилаи охирон $n^2-4n-2=0$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $n_{1,2}=2\pm\sqrt{6}$ мешавад. Азбаски

$2-\sqrt{6}$ ва $2+\sqrt{6}$ ададҳои натуралӣ нестанд, бинобар он $\frac{1}{4}\notin A$ мебошад.

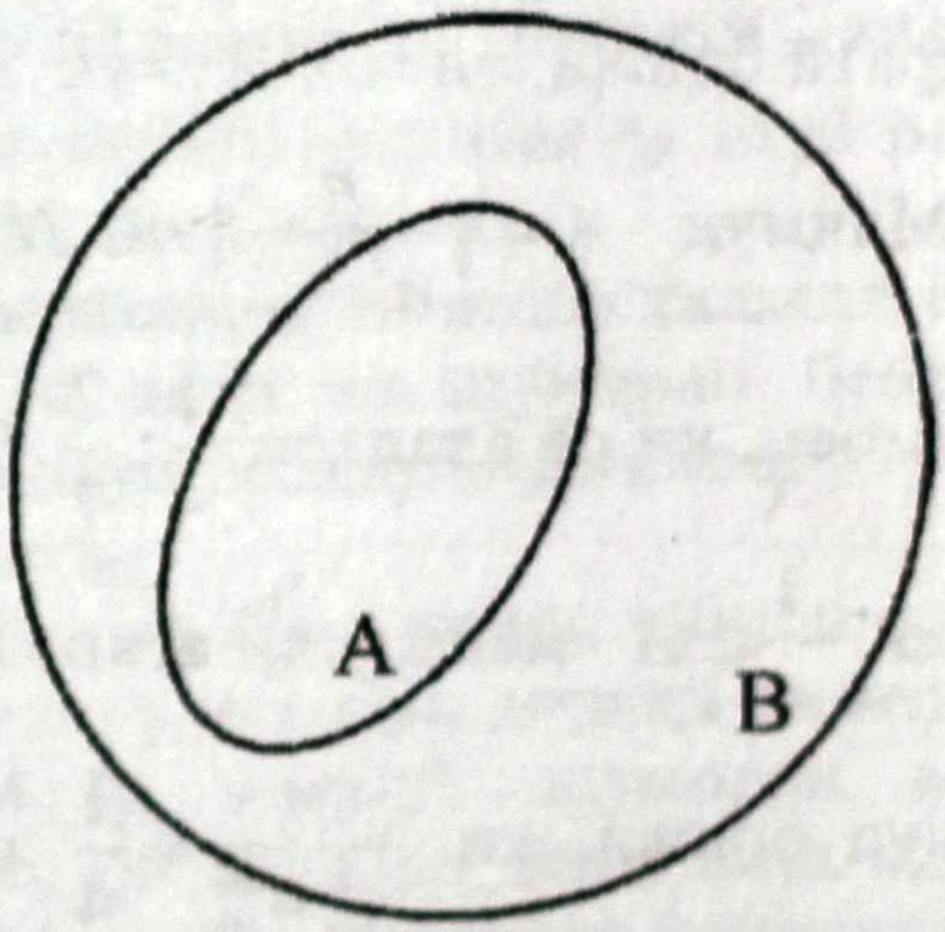
Ҳамин тавр, муодилаи $\frac{n}{n^2-2}=\frac{2}{7}$-ро ҳал намуда, $n_1=4$ ва $n_2=-\frac{1}{2}$-ро ҳосил мекунем. Азбаски $4\in N$ ва $\frac{2}{7}=\frac{4}{4^2-2}$ аст, пас, $\frac{2}{7}\in A$ мешавад.

2.3. Таҳтмаҷмуҳо

Дар баъзе мавридҳо ба ҷои тамоми маҷмуи додашуда, қисми маҷмуи додашударо дида мебароянд. **Масалан**, ба ҷои тамоми маҷмуи ададҳои натуралӣ як қисми он маҷмуи ададҳои содаро дида мебароянд. Бинобар ин дар математика ба ҷои калимаи «қисми маҷмуъ» аксар вақт аз калимаи таҳтмаҷмуъ истифода мебаранд.

Ду маҷмуҳои A ва B-ро муоина менамоем. Агар ҳар як элементи маҷмуи A элементи маҷмуи B низ бошад, он гоҳ мегӯянд, ки A - таҳтмаҷмуи маҷмуи B мебошад (Расми 1).

Онро чунин ишора мекунанд: $A\subset B$. Маҷмуи холи таҳтмаҷмуи дилхоҳ мебошад. Ҳар як маҷмуи ғайрихолии A ақаллан дорои ду таҳтмаҷмуъ - худи маҷмуи A ва маҷмуи холӣ мебошад. Онҳоро таҳтмаҷмуҳои ғайрихоси маҷмуи A ва ҳамаи дигар таҳтмаҷмуҳоро (агар мавҷуд бошад) таҳтмаҷмуҳои хоси маҷмуи A меноманд. Агар A - таҳтмаҷмуи маҷмуи B, B таҳтмаҷмуи маҷмуи C бошад ($A\subset B, B\subset C$), он гоҳ A-таҳтмаҷмуи C мешавад ($A\subset C$).



Расми 1

Таърифи 2. *Агар ҳамаи элементҳои маҷмуи A элементҳои маҷмуи B низ бошанд, он гоҳ A таҳтмаҷмуи B (ё ки қисми маҷмуи B) номида мешавад.*

Масалан, дар курси якум 240 нафар талаба мехонад. Рӯзи якуми сентябр дар дарсҳо 220 нафар талабагон иштирок доштанд, 20 нафарашон бо сабабҳои гуногун дар дарсҳо иштирок накарданд. Агар маҷмуи ҳамаи талабагони курси якумро бо ҳарфи E, маҷмуи ҳамаи талабагони дар дарсҳо иштирокнакардаро бо ҳарфи K ишорат кунем, он гоҳ K таҳтмаҷмуи маҷмуи E мешавад: $K \subset E$.

Дар ин ҷо ишорати $\subset$ чунин хонда мешавад: маҷмуи K таҳтмаҷмуи маҷмуи E мебошад.

Мисолҳо: 1) Бигузор N - маҷмуи ададҳои натуралӣ, Z - маҷмуи ададҳои бутун, Q - маҷмуи ададҳои ратсионалӣ, R - маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ бошад, он гоҳ $N \subset Z \subset Q \subset R$ мешавад.

2) Бигузор A -маҷмуи ҳарфҳои алифбои тоҷикӣ ва B - маҷмуи садонокҳои ин алифбо бошад, он гоҳ $B \subset A$ мешавад.

3) Бигузор A -маҷмуи хатҳои ҳамвории α ва β - маҷмуи хатҳои каҷи ин ҳамворӣ бошад, он гоҳ $B \subset A$ мешавад.

Агар $B \subset A$ бошад, он гоҳ тааллуқияти элементи x ба маҷмуи B шарти кифоягии ба маҷмуи A тааллуқ доштани он ва ба маҷмуи A тааллуқ доштани элементи x шарти зарурии ба маҷмуи B тааллуқ доштани он мебошад.

Масалан, агар A - маҷмуи ҳамаи параллелограмҳо ва B - маҷмуи ҳамаи росткунҷаҳо бошад, он гоҳ $B \subset A$ мешавад. Бинобар он барои он, ки чоркунҷа параллелограмм бошад, яъне ба маҷмуи A тааллуқ дошта бошад, вай бояд ба B тааллуқ дошта бошад. Аз тарафи дигар, барои он, ки чоркунҷа росткунҷа бошад, зарур аст, ки вай параллелограмм бошад.

Агар дар як вақт $A \subset B$ ва $B \subset A$ бошад, мегӯянд, ки маҷмуҳои A ва B баробаранд, яъне онҳо аз ҳамон як элементҳо иборатанд. Дар ин ҳолат муталлиқияти элемент ба A барои ба B тааллуқ доштани он зарур ва кифоя аст. Аксарияти теоремаҳои математикаро ҳамчун тасдиқоти баробар будани маҷмуҳо дида баромадан мумкин аст.

Таърифи 3. *Агар ҳар як элементи маҷмуи* A *дар як вақт элементи маҷмуи* B *ва ҳар як элементи маҷмуи* B *элементи*

маҷмуи A *бошад, он гоҳ мегӯянд, ки маҷмуъҳои* A *ва* B *бо ҳам баробаранд (якхелаанд).*

Масалан, маҷмуи ададҳои натуралие, ки ба 10 тақсим мешаванд, бо маҷмуи ададҳои натуралие, ки бо нол тамом мешаванд, баробаранд.

Таърифи 4. *Агар барои маҷмуъҳои дилхоҳи A ва B шартҳои* $A \subset B$ *ва* $B \subset A$ *иҷро гарданд, яъне ин маҷмуъҳо аз элементҳои якхела тартиб додашуда бошанд он гоҳ онҳо баробаранд:* $(A = B)$.

Масалан, $\{1; 2; 3\} = \{2; 3; 1\} = \{3; 1; 2\}$ ва ғайраҳо мисоли маҷмуъҳои элементҳои якхела дошта мебошанд. Мисоли дигарро дида мебароем. Агар ҳамаи хонандагони курси якум ба курсиҳои худ нишаста бошанду ягонто ҳам курсии холӣ намонда бошад, он гоҳ гуфтан мумкин аст, ки дар байни элементҳои маҷмуи хонандагони курси якум ва маҷмуи курсиҳо мувофиқати якқиматаи байниҳамдигарӣ вуҷуд дорад. Аз ин мисол мафҳуми эквивалентии маҷмуъҳо бармеояд.

Таърифи 5. *Маҷмуъҳое, ки ҳамаи элементҳояшонро ба мувофиқати якқиматаи байниҳамдигарӣ овардан мумкин аст, маҷмуъҳои баробарқувва (эквивалент) номида мешаванд. Баробарқуввагии маҷмуъҳои A ва B -ро ин тавр ишорат мекунанд:* $(A \sim B)$.

Мафҳуми мувофиқати якқиматаи байниҳамдигарӣ ба мо имконият медиҳад, ки ба ғайр аз баробарқуввагии маҷмуъҳо мо пурқувват ва камқувватии маҷмуъҳоро муқаррар намоем.

Таърифи 6. *Маҷмуи ғайрихолие, ки элементҳои гуногун надорад, маҷмуи воҳидӣ номида мешавад.*

Масалан, агар маҷмуи E элементи ба худаш мутаалликии α дошта бошад, маҷмуи E маҷмуи воҳидӣ номида мешавад. Инро мо чунин менависем: $E = \{a\}$; элементи a элементи ягонаи маҷмуи E номида мешавад. Ба маҷмуи воҳидӣ якто ва фақат якто элемент мутаалликӣ аст.

Маҷмуъҳои баробарқувва дорои се хосият мебошад: хосияти рефлективӣ (баргардандагӣ), хосияти симметрӣ (табдилёбандагӣ) ва хосияти транзитивӣ (ҷойдигаркунӣ).

1. Хосияти рефлективӣ. Ҳар гуна маҷмуъ ба худаш баробарқувва аст.

2. Хосияти симметрӣ. Агар маҷмуи A ба маҷмуи B баробарқувва бошад, он гоҳ маҷмуи B низ ба маҷмуи A баробарқувва аст.

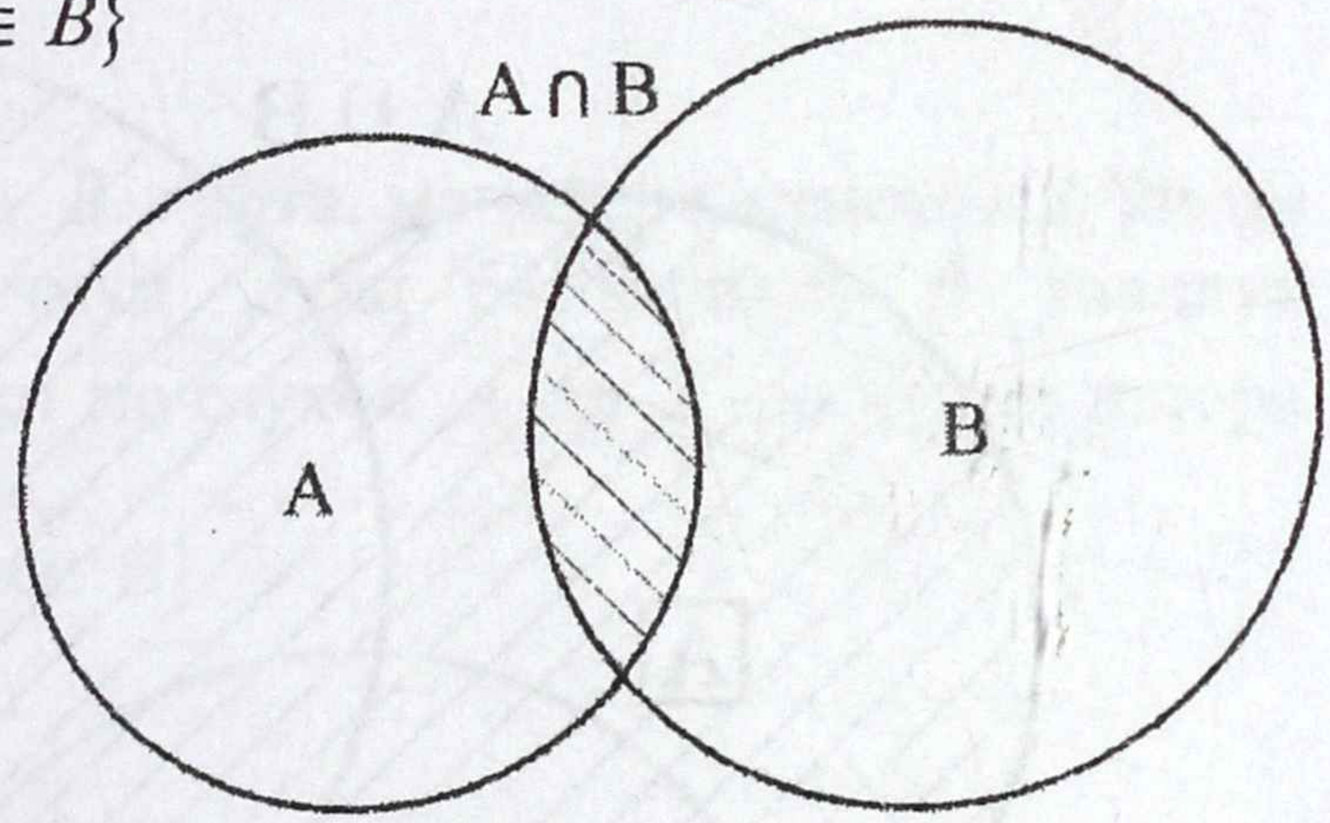
3. Хосияти транзитивӣ. Агар маҷмуи A ба маҷмуи B баробарқувва буда ва маҷмуи B ба маҷмуи C баробарқувва бошад, он гоҳ маҷмуи A ба маҷмуи C баробарқувва мебошад, яъне ду маҷмуи ба маҷмуи сеюм баробарқувва, байни худ баробарқувва аст.

2.4. Буриши маҷмуҳо

Дар математика ба ҷои ибораи "қисми умумии маҷмуъҳо" аз ибораи "буриши маҷмуъҳо" истифода мебаранд.

Бигузор ду маҷмуҳои A ва B дода шуда бошанд. Буриши (зарби) маҷмуҳои A ва B гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки он аз элементҳои дар як вақт ҳам ба маҷмуи A ва ҳам маҷмуи B мутааллиқ иборат аст. Буриши маҷмуҳоро бо рамзи $A \cap B$, $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ ишора мекунанд.

Буриши шумораи дилхоҳи маҷмуҳо айнан ҳамин тавр муайян карда мешавад. Буриши маҷмуҳоро графикӣ дар намуди қисми умумии ду ё зиёда аз он доираҳои Эйлер – Венн (Расми 2) тасвир намудан қулай ва ба мақсад мувофиқ аст.



Расми 2

Таърифи 7.

Буриши ду маҷмуъ гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки вай аз элементҳои умумии ин маҷмуъҳо тартиб дода шудааст.

Масалан, агар $A = \{3;5;7;9;11\}$ ва $B = \{3;7;9;10;12;15\}$ бошад, он гоҳ $A \cap B = \{3;7;9\}$ мебошад.

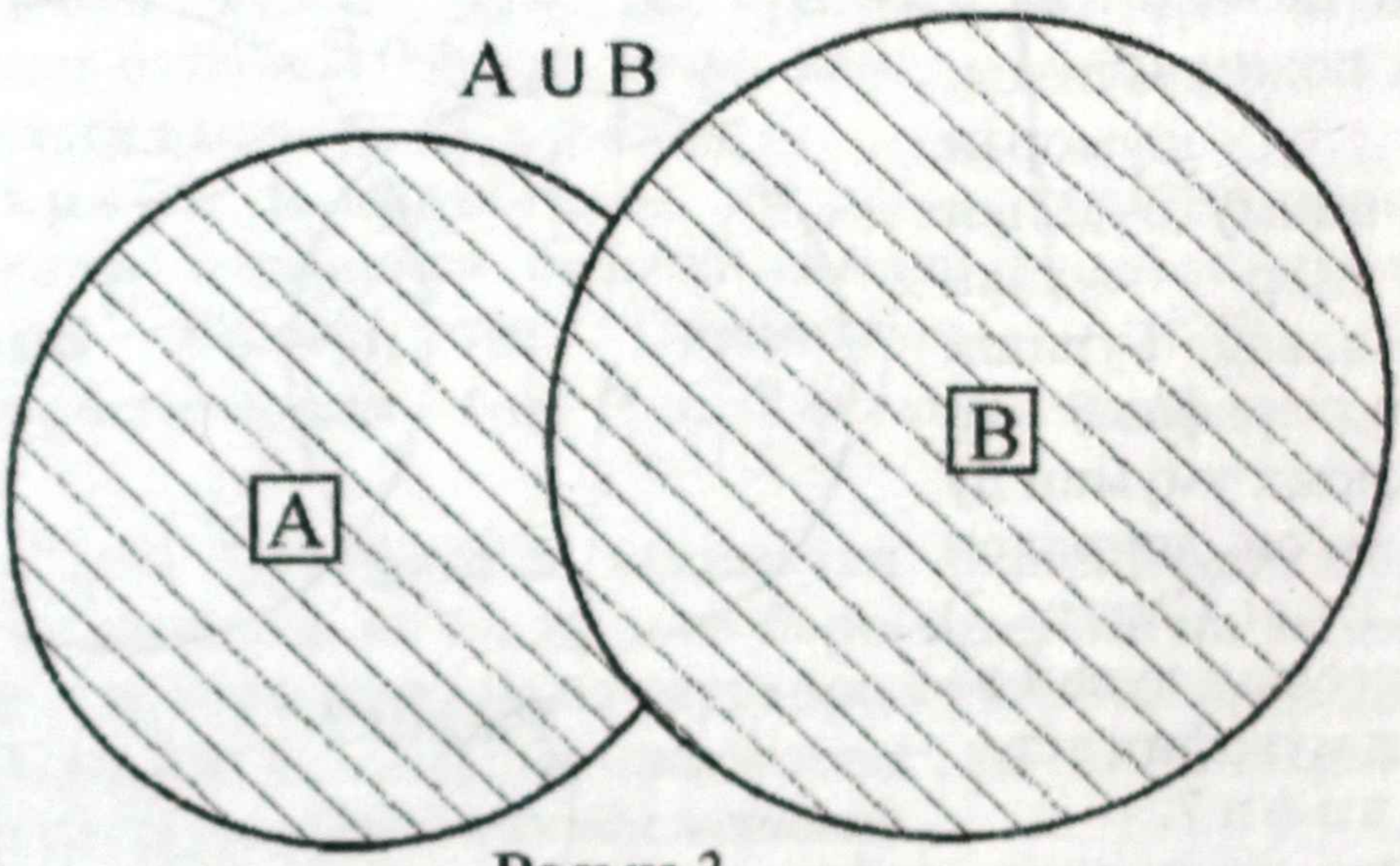
Агар маҷмуи аз сақоҳои сурх ташкилёфтаро бо ҳарфи M ва маҷмуи аз сақоҳои сафед ташкилёфтаро бо ҳарфи E ишорат кунем, он гоҳ буриши ин ду маҷмуъҳо маҷмуи холӣ мебошад, яъне $M \cap E = \varnothing$. Агар $\varnothing$ бошад, пас мегӯянд, ки ин ду маҷмуъҳо ҳамдигарро намебуранд.

Мисолҳо: 1) $A=\{2n \mid n\in N\}$ - маҷмуи ададҳои ба 2 каратӣ, $B=\{3n \mid n\in N\}$ - маҷмуи ададҳои ба 3 каратӣ, (бебақия тақсимшаванда) аст. $A\cap B=\{6n \mid n\in N\}$-ин маҷмуи ададҳои ба 6 тақсимшаванда мебошад.

2) A - порчаи $[0;6]$, B - порчаи $[3;8]$ аст. $A\cap B$ - порчаи $[3;6]$ мебошад.

2.5. Якҷояшавии маҷмуҳо

Якҷояшавии ду маҷмуҳои A ва B гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки он аз ҳамаи элементҳои ақаллан ба яке аз ин маҷмуҳои A ва B мутааллиқ ташкил ёфтааст. Якҷояшавии маҷмуҳои A ва B бо рамзи $A\cup B$ ё $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ ё } x\in B\}$ ишора карда мешавад (Расми 3).



Расми 3

Якҷояшавии шумораи дилхоҳи маҷмуҳо ҳамин тавр муайян карда мешавад.

Таърифи 8. *Якҷояшавии ду маҷмуъ (ё ки ҷамъи ду маҷмуъ) гуфта маҷмӯеро меноманд, ки элементҳояш аз элементҳои ҳам маҷмуи якум ва ҳам маҷмуи дуюм иборат аст.*

Агар ҳамаи маҷмуи ададҳои ҷуфти натуралиро бо A ва ҳамаи маҷмуи ададҳои тоқи натуралиро бо B ишорат кунем, он гоҳ якҷояшавии маҷмуъҳои A ва B маҷмуи ададҳои натуралиро ташкил медиҳад, яъне $A\cup B=N$.

Мисолҳо:

1) $A=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 12\}$, $B=\{1; 2; 3; 4; 5; 6;\ 9; 18\}$, он гоҳ $A\cup B=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 12; 18\}$ мешавад.

2) $A=[0; 9]$, $B=[4; 10]$, он гоҳ $A\cup B=[0; 10]$ мешавад.

3) $A=\{6k+2 \mid k\in Z\}$ ададҳое, ки ҳангоми онҳоро ба 6 тақсим намудан бақия ба 2 баробар мешавад. $C=\{6k+4 \mid k\in Z\}$ - ададҳое, ки ҳангоми ба 6 тақсим намудан дар бақия 4 мемонад. Баъзе элементҳои ин маҷмуҳоро менависем:

$A=\{\ldots, -6; 0; 6; 12; \ldots\}$,

$B=\{\ldots, -4; 2; 8; 14; \ldots\}$,

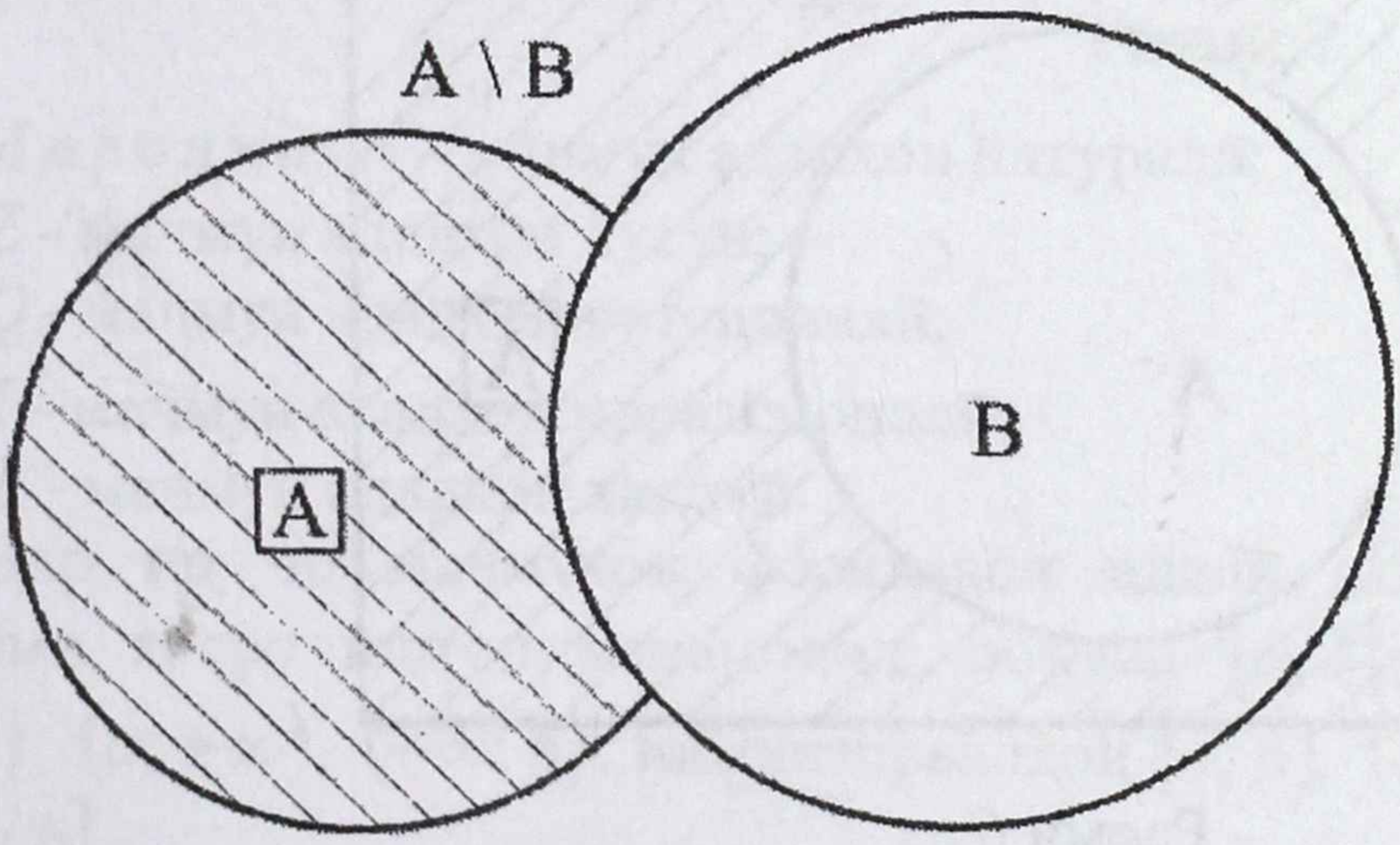
$C=\{\ldots, -2; 4; 10; 16; \ldots\}$.

Аён аст, ки $A\cup B\in C=\{2k \mid k\in Z\}$ маҷмуи ададҳои ҷуфт мешавад.

2.6. Фарқи маҷмуҳо

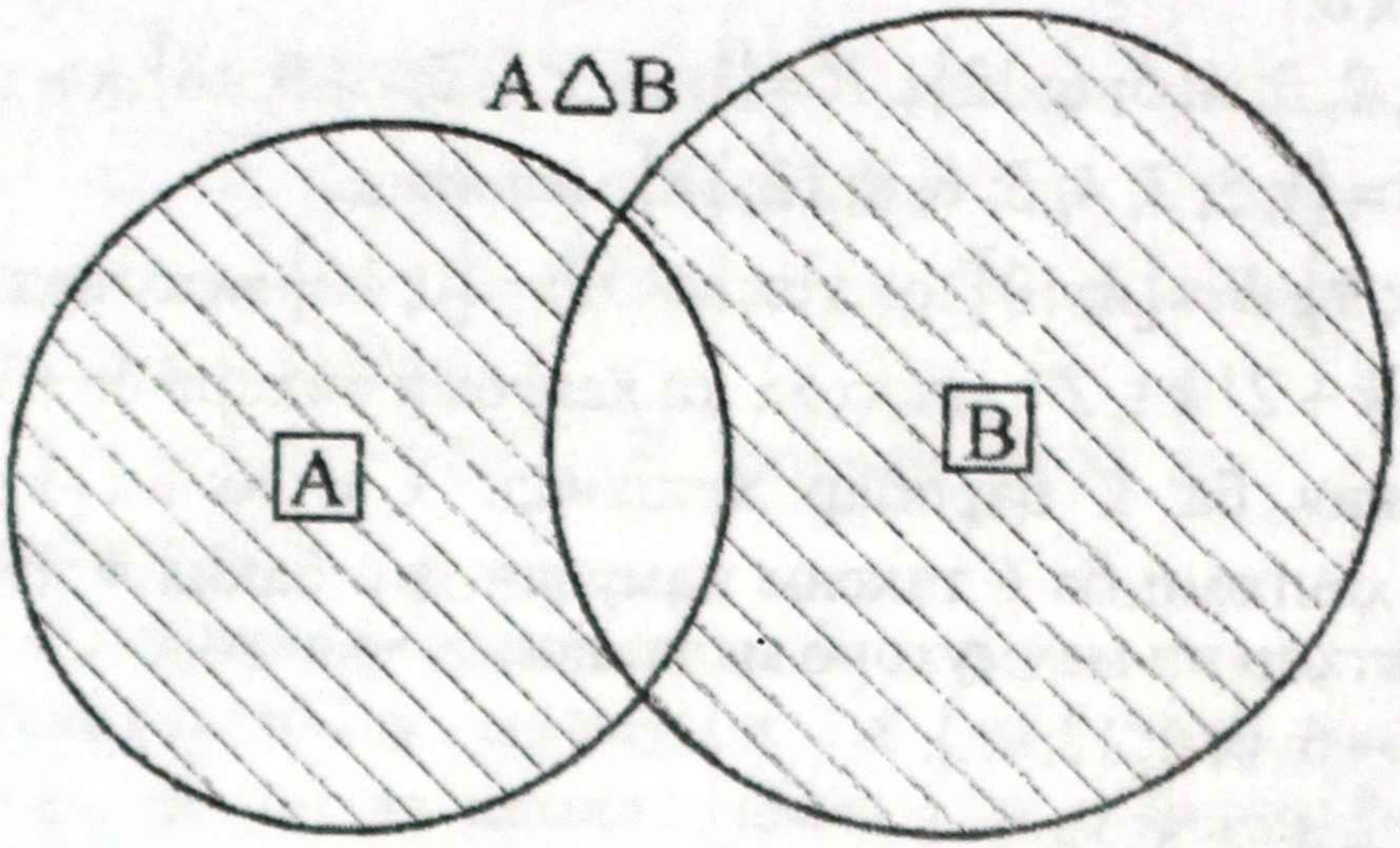
Фарқи маҷмуҳои A ва B гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки он аз ҳамаи элементҳои маҷмуи A, ки ба маҷмуи B тааллуқ надорад, иборат аст. Фарқи маҷмуҳои A ва B-ро чунин ишора мекунанд (Расми 4):

$A\setminus B$ ё $A\setminus B=\{x\in A, x\notin B\}$.



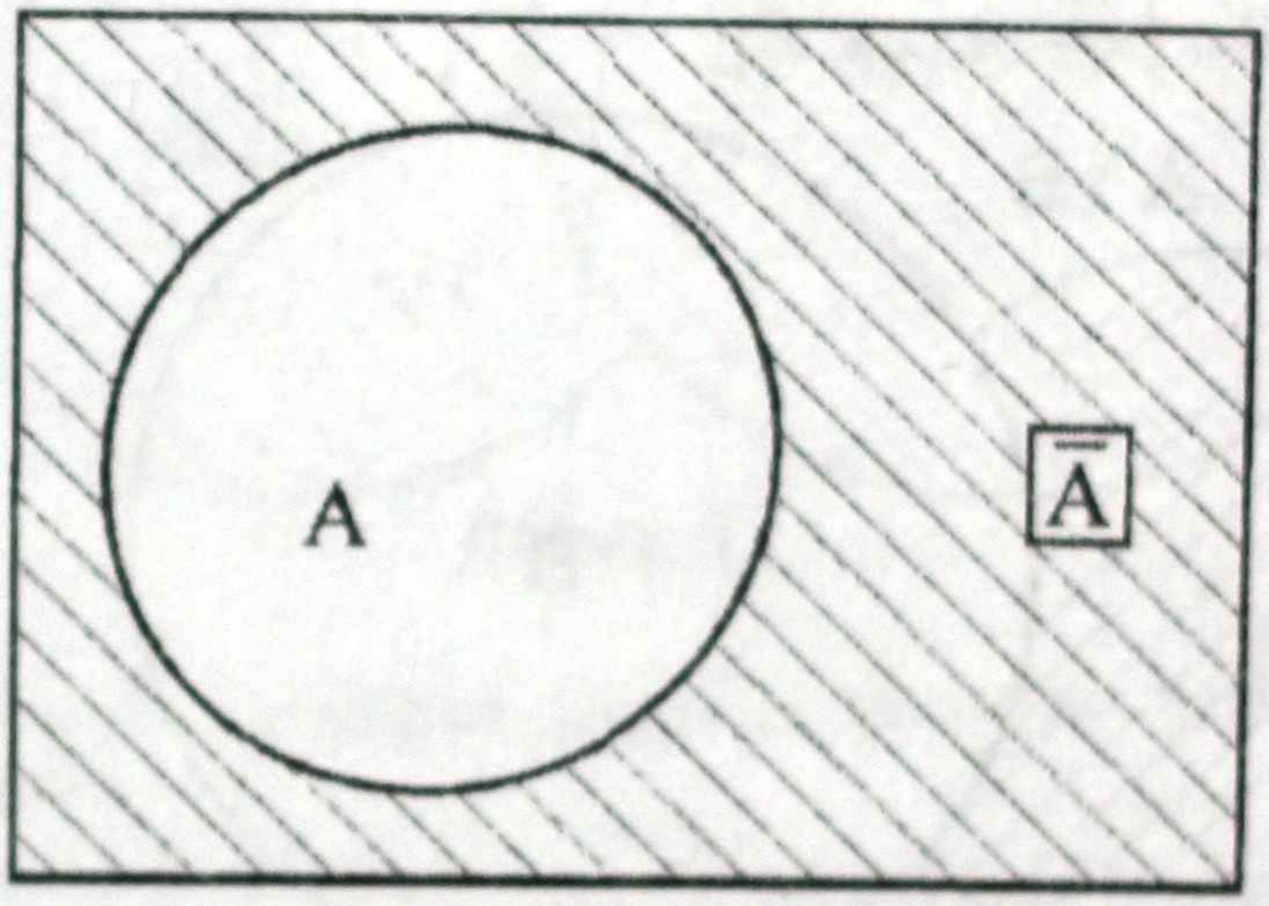
Расми 4

Фарқи симметрии маҷмуҳои A ва B гуфта, маҷмӯеро меноманд, ки он аз ҳамаи элементҳои ба яке аз маҷмуҳои ё A ё B тааллуқ дошта иборат аст. Фарқи симметрӣ бо рамзи $A\Delta B$ ишора карда мешавад (Расми 5).



Расми 5

Аксар вақт, ҳангоми ҳалли масъалаҳо мафҳуми универсиалии $\cup$, яъне мафҳуми аз ҳама калони элементҳои дар масъала дида баромадашаванда дохил карда мешавад. Пурракунии мафҳуми A то мафҳуми универсиалӣ гуфта, мафҳуми элементҳои мафҳуми универсиалиро, ки ба мафҳуми A таалуқ надорад, меноманд. Пурракунии мафҳуми A -ро бо рамзи $\overline{A}=\cup\setminus A=\{x\mid x\in \cup,\ x\notin A\}$ ишора мекунанд (Расми 6).



Расми 6

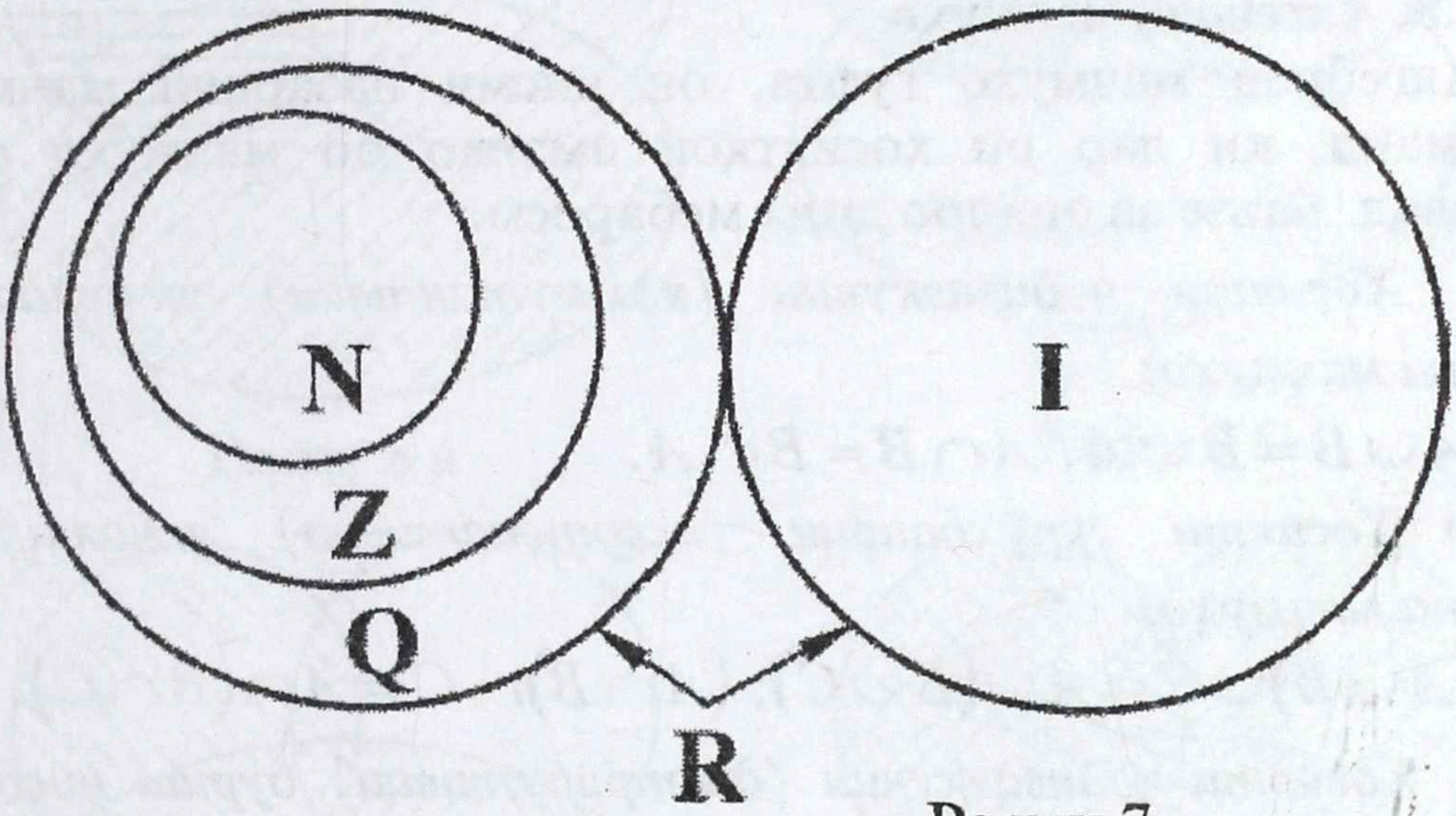
Мисолҳо: 1) $A=[-2;0)$, $B=[-1;3)$ аст, он гоҳ $A\setminus B=[-2;-1)$ ва $B\setminus A=[0;3)$ мешавад.

2) $A=\{2m-1\mid m\in Z\}$, $B=\{4n+1\mid n\in Z\}$ аст. Он гоҳ,

$A=\{\ldots,-3;-1;1;3;\ldots\}$, $B=\{\ldots,-3;1;5;9;\ldots\}$ шуда, аз ин ҷо $A\setminus B=\{\ldots,-1;1;1;3;\ldots\}$ ва $A\setminus B=\{4k-1\,|\,k\in Z\}$ ҳосил мешавад.

2.7. Маҷмуҳои ададӣ

Объектҳои табиаташон гуногун (ададҳо, калимаҳо, фигураҳои геометрӣ, функсияҳо, ашёҳо, ҳайвонот ва ғайра) элементҳои маҷмуъ шуда метавонанд. Дар математика мавқеъи асосиро маҷмуҳое мебозанд, ки элементҳои онҳо объектҳои математикӣ мебошанд. Мо аксар вақт бо маҷмуҳои ададӣ, яъне маҷмуҳое, ки элементҳояшон ададҳо мебошанд, дучор меоем (Расми 7) .



Расми 7

Мисолҳо: N - маҷмуи ададҳои натуралӣ;

Z - маҷмуи ададҳои бутун;

Q - маҷмуи ададҳои ратсионалӣ;

I - маҷмуи ададҳои ирратсионалӣ;

R - маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ.

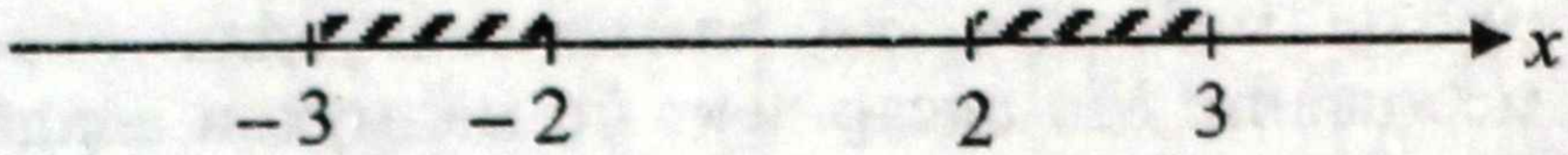
Дар ин ҷо маҷмуҳои фосилаҳои ададӣ номидашаванда, мақоми хосро ишғол менамоянд: порчаи $[a;b]$, интервалҳои $(a;b)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$, ниминтервалҳои $[a;b)$, $(a;b]$, $(a;+\infty]$, $(-\infty;b]$.

Маҷмуи ададӣ ҳангоми ҳалли муодилаҳо ва нобаробариҳо васеъ истифода карда мешаванд.

Мисол. Маҷмуи қиматҳои имконпазири муодилаи зеринро меёбем: $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-4}=2$.

Ҳал. $\begin{cases} 9-x^2 \geq 0, \\ x^2-4 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (3-x)(3+x) \geq 0, \\ (x-2)(x+2) \geq 0. \end{cases}$

Системаи нобаробариҳои ҳосилшударо бо методи интервалҳо ҳал мекунем:



Ҷавоб: $[-3;-2] \cup [2;3]$.

2.8. Алгебраи маҷмуҳо

Алгебраи маҷмуҳо гуфта, он қисми назарияи маҷмуҳоро меноманд, ки дар он хосиятҳои амалҳо бо маҷмуҳо омӯхта мешавад. Баъзе аз онҳоро дида мебароем:

1. Хосияти ҷойивазкунии (коммутативии) якҷояшавӣ ва буриши маҷмуҳо:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$$

2. Хосияти гурӯҳбандии (ассотсиативии) якҷояшавӣ ва буриши маҷмуҳо:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Хосияти ҷойивазкунии (дистрибутивии) буриш нисбат ба якҷояшавӣ ва баръакс:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. $A \cup A = A,\ A \cap A = A;$

5. $A \cup U = U;\ A \cap U = A;$

6. $A \cup \varnothing = A;\ A \cap \varnothing = \varnothing;$

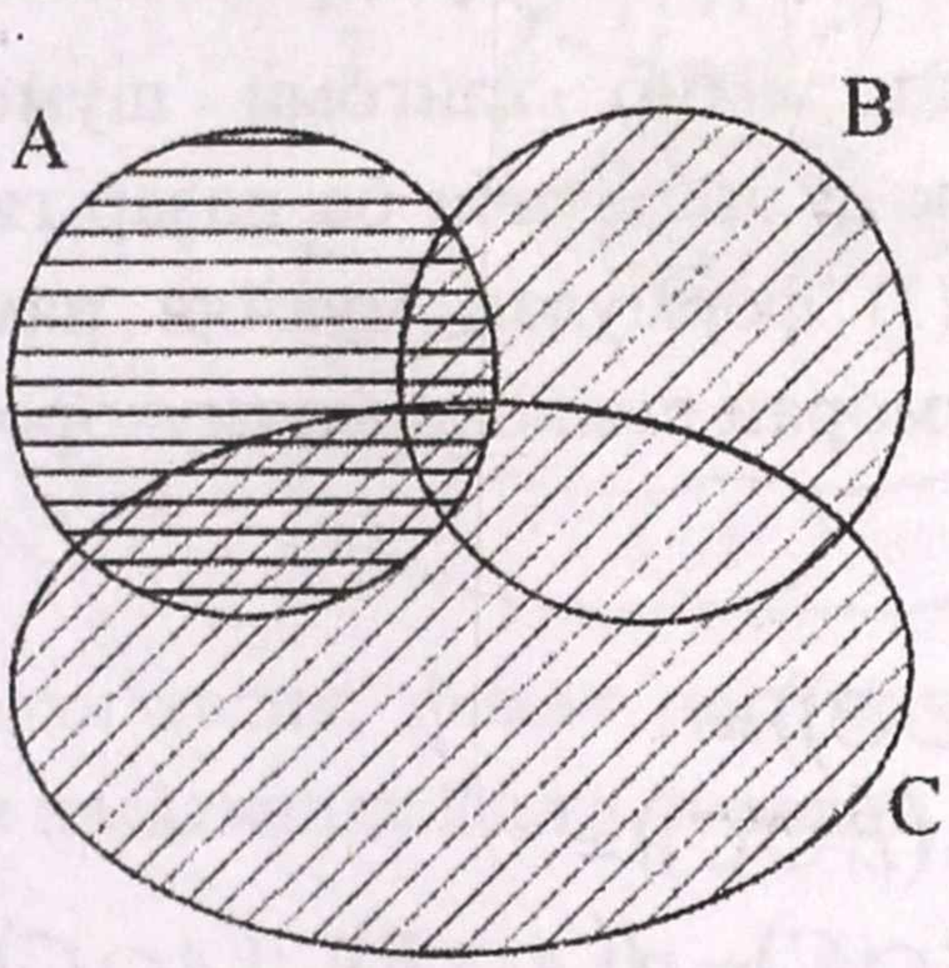
7. $A \cup \overline{A} = U;\ A \cap \overline{A} = \varnothing;$

8. $\overline{\overline{A}} = A;$

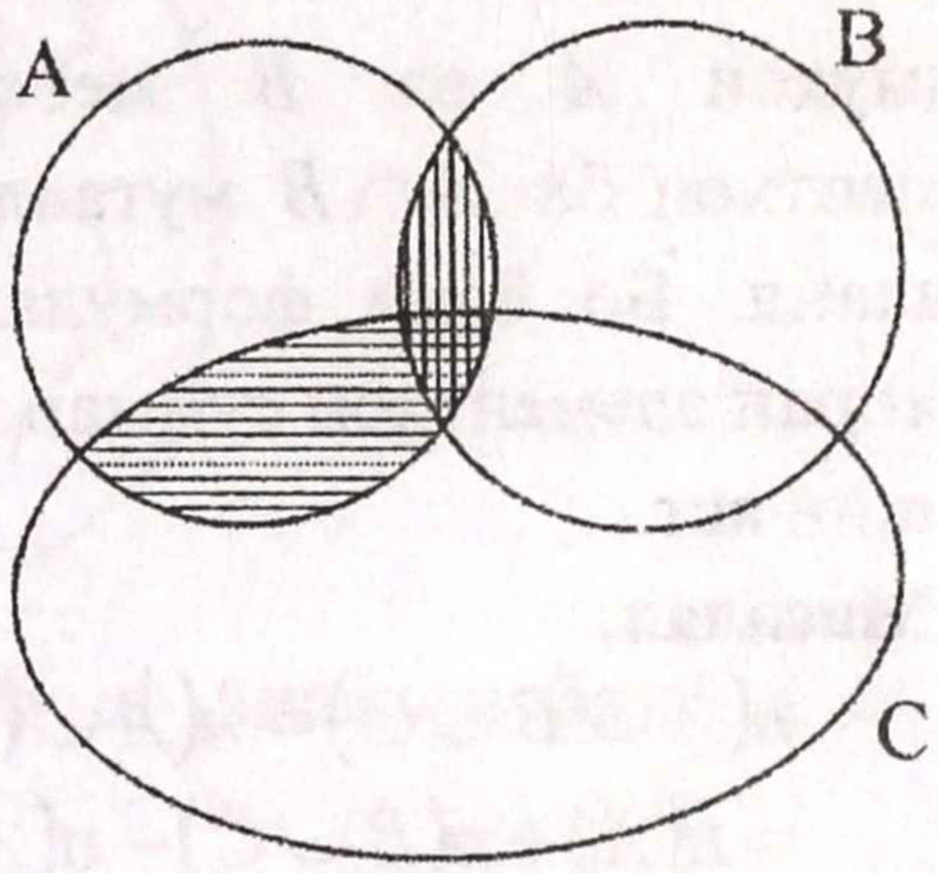
9. $\overline{U} = \varnothing;\ \overline{\varnothing} = U;$

10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. **(қонуни де-Морган ё формулаи дукаратагӣ).**

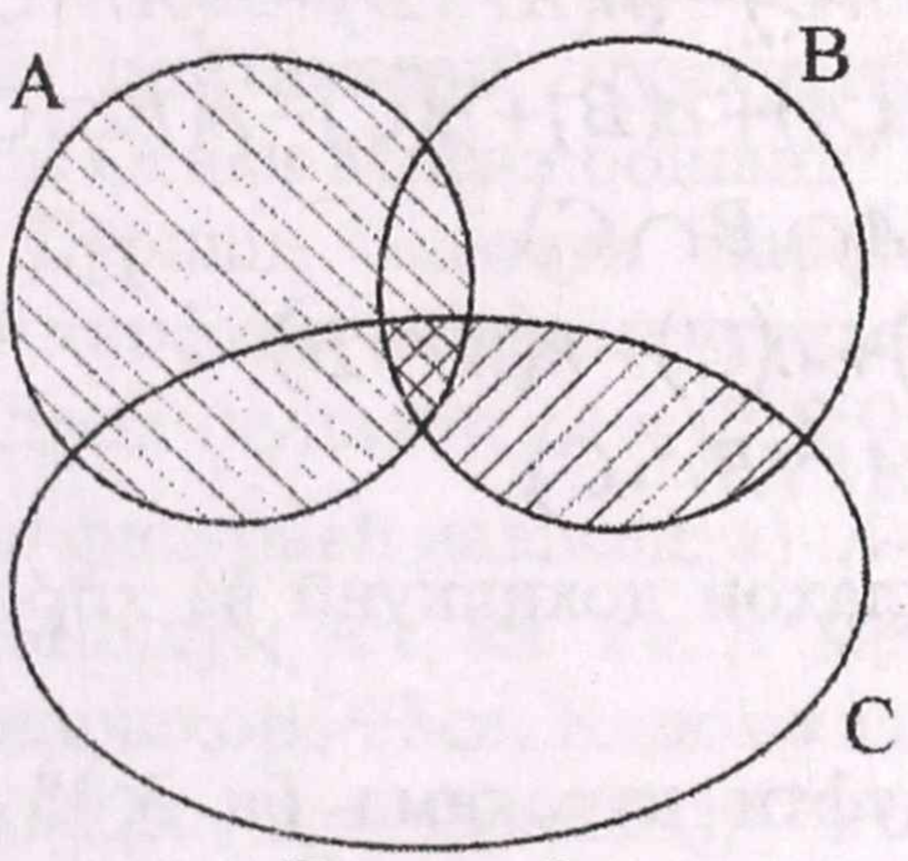
Акнун ба воситаи диаграмаи Эйлер-Венн, яъне аз хосиятҳо, масалан хосияти 3-ро нишон медиҳем. Тарафҳои чап ва рости баробариро алоҳида-алоҳида дида мебароем (Расми 8 а, б). Дар расми 8 а диққати моро ба худ маҷмуи ду маротиба штрих карда ҷалб менамояд, дар расми 8 б бошад, маҷмӯе, ки ақаллан як бор



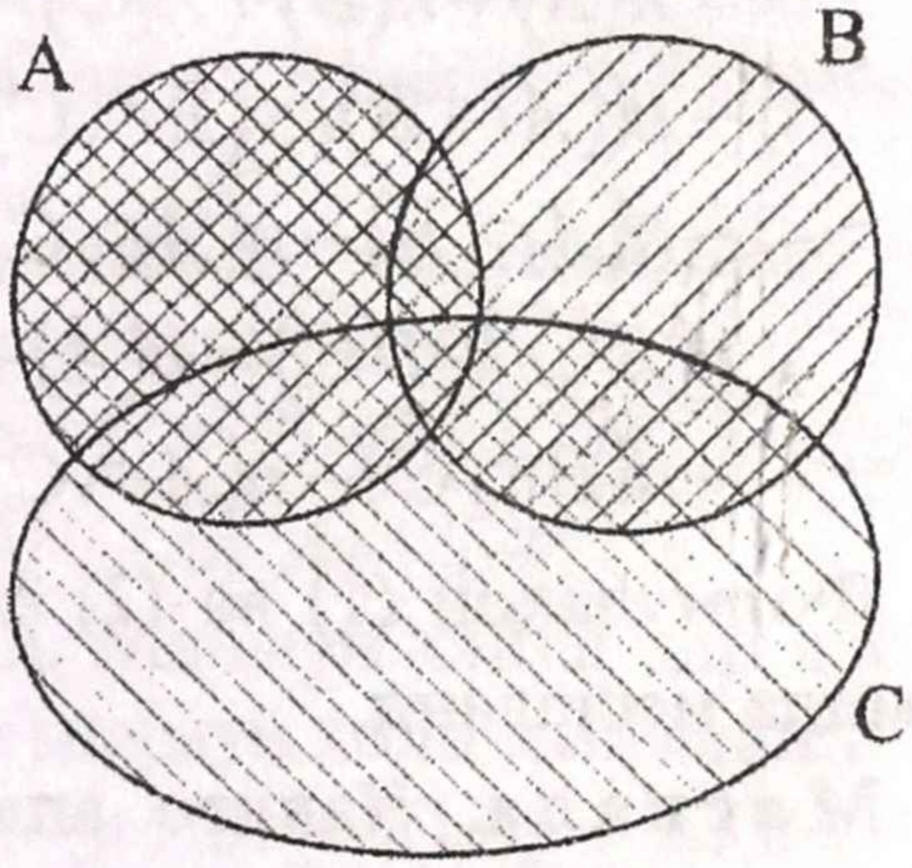
Расми 8 а



Расми 8 б



Расми 9 а



Расми 9 б

штрих карда шудааст, мароқовар аст. Тарафи чапи баробарии дуюмро маҷмӯе муайян мекунад, ки он ақаллан як бор штрихонида шудааст (Расми 9 а). Тарафи ростро – маҷмӯе, ки ду маротиба штрихонида шудааст, муайян менамояд (Расми 9 б).

2.9. Формулаи дохилкунӣ ва хориҷкуниҳо

Бигузор маҷмуи охирноки A дода шуда бошад. Шумораи элементҳои онро бо $n(A)$ ишора мекунем. Шумораи

элементҳоеро, ки ба маҷмуи $A \cup B$ мутааллиқ аст, меёбем. Формулаи асосии ёфтани шумораи элементҳои суммаи ду маҷмуҳо:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \qquad (1)$$

Дар ҳақиқат, $n(A \cup B)$ - ин суммаи шумораи элементҳои маҷмуҳои A ва B мебошад, аммо ҳангоми шумориданэлементҳои ба $A \cap B$ мутааллиқ ду маротиба ба назар гирифта шудаанд. Бо ёрии формулаи (1) формулаи муайян намудани шумораи элементҳои суммаи шумораи дилхоҳи маҷмуҳоро ёфтан мумкин аст.

Масалан,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) =$$
$$= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) =$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - (n(A \cap B) + n(A \cap C)) -$$
$$- n((A \cap B) \cap (A \cap C))) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) -$$
$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

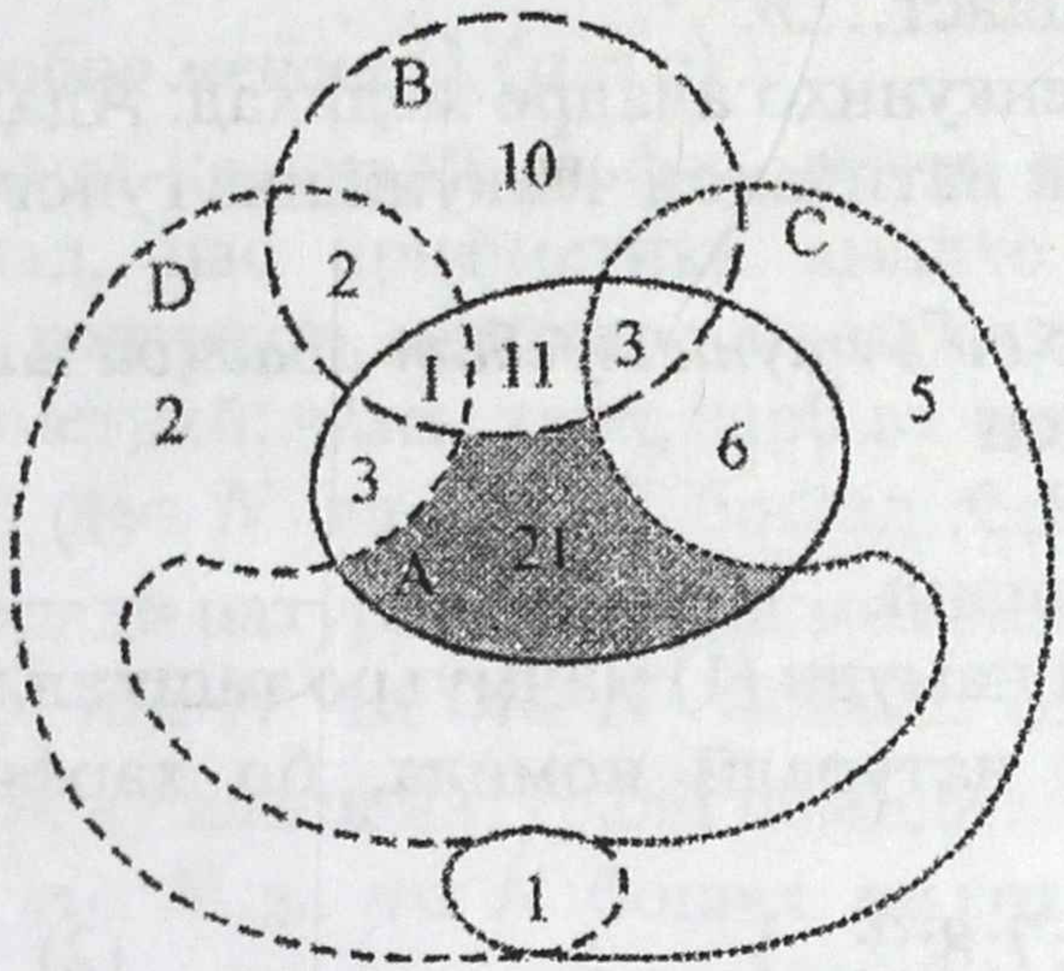
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$$
$$- n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C). \qquad (2)$$

Формулаҳои (1) ва (2) формулаҳои дохилкунӣ ва хоричкунӣ номида мешаванд.

Масъала. Чандто ададиҷуфти дурақама ба 3, 5 ва 11 тақсим намешавад?

Ҳал. Пеш аз ҳама муайян намудан лозим аст, ки чанд элемент ба маҷмуи A тааллуқ дорад ва ба дигар маҷмуҳо мансуб нест. Диаграммаро дида баромада, нишондиҳандаҳои шумораворо дар соҳаҳои мувофиқ бо тартиби зерин қайд менамоем:

$$n(A \cap B \cap C) = 3,\ n(A \cap B \cap D) = 1,$$
$$n(A \cap B) - 3 - 1 = 11,\ n(A \cap C) - 3 = 6,$$
$$n(A \cap D) - 1 = 3,$$
$$n(A) - 3 - 1 - 11 - 3 - 6 = 45 - 24 = 21.$$



Ҳамин тариқ, фақат дар маҷмуи A ададҳои ба 3, 5 ва 11 тақсим нашаванда 21-то будааст.

МАШҚҲО

1. Оё маҷмуи A таҳтмаҷмуи маҷмуи B мебошад, агар: A - маҷмуи пойтахтҳои ҷумҳуриҳои Осиёи Миёна, B -маҷмуи шаҳрҳои Осиёи Миёна бошанд?

2. Буриши маҷмуи ҳарфҳои калимаи «математика» бо маҷмуи ҳарфҳои калимаи «грамматика» ёфта шавад.

3. Дода шудааст: $A=\{7;8;9;10\}$ ва $C=\{9;10;11;12\}$. Бо ёрии қавсҳои фигуравӣ нависед: а) $A\cup C=?$ б) $A\cap C=?$

4. Маълум аст, ки $x\in R$ мебошад. Маҷмуи ҳалли ҳар яке аз ин муодилаҳоро ёбед. Кадоме аз онҳо маҷмуи холӣ мебошанд?

а) $12x+5=12(x+21)$; б) $7y+21=5(1,4y+3,7)$;

в) $4(x-5)=5x$; г) $32z+21=3(24z+37)$;

д) $x^2+25=16$; е) $9y^2-1=-37$.

§3. Ададҳои бутун ва амалҳо бо онҳо

Мафҳуми адади бутун, ки он яке аз мафҳумҳои асосии математикаи ҳозиразамон аст, ҳанӯз дар замони қадим ба вуҷуд омада буд.

Фридрих Энгелс дар асари классикии худ «Анти-Дюринг» доир ба масъалаи пайдоиши математика навишта буд: математика ба монанди ҳамаи дигар фанҳо аз эҳтиёҷоти амалии одамон пайдо шудааст: «Математика аз чен кардани масоҳати

қитъаҳои замин ва ғунҷоиши зарфҳо, аз ҳисоб кардани вақт ва аз механика ба вуҷуд омадааст….».

Натиҷаи ҳаргуна ченкуниҳо ададро медиҳад. Ададҳо гуногун шуда метавонанд, чунки натиҷаҳои ченкунӣ низ гуногунанд.

I. Адади натуралӣ

Таърифи 1. *Ададҳои бутуни мусбат ададҳои натуралӣ ном доранд*. **Масалан**, ададҳои

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;… (1)

ададҳои натуралӣ мебошанд.

Ададҳои натуралии намуди (1) маҷмуъро ташкил медиҳад, ки онро маҷмуи ададҳои натуралӣ номида, бо ҳарфи N ишора менамоянд.

$$N = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;...\} \quad (2)$$

Маҷмуи ададҳои натуралии бо тартиби зиёдшавиаашон ҷойгиршударо қатори натуралӣ ҳам меноманд. Адади хурдтарини маҷмуи ададҳои натуралӣ воҳид буда, адади калонтаринаш вуҷуд надорад, чунки ҳар чӣ қадар адади калонро нагирем, дар натиҷаи ба вай илова кардани воҳид адади навро ҳосил мекунем. Аз ин сабаб маҷмуи ададҳои натуралӣ беохир аст.

Ба қатори маҷмуъҳои элементдор мо маҷмуи холӣ, яъне маҷмӯеро дохил мекунем, ки ягонто ҳам элемент надорад. Ба сифати характиристикаи маҷмуи холӣ адади нави нол дохил карда мешавад. Ҳамин тариқ, 0 ададест, ки мафҳуми класси маҷмуи холиро баён мекунад. Масалан, агар ба маҷмуи ададҳои натуралии ба тартиб овардашуда, адади 0-ро илова намуда, дар пеши адади 1 ҷой диҳем ва онро аз адади натуралии дилхоҳ хурд ҳисоб кунем, дар натиҷа маҷмуи ададҳои натуралии васеъшударо, яъне маҷмуи {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9...} -ро ҳосил мекунем. *Нол адади бутуни ғайриманфиест, ки аз паси ҳеҷ кадом адади бутуни ғайриманфӣ намеояд.*

Ҳаман ададҳои қатори натуралӣ дорои хосиятҳои рефлективӣ (баргардандагӣ), хосияти симметрӣ (табдилёбандагӣ) ва хосияти транзитивӣ (ҷойдигаркунӣ) мебошанд.

1. *Хосияти рефлективӣ. Адади дилхоҳи натуралӣ худаш ба худаш баробар аст:* $(a = a)$, $a \in N$.

2. *Хосияти симметрӣ. Агар адади* $a \in N$ *ба адади* $b \in N$ *баробар бошад, он гоҳ адади* b *низ ба адади* a *баробар аст:* $(b = a)$.

3. Хосияти транзитивӣ. Агар адади $a \in N$ *ба адади* $b \in N$ *ва адади* $b \in N$ *ба адади* $c \in N$ *баробар бошад, он гоҳ адади* a *низ ба адади* c *баробар мебошад* $(a = c)$.

Агар адади натуралӣ аз фаъолияти амалии инсон ба вуҷуд омада бошад, пас арифметика амалҳо бо ададҳоро муоина мекунад ва қонунҳои амалҳоро меомӯзад. Дар ин ҷо мо бо чор амали арифметикӣ: ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсим кордор мешавем.

1. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ $m + n = s, s \in N$ – суммаи ду адади натуралӣ номида мешавад;

2. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ $m \cdot n = p, p \in N$ - ҳосили зарби ду адади натуралӣ номида мешавад;

3. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ

$r = n - m, \quad r \in N$, агар $n > m$,

$r = n - m, \quad r \notin N$, агар $n < m$ бошад.

Дар ин ҷо r фарқи ду адади натуралӣ номида мешавад. **Масалан**, адади 7 аз адади 5 калон аст, бинобар он фарқи ин ду адад мавҷуд ва ба адади натуралии 2 баробар мебошад: $7 - 5 = 2, \quad 2 \in N$. Адади 7 аз адади 9 хурд аст, фарқи ин ду адади натуралӣ адади натуралӣ нест: $7 - 9 = -2, \; -2 \notin N$.

4. Агар $m \in N$ ва $n \in N$ бошад, он гоҳ $\frac{m}{n} = q, q \in N$-ро нисбати ду адади натуралӣ меноманд. Дар ин ҷо адади m-ро тақсимшаванда ва адади n-ро тақсимкунанда меноманд.

II. Ададҳои бутун

Таърифи 2. *Ададҳои натуралӣ, ададҳои ба онҳо муқобил ва адади нол ададҳои бутун номида мешаванд.*

Масалан, ададҳои

$$0;\ 1;-2;-3;\ 4;-5;\ldots 5999;\ldots \qquad (3)$$

ададҳои бутун мебошанд.

Ҷамъбасти ададҳои

$$0;\ 1;-2;-3;\ 4;-5;\ldots 5999;\ldots$$

маҷмуи ададҳои бутунро ташкил медиҳад. Маҷмуи ададҳои бутунро бо Z ишорат намуда дар шакли

$$Z = \{0;-1;-2;3;-4;\ldots;999;\ldots\} \qquad (4)$$

менависанд.

Мачмуи ададҳои бутун Z-ро бо ду тахтмачмуҳо Z^+ ва Z^- чудо карда навиштан мумкин аст:

$$Z^+ = \{0;1;2;3;...\}; \qquad Z^- = \{-1;-2;-3;-4;-5;...\}$$

Аз ин чо,

$Z = Z^+ \cup Z^-$; $Z^+ \cap Z^- = \varnothing$ мешавад.

Ҳангоми ичро намудани амалҳои арифметикии чамъ, тарҳ, зарб ва таксими ададҳои бутун аз қонунҳои чамъ ва зарб истифода мебаранд.

III. Қонунҳои чамъ ва зарб

Ададҳое, ки онҳоро чамъ кардан лозим аст, чамъшавандаҳо номида мешавад, натичаи чамъ бошад, яъне ададе дар натичаи чамъкунӣ пайдошударо, ҳосили чамъ меноманд. Дар вакти чамъ кардани ададҳо мо ба се қонун: чойивазкунӣ, якчоякунӣ ва монотонӣ такя мекунем.

1. **Қонуни чойивазкунӣ**. *Аз иваз кардани чои чамъшавандаҳо ҳосили чамъ тағйир намеёбад. Агар a ва b ададҳои дилхоҳ бошанд, он гоҳ $a+b=b+a$ мешавад.*

2. **Қонуни якчоякунӣ**. *Агар чамъшавандаҳои дилхоҳро ба гурӯҳҳо чудо карда, чамъ кунему баъд натичаҳоро чамъ кунем, аз ин ҳосили чамъ тағйир намеёбад. Яъне, барои қиматҳои дилхоҳи a; b ва c:*

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c).$$

3. **Ҳосили чамъи монотонӣ**. а) Агар ду ададҳои a ва a_1 баробар бошанд, он гоҳ дар натичаи бо ягон ададн дигари b чамъ кардани ҳар яки аз ин ададҳо ҳосили чамъи баробар ҳосил мешавад, яъне аз $a=a_1$ бармеояд, ки $a+b=a_1+b$.

б) Агар яке аз ададҳои додашудаи a аз дигараш a_1 калон ё хурд бошад ва ба онҳо ягон ададн $b>0$-ро чамъ кунем, он гоҳ ҳосили чамъи якум назар ба дуюм мувофиқан калон ё хурд мешавад, яъне аз $a>a_1$ бармеояд, ки $a+b>a_1+b$ аст. Зарб гуфта, чунин амалеро меноманд, ки вай аз ёфтани ҳосили чамъи чамъшавандаҳои якхела иборат аст.

Масалан: $3+3+3+3+3=3\cdot 5=15$;

$$a+a+a+a+a=5\cdot a=5a;\ a>0.$$

Ҳамин тариқ, ададе, ки чамъшаванда мебошад, зарбшаванда номида мешавад ва ададе, ки шумораи чамъшавандаҳои якхеларо

нишон медиҳад, зарбкунанда номида мешавад. Натиҷаи амалро, яъне адади дар натиҷаи зарб ҳосилшударо, ҳосили зарб меноманд. Дар бисёр ҳолатҳо зарбшаванда ва зарбкунандаро ҳамзарбҳо ҳам меноманд.

Амали зарб ҳамеша иҷрошаванда буда, дар вақти маълум будани ҳамзарбҳо натиҷаи ягона медиҳад. **Масалан**, барои ҳаргуна ададҳои дилхоҳи $a>0$ ва $b>0$ баробарии зерин ҷой дорад: $a\cdot b=ab$, дар ин ҷо $a-$зарбшаванда ва $b-$зарбкунанда мебошад.

Дар оянда ҳангоми иҷро намудани амали зарб мо ба се қонун: ҷойивазкунӣ, якҷоякунӣ ва тақсимот такя мекунем.

1. **Қонуни ҷойивазкунӣ.** *Аз иваз намудани ҷои ҳамзарбҳо ҳосили зарб тағйир намеёбад. Яъне барои ҳаргуна ададҳои дилхоҳи a ва b баробарии зерин $a\cdot b=b\cdot a$ ҷой дорад.*

Масалан, аз $5\cdot 7=35$ ва $7\cdot 5=35$ бармеояд, ки $5\cdot 7=7\cdot 5$ мебошад.

2. **Қонуни якҷоякунӣ.** *Агар ягон гурӯҳи зарбшавандаҳои паси ҳам истодаро бо ҳосили зарбашон иваз кунем, аз ин ҳосили зарб тағйир намеёбад. Дар ҳақиқат барои қиматҳои дилхоҳи a, b ва c чунин амали зарб ҷой дорад:*

$$abc=(ab)c=a(bc).$$

Масалан, $3\cdot 5=15$ ва $15\cdot 4=60$ бармеояд, ки $3\cdot 5\cdot 4=(3\cdot 5)\cdot 4=15\cdot 4=60$ мебошад.

3. **Қонуни тақсимот.** *Ҳосили зарби суммаи якчанд адад ба ягон адад бар суммаи ҳосили зарби ҳар як ҷамъшаванда ба ин адад баробар аст. Яъне, барои ададҳои дилхоҳи a, b, c ва d чунин баробари ҷой дорад:*

$$(a+b+c)d=a\cdot d+b\cdot d+c\cdot d.$$

Масалан, аз иҷрои амалҳои

$$8\cdot 3=24;\ 4\cdot 3=12;\ 24+12=36$$

бармеояд, ки $8\cdot 3+4\cdot 3=(8+4)\cdot 3=12\cdot 3=36$ мебошад.

Барои ба адад зарб задани фарқ (ҳосили тарҳ) камшаванда ва камкунандаро алоҳида-алоҳида ба ин адад зарб зада, баъд аз ҳосили зарби якум ҳосили зарби дуюмро тарҳ кардан кифоя аст, яъне инро ба намуди умумӣ ин тавр ифода кардан мумкин аст:

$$(a-b)c=a\cdot c-bc.$$

Масалан, аз иҷрои амалҳои

$4\cdot 3=12; 2\cdot 3=6; 12-6=6$

бармеояд, ки $(4-2)\cdot 3=4\cdot 3-2\cdot 3=6$ мебошад.

Амалҳои тарҳ ва тақсимро ҳамчун амалҳои баракси ҷамъ ва зарб дида баромадан мумкин аст.

Тарҳ гуфта, чунин амалеро меноманд, ки ба воситаи вай аз рӯи ҳосили ҷамъи маълум ва яке аз ҷамъшавандаи маълум ҷамъшавандаи дигар ёфта мешавад.

Ададе, ки аз вай тарҳ меҳунанд, камшаванда ва ададе, ки онро тарҳ мекунанд, камкунанда номида мешаванд.

Ададе, ки дар натиҷаи иҷрои ин амал ҳосил мешавад, фарқ ё ҳосили тарҳ меноманд. Аз адади a тарҳ кардани адади b ёфтани чунин адади c мебошад, ки ҳангоми онро бо адади b ҷамъ кардан, a ҳосил мешавад, яъне $a-b=c$ бошад $b+c=a$ мешавад. Дар ин ҷо c-ро фарқи ададҳои a ва b, адади a-ро камшаванда ва адади b-ро камкунанда меноманд.

Тақсим гуфта, чунин амали арифметикиеро меноманд, ки бо ёрии он аз рӯи ҳосили зарби ду адад ва яке аз онҳо адади дигар ёфта мешавад.

Адади a-ро ба адади b тақсим кардан ин ёфтани чунин адади c мебошад, ки барои ҳосил кардани адади a онро бо адади b зарб задан лозим аст, яъне $b\cdot c=a$. Дар ин ҷо адади c-ро ҳосили тақсими ададҳои a ва b, адади a-ро тақсимшаванда, адади b-ро тақсимкунанда меноманд. Ҳамин тариқ, тақсими адади a ба адади b бо ду тарз навишта мешавад:

1) $a:b=c$ ё **2)** $\frac{a}{b}=c$.

Тақсим на ҳама вақт иҷрошаванда аст. Ҳангоми иҷро намудани амалҳои арифметикӣ аз хосиятҳои амалҳои ҷамъ, зарб ва тақсим истифода мебаранд.

IV. Хосиятҳои асосӣ

1. Агар яке аз ҷамъшавандаҳо ба нол баробар бошад, он гоҳ сумма ба ҷамъшавандаи дигар баробар мешавад. Яъне, баробариҳои $a+0=a$ ва $0+a=a$ барои қиматҳои дилхоҳи a дуруст мебошад. **Масалан,** $6+0=6; 0+6=6$.

2. Агар зарбкунанда воҳид бошад, он гоҳ ҳосили зарб ба зарбкунанда баробар мешавад. Яъне, $a\cdot 1=a; 1\cdot a=a$ барои қиматҳои дилхоҳи a дуруст аст.

Масалан: $5\cdot 1=5;\ 1\cdot 5=5$.

3. Агар яке аз ҳамзарбҳо нол бошад, он гоҳ ҳосили зарб ба нол баробар мешавад: $a\cdot 0=0;\ 0\cdot a=0$.

Масалан: $7\cdot 0=0;\ -4\cdot 0=0;\ 0\cdot 7=0;\ 0\cdot(-4)=0$.

Агар тақсимшаванда баробари нол бошад, он гоҳ ҳосили тақсим ҳам ба нол баробар мешавад. Яъне, дар мавриди $a=0$ будан $a:b=0$ мешавад, чунки $b\cdot 0=0$ аст. Масалан, $\frac{0}{5}=0$, чунки $5\cdot 0=0$ аст.

4. Агар тақсимкунанда ба воҳид баробар бошад, он гоҳ ҳосили тақсим ба тақсимшаванда баробар мешавад.

Масалан: $5:1=5$, чунки $1\cdot 5=5$ аст;

$\frac{6}{1}=6$, чунки $1\cdot 6=6$ аст.

5. Агар тақсимшаванда a ба нол баробар набошад ва тақсимкунанда b ба нол баробар бошад, он гоҳ ҳосили тақсимро ёфтан мумкин нест, чунки ададе ёфт намешавад, ки ҳангоми онро ба нол зарб задан адади α ҳосил шавад. Аз ҳамин сабаб ягон ададро ба нол тақсим кардан мумкин нест, аз ҷумла 0-ро ба 0 ҳам тақсим кардан мумкин нест, чунки ифодаи $\frac{0}{0}$ ҳеҷ гуна қимати ададиро ифода намекунад.

Ададҳои бутун ҷуфт ва тоқ шуда метавонанд. Адади бутунро адади ҷуфт меноманд, агар вай ба 2 тақсим шавад ва адади тоқ меноманд, агар вай ба 2 бебақия тақсим нашавад. Нол - адади ҷуфт аст.

Масалан, *ададҳои 12; 14; ....22 - ро ададҳои ҷуфт меноманд*, чунки ин ададҳо ба 2 тақсим мешаванд. *Ададҳои 13; 15; 17; .....31-ро ададҳои тоқ меноманд*, чунки ба 2 бе бақия тақсим намешаванд.

Теорема. *Агар адади b тақсимкунандаи ададҳои a_1 ва a_2 бошад, он гоҳ b тақсимкунандаи суммаи a_1+a_2 ҳам мебошад* (исботаш ба хонанда пешниҳод карда мешавад).

V. Тақсими бақиянок

Чӣ хеле, ки мо дар боло хотиррасон кардем, ҳангоми адади a-ро ба адади b тақсим кардан, дар ҳосили тақсим на ҳама вақт адади бутун ҳосил мешавад. **Масалан**, адади 51-ро ба адади 8

тақсим кардан мумкин нест, чунки ададӣ бутуне нест, ки ҳангоми онро ба 8 зарб задан ададӣ 51 ҳосил шавад. Агар 51-ро ба 8 тақсим кунем дар натиҷа 6 то расида, 3 то бақия мемонад. Дар ин ҷо 51-ро тақсимшаванда ва ададӣ 8-ро тақсимкунанда меноманд: ададӣ 6 ҳосили тақсими нопурра ва ададӣ 3 бақияи тақсим мебошад.

Дар ин ҳолат амали тақсимро тақсими бақиянок меноманд. Яъне, агар дар вақти қимати дилхоҳи α -ро ба қимати дилхоҳи b тақсим кардан, ҳосили тақсими нопурра q ва бақия r ҳосил шавад, он гоҳ онро дар намуди зерин менависанд:

$a:b=q$ (бақия r), ё ки $\frac{a}{b}=q$ (бақия r).

Аз ин навишт истифода бурда, мо мисоли дар боло муоина кардашударо дар ин намуд менависем:

51:8=6 (бақия 3) ё ки $\frac{51}{8}=6$ (бақия 3).

Аз тарафи дигар таърифи умумии тақсими бақиянокро дар намуди зерин додан мумкин аст.

Таъриф. *Ададӣ a - ро ба ададӣ b $(b>0)$ тақсим кардан ин ёфтани чунин ду ададҳои q (ҳосили тақсим) ва r (бақия) мебошад, ки онҳо вобастагии зеринро қаноат мекунонанд:*

$$a=b\cdot q+r \text{ ва } 0\le r<b.$$

Дар ин ҷо бақияи дар натиҷаи тақсим ҳосил шуда ҳамеша бояд аз тақсимкунанда хурд бошад. **Масалан:**

$\frac{37}{5}=7$ (бақия 2); $\frac{55}{9}=6$ (бақия 1), чунки

$37=5\cdot 7+2$; $55=9\cdot 6+1$

мешаванд.

VI. Амалҳо бо ададҳои бутун

Чор амали дида баромада – ҷамъ, тарҳ, зарб, тақсимро ба ду дараҷа ҷудо кардан қабул шудааст. Ду амали аввала, яъне ҷамъу тарҳро амалҳои дараҷаи якум ва ду амали охирин, яъне зарбу тақсимро амалҳои дараҷаи дуюм меноманд. Ҳамин тариқ, дар таркиби ҳар як дараҷа як амали рост ва як амали ба вай чаппа мавҷуд аст. Бинобар он, дар вақти иҷро намудани амалҳои арифметикӣ ба тартиби навиштани амалҳо аҳамият дода мешавад.

Мо ҳар гуна маҷмуи ададҳо ва аломатҳоеро, ки бо ин ададҳо чи гуна амалҳо иҷро карда шуданашро нишон медиҳанд, ифодаи арифметикӣ меномем. **Масалан:**

$25+12-8$

амалҳои дараҷаи якум;

$45-23+9$

$80\cdot 22:11$

амалҳои дараҷаи дуюм;

$64:16\cdot 13$

$60\cdot 12:6+45$

$80:16\cdot 5-12$ амалҳои дараҷаи якуму дуюм.

$35+25\cdot 12:30$

1. Ҳангоми ҳисоби ифодаҳои арифметикӣ, ки дорои амалҳои якдараҷаанду қавсҳо надоранд, амалҳо бо ҳамон тартиби навишташудаашон, ба тариқи сода (аз чап ба рост) иҷро карда мешаванд.

Мисоли 1. $125-25+20-45+65=100+20-45+65=$
$=120-45+65=75+65=140.$

Мисоли 2. $225:9\cdot 4:2:5=25\cdot 4:2:5=100:2:5=50:5=10.$

2. Агар ифодаи арифметикӣ қавсҳо надошта бошад, вале дорои амалҳои дараҷаи гуногун бошад, он гоҳ аввал амалҳои зарб ва тақсим, баъд амалҳои ҷамъ ва тарҳ иҷро карда мешаванд.

Мисоли 3. $12\cdot 5+225:25-144:24-36:6+8\cdot 2.$

Ҳал. а) Амалҳои зарб ва тақсимро иҷро менамоем:

1) $12\cdot 5=60$; 2) $225:25=9$;

3) $144:24=6$; 4) $36:6=6$; 5) $8\cdot 2=16$.

б) Амалҳои ҷамъ ва тарҳро иҷро менамоем:

$60+9-6-6+16=48+9+16=48+25=73.$

3. Барои ҷамъ кардани ададҳои манфӣ ва ададҳои мусбат аз қонуни ҷамъ истифода мебаранд. Суммаи ду адади манфӣ, адади манфӣ мебошад, ки бузургии мутлақаш ба ҳосили ҷамъи бузургии мутлақи ҷамъшавандаҳо баробар аст. Чун қоида дар вақти навиштани сумма ҷамъшавандаи якумро одатан бекавс менависанд.

Мисоли 4. $-25+(-15)=-40;$

$-5+(-19)=-24;$

$-32+(-112)=-144;$

$|-40|=|-25|+|-15|;\ |-24|=|-5|+|-19|;$

$$|-144| = |-32| + |-112|.$$

4. Агар ададҳои додашуда аломатҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ барои ёфтани суммаи онҳо аз адади қимати мутлақаш калонтар ададн қимати мутлақаш хурдтарро тарҳ кардан зарур аст. Дар ин маврид аломати сумма бо аломати ададн қимати мутлақаш калон якхела аст.

Мисоли 5. $9+(-12)=-3;\ 12+(-4)=+8;\ 105+(-95)=+10;$

$$|-3| = |-12| - |9|;\ |+8| = |12| - |+4|;\ |+10| = |105| - |-95|.$$

5. Дар вақти аз як адад, ададн дигарро тарҳ кардан аз қоидаи зерин истифода мебаранд: аз ададн калон, ададн хурдро тарҳ карда ба наздаш аломати ададн калонро мегузоранд.

Мисоли 6. $45-15=+30;\ 105-115=-10;\ 125-175=-50;$

$$75-87=-12;\ \ 95-65=+30;\ \ 91-89=+2.$$

6. Дар вақти ададн манфиро аз ададн манфии дигар тарҳ кардан аз қоидаи зерин истифода мебаранд: ба камшаванда ададн ба камкунанда муқобилро ҷамъ кардан кифоя аст.

Мисоли 7. $-55-(-15)=-55+15=-40;$

$$-40-(-30)=-40+30=-10.$$

7. Ҳосили зарби (тақсими) ду ададн манфӣ ададн мусбат мебошад. Барои ёфтани қимати мутлақи ҳосили зарб (тақсим) қимати мутлақи ин ададҳоро зарб (тақсим) кардан лозим аст.

Масалан: $(-a)\cdot(-b)=ab;\ \ (-a):(-b)=\frac{a}{b};$

$$|ab| = |-a|\cdot|-b|;\ \ \left|\frac{a}{b}\right| = |-a| : |-b|;\ b>0.$$

Мисоли 8. $(-5)\cdot(-7)=35;$ $\quad |35| = |-5|\cdot|-7|;$

$(-15)\cdot(-12)=180;$ $\quad |180| = |-15|\cdot|-12|;$

$(-44):(-4)=11;$ $\quad |11| = |-44| : |-4|;$

$(-169):(-13)=13;$ $\quad |13| = |-169| : |-13|.$

8. Ҳосили зарби (тақсими) ду ададн аломаташон гуногун ададн манфӣ мебошад. Барои ёфтани қимати мутлақи ҳосили зарб (тақсим) қимати мутлақи ин ададҳоро зарб (тақсим) кардан лозим аст.

Масалан: $(-a)\cdot b=-ab;\ a\cdot(-b)=-ab;\ (-a):b=-\frac{a}{b};$

$$|-ab|=|-a|\cdot|b|;\ |-ab|=|a|\cdot|-b|;\ \left|-\frac{a}{b}\right|=|-a|:|b|,\ b>0.$$

Мисоли 9. $(-12)\cdot 4=-48;(-72):36=-2;\ 24\cdot(-5)=-120;$

$$|-48|=|-12|\cdot|4|;\ |-2|=|-72|:|36|;\ |-120|=|24|\cdot|-5|.$$

Агар ифодаи арифметикӣ қавсҳо дошта бошад, он гоҳ аввал амалҳои дар қавсҳо буда иҷро карда мешаванд.

Мисоли 10. Ҳисоб кунед: $120+5\cdot(72-2\cdot(42-36))$.

1) $42-36=6;$ 2) $6\cdot 2=12;$ 3) $72-12=60;$

4) $60\cdot 5=300;$ 5) $120+300=420.$

Мисоли 11. Қавсҳоро кушода, қимати ифодаро ёбед:

$-4+8+(12-8)=-4+8+12-8=+8;$

$5+9-(10-21)=5+9-10+21=+25.$

Агар ҳангоми иҷро намудани амали зарб ё ки кушодани қавсҳо ҳамаи ҷамъшавандаҳо зарбкунандаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ аз (қоидаи) қонуни тақсимоти зарб истифода бурда, зарбшавандаи умумиро аз қавс бароварда, дар қавс суммаи коэффитсиентҳои ҳамаи ҷамъшавандаҳоро навиштан лозим аст.

Агар сумма ҷамъшавандаҳои монандро дошта бошад, он гоҳ аз қоидаи ислоҳ кардани ҷамъшавандаҳои монанд истифода мебаранд. Барои ислоҳ кардани ҷамъшавандаҳои монанд коэффитсиентҳои онҳоро ҷамъ карда, ба сумма қисми умумии ҳарфиро зарб кардан лозим аст.

МАШҚҲО

1. Ҷамъро иҷро кунед:

$(+5)+(+4)=$; $(-4)+(-7)=$;

$(+15)+(-7)=$; $(-12)+(+16)=$.

2. Дар ҳолати қиматҳои ададии зерин доштани ҳарфҳо дурустии баробарии $a+b=b+a$-ро санҷед:

$a=7,\ b=-4;\ a=-8,\ b=-6;$

$a=-5,\ b=3;\ a=1,\ b=0.$

3. Баробарии $a+b+c=a+(b+c)$ ҳангоми

$a=3,\ b=-5,\ \ c=-4;\ \ a=-7,\ b=5,\ \ c=-4;$

$a=-2,\ b=-5,\ \ c=-7$ ва $a=5,\ b=4,\ \ c=-5$

будан, санчида шавад.

4. Тарҳро ичро кунед:

$(+5)-(+3)=$; $\quad (+15)-(-12)=$;

$(-7)-(+4)=$; $\quad (-2)-(-7)=$;

$(+15)-(-4)=$; $\quad (-6)-(+6)-(-12)=$.

5. Амалҳоро ичро кунед:

$-23\cdot(-12)\cdot(-5)=$;

$6-((-3)+(-7))-((-1)-(-5)-(-8))=$;

$10-((-9)+(-1)-(-12))=$;

$(-4)-(-5)-((-8)-((-5)+(-2)-(-12)))=$.

6. Амалҳоро ичро кунед:

$(+20)\cdot(+4)=$; $\quad (-7)\cdot(-4)=$;

$(-40)\cdot(+3)=$; $\quad (+15)\cdot(-3)=$;

$(-4)\cdot(+38)\cdot(-24)=$; $\quad (-4)\cdot(-5)\cdot(-15)=$;

$(-12):(-4)+(-15):(+5)=$;

$((-4)-(-5)):(+3)=$;

$(-12):((-3)+(-15):(+3))=$;

$(-52):((-6)-(-19):(-2))=$.

§4. Ададҳои сода ва таркибӣ

Таърифи 1. *Адади натуралиро тақсимкунандаи адади* $a\in N$ *меноманд, агар он ба адади* a *бебақия тақсим шавад.*

Масалан: а) Адади 16, 5-то тақсимкунанда дорад:

$$\frac{16}{1};\ \frac{16}{2};\ \frac{16}{4};\ \frac{16}{8};\ \frac{16}{16}.$$

Дар ин чо 1; 2; 4; 8; 16 - тақсимкунандаҳои адади 16 мебошанд.

б) Адади 24, 8-то тақсимкунанда дорад:

$$\frac{24}{1};\ \frac{24}{2};\ \frac{24}{3};\ \frac{24}{4};\ \frac{24}{6};\ \frac{24}{8};\ \frac{24}{12};\ \frac{24}{24}.$$

Дар ин чо 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 - тақсимкунандаҳои адади 24 мебошанд.

Чи тавре, ки мебинем барои ҳар гуна адад, ки ба 1 баробар нест, воҳид ва худи адад тақсимкунандаи он мебошанд.

Таърифи 2. *Адади натуралие, ки фақат дорои ду тақсимкунанда: воҳид ва худи адад мебошад, адади сода номида мешавад.*

Таърифи 3. *Адади натуралие, ки аз дуто зиёд тақсимкунанда дорад, адади таркибӣ номида мешавад.*

Масалан, ададҳои 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16;.... мисолҳои ададҳои таркибӣ шуда метавонанд, чунки ин ададҳо аз дуто зиёд тақсимкунанда доранд, **масалан**, адади 12, 6-то ва адади 16 бошад, 5-то тақсимкунанда доранд.

Дар байни ададҳои натуралӣ ададе ҳаст, ки на ба адади сода ва на ба адади таркибӣ тааллуқ дорад. Ин адад 1 аст, чунки вай дорои як тақсимкунанда мебошад. Ҳамин тариқ, маҷмуи ададҳои натуралӣ аз воҳид, ададҳои сода ва таркибӣ иборатанд.

Дар ин ҷо се категорияи ададҳои натуралиро фарқ кардан лозим аст: ба категорияи якум танҳо воҳид, ба категорияи дуюм ададҳои сода ва ба категорияи сеюм ададҳои таркибӣ мансубанд.

Ба зарбкунандаҳои сода ҷудо кардани ададҳоро дида мебароем. Ҳар як адади таркибиро дар намуди ҳосили зарби ададҳои сода навиштан мумкин аст. Барои ин аломатҳои тақсимшавии ададҳоро донистан лозим аст.

Яке аз тарзҳои ба зарбкунандаҳои сода ҷудо кардани ададҳои таркибиро дида мебароем. Барои ин аз аломатҳои тақсимшавии ададҳо истифода бурда хурдтарин адади содаро меёбем. Баъд адади додашударо ба адади ёфташуда тақсим карда, хурдтарин тақсимкунандаи содаи ҳосили тақсими пайдошударо меёбем. Ин тақсимкуниро то дар ҳосили тақсим ҳосил шудани адади сода давом медиҳанд.

330	2
165	3
55	5
11	11
1	

Масалан, адади 330-ро ба зарбкунандаҳои сода ҷудо мекунем:

Инак, адади 330-ро дар намуди ҳосили зарби ҳамзарбҳои сода менависем: $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.

§5. Тақсимкунандаи умумӣ ва каратнокӣ

Бигзор ададҳои a; b; c; d;..... ададҳои натуралӣ бошанд.

Таърифи 1. *Агар ададҳои натуралии a; b; c; ..... ба адади натуралии d бутун тақсим шаванд, он гоҳ адади d*

тақсимкунандаи умумӣ номида мешавад. Дар байни онҳо калонтаринашро калонтарин тақсимкунандаи умумии адад меноманд ва мухтасар (КТУ) менависанд.

Агар *КТУ* -и ададҳои *a*; *b*; *c*; ..... ба 1 баробар бошад, пас ин ададҳоро байни худ сода меноманд. **Масалан**, ададҳои 48 ва 36 ба 2; 3; 4; 6 ва 12 тақсим мешаванд. Ҳамаи ин ададҳо тақсимкунандаи умумии ададҳои 48 ва 36 мебошанд. Адади 12, калонтаринаш тақсимкунандаи умумии онҳост, яъне $КТУ(48;36)=12$. Ададҳои 49 ва 35 ба 7 тақсим мешаванд, бинобар ин $КТУ(49;35)=7$. Адади 35 ба 5 ва 7, адади 24 бошад, ба 8 ва 3 тақсим мешаванд, пас $КТУ(35;24)=1$ аст, чунки ададҳои 35 ва 24 байни худ сода мебошанд.

Таърифи 2. *Каратноки адади a гуфта, чунин адади натуралии k -ро меноманд, ки вай ба адади a бутун (бебақия) тақсим шавад.*

Ҳар гуна адади натуралие, ки ба ҳар яки ададҳои натуралии *a*; *b*; *c*; ..... бутун (бебақия) тақсим мешавад, каратноки умумии ин ададҳо номида мешавад. Дар байни онҳо аз ҳама хурдтаринашро хурдтарин каратноки умумии ададҳои додашуда меноманд ва мухтасар *ХКУ* менависанд.

Мисол. *ХКУ* -и ададҳои 72 ва 60 ёфта шавад.

Ҳал. Азбаски $72=8\cdot 9=2^3\cdot 3^2$ ва $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ мебошанд, бинобар ин *ХКУ* -и ададҳои 72 ва 60 ба $2^3\cdot 3^2\cdot 5=8\cdot 9\cdot 5=360$ ё ки ХКУ(60; 72) = 360 баробар аст.

§6. Аломатҳои тақсимшавӣ ба 2, 5, 10, 3 ва 9

Дар бисёр ҳолатҳо тақсимро ичро накарда, як адад ба адади дигар бутун (бебақия) тақсим шуданашро муайян кардан лозим меояд. **Масалан**, саволе ба миён меояд, ки адади 156 ба адади 3 бутун тақсим мешавад ё не? Барои ба ин савол ҷавоб додан, адади 156-ро ба адади 3 тақсим кардан лозим аст, вале ин тарзи кор он қадар қулай нест. Барои амали тақсимро ичро накарда, ба адади бутун тақсим шудан ё нашудани ин ду ададро фаҳмидан, бояд чунин нишонаҳои ададҳоро, ки дар бораи тақсимшавандагии ададҳо маълумот медиҳанд, дида бароем.

Таърифи 1. *Ба адади 2 (ё ки ба 5) фақат ва фақат он ададҳое тақсим мешаванд, ки воҳидашон ба 2 (ё ки мувофиқан ба*

5) тақсим шавад ё ки нол бошад. **Масалан**, *ададҳои 120, 720, 1120 ба ададҳои 2 ва 5 тақсим мешаванд, чунки онҳо бо нол тамом шудаанд.*

Таърифи 2. *Ба ададн 4 фақат ва фақат он ададҳое тақсим мешаванд, ки ду рақами охиринашон нол бошад, ё ки ба 4 тақсим шавад.* **Масалан**, *ададҳои 212, 712, 936, 1032, 700, 1200 ва дигарҳо ба ададн 4 тақсим мешаванд, чунки ду рақами ин ададҳо ба 4 тақсим мешавад, ё ноланд.*

Таърифи 3. *ба ададн 3 (ва ё ба 9) фақат ва фақат он ададҳое тақсим мешаванд, ки суммаи рақамҳояшон ба 3 (ё ки мувофиқан ба 9) тақсим шаванд. Масалан, ададҳои 135, 378, 856, 999, 2016 ва дигарҳо ба ададҳои 3 ва 9 тақсим мешаванд, чунки суммаи рақамҳои онҳо ба ададн 3 ва ҳам ба ададн 9 тақсим мешавад.*

Таърифи 4. *Қимати миёнаи якчанд ададн натуралӣ (ё ки миёнаи арифметикии якчанд адад) гуфта, ҳосили тақсимеро меноманд, ки он дар натиҷаи суммаи ин ададҳоро ба миқдори онҳо тақсим кардан ҳосил шудааст.*

Масалан, ададҳои a, b, c ва d - ададҳои натуралӣ бошанд, он гоҳ қимати миёнаи арифметикии ин чор адад ба $\frac{a+b+c+d}{4}$ баробар аст.

§7. Касрҳои одӣ

Мо хосиятҳои ададҳои бутун ва бо онҳо иҷро намудани амалҳоро дида баромадем. Ғайр аз ададҳои бутун боз ададҳои касрӣ ҳам ҳастанд, ки мо дар ин параграф бо онҳо шинос мешавем. Чӣ хеле ки дар боло (§3) муоина кардем, натиҷаи ченкунӣ гуногун шуда метавонад. Ин натиҷа ададҳои бутун ва ҳам ададҳои касрӣ шуданаш мумкин аст.

Ададн аз як ё якчанд ҳиссаҳои баробари воҳид тартиб додашударо каср меноманд. Мафҳуми дигари пайдошавии касрҳо ин амали тақсим мебошад.

Бигузор $a \in Z$ ва $b \in Z$, $b \neq 0$ бошанд. Натиҷаи тақсимоти ду ададн бутуни a ва b-ро дар намуди $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ навиштан мумкин аст.

Таърифи 1. *Ададн намуди* $\frac{a}{b}$, *ки* $a \in Z$, $b \in Z$, $b \neq 0$ *аст, касри одӣ номида мешавад. Дар ин ҷо* a*-ро сурат ва* b*-ро махраҷи*

каср меноманд. Муқоисакунии касрҳои одиро аз рӯи нишонаҳои зерин мушоҳида кардан мумкин аст.

Агар a, b, c, d - ададҳои бутуни ғайринолӣ бошанд, он гоҳ:

а) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ мешавад, агар $a\cdot d=b\cdot c$ бошад;

б) $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ мешавад, агар $b\cdot d\ (a\cdot d-b\cdot c)>0$ бошад;

в) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ мешавад, агар $b\cdot d\ (a\cdot d-b\cdot c)<0$ бошад.

Таърифи 2. *Агар сурат ва махраҷи касрро ба ҳамон як ададӣ натуралӣ зарб ё тақсим кунем, он гоҳ касри ба касри додашуда баробарро ҳосил мекунем:*

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m};\ \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m},\ m\in N$$

Мисоли 1. $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}$ ё ки $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Мувофиқи таъриф баробарии касрҳоро месанҷем:

$3\cdot 8=4\cdot 6;\ 24=24.$

Мисоли 2. $\frac{24}{36}=\frac{24:12}{36:12}$ ё ки $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$.

Дар ин ҷо ҳам баробарии касрҳоро дар асоси таъриф месанҷем: $24\cdot 3=36\cdot 2;\ 72=72.$

Пас, касрҳои додашуда баробаранд.

Агар сурат ва махраҷи каср зарбкунандаи умумӣ дошта бошанд, он гоҳ барои соқит кардани ин зарбкунанда аз қоидаи ихтисори касрҳо истифода мебаранд, ки вай чунин аст.

Таърифи 3. *Тарзи ба як адад тақсим намудани сурату махраҷи каср, яъне ба касри аз ҷиҳати бузургӣ ба касри аввала баробар, вале аъзоҳояш хурд иваз кардани он, ихтисори каср номида мешавад.*

Мисоли 3. Касри $\frac{14}{21}$-ро ихтисор намуда, касри $\frac{2}{3}$-ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{14}{21}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}$ аст.

Мисоли 4. Касри $\frac{90}{105}$-ро ихтисор намуда, касри $\frac{6}{7}$-ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{90}{105}=\frac{15\cdot 6}{15\cdot 7}=\frac{3\cdot 5\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{6}{7}$ мебошад.

Мисоли 5. Касри $\frac{240}{560}$-ро ихтисор намуда, касри $\frac{3}{7}$-ро ҳосил мекунем, чунки $\frac{240}{560}=\frac{16\cdot 3\cdot 5}{16\cdot 5\cdot 7}=\frac{2^4\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 5\cdot 7}=\frac{3}{7}$ мебошад.

Аз тарафи дигар касрҳо гуногун шуда метавонанд: касрҳои дуруст, касрҳои нодуруст ва омехта (ададҳои омехта).

Таърифи 4. *Касри* $\frac{a}{b}$ $(a\in N,\ b\in N,\ b\neq 0)$ *касри дуруст номида мешавад, агар* $a<b$ *бошад ва касри нодуруст номида мешавад, агар* $a>b$ *бошад*. Масалан, касрҳои

$$\frac{3}{5};\ \frac{11}{15};\ \frac{24}{25};\ \frac{71}{85};\ \frac{100}{103};\ \frac{109}{110};\ \dots$$

мисолҳои касри дуруст шуда метавонанд, лекин касрҳои

$$\frac{5}{3};\ \frac{7}{5};\ \frac{21}{14};\ \frac{55}{45};\ \frac{100}{95};\ \frac{300}{245};\dots$$

мисоли касри нодурустанд.

Таърифи 5. *Ададҳое, ки ба таркибашон ададн бутун ва каср дохиланд, ададҳои омехта номида мешаванд. Масалан, касри* $\frac{19}{10}$ *аз як ададн бутун ва касри дурусти* $\frac{9}{10}$ *иборат аст, яъне ададн* $1\frac{9}{10}$ *мебошад.*

Дар натиҷа ададе пайдо шуд, ки вай ададн омехта аст. Аз навиштн ададҳои омехта истифода бурда, ҳамаи касрҳои нодурустро дар намуди ададҳои омехта навиштан мумкин аст.

Масалан, касрҳои нодурусти $\frac{5}{3};\frac{7}{5};\frac{21}{14};\frac{55}{45};\frac{100}{95};\frac{300}{245};\dots$-ро дар намуди ададҳои омехтаи $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3};\ \frac{7}{5}=1\frac{2}{5};\ \frac{21}{14}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2};\ \frac{55}{45}=\frac{11}{9}=1\frac{2}{9};$,

$\frac{100}{95}=\frac{20}{19}=1\frac{1}{19};\quad \frac{300}{245}=\frac{60}{49}=1\frac{11}{49};\dots$ навиштан мумкин аст, чунки

$$1\frac{2}{3}=\frac{5}{3};\ 1\frac{2}{5}=\frac{7}{5};\ 1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{21}{14};$$

$$1\frac{2}{9}=\frac{11}{9}=\frac{11\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{55}{45};$$

$$1\frac{1}{19}=\frac{20}{19}=\frac{20\cdot 5}{19\cdot 5}=\frac{100}{95};$$

$$1\frac{11}{49}=\frac{60}{49}=\frac{60\cdot 5}{49\cdot 5}=\frac{300}{245}$$

мебошанд.

§8. Амалҳои арифметикӣ бо касрҳои одӣ

А. Амалҳои ҷамъ ва тарҳи ададҳои касрӣ ба амалҳои ҷамъ ва тарҳи ададҳои бутун бисёр монанданд. Хосиятҳои гуногуне, ки онҳоро барои ададҳои бутун дида баромада будем, барои касрҳо ҳам дурустанд.

Ҳангоми ичро намудани амалҳои ҷамъ (тарҳ) мо се мавридро пай дар пай дида мебароем:

1. **Ҷамъи (тарҳи) касрҳои махраҷашон якхела**

Қоидаи 1. *Барои ҷамъ (тарҳ) кардани касрҳои махраҷашон якхела суратҳои онҳоро ҷамъ (тарҳ) карда, махраҷашонро бетағйир навиштан лозим аст.* Масалан:

а) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$, $b \neq 0$; б) $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{8}{7}$;

в) $\frac{7}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7+5}{3} = \frac{12}{3} = 4$.

2. **Ҷамъи (тарҳи) касрҳои махраҷашон гуногун**

Қоидаи 2. *Барои ҷамъ (тарҳ) кардани ду касри махраҷашон гуногун, аввал хурдтарин каратии умумиаш (ХКУ)-ро ёфта ва баъд ба махраҷи умумӣ овардан лозим аст.* Масалан:

а) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$;

б) $\frac{3}{4} + \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 7 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15 + 28}{20} = \frac{43}{20}$.

Қоидаи 3. *Барои ҷамъ (тарҳ) намудани касрҳои махраҷашон гуногун, аз қоидаи ба махраҷи якхела овардан истифода мебаранд:*

а) сурат ва махраҷи касри якумро ба махраҷи касри дуюм зарб кардан лозим аст;

б) сурат ва махраҷи касри дуюмро ба махраҷи касри якум зарб кардан лозим аст;

в) касрҳои ҳосилшудаи махраҷаш якхеларо ҷамъ (тарҳ) кардан лозим аст.

Масалан:

а) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$;

б) $\frac{12}{13} + \frac{3}{7} = \frac{12 \cdot 7}{13 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 13} = \frac{12 \cdot 7 + 3 \cdot 13}{13 \cdot 7} = \frac{84 + 39}{91} = \frac{123}{91}$;

в) $\frac{12}{15} - \frac{3}{7} = \frac{12 \cdot 7}{15 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 15} = \frac{12 \cdot 7 - 3 \cdot 15}{15 \cdot 7} = \frac{84 - 45}{105} = \frac{39}{105} = \frac{13}{35}$.

3. **Ҷамъи касрҳои омехта**

Қоидаи 4. *Ҷамъи касрҳои омехтаро дар ду намуд иҷро намудан мумкин аст:*

1. Аввал қисмҳои касрии ададҳоро ба махраҷи умумӣ оварда, баъд ададҳои бутун ва касрҳоро дар алоҳидагӣ ҷамъ кардан мумкин аст. **Масалан**:

а) $3\frac{1}{2}+4\frac{1}{3}=3\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+4\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=3\frac{3}{6}+4\frac{2}{6}=7+\frac{3+2}{6}=7\frac{5}{6}$;

б) $4\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}=4\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+3\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=4\frac{3}{6}+3\frac{2}{6}=7+\frac{3+2}{6}=7\frac{5}{6}$;

в) $5\frac{1}{6}+4\frac{5}{6}=9+\frac{1+5}{6}=9+\frac{6}{6}=9+1=10$.

2. Ададҳои *омехтаро ба намуди касри нодуруст оварда ва баъд касрҳои ҳосилшударо ба махраҷи умумӣ оварда, ҷамъ намудан мумкин аст.* **Масалан**:

а) $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 2+1}{2}+\frac{3\cdot 3+1}{3}=\frac{5}{2}+\frac{10}{3}=\frac{5\cdot 3+10\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{15+20}{6}=\frac{35}{6}$;

б) $3\frac{1}{4}+2\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 4+1}{4}+\frac{2\cdot 5+1}{5}=\frac{13}{4}+\frac{11}{5}=\frac{13\cdot 5+11\cdot 4}{4\cdot 5}=\frac{65+44}{20}=\frac{109}{20}$;

в) $4\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}=\frac{13}{3}+\frac{8}{3}=\frac{13+8}{3}=\frac{21}{3}=7$.

4. Ҷамъи касрҳои махраҷашон каратӣ

Қоидаи 5. *Барои касрҳои махраҷашон каратиро ҷамъ кардан онҳоро ба махраҷи умумӣ меоваранд. Махраҷи умумӣ адади калонтарини дар махраҷҳо буда мебошад.* Масалан:

а) $\frac{3}{16}+\frac{5}{8}=\frac{3+5\cdot 2}{16}=\frac{3+10}{16}=\frac{13}{16}$;

б) $\frac{7}{3}+\frac{11}{27}=\frac{7\cdot 9+11}{27}=\frac{63+11}{27}=\frac{74}{27}$;

в) $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{9}=2\frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}+3\frac{1}{9}=2\frac{3}{9}+3\frac{1}{9}=5\frac{3+1}{9}=5\frac{4}{9}$;

г) $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{9}=\frac{2\cdot 3+1}{3}+\frac{3\cdot 9+1}{9}=\frac{7}{3}+\frac{28}{9}=$

$=\frac{7\cdot 3+28}{9}=\frac{21+28}{9}=\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}$.

Амали тарҳи касрҳоро, айнан ба монанди амали ҷамъи касрҳо иҷро намудан мумкин аст. Умуман, дар хотир доштан лозим аст, ки барои ҷамъ (тарҳ) кардани ду ё якчанд касрҳо онҳоро ба махраҷи умумӣ оварда, баъд ҷамъ (тарҳ) намудан мумкин аст.

Б. Амалҳои зарб ва тақсими ададҳои касриро дида мебароем.

1. Зарби ададн бутун ба каср

Қоидаи 1. *Барои ададн бутунро ба каср зарб задан, аввал ададн бутунро ба сурати каср зарб зада,онро дар сурати каср ва махраҷи касри маълумро дар махраҷ навиштан лозим аст,* яъне

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c},\ c \neq 0.$$

Масалан: а) $5 \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$;

б) $\frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

2. Зарби каср ба каср

Қоидаи 2. *Ҳосили зарби ду каср ба касре баробар аст, ки сурати он ба ҳосили зарби сурати касрҳо ва махраҷи он ба ҳосили зарби махраҷи касрҳои додашуда баробар аст,* яъне

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},\ b \neq 0,\ d \neq 0.$$

Масалан: а) $\frac{7}{16} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{16 \cdot 5} = \frac{21}{80}$;

б) $\frac{15}{11} \cdot \frac{18}{7} = \frac{15 \cdot 18}{11 \cdot 7} = \frac{270}{77}$.

3. Зарби касрҳои омехта

Қоидаи 3. *Барои зарб кардани ададҳои омехта, аввал онҳоро ба касри нодуруст гардонида, баъд мувофиқи қоидаи 2 зарби касрҳоро ичро намудан мумкин аст.*

Масалан: а) $3\frac{5}{7} \cdot 4\frac{2}{5} = \frac{26}{7} \cdot \frac{22}{5} = \frac{26 \cdot 22}{7 \cdot 5} = \frac{572}{35}$;

б) $4\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{23}{5} \cdot 4 = \frac{23 \cdot 4}{5} = \frac{92}{5} = 18\frac{2}{5}$;

в) $4\frac{3}{5} \cdot 4 = \left(4 + \frac{3}{5}\right) 4 = 4 \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 4 = 16 + \frac{3 \cdot 4}{5} =$

$$= 16 + \frac{12}{5} = 16 + 2\frac{2}{5} = 18\frac{2}{5}.$$

Ҳангоми ичро намудани тақсими касрҳо бояд қоидаҳои тақсимкунии зеринро ба хотир овард:

1. **тақсими ададн бутун ба каср;**
2. **тақсими ададн касрӣ ба ададн бутун;**
3. **тақсими каср ба каср;**
4. **тақсими ададҳои омехта.**

Қоидаи 1. *Барои адади бутунро ба каср тақсим кардан, ин адади бутунро ба махраҷи каср зарб зада ҳосили зарби ҳосилиударо ба сурати касри додашуда тақсим кардан лозим аст,* яъне,

$$a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{a\cdot c}{b},\ c\neq 0,\ b\neq 0.$$

Масалан: а) $7:\frac{13}{14}=7\cdot\frac{14}{13}=\frac{7\cdot 14}{13}=\frac{98}{13}$;

б) $5:\frac{15}{16}=5\cdot\frac{16}{15}=\frac{5\cdot 16}{15}=\frac{1\cdot 16}{3}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$.

Қоидаи 2. *Барои касрро ба адади бутун тақсим кардан, касрро ба адади чаппаи адади бутун зарб зада, баъд дар асоси қоидаи зарби касрҳо, зарброро ичро намудан мумкин аст,* яъне

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot c}=\frac{a}{bc},\ b\neq 0,\ c\neq 0.$$

Масалан: а) $\frac{17}{18}:34=\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{34}=\frac{17\cdot 1}{18\cdot 34}=\frac{1\cdot 1}{18\cdot 2}=\frac{1}{36}$;

б) $\frac{5}{7}:11=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{11}=\frac{5\cdot 1}{7\cdot 11}=\frac{5}{77}$.

Қоидаи 3. *Барои як касрро ба касри дигар тақсим намудан, тақсимшавандаро ба адади тақсимкунанда чаппа зарб кардан лозим аст,* яъне,

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c},\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0.$$

Масалан: а) $\frac{11}{13}:\frac{17}{19}=\frac{11}{13}\cdot\frac{19}{17}=\frac{11\cdot 19}{13\cdot 17}=\frac{209}{221}$;

б) $\frac{21}{25}:\frac{84}{105}=\frac{21}{25}\cdot\frac{105}{84}=\frac{21\cdot 105}{25\cdot 84}=\frac{1\cdot 21}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}$.

Қоидаи 4. *Барои як адади омехтаро ба касри омехтаи дигар тақсим кардан, аввал ададҳои омехтаро ба касрҳои нодуруст гардонда, баъд касрҳои ҳосилшударо мувофиқи қоидаи тақсими касрҳо тақсим намудан лозим аст.*

Масалан: а) $3\frac{1}{7}:2\frac{1}{5}=\frac{22}{7}:\frac{11}{5}=\frac{22}{7}\cdot\frac{5}{11}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 1}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$;

б) $2\frac{1}{11}:3\frac{1}{33}=\frac{23}{11}:\frac{100}{33}=\frac{23}{11}\cdot\frac{33}{100}=\frac{23\cdot 3}{1\cdot 100}=\frac{69}{100}$.

Умуман, ҳангоми ичро намудани амалҳои зарб ва тақсим аз қонунҳои зарб

$$(a\pm b)\cdot c=a\cdot c\pm b\cdot c$$

ва ҳам аз қонунҳои тақсим

$$(a\pm b):c=a:c\pm b:c$$

истифода мебаранд. Ин қонунҳо ҳангоми сода кардани ифодаҳои арифметикӣ ва ёфтани қиматҳои онҳо истифода бурда мешаванд.

Масалан: а) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\cdot 3=\frac{3}{4}\cdot 3+\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{9}{4}+\frac{6}{5}=\frac{45+24}{20}=\frac{69}{20}$;

б) $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right)\cdot 4=\frac{3}{5}\cdot 4-\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{12}{5}-\frac{8}{3}=\frac{36-40}{15}=-\frac{4}{15}$;

в) $\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{7}\right):2=\frac{4}{5}:2+\frac{3}{7}:2=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{10}+\frac{3}{14}=$

$=\frac{4\cdot 14+3\cdot 10}{14\cdot 10}=\frac{56+30}{140}=\frac{86}{140}=\frac{43}{70}$;

г) $\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{7}\right):2=\frac{4}{5}:2+\frac{3}{7}:2=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{10}+\frac{3}{14}$.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\frac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}\right):4-\frac{3}{4}}:62\cdot$

Ҳал. Аз тартиби иҷрои амалҳо истифода бурда, ифодаи додашударо ҳисоб мекунем:

1) $45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}=45\frac{10\cdot 84}{63\cdot 84}-44\frac{25\cdot 63}{84\cdot 63}=1\frac{10\cdot 84-25\cdot 63}{63\cdot 84}=$

$=1\frac{840-1575}{63\cdot 84}=1+\frac{840-1575}{5292}=\frac{4557}{5292}$;

2) $2\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}=2\frac{2}{6}-1\frac{1}{6}=1\frac{2-1}{6}=1\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$;

3) $\frac{7}{6}:4=\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7\cdot 1}{6\cdot 4}=\frac{7}{24}$;

4) $\frac{7}{24}-\frac{3}{4}=\frac{7}{24}-\frac{3\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{7}{24}-\frac{18}{24}=\frac{7-18}{24}=-\frac{11}{24}$;

5) $\frac{4557}{5292}:\left(-\frac{11}{24}\right)=-\frac{1519}{21\cdot 84}:\frac{11}{24}=-\frac{217}{21\cdot 12}:\frac{11}{24}=-\frac{31}{36}\cdot\frac{24}{11}=\frac{31\cdot 2}{3\cdot 11}=-\frac{62}{33}$;

6) $-\frac{62}{33}:62=-\frac{62}{33}\cdot\frac{1}{62}=-\frac{62\cdot 1}{33\cdot 62}=-\frac{1}{33}$.

Ҷавоб: $-\frac{1}{33}$.

§9. Касрҳои даҳӣ

Касрҳоеро, ки махраҷашон ба 10 каратнок аст, касрҳои даҳӣ меноманд.

Масалан, касрҳои $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{100}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{5}{1000}$; $\frac{7}{1000}$; ... **мисоли касрҳои даҳӣ шуда метавонанд.**

Касрҳои намуди $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, ки дар боло мо муоина кардем, касрҳои одӣ буданд. Агар дар касрҳои одии намуди $\frac{a}{b}, b = 10^n, n \in N$ бошад, он гоҳ касри $\frac{a}{10^n}(n \in N)$ -ро касри даҳӣ меноманд. Дар ин ҷо ҳангоми $a \neq 0$ ва $n \in N$ будан, мо навишта метавонем:

$$\frac{a}{10} = 0,a; \ \frac{a}{10^2} = \frac{a}{100} = 0,0a; \ldots$$

Аз тарафи дигар ҳангоми $a = 0$ ва $n \in N$ будан

$$\frac{0}{10} = \frac{0}{10^2} = \frac{0}{10^3} = \ldots = \frac{0}{10^n} = 0$$ мебошад.

Касри даҳии дилхоҳро дар намуди суммаи зерин тасвир карда, навишта метавонем:

$$a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_n}{10^n}, \qquad (1)$$

дар ин ҷо $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_m$, $b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n$ -рақамҳо мебошанд.

Масалан: $\frac{3}{10} = 0 + \frac{3}{10}; \ \frac{27}{10} = 2\frac{7}{10} = 2 + \frac{7}{10}; \ \frac{31}{10} = 3\frac{1}{10} = 3 + \frac{1}{10};$

$$\frac{3219}{10^2} = \frac{3219}{100} = 3 \cdot 10 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2};$$

$$23\frac{568}{1000} = 2 \cdot 10 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{8}{10^3}.$$

Агар дар (1) ҳамаи $a_m; a_{m-1}; \ldots; a_1; a_0$-ҳо ба нол баробар бошанд, он гоҳ қисми

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots + \frac{b_n}{10^n}, \quad n \in N$$

касри даҳии дурустро тасвир мекунад, вагарна (1) адади омехта аст.

Агар дар (1) ҳаман $b_1; b_2; b_3; b_4; \ldots; b_n$ ба нол баробар бошанд, он гоҳ қисми

$$a_m; a_{m-1}; a_{m-2}; \ldots; a_1; a_0; \quad m \in N$$

албатта адади бутунро ифода мекунад. Бинобар ин чунин навишта метавонем:

$$23\frac{568}{1000} = 23,568; \ \frac{15}{1000} = 0,015; \ \frac{345}{1000} = 0,345.$$

Умуман, дар карсҳои даҳӣ рақамҳои пеш аз вергул истодаро қисми бутуни каср ва рақамҳои дар тарафи рости вергул

истодаро қисми касрӣ (ё ки аломатҳои даҳӣ) меноманд. Дар хотир доштан лозим аст, ки ҳангоми навиштани касрҳои даҳӣ нол аҳамияти калон дорад. **Масалан:**

0,65; 0,065; 0,605; 0,0065; …

5 = 5,0; 75 = 75,0; 29 = 29,0; …

1 = 1,0; 2,3 = 2,30; 2,3 = 2,300; 2,3 = 2,3000; …

Агар мо нолро дар тарафи чапи касри даҳӣ нависем, он гоҳ вай ҳеҷ як қисмате надорад. **Масалан:**

07,2 = 7,2; 0062,5 = 62,5; 0605 = 605;

013,5 = 13,5; 0145,75 = 145,75; 0140,05 = 140,05.

Партофта навиштани нолҳои тарафи рости касри даҳиро, ихтисоркунӣ ҳам меноманд. **Масалан:**

$3\frac{30}{100} = 3\frac{3}{10}$; $4\frac{150}{1000} = 4\frac{15}{100} = 4\frac{3}{20}$; …

§10. Муқоисаи касрҳо. Аз касри даҳӣ ба касри одӣ гузаштан

А. Ҳангоми истифодаи касрҳои даҳӣ байни ҳамдигар муқоисакунии ададҳои бутун фарқ кунад ҳам, аммо ба муқоисакунии касрҳои одӣ монанд мебошад. Ҳангоми муқоисакунии касрҳои одӣ ва ҳам касрҳои даҳӣ усули ба махраҷи умумӣ овардан истифода бурда мешавад. *Агар қисми касрии касри даҳӣ кам бошад, он гоҳ вайро бо нол илова карда, навиштан мумкин аст.*

Масалан, касрҳои даҳии 4,5 ва 2,7; 0,34 ва 0,297-ро муқоиса мекунем.

а) Касрҳои 4,5 ва 2,7-ро аз рӯи бузургияшон муқоиса мекунем. Касрҳои додашуда қисмҳои якхелаи касрӣ доранд, яъне дар тарафи рости вергул дорои яктогӣ рақаманд. Лекин ададҳои пеш аз вергул буда, ададҳои 4 ва 2 мебошанд. Бинобар ҳамин касри якум 4,5 аз касри дуюм 2,7 калон аст, яъне $4,5 > 2,7$ мебошад.

б) Касрҳои 0,34 ва 0, 297-ро аз рӯи бузургиашон муқоиса мекунем. Қисми касрии ин касрҳо дорои рақамҳои баробар нестанд, чунки касри якум баъд аз вергул дуто рақам дорад, аммо касри дуюм бошад, баъд аз вергул сето рақам дорад. *Ана барои ҳамин ҳам онҳоро ба махраҷи умумӣ овардан, ба касри якум нол илова карда, 0,340 менависем.* Акнун ҳардуи онҳо пас аз вергул сетогӣ рақам доранд, яъне дорои махраҷҳои якхеланд, ки он 1000 аст. Азбаски махраҷашон баробаранд, пас сураташонро муқоиса карда, гуфта метавонем, ки касри якум аз касри дуюмаш калон аст, яъне $0,34 > 0,297$ ё $0,340 > 0,297$ мебошад.

Аз гуфтаҳои болоӣ истифода карда, аз ҳамдигар калон ё хурд будани касрҳои даҳиро дар намуди умумӣ ин тавр баён мекунанд.

1. Агар рақамҳои касрҳои даҳӣ якхела буда, нисбат ба вергул ҷойҳои якхеларо ишғол кунанд (ба ғайр аз нолҳое, ки пас аз ададҳои охирини қиматнок истодаанд), ин касрҳо бо ҳам баробаранд. **Масалан:** 4,25=4,25.

2. Аз ду касри даҳии додашуда ҳамонаш калон мебошад, ки агар қисми бутуни он калон бошад, ё агар қисми бутунашон баробар бошанду қисми касрии даҳиаш калон бошад ва ё агар дар ҳолати қисми касри даҳиаш баробар будан, бояд қисми касрии садиаш калон бошад. **Масалан:**

$3{,}25 > 2{,}75$ чунки $3 > 2$,

$3{,}27 > 3{,}19$ чунки $2 > 1$,

$3{,}27 > 3{,}26$ чунки $7 > 6$ мебошад.

Б. Агар касри даҳиро ба шакли касри одӣ навиштани шавем, бояд дар касри даҳии додашуда вергулро партофта, ададди ҳосилшударо ҳамчун сурати касри одӣ қабул карда, ба махраҷаш бошад, ҳамон қисмҳои воҳидро, ки он нишондиҳандаи ададди 10 аст, навиштан лозим аст. **Масалан:**

$$0{,}25 = \frac{25}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}; \qquad 0{,}025 = \frac{25}{10^3} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40};$$

$$2{,}35 = 2\frac{35}{10^2} = 2\frac{35}{100} = 2\frac{7}{20}; \quad 3{,}05 = 3\frac{05}{10^2} = 3\frac{05}{100} = 3\frac{1}{20}.$$

Дар ин ҷо чунин баробариҳо дурустанд:

$$0{,}25 = \frac{25}{100}; \; 0{,}025 = \frac{25}{1000}; \; 235 = \frac{235}{100} = \frac{47}{20}.$$

§11. Амалҳо бо касрҳои даҳӣ

Касрҳои даҳӣ ҳам монанди ададҳои бутун ҷамъ карда мешаванд. Ҳангоми ҷамъ намудан ҷамъшавандаҳоро чунон менависем, ки разрядҳои якхелаи ҳамаи ҷамъшавандаҳо дар зери ҳамдигар ҷой гирифта бошанд. **Масалан**:

$$\begin{array}{r} 0{,}9742 \\ +\;\; 0{,}7234 \\ \hline 1{,}6976 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}125 \\ +\;\; 0{,}45 \\ \hline 3{,}575 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}25 \\ +\;\; 14{,}079 \\ \hline 21{,}329 \end{array}$$

Касрҳои даҳӣ ба монанди ададҳои бутун тарҳ карда мешаванд. Ҳангоми тарҳ кардан, ба навишти камшаванда ва камкунанда аҳамият додан лозим аст. Камкунандаро ба зери

камшаванда менависанд, ки разрядҳои якхелаи онҳо дар зери ҳамдигар ҷой гирифта бошанд. **Масалан:**

$$\begin{array}{rrr} 0{,}975 & 3{,}9057 & 4{,}250 \\ -\ 0{,}794 & -\ 2{,}994 & -\ 3{,}248 \\ \hline 0{,}181 & 0{,}9117 & 1{,}002 \end{array}$$

Акнун зарб ва тақсими касрҳои даҳиро дида мебароем. Оид ба зарб ва тақсими касрҳои даҳӣ якчанд мисолҳоро дида мебароем:

Мисоли 1. $2{,}3 \cdot 1{,}5 =$

Ҳал. а) Ин ду ададро ҳамчун зарби ду адади бутун дида мебароем:

б) Аз рӯи шумораи рақамҳои баъд аз вергул истодаи зарбшавандаҳо мо рақамҳои қисми касрии ҳосили зарбро муайян мекунем, яъне дар ҳосили зарб аз рост сар карда, ҳамон миқдор рақамҳоро ҷудо карда, вергул мегузорем.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 15 \\ \hline 115 \\ +\ 23 \\ \hline 345 \end{array}$$

Азбаски дар мисоли мо баъд аз вергул дуто рақам мавҷуд аст, пас дар ҳосили зарб аз рост сар карда, ду рақамро ҷудо карда, вергул мегузорем, яъне 3,45. Умуман, ҳосили зарби $2{,}3 \cdot 1{,}5 = 3{,}45$ баробар аст, ба:

Қоидаи зарби касрҳои даҳиро ин тавр баён мекунанд:

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \\ \times\ 1{,}5 \\ \hline 115 \\ \times\ 23 \\ \hline 3{,}45 \end{array}$$

Барои зарб кардани касрҳои даҳӣ вергулҳои онҳоро партофта, ҳамчун ададҳои бутун зарб мекунанд. Дар ҳосили зарб аз тарафи рост сар карда, ба миқдори рақамҳои пас аз вергул истодаи зарбшавандаю зарбкунанда рақамҳоро ҷудо карда, вергул мегузоранд. Ин вергул қисми бутун ва қисми касрии ҳосили зарбро ҷудо мекунад.

Ду касри даҳӣ монанди ду адади бутун тақсим карда мешавад. Дар ин ҷо мо ду қоидаи тақсим, қоидаи тақсими касри даҳӣ ба адади бутун ва ҳам қоидаи тақсими касри даҳӣ ба касри даҳиро дида мебароем.

Қоидаи 1. *Барои касри даҳиро ба адади натуралӣ тақсим намудан, қоидаҳои зеринро риоя кардан лозим аст:*

а) аввал қисми бутуни касрро ба адади натуралии додашуда тақсим кардан лозим аст;

б) баъд аз тақсими адади бутун вергул гузоштан лозим аст;

в) пас, тақсими адади дар натиҷаи илова намудан ба бақия разряди оянда ҳосилшударо ичро намудан лозим аст. **Масалан**:

а) 16,45 : 7 =

Ҳ а л.

б) 14,82 : 13 =

16,45 | 7
−14 | 2,35
024
− 21
035
−35
0

14,82 | 13
−13 | 1,14
018
− 13
052
−52
0

Қ о и д а и 2. *Барои ягон ададро ба касри даҳӣ тақсим намудан, вергули тақсимкунандаро партофта, тақсимкунандаро чанд карат зиёд карда бошем, тақсимшавандаро низ ҳамон қадар зиёд карда, тақсимро мувофиқи қоидаи тақсими ададҳои бутун иҷро кардан лозим аст.* **Масалан:**

1) 4 : 0,0125 = 40000 : 125 =

40000 | 125
−375 | 320
0250
− 250
000

2) 4,551 : 1,23 = 4551 : 1230 =

4551 | 1230
−3690 | 3,7
08610
− 8610
000

3) 0,25 : 4 = 25 : 400 =

2500 | 400
−2400 | 0,0625
01000
− 800
2000
− 2000
000

4) 743,6 : 1,43 = 74360 : 143 =

74360 | 143
−715 | 520
0286
− 286
000

Касрҳои даҳие, ки пас аз вергул миқдори охирноки рақамҳоро доранд, касрҳои охирноканд.

Касрҳои даҳии беохир гуфта, касрҳои намуди $c, b_1b_2b_3b_4\ldots b_n\ldots$-ро меноманд, ки баъд аз вергул шумораи беохири рақамҳо мебошад.

Касрҳои даҳии беохир, касрҳои даврӣ номида мешавад, агар дар онҳо як ё якчанд рақамҳо даврӣ такрор шаванд. **Масалан:**

$0,(9) = 1$; $4,12(9) = 4,13$; $0,1313131313\ldots\ldots = 0,(13)$;

$5{,}3244444444\ldots\ldots = 5{,}32(4)$.

Гуфтан мумкин аст, ки касрҳои даврии даврашон ба 9 баробар ба касри даврии охирнок баробар аст. **Масалан:**

$$0,(9) = 1;\ 4{,}12(9) = 4{,}13;\ \ 2{,}32(9) = 2{,}33;$$

$$12{,}0(9) = 12{,}1;\ \ 23{,}01(9) = 23{,}02.$$

Барои касри одиро ба касри дахӣ гардонидан суратро ба махраҷ тақсим кардан лозим аст. Агар таксимро давом диҳем, дар натиҷа ё касри даврии охирнок ё касри даврии беохирро ҳосил мекунем. **Масалан:**

а) $\frac{1}{8} = 0{,}125;\ \frac{2}{25} = \frac{2}{5^2} = 0{,}08;\ \frac{3}{20} = 0{,}15;\ldots$

Дар ин ҷо касрҳои одӣ ба касрҳои даврии охирнок гардонда, навишта шудаанд.

б) $\frac{20}{6} = 3{,}666(6);\ \frac{11}{6} = 1{,}8333(3);\ \frac{1}{3} = 0{,}333(3)$.

Дар ин ҷо касрҳои одӣ ба касрҳои даврии беохир оварда, навишта шудаанд.

Касрҳои даврии беохирро то ягон дараҷаи саҳеҳӣ навиштан мумкин аст. **Масалан:**

$3{,}456 = 3{,}4$ (бо норасоӣ);

$3{,}456 = 3{,}5$ (бо изофагӣ).

Дар асоси гуфтаҳои болоӣ ва мисолҳои муоина кардашуда мо гуфта метавонем:

Теореман 1. (бе исбот). *Ҳаргуна касрҳои одиро ба намуди касрҳои даҳии даврии охирнок ё беохир оварда, навиштан мумкин аст.* **Масалан**:

$\frac{1}{4} = 0{,}25;\ \frac{1}{8} = 0{,}125;\ \frac{13}{6} = 2{,}166\cdots = 2{,}1(6);\ \frac{4}{33} = 0{,}121212\ldots = 0{,}(12)$.

Теореман 2 (бе исбот). *Барои ҳаргуна касри даврӣ, касри одии ба он баробарро ёфтан мумкин аст.* **Масалан:**

$$0,(7) = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9};$$

$$0,(45) = \frac{45-0}{99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11};$$

$$0{,}3(14) = \frac{314-3}{990} = \frac{311}{990};$$

$$2,(13) = 2 + 0,(13) = 2 + \frac{13-0}{99} = 2 + \frac{13}{99} = 2\frac{13}{99};$$

$$2{,}3(11)=2+0{,}3(11)=2+\frac{311-3}{990}=2+\frac{308}{990}=2\frac{308}{990};$$

$$3{,}46(8)=\frac{3468-346}{900}=\frac{3122}{900}=\frac{1561}{450};$$

$$3{,}6(9)=\frac{369-36}{90}=\frac{333}{90}=3{,}7.$$

Барои он ки доир ба иҷрои тартиби амалҳо маълумоти муфассал гирем, якчанд мисолҳои ифодаҳои арифметикиро дида мебароем.

Мисоли 1. Амалҳои зеринро иҷро намоед:

$$\frac{(-2)\cdot(-2)+(-6):2-2-3+4}{9-7+5-3}.$$

Ҳал. 1. $(-2)\cdot(-2)=+4$; 2. $(-6):2=-3$;

3. $(+4)+(-3)=4-3=1$; 4. $1-2=-1$;

5. $-1-3=-4$; 6. $-4+4=0$;

7. $9-7+5-3=2+2=4$; 8. $0:4=0$.

Мисоли 2. Амалҳои зеринро иҷро кунед:

$$\frac{(-1{,}5+4-2{,}5)\cdot(-6)+5-7+9}{(0{,}3\cdot 2+0{,}3-0{,}2)\cdot 2-0{,}4+2\cdot(-2)+4}.$$

Ҳал. 1. $-1{,}5+4-2{,}5=-4+4=0$; 2. $0\cdot(-6)=0$;

3. $0+5-7+9=7$; 4. $0{,}3\cdot 2=0{,}6$;

5. $0{,}6+0{,}3-0{,}2=0{,}7$; 6. $0{,}7\cdot 2=1{,}4$;

7. $1{,}4-0{,}4=1{,}0$; 8. $2\cdot(-2)+4=-4+4=0$;

9. $1{,}0+0=1{,}0$; 10. $7:1{,}0=7:1=7$.

Мисоли 3. Ҳисоб кунед:

$$\frac{4{,}5:(47{,}375-(26\frac{1}{3}-18\cdot 0{,}75)\cdot 2{,}4:0{,}88)}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}.$$

Ҳал. 1. $18\cdot 0{,}75=13{,}50$;

2. $26\frac{1}{3}-13{,}5=26\frac{1}{3}-13\frac{5}{10}=26\frac{1}{3}-13\frac{1}{2}=\frac{79}{3}-\frac{27}{2}=\frac{158-81}{6}=\frac{77}{6}$;

3. $\frac{77}{6}\cdot 2{,}4=\frac{77}{6}\cdot 2\frac{4}{10}=\frac{77}{6}\cdot\frac{24}{10}=\frac{77}{6}\cdot\frac{12}{5}=\frac{77}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{154}{5}$;

4. $\frac{154}{5}:0{,}88=\frac{154}{5}:\frac{88}{100}=\frac{154}{5}\cdot\frac{100}{88}=\frac{154}{5}\cdot\frac{25}{22}=\frac{77\cdot 5}{1\cdot 11}=\frac{385}{11}$;

5. $47{,}375-\frac{385}{11}=47\frac{375}{1000}-\frac{385}{11}=\frac{47375}{1000}-\frac{385}{11}=$

$$=\frac{379}{8}-\frac{385}{11}=\frac{379\cdot 11-385\cdot 8}{8\cdot 11}=\frac{4169-3080}{88}=\frac{1089}{88};$$

6. $4{,}5:\frac{1089}{88}=4\frac{5}{10}:\frac{1089}{88}=\frac{45}{10}\cdot\frac{88}{1089}=\frac{9}{2}\cdot\frac{88}{1089}=$

$$=\frac{1\cdot 44}{1\cdot 121}=\frac{44}{121}=\frac{4}{11};$$

7. $17{,}81:1{,}37=1781:137=13;$

8. $23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}=\frac{71}{3}:\frac{11}{6}=\frac{71}{3}\cdot\frac{6}{11}=\frac{71\cdot 2}{1\cdot 11}=\frac{142}{11};$

9. $13-\frac{142}{11}=\frac{13}{1}-\frac{142}{11}=\frac{13\cdot 11-142}{11}=\frac{143-142}{11}=\frac{1}{11};$

10. $\frac{4}{11}:\frac{1}{11}=\frac{4}{11}\cdot\frac{11}{1}=\frac{4\cdot 11}{11\cdot 1}=\frac{4\cdot 1}{1\cdot 1}=\frac{4}{1}=4.$

МАШҚҲО

Ҳисоб кунед:

1. $\dfrac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}.$

2. $\dfrac{(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20})\cdot 2\frac{1}{3}+0{,}6}{0{,}2}.$

3. $\dfrac{3+4{,}2:0{,}1}{(1:0{,}3-2\frac{1}{3})\cdot 0{,}3125}.$

4. $\dfrac{3\frac{2}{7}-3:1\frac{5}{14}:6}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$

5. $\dfrac{(1{,}6+154{,}66:70{,}3):1{,}9}{(2\frac{2}{5}-1{,}3):4{,}3}.$

6. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}):\frac{169}{24}}.$

7. $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right)\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\frac{31}{25}.$

8. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43.$

9. $\dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\dfrac{(2\frac{1}{6}+4{,}5)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}.$

БОБИ II
АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

Мо дар боби I ададҳои бутун ва амалҳо бо ададҳои бутунро муоина карда, шуморо бо мафҳуми асосии ададҳои натуралӣ шинос кардем.

Дар ин боб бошад, бо мафҳуми ададҳои ратсионалӣ, ирратсионалӣ ва амалҳо бо онҳо шинос шуда, мафҳуми ададҳои ҳақиқиро дида мебароем.

§1. Ададҳои ратсионалӣ

Хосияти 1. *Ададҳоеро, ки дар намуди касри* $\frac{a}{b}$ *(*$a; b$ *- ададҳои бутун ва адади натуралӣ) тасвир кардан мумкин аст, ададҳои ратсионалӣ меноманд.*

Маҷмуи ададҳои ратсионалӣ аз ададҳои бутуни мусбат ва манфӣ, ададҳои касрии мусбат ва манфӣ ва нол иборат аст. Маҷмуи ададҳои ратсионалиро бо рамзи Q ишорат мекунанд. Ҳар гуна ададӣ бутун, ададӣ ратсионалӣ мебошад. **Масалан**,

$$5=\frac{5}{1};\ 7=\frac{7}{1};\ -4=\frac{-4}{1};\ -9=\frac{-9}{1};\ 0=\frac{0}{1};\ \ldots$$

ва ҳоказо.

Хосияти 2. *Маҷмуи ададҳои бутун* Z *, таҳтмаҷмуи ададҳои ратсионалӣ мебошад:* $Z\in Q$.

Масалан: агар $a\in Z$ ва $b\in N$ бошанд, он гоҳ

$$a\pm b=\frac{a}{1}\pm\frac{b}{1}=\frac{a\pm b}{1};\ a\cdot b=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1}$$

мебошад.

Агар $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ - ададҳои ратсионалии мусбат бошанд, он гоҳ:

а) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ аст, агар $ad=bc$ бошад;

б) $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ аст, агар $ad>bc$ бошад;

в) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ аст, агар $ad<bc$ бошад.

Масалан: а) $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$ аст, агар $3\cdot 7>4\cdot 5$ бошад;

б) $\frac{3}{4}<\frac{7}{6}$ аст, агар $3\cdot 6<4\cdot 7$ бошад;

в) $-\frac{3}{4} > -\frac{7}{6}$ аст, агар $-3 \cdot 6 > -7 \cdot 4$ бошад.

Ададҳои ратсионалиро ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсим (ба ғайр аз ба нол) кардан мумкин аст. Ин қоида барои касрҳои одӣ ҳам дуруст аст. Натиҷаи ҳар гуна чор амалҳои арифметикии бо ададҳои ратсионалӣ ба субот расонидашуда, ададҳои ратсионалиро медиҳад.

Хосияти 3. *Ҳар гуна ададн ратсионалиро дар намуди касри даҳии беохири даврӣ (ва баръакс) навиштан мумкин аст.*

Масалан: $\frac{1}{5} = 0,2 = 0,20 = 0,200 = \ldots = 0,2(0)$;

$-\frac{1}{4} = -0,25 = -0,2500 = \ldots = -0,25(0)$;

$-\frac{13}{6} = -2,1(6)$; $-\frac{4}{33} = -0,(12)$; $-0,3(14) = -\frac{311}{999}$.

§2. Ададҳои ирратсионалӣ

Таърифи 1. *Ададҳоеро, ки дар намуди нисбати ду ададн бутун ифода намешаванд, ададҳои ирратсионалӣ меноманд.*

Масалан: ададҳои $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{11}$; $\lg 3$; π; $3-\sqrt{2}$ ва ҳоказо мисолҳои ададҳои ирратсионалӣ шуда метавонанд.

Агар ададн ратсионалӣ касри даҳии беохири даврӣро ифода кунад, пас ададн ирратсионалӣ касри даҳии беохири гайридаврӣро ифода мекунад.

Ададҳои ирратсионалӣ, монанди ададҳои ратсионалӣ, ададҳои мусбат ва манфӣ шуда метавонанд. Масалан: 0,101001000100001…- ададн ирратсионалии мусбат, $-2,07007000700007$ …- ададн ирратсионалии манфӣ мебошад.

§3. Мафҳуми ададҳои ҳақиқӣ

Таърифи 2. *Ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ якҷоя ададҳои ҳақиқиро ташкил мекунанд.*

Агар ба маҷмуи ададҳои ратсионалӣ мо маҷмуи ададҳои ирратсионалиро ҳамроҳ кунем, дар натиҷа маҷмуи ададҳои ҳақиқиро ҳосил мекунем. Маҷмуи ададҳои ҳақиқиро бо рамзи R ишорат мекунанд.

Ҳар гуна ададн ҳақиқиро дар намуди касри даҳии беохир навиштан мумкин аст. **Масалан**, агар ададн ратсионалӣ бошад, он гоҳ вайро дар намуди касри даҳии беохири даврӣ ифода кардан

мумкин аст: агар адад ирратсионалӣ бошад, он гоҳ вайро дар намуди касри даҳии беохири ғайридаврӣ ифода кардан мумкин аст.

Ададҳои ҳақиқӣ ададҳои ба тартиб овардашуда мебошанд, чунки барои ҳар як ҷуфти ададҳои ҳақиқии x ва y яке аз муносибатҳо $x<y$, $x=y$ ва ё $x>y$ ичро мегардад.

Мисол, ададҳои $-2,3$ ва $-2,(3)$-ро муқоиса мекунем.

Ҳ а л. Азбаски, $-2,3=-2,30=-2,300=-2,3000\cdots$, $-2,(3)=-2,333\ldots$ ва $2,300\ldots<2,333\ldots$ ё $2,300\ldots<2,333\ldots$ аст, он гоҳ $-2,3>-2,(3)$ мешавад.

Таърифи 3. *Қисми бутуни адади ҳақиқии x гуфта, калонтарин адади бутуни аз x хурдро меноманд. Қисми бутуни адади x-ро бо $[x]$ ишорат мекунанд.*

Мисол: $[32,5]=32;[3,24]=3;[0,53]=0;[-4,6]=-5$ ва ҳоказо.

Дар ин ҷо, агар x-адади бутун бошад, он гоҳ $[x]=x$ мешавад: агар x-адади касрӣ бошад, он гоҳ $[x]<x$ мебошад. Аз ин ҷо, барои ҳар гуна x нобаробарии $[x]\le x<[x]+1$ ҷой дорад.

Таърифи 4. *Қисми касрии адади ҳақиқии x гуфта, фарқи байни ададҳои x ва $[x]$-ро меноманд. Қисми касрии адади x-ро бо $\{x\}$ ишорат мекунанд.*

Мисол: $\{32,5\}=32,5-[32,5]=32,5-32=0,5;$

$\{3,24\}=3,24-[3,24]=3,24-3=0,24;$

$\{0,53\}=0,53-[0,53]=0,53-0=0,53;$

$\{-3\}=-3-[-3]=-3-(-3)=-3+3=0.$

Дар ин ҷо аз нобаробарии $[x]\le x<[x]+1$ нобаробарии $0<x-[x]<1$ бармеояд. Бинобар он, барои ҳар гуна x нобаробарии $0<x-[x]<1$ дуруст аст.

Тасвири ададҳои ҳақиқиро дар тири ададӣ дида мебароем. Бигузор нуқтаи 0 дар хати рост нуқтаи қайд кардашуда бошад. Барои мавқеи нуқтаро дар хати рост нисбат ба нуқтаи 0 муайян кардан ба ғайр аз донистани масофаи он аз нуқтаи 0 боз нишон додан лозим аст, ки ин нуқта дар кадом самт ҷойгир шудааст. Одатан дар як тарафи нуқтаи 0 ададҳои бутуни мусбат ва дар дигар тарафаш ададҳои бутуни манфиро тасвир мекунанд. Аз

нуқтаи 0 самти ростро мусбат ва самти чапро манфӣ ҳисоб мекунанд.

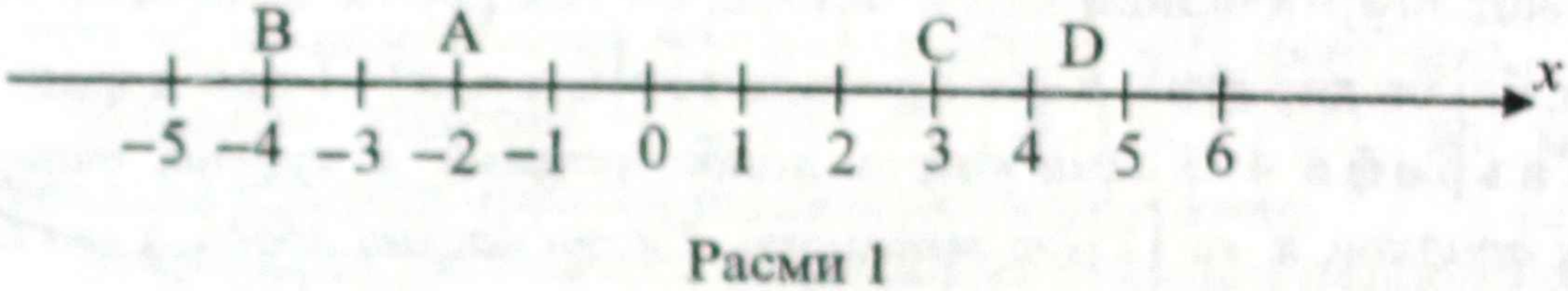
Ададҳои дар самти мусбат тасвиршуда бо ададҳои дар самти манфӣ тасвиршуда муқобил мебошанд. Бинобар ин, ададҳои муқобилро ин тавр мефаҳманд:

Барои ҳар як адад якто адади ба он муқобил мавҷуд аст. Адади ба адади дилхоҳи a муқобилро бо $-a$ ишорат мекунанд.

Агар дар хати рост нуқтаи 0 қайд карда, дар он самти мусбатро нишон дода, воҳиди масштаб интихоб карда шуда бошад, он гоҳ хати ростро хати рости координатӣ меноманд. Нуқтаи 0-ро ибтидои координатӣ меноманд, чунки адади нол (0) дар хати рост ададҳои мусбат ва манфиро аз ҳамдигар ҷудо мекунад.

Таърифи 5. *Ададе, ки мавқеи нуқтаро дар хати рост нишон медиҳад, координатаи ҳамин нуқта номида мешавад.*

Масалан: бигузор дар хати рости координатӣ нуқтаҳои зерин қайд шуда бошанд:



Расми 1

Он гоҳ мегӯянд, ки нуқтаи A координатаи -2; нуқтаи B координатаи -4; нуқтаи C координатаи 3 ва нуқтаи D координатаи 4,5-ро дорад. Ин тавр ҳам менависанд: $A(-2)$; $B(-4)$; $C(3)$; $D(4,5)$ (Расми 1).

Ба ҳар як адади маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ як нуқтаи муайяни маҷмуи нуқтаҳои тири ададӣ (хати рости координатӣ) мувофиқ меояд. Баръакс, ҳар як нуқтаи тири ададӣ тасвири фақат як адади ҳақиқӣ мебошад.

§4. Қимати мутлақи адад

Таърифи 1. *Бузургии мутлақи (модули) адади ҳақиқии x гуфта, худи адади x-ро, агар x мусбат ва $-x$-ро, агар x манфӣ бошад, меноманд.*

Бузургии мутлақи (модули) адади ҳақиқии x бо $|x|$ ишорат кардашуда, бо баробарии зерин муайян карда мешавад:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ агар } x \geq 0, \\ -x, \text{ агар } x < 0. \end{cases}$$

Хосиятҳо: Агар $x; y \in R$ бошанд, он гоҳ

1. $|x| = |-x|$; $|x| \geq x$; $|x| \geq -x$ барои ҳар гуна x : $|x| \geq 0$.
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
3. $|x - y| \geq |x| - |y|$;
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$;
6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;
7. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ва $-x \geq a$.

Масалан: $|7| = 7$; $|-7| = 7$; $|0| = 0$; $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$;

$$|5+8| \leq |5| + |8|; \quad |5+(-9)| < |5| + |-9|;$$

$$|7-9| > |7| - |9|; \quad |7-9| < |7| + |-9| = |7| + |-9|.$$

Агар $M(-5)$ ва $N(4)$ нуқтаҳо дар тири ададӣ бошанд, он гоҳ барои ёфтани модули адад масофаро аз ибтидои ҳисоб (0) то нуқтае, ки ба он адади додашуда мувофиқ меояд, бо порчаҳои воҳидӣ чен кардан лозим аст.

Масалан: $|-5| = |OM| = 5$ ва $|ON| = |4| = 4$.

Маънои геометрии қимати мутлақи адад ин дарозии порча мебошад.

Агар $A(x_1)$ ва $B(x_2)$ нуқтаҳо дар тири ададӣ бошанд, он гоҳ масофаи байни ин ду нуқтаро дар намуди

$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

навиштан мумкин аст. Дар ин ҷо $|AB|$ дарозии порчаи AB-ро мефаҳмонад.

Масалан: 1. Агар $A(2)$ ва $B(5)$ нуқтаҳо дар хати рост бошанд, он гоҳ дарозии порчаи AB аз рӯи формулаи $|AB| = |x_2 - x_1|$ ёфта мешавад.

$$|AB| = |x_2 - x_1| \Rightarrow AB = |5 - 2| \Rightarrow AB = 3.$$

2. Агар $A(-5)$ ва $B(-2,5)$ нуқтаҳои хати рост бошанд, он гоҳ масофаи байни онҳо бо формулаи $|AB| = |x_2 - x_1|$ ёфта мешавад.

$$|AB| = |x_2 - x_1| \Rightarrow AB = \left|-\frac{5}{2} - (-5)\right| \Rightarrow AB = \left|-\frac{5}{2} + 5\right| \Rightarrow AB = \frac{5}{2}.$$

Агар ҳамворӣ додашуда бошад, он гоҳ ду хати рости перпендикуляри Ox ва Oy-ро, ки онҳо ҳамдигарро дар нуқтаи ибтидои ҳисоб (0) мебуранд, мегирем. Дар хатҳои рости Ox ва Oy масштабҳоро интихоб намуда, баъд мавқеи нуқтаро дар ҳамворӣ муайян мекунем.

Хатҳои рости Ox ва Oy, ки самтҳо ва порчаҳои воҳидиро (масштаб) доранд, тирҳои координатаӣ ном дорад.

Мавқеи нуқта дар ҳамворӣ бо ду адад муайян карда мешавад: $M(x; y)$.

Дар ин ҷо x - абсцисса дар ҷои якум ва y - ординатаро дар ҷои дуюм менависанд. Ҳар ду ададро $(x; y)$ якҷоя координатаҳои нуқтаи M меноманд.

§5. Ҳисобкунии ифодаҳои арифметикӣ

Дар вақти ҳисобкунии ифодаҳои арифметикӣ аз тартиби иҷрои амалҳо истифода мебаранд. Бинобар ин пеш аз ҳисобкунӣ аввал тартиби иҷрои амалҳоро бори дигар хотиррасон мекунем.

I. Агар ифодаи додашуда қавсҳо надошта бошад, он гоҳ аввал амали дараҷаи сеюм (бадарҷабардорӣ), баъд амалҳои дараҷаи дуюм (зарб ва тақсим) ва дар охир амалҳои дараҷаи якум (ҷамъ ва тарҳ) бо тартиби додашудаашон иҷро карда мешаванд.

II. Агар ифодаи додашуда қавсҳо дошта бошад, он гоҳ, аввал ҳамаи амалҳои дар дохили қавсҳо буда бо тартиби дар боло гуфта гузаштаамон (пункти I) иҷро карда мешаванд.

III. Агар ифодаи додашуда касрӣ бошад, аввал амалҳои дар сурати каср ва баъд амалҳои дар махраҷи каср додашударо бо тартиби дар пункти якум муайяншуда иҷро карда, натиҷаи ҳосилшудаи суратро ба натиҷаи ҳосилшудаи махраҷ тақсим кардан лозим аст.

Акнун якчанд мисолҳои ҳисоби ифодаҳои арифметикиро дида мебароем.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\dfrac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}):4-\frac{3}{4}}:31\cdot$

Ҳал. Аз тартиби ичрои амалҳо истифода бурда, ифодаи додашударо ҳисоб мекунем:

1. $45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}=1\frac{10}{63}-\frac{25}{84}=\frac{73}{63}-\frac{25}{84}=\frac{292-75}{252}=\frac{31}{36}$;
2. $2\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}=\frac{7}{3}-\frac{7}{6}=\frac{14-7}{6}=\frac{7}{6}$;
3. $\frac{7}{6}:4=\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$;
4. $\frac{7}{24}-\frac{3}{4}=\frac{7-18}{24}=-\frac{11}{24}$;
5. $\frac{31}{36}:(-\frac{11}{24})=-\frac{31}{36}\cdot\frac{24}{11}=-\frac{31\cdot 2}{3\cdot 11}=-\frac{62}{33}$;
6. $-\frac{62}{33}:31=-\frac{62}{33}\cdot\frac{1}{31}=-\frac{2\cdot 1}{33\cdot 1}=-\frac{2}{33}$.

Чавоб: $-\frac{2}{33}$.

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $\dfrac{(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8})\cdot 0{,}3}{0{,}2}$.

Ҳал. 1. $152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}=4\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{19}{4}-\frac{3}{8}=\frac{38}{8}-\frac{3}{8}=\frac{38-3}{8}=\frac{35}{8}$;

2. $\frac{35}{8}\cdot 0{,}3=\frac{35}{8}\cdot\frac{3}{10}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 2}=\frac{21}{16}$;
3. $\frac{21}{16}:0{,}2=\frac{21}{16}:\frac{2}{10}=\frac{21}{16}:\frac{1}{5}=\frac{21}{16}\cdot\frac{5}{1}=\frac{21\cdot 5}{16\cdot 1}=\frac{105}{16}=6{,}5625$.

Чавоб: 6,5625.

Мисоли 3. Ҳисоб кунед: $\dfrac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0{,}0001:0{,}005}$.

Ҳал. 1. $215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}=7\frac{9}{16}-\frac{3}{4}=\frac{121}{16}-\frac{3}{4}=\frac{121-12}{16}=\frac{109}{16}$;

2. $\frac{109}{16}+\frac{1}{2}=\frac{109+8}{16}=\frac{117}{16}$;
3. $0{,}0001:0{,}005=0{,}1:5=\frac{1}{10}:5=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$;

4. $\frac{117}{16}:\frac{1}{50}=\frac{117}{16}\cdot\frac{50}{1}=\frac{117\cdot 25}{8\cdot 1}=\frac{2925}{8}=365\frac{5}{8}$.

Чавоб: $365\frac{5}{8}$.

Мисоли 4. x-ро ёбед: $\frac{3+4{,}2:0{,}1}{(1:0{,}3-2\frac{1}{3})\cdot 0{,}3125}-8x=72$.

Хал. 1. 4,2:0,1=42:1=42; 2. 3+42=45;

3. $1:0{,}3=1:\frac{3}{10}=1\cdot\frac{10}{3}=\frac{10}{3}$;

4. $\frac{10}{3}-2\frac{1}{3}=\frac{10}{3}-\frac{7}{3}=\frac{10-7}{3}=\frac{3}{3}=1$;

5. $1\cdot 0{,}3125=0{,}3125$;

6. $45:0{,}3125=45:\frac{3125}{1000}=45:\frac{5}{16}=45\cdot\frac{16}{5}=9\cdot 16=144$;

7. $144-8x=72$; $144-72=8x$; $72=8x$. Аз ин чо: $x=9$.

Чавоб: 9.

Мисоли 5. Ифодаро ҳисоб карда, x-ро ёбед:

$$\frac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}002}\cdot 3\frac{1}{3}x=1000\cdot$$

Хал. 1. $140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}=2\frac{7}{30}-\frac{5}{12}=\frac{67}{30}-\frac{5}{12}=\frac{134-25}{60}=\frac{109}{60}$;

2. $\frac{109}{60}:18\frac{1}{6}=\frac{109}{60}:\frac{109}{6}=\frac{109}{60}\cdot\frac{6}{109}=\frac{1}{10}$;

3. $\frac{1}{10}:0{,}002=0{,}1:0{,}002=1:0{,}02=1:\frac{2}{100}=1\cdot\frac{100}{2}=50$;

4. $50\cdot 3\frac{1}{3}x=1000$; $50\cdot\frac{10}{3}x=1000$;

$500x=3000$. Аз ин чо, $x=6$ мешавад.

Чавоб: 6.

§6. Ҳисобкуниҳои тақрибӣ

Мо дар баёнотҳои дар боло овардашуда хосиятҳо ва амалҳоро бо ададҳо омӯхтем.

Ҳангоми шуморидани миқдори предметҳо, ченкуниҳо ва ҳисоббарорӣ мо ё ададҳои саҳеҳ (аниқ) ва ё ададҳои тақрибиро ҳосил мекунем. Дар ин чо се мавриди ҳосил шудани ададҳои саҳеҳ ва тақрибиро дар мисолҳо дида мебароем.

1. Оилаи донишҷӯи курси дуюми факултети математика Абдураҳмонзода аз 12 нафар иборат аст. Вақте, ки мо оилаи Абдураҳмонзода 12 нафар мегӯем, ин адад узви оилаи номбар кардашударо саҳеҳ нишон медиҳад.

2. Масофаи байни шаҳрҳои Душанбе ва Хуҷанд 300 км аст. *Вақте ки мо ин тасдиқотро меорем, адади 300 монанди адади аъзоёни оилаи номбар кардашуда аниқ (саҳеҳ) нест. Бинобар ин 300 км адади «яклухт» кардашуда мебошад.*

3. Дар вақти ҳисоббарорӣ вобаста ба ададҳои додашуда ҳисобро ичро мекунем, лекин дар натиҷа бошад адади саҳеҳ ва ё адади тақрибиро ҳосил мекунем. **Масалан**, дар вақти тақсим намудани ададҳои саҳеҳ ё адади аниқ ё адади тақрибӣ ҳосил мешавад.

Ҳамин тариқ, дар вақти шумориданипредметҳо ва ё ченкуниҳо ададҳои саҳеҳ ва ё ададҳои тақрибӣ ҳосил мекунанд, лекин натиҷаи ҳамаи ченкуниҳои дарозӣ ва *вазни предметҳо доимо ададҳои тақрибиро медиҳанд.*

Дар ин ҷо барои ишора намудани ададҳои тақрибӣ аз аломати ≈, ки маънояш «тақрибӣ баробар»-ро дорад, истифода мебаранд.

Адади саҳеҳ гуфта, ададеро меноманд, ки вай қимати саҳеҳи бузургии додашударо муайян мекунад.

Адади тақрибӣ гуфта, ададеро меноманд, ки вай қимати тақрибии бузургии додашударо ифода мекунад, ё ки вай дар натиҷаи бо ягон саҳеҳии додашуда яклухт кардан ҳосил шудааст.

Агар дар вақти яклухткунӣ рақами якуми партофташуда ададҳои 0; 1; 2; 3; 4 бошанд, он гоҳ рақами охирини нигоҳ дошта шуда таъғир намеёбад; агар рақами якуми партофта шуда 5; 6; 7; 8; 9 бошад, он гоҳ рақами охирини нигоҳ дошта шударо як воҳид зиёд карда менависанд.

Масалан: Адади 32176 ≈ 32000, яъне то ҳазор яклухт карда шудааст;

Адади 32176 ≈ 32200, яъне то садӣ яклухт карда шудааст;

Адади 12345 ≈ 12350, яъне то даҳӣ яклухт карда шудааст.

Дар ин ҳолат мегӯянд, ки ададҳои тақрибии ҳосилшуда ададҳои тақрибии бо барзиёдагӣ ва ё бо норасогӣ гирифта шуда мебошанд.

Хатои мутлақ ва нисбӣ. Дар амал ҳангоми яклухткунии ададҳо то саҳҳеҳии додашуда ба хатоҳо роҳ медиҳем. Хатоҳои рох додашуда хатоҳои мутлақ ва нисбӣ мешаванд.

Таърифи 1. *Бузургии мутлақи фарқи байни қимати саҳҳеҳи адад ва қимати тақрибии он хатои мутлақи адади тақрибӣ номида мешавад.*

Инак, агар қимати саҳҳеҳи ададро ба A, қимати тақрибияшро бо a ва бузургии мутлақи хаторо бо Δ («делта» хонда мешавад) ишора кунем, он гоҳ

$$\Delta = |A - a| \text{ ё ки } A - a = \pm\Delta$$

мешавад. Дар ин ҷо аломатҳои дар назди Δ (делта) буда, қимати тақрибии ададро бо норасогӣ ва бо барзиёдӣ мефаҳмонад.

Масалан, агар $A = 4{,}28$, $a_1 = 4{,}2$ қимати тақрибии адади A бо норасогӣ ва $a_2 = 4{,}3$ қимати тақрибии адади A бо барзиёдӣ бошад, он гоҳ

$A - a_1 = 4{,}28 - 4{,}2 = 0{,}08$ (бо норасогӣ);

$A - a_2 = 4{,}28 - 4{,}3 = -0{,}02$ (бо барзиёдӣ) мешавад.

Аммо бузургии мутлақи хатоҳо (Δ) дар ҳар ду ҳолат ҳам мусбат мешаванд.

$$\Delta = |A - a_1| \Rightarrow \Delta = |4{,}28 - 4{,}2| \Rightarrow \Delta = 0{,}08;$$

$$\Delta = |A - a_2| \Rightarrow \Delta = |4{,}28 - 4{,}3| \Rightarrow \Delta = 0{,}02.$$

Аз сабаби он ки дар амал қимати саҳеҳи адади A маълум нест, бинобар ин қимати саҳеҳи хатои мутлақро мо намедонем. Бинобар ин ҳангоми ба хатои мутлақ баҳо додан аз мафҳуми сарҳадҳои хатои мутлақ (h) истифода мебаранд:

$$\Delta \le h \Leftrightarrow |A - a| \le h \Leftrightarrow a - h \le A \le a + h.$$

Таърифи 2. *Нисбати хатои мутлақ бар қимати мутлақи тақрибии адад хатои нисбӣ номида мешавад ва бо формулаи*

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \Leftrightarrow \delta = \frac{A - a}{a}$$

муайян карда мешавад.

Дар амал хатои нисбиро бо протсент, баъзан бо касри даҳӣ ва ё одӣ ифода мекунанд:

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \cdot 100 \text{ ё ки } \delta = \frac{A - a}{a} \cdot 100.$$

Агар $\Delta \le h$ бошад, он гоҳ сарҳадҳои хатои нисбиро бо ε («эпсилон») ифода карда, меёбанд,

$$\varepsilon = \frac{h}{a}, \delta = \varepsilon.$$

Ададҳои тақрибиро ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсим намудан мумкин аст. Лекин дар хотир доштан лозим аст, ки ададҳои тақрибӣ аз ҷиҳати саҳеҳиашон гуногун шуда метавонанд. Барои ду ва ё якчанд ададро то саҳеҳии додашуда ҷамъ (тарҳ) намудан, аввал онҳоро ҷамъ (тарҳ) намуда баъд натиҷаашро яклухт намудан мумкин аст, ё ин ки ҳар яки онҳоро ба як разряд зиёд яклухт карда, баъд ҷамъ (тарҳ) мекунанд ва аз натиҷааш разряди охиринро мепартоянд.

Мисоли 1. Ададҳои 2,356; 0,173; 12,541; 3,087 ва 9,704 то саҳеҳии 0,1 ҷамъ карда шаванд:

A)	B)
2,356	$2{,}356 \approx 2{,}36$
0,173	$0{,}173 \approx 0{,}17$
$^{+}12{,}541$	$^{+}12{,}541 \approx 12{,}54$
3,087	$3{,}087 \approx 3{,}09$
9,704	$9{,}704 \approx 9{,}70$
$27{,}861 \approx 27{,}9$	$27{,}86 \approx 27{,}9$

Мисоли 2. То саҳеҳии 0,01 ҳисоб мекунем:

$$47{,}03573 - 21{,}53034 - 2{,}01519$$

а)	б)
47,03573	$47{,}03573 \approx 47{,}036$
$-21{,}53034$	$-21{,}53034 \approx -21{,}530$
$-\ 2{,}01519$	$-\ 2{,}01519 \approx -2{,}015$
$23{,}49020 \approx 23{,}49$	$23{,}491 \approx 23{,}49$

Мисоли 3. Ҳосили зарби ададҳои $a_1 = 3{,}491$ ва $a_2 = 8{,}6$ -ро ёбед.

Ҳал. Аз сабаби он ки $a_2 = 8{,}6$ баъд аз вергул як адади киматдор дорад, пас адади $a_1 = 3{,}491$-ро то 3,5 яклухт карда, хосили зарбро меёбем:

$$a_1 \cdot a_2 = 8{,}6 \cdot 3{,}5 = 30{,}10 \approx 30.$$

Мисоли 4. Нисбати $\frac{a_1}{a_2}$-ро ҳангоми $a_1 = 39{,}57$ ва $a_2 = 42{,}6137$ будан ёбед.

Ҳал. Дар ин чо ҳам ба монанди зарби ададҳои тақрибӣ рафтор намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{39{,}57}{42{,}6137} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{39{,}57}{42{,}61} = 0{,}92865\ldots \approx 0{,}9287.$$

Аз мисолҳои дар боло муоина карда шуда маълум мешавад, ки ҳангоми ичрои амалҳои арифметикӣ, ки дар онҳо ақаллан яке аз ададҳо тақрибӣ мебошад, зарур аст, ки ададҳои дигар яклухт карда шаванд. Натиҷаи ҳисоб ҳамеша адади тақрибӣ мешавад.

§7. Протсент

Дар корҳои амалии хоҷагидорӣ, ҳисобҳои молиявӣ – иқтисодӣ ва таҳлили тасдиқи ичрои буҷетҳо протсент васеъ истифода бурда мешавад.

Аз тарафи дигар ҳангоми муқоисаи ду адад донистан лозим аст, ки як адад аз адади дигар чанд маротиба калон (ё хурд) аст, як адад ба чанд ҳиссаи адади дигар баробар аст.

Масалан, адади 25 ба $\frac{1}{3}$ ҳиссаи адади 75 баробар аст, яъне адади 75 аз адади 25 се маротиба калон мебошад.

Нисбати адади a бар адади b, $(b \neq 0)$ гуфта, касри $\frac{a}{b}$-ро меноманд. Аслан мо дар таҳти калимаи «нисбат» натиҷаи тақсимотро мефаҳмем. Натиҷаи тақсимот адад ва ё бузургии ададии ягон мафҳум шуда метавонад.

Масалан, нисбати 112 ба 100 ба 1,12 баробар аст, чунки $112:100 = 1{,}12$ аст. Агар S-масофа, t-вақт бошад, он гоҳ $\frac{S}{t} = \upsilon$ бузургии сурьатро ифода мекунад. Бинобар ин дар бисёр мавридҳо нисбати ду ададро бо аз сад як ҳиссааш ифода мекунанд.

Таърифи 1. *Аз сад як ҳиссаи адад як протсенти он ном дорад. Протсент бо рамзи % ишора карда мешавад.*

Масалан, 1%-и адади 1 ба 0,01 баробар аст, чунки $1\% = 1:100$; 3%-и адади 1 ба 0,03 баробар аст, чунки $3\% = 3:100$ ва ҳоказо.

Умуман, натиҷаи ҳар гуна ҳисобро ё бо адад, ё ки бо протсент ифода кардан мумкин аст. Бинобар ин, қоидаи ададро бо протсент ва протсентро ба адад гардонида навиштанро донистан лозим аст.

Қоидаи 1. *Барои ададро бо протсент ифода кардан бояд ададди маълумро ба 100 зарб зада дар оқиби он аломати % гузоштан лозим аст.*

Масалан: $32 = 3200\%$ (чунки $32 \cdot 100 = 3200$);

$4{,}5 = 450\%$ (чунки $4{,}5 \cdot 100 = 450$);

$0{,}7 = 70\%$ (чунки $0{,}7 \cdot 100 = 70$);

$1{,}35 = 135\%$ (чунки $1{,}35 \cdot 100 = 135$).

Қоидаи 2. *Барои ҳар гуна протсентро бо адад ифода кардан, протсенти додашударо ба 100 тақсим намуда дар ҷавобаш аломати %-ро партофтан лозим аст.* **Масалан:**

$5\% = 0{,}05$ (чунки $5 : 100 = 0{,}05$);

$0{,}7\% = 0{,}007$ (чунки $0{,}7 : 100 = 0{,}007$);

$225\% = 2{,}25$ (чунки $225 : 100 = 2{,}25$).

Аз мисолҳои дар боло муоина карда шуда маълум мешавад, ки дар ҳисоби протсент се бузургиҳои ададиро фарқ кардан лозим аст: N, a ва $p\%$. Дар ин ҷо N - ададди маълумро ифода мекунад, яъне ададе, ки мо онро 100% гуфта мегирем; a - бошад, $p\%$-ти ададди N-ро ифода мекунад. Бинобар ин дар ин ҷо се намуди масъалаҳоро доир ба протсент дида мебароем.

Дар масъалаҳои протсентӣ, доимо аз ин се бузургиҳои ададӣ дутояш маълум буда, сеюмаш ёфта мешавад.

I. Ёфтани протсенти ададди маълум

Масъалаи 1. Ёфтани бузургии a, ҳангоми маълум будани бузургиҳои N ва $p\%$.

Ин намуди масъала аз рӯи формулаи зерин ҳал карда мешавад:

$$a = \frac{N}{100} \cdot p. \qquad (1)$$

Масъалаи 2. Агар $A = \dfrac{30 : 0{,}1 + 60}{0{,}75 \cdot 32 + 6}$ бошад, 15%-и ададди A-ро ёбед.

Ҳал. а) Аввал қимати ададди A-ро ҳисоб мекунем:

1. $30:0{,}1=300$; 2. $300+60=360$;

3. $0{,}75\cdot 32=24$; 4. $24+6=30$; 5. $360:30=12$.

б) 15%-и адади 12-ро бо ёрии формула хисоб мекунем:

$a=\frac{N}{100}\cdot p=\frac{12}{100}\cdot 15=\frac{36}{20}=1{,}8$. Пас, $a=1{,}8$ аст.

Ҷавоб: 15%-и адади A ба 1,8 баробар мебошад.

II. Ёфтани адад аз рӯи протсенташ

Масъалаи 3. Ёфтани бузургии N дар вақти маълум будани бузургиҳои a ва $p\%$.

Ин намуди масъала бо формулаи зерин ҳал карда мешавад:

$$N=\frac{a}{p\%}\cdot 100 \quad \text{ё ки } N=\frac{a}{p}\cdot 100. \qquad (2)$$

Масъалаи 4. Агар 4,5%-и адади x ба 900 баробар бошад, пас худи адади x чй кадар аст?

Ҳал. Аз формула истифода бурда, ҳал мекунем:

$$x=N=\frac{a}{p}\cdot 100;\ N=\frac{900}{4{,}5}\cdot 100;\ N=\frac{9000}{45}\cdot 100;\ N=20000.$$

Ҷавоб: адади номаълуми x ба 20000 баробар аст.

III. Ёфтани нисбати протсенти адад

Масъалаи 5. Ёфтани бузургии $p\%$ ҳангоми маълум будани бузургиҳои a ва N. Яъне, нисбати ду адади маълум доимо бо протсентҳо ифода карда мешавад.

Ин намуди масъалаҳо бо формулаи зерин ҳал карда мешавад.

$$p\%=\frac{a}{N}\cdot 100. \qquad (3)$$

Масъалаи 6. Дар китобхонаи мактаб 12000 нусха китоб аст. Дар байни онҳо 1200 нусха китоби математика ва 4800 нусха китоби техникй ҳаст. Нисбати протсенти адади китобҳои математикй ва техникиро бар адади умумии китобҳо ёбед.

Ҳал. Масъала аз рӯи формула ҳал мекунем.

1) $p_1=\frac{a}{N}\cdot 100\Rightarrow p_1=\frac{1200}{12000}\cdot 100\Rightarrow p_1=10\%$;

2) $p_2=\frac{a}{N}\cdot 100\Rightarrow p_2=\frac{4800}{12000}\cdot 100\Rightarrow p_2=40\%$.

Ҷавоб: китоби математика 10%-и китобҳои умумии дар мактаб буда ва китобҳои техникй бошад, 40%-и ҳамаи китобҳоро ташкил мекардааст.

Масъалаи 7. Нархи телевизор, ки 380 сомонӣ меистод, 20% арзон карда шуд. Телевизор чанд сомонӣ арзон шудааст?

Ҳал. Масъаларо аз рӯи формулаи (1) ҳисоб мекунем.

$$a = \frac{N}{100} \cdot p;\ a = \frac{380}{100} \cdot 20;\ a = 76.$$

Ҷавоб: телевизор 76 сомонӣ арзон шудааст.

Масъалаи 8. Агар маоши коргар 183 сомонӣ бошад. 6,1%-и он чанд сомонӣ мешавад?

Ҳал. Масъаларо аз рӯи формулаи (1) ҳисоб мекунем.

$$a = \frac{N}{100} \cdot p;\ a = \frac{183}{100} \cdot 6{,}1;\ a = 11{,}20.$$

Ҷавоб: 6,1%-и маоши коргар ба 11 сомонию 20 дирам баробар аст.

Масъалаи 9. Адади x-ро ёбед, агар 2,5%-и он ба $\frac{4{,}5 : 0{,}01 + 50}{0{,}125 \cdot 8 + 9}$ баробар бошад.

Ҳал. а) Аввал 2,5%-и адади x -ро ҳисоб мекунем:

1. $4{,}5 : 0{,}01 = 4{,}5 \cdot 100 = 450;$
2. $450 + 50 = 500;$
3. $0{,}125 \cdot 8 = 1;$
4. $1+9=10;$
5. $500 : 10 = 50.$

б) Адади номаълуми x -ро меёбем:

$$x = N = \frac{a}{p} \cdot 100;\ x = \frac{50}{2{,}5} \cdot 100;\ x = 2000.$$

Ҷавоб: адади x ба 2000 баробар будааст.

Масъалаи 10. Рӯзи якуми сентябри соли хониш дар факултети математика ба дарс 40 нафар донишҷӯ наомад, ки он 2,5%-и ҳамаи донишҷӯёни факултетро ташкил мекунад. Шумораи умумии донишҷӯёни факултетро муайян кунед?

Ҳал. Масъала аз рӯи формулаи (2) ҳал карда мешавад.

$$N = \frac{a}{p} \cdot 100;\ N = \frac{40}{2{,}5} \cdot 100;\ N = \frac{400}{25} \cdot 100;\ N = 1600.$$

Ҷавоб: шумораи умумии донишҷӯёни факултети математика ба 1600 нафар баробар будааст.

Масъалаи 11. Коргар мебоист мувофиқи нақша 800 детал барорад. Аммо вай 996 детал тайёр кард. Коргар нақшаро чанд протсент иҷро кардааст?

Ҳал. Масъала аз рӯи формулаи (3) ҳал карда мешавад.

$$p = \frac{a}{N} \cdot 100;\ p = \frac{996}{800} \cdot 100;\ p = 124{,}5\%.$$

Ҷавоб: коргар нақшаро 124,5% иҷро кардааст.

§8. Таносуб ва хосиятҳои он

Дар §6 мо бо мафҳуми нисбат шинос шудем. Акнун аз мафҳуми нисбат истифода бурда, мо мафҳуми таносуб ва хосиятҳои онро дида мебароем.

Таърифи 1. *Баробарии ду нисбат таносуб номида мешавад.*

Масалан, агар $a:b=e$ ва $c:d=e$ бошад, он гоҳ баробарии $a:b=c:d$ таносуб номида мешавад. Чор ададе, ки таносубро ташкил медиҳанд, ададҳои мутаносибӣ номида мешаванд. Дар таносуби додашуда a ва d-ро узвҳои канорӣ, b ва c-ро узвҳои мобайнӣ меноманд.

Хосиятҳои асосии таносубро номбар мекунем:

1. Ҳосили зарби узвҳои канории таносуб ба ҳосили зарби узвҳои мобайниаш баробар аст.

Масалан: дар таносуби $a:b=c:d$ доимо $a\cdot d=b\cdot c$ мебошад.

Мисоли 1. Дар таносуби $\frac{1}{2}:\frac{1}{48}=20:\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{48}\cdot 20$; $\frac{5}{12}=\frac{5}{12}$ аст.

2. Агар мо дар як вақт узви дилхоҳи канорӣ ё мобайнии таносубро якчанд маротиба зиёд ё кам кунем, таносуб вайрон намешавад.

Масалан, узви якуми канорӣ ва узви дуюми мобайнии таносуби $64:8=80:10$-ро 16 маротиба кам карда таносуби $4:8=5:10$-ро ҳосил мекунем.

3. Таносубе, ки дар он узвҳои мобайнӣ ва ё узвҳои канорӣ ба ҳамдигар баробаранд, таносуби бефосила номида мешавад.

Масалан, таносуби $a:b=c:d$ ва $c:k=l:c$ таносубҳои бефосилаанд.

Мисоли 2. Таносубҳои $15:6=6:24$ ва $15:9=25:15$ таносубҳои бефосилаанд.

Аз мафҳуми таносуб истифода бурда, мафҳуми мутаносибии бузургиҳоро дида мебароем.

Як қатор бузургиҳое ҳастанд, ки байни худ чунин вобастагӣ доранд: ба ҳар як қимати як бузургӣ қимати муайяни дигар бузургӣ мувофиқ меояд. **Масалан**, вақти кор ва музди кор; ҳаҷми керосин ва ҳарорат ва ғайраҳо. Вобастагии бузургиҳоро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисоли 3. Дар китобҳои дарсӣ вобастагии байни ҳаҷми керосин ва ҳарорат дар намуди зерин оварда шудааст:

Ҳарорат:	Ҳаҷми керосин:
	1 *литр*;
0°	1,01 *литр*;
10°	1,02 *литр*;
20°	1,03 *литр*;
30°	1,04 *литр*;
40°	.....
.....	

Аз мисоли овардашуда маълум мешавад, ки ба ҳар як қимати ҳарорат ҳаҷми муайяни керосин мувофиқ омада истодааст. Чӣ хеле, ки мебинем бо зиёд шудани дараҷаи ҳарорат, ҳаҷми керосин ҳам зиёд шуда истодааст. Ин аст вобастагии байни ҳарорат ва ҳаҷми керосин.

Таърифи 2. *Агар ду бузурги A ва B яке аз дигаре чунин вобаста бошанд, ки нисбати ду қимати дилхоҳи як бузургӣ ба нисбати қиматҳои мувофиқи бузургии дуюм баробар бошад, он гоҳ чунин бузургиҳоро бузургиҳои мутаносибан роста меноманд.*

Таърифи 3. *Агар бузургиҳои A ва B роста мутаносиб бошад, он гоҳ нисбати ҳар ду қимати мувофиқи онҳо адади доимӣ мебошад. Ин адади доимиро коэффитсиенти мутаносибӣ меноманд.*

Барои ҳисоб кардани коэффитсиенти мутаносибӣ, қимати дилхоҳи як бузургиро ба қимати мувофиқи бузургии дигар тақсим кардан лозим аст.

Қимати дилхоҳи як бузургиро бо y, қимати ба он мувофиқи бузургии дигарро бо x ва коэффитсиенти мутаносибиро бо k ишорат карда навишта метавонем:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ё ки} \quad y = kx.$$

Баробарии пайдошуда формулаи мутаносибии роста номида мешавад.

Таърифи 4. *Агар дар байни ду бузургии A ва B чунин вобастагие мавҷуд бошад, ки мувофиқи он нисбати ду қимати дилхоҳи бузургии якум ба нисбати чаппаи қиматҳои мувофиқи бузургии дуюм баробар шавад, он гоҳ чунин бузургиҳоро бузургиҳои мутаносибан чапа меноманд.*

§8. Таносуб ва хосиятҳои он

Дар §6 мо бо мафҳуми нисбат шинос шудем. Акнун аз мафҳуми нисбат истифода бурда, мо мафҳуми таносуб ва хосиятҳои онро дида мебароем.

Таърифи 1. *Баробарии ду нисбат таносуб номида мешавад.*

Масалан, агар $a:b=e$ ва $c:d=e$ бошад, он гоҳ баробарии $a:b=c:d$ таносуб номида мешавад. Чор ададе, ки таносубро ташкил медиҳанд, ададҳои мутаносибӣ номида мешаванд. Дар таносуби додашуда a ва d-ро узвҳои канорӣ, b ва c-ро узвҳои мобайнӣ меноманд.

Хосиятҳои асосии таносубро номбар мекунем:

1. Ҳосили зарби узвҳои канории таносуб ба ҳосили зарби узвҳои мобайниаш баробар аст.

Масалан: дар таносуби $a:b=c:d$ доимо $a\cdot d=b\cdot c$ мебошад.

Мисоли 1. Дар таносуби $\frac{1}{2}:\frac{1}{48}=20:\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{48}\cdot 20$; $\frac{5}{12}=\frac{5}{12}$ аст.

2. Агар мо дар як вақт узви дилхоҳи канорӣ ё мобайнии таносубро якчанд маротиба зиёд ё кам кунем, таносуб вайрон намешавад.

Масалан, узви якуми канорӣ ва узви дуюми мобайнии таносуби $64:8=80:10$-ро 16 маротиба кам карда таносуби $4:8=5:10$-ро ҳосил мекунем.

3. Таносубе, ки дар он узвҳои мобайнӣ ва ё узвҳои канорӣ ба ҳамдигар баробаранд, таносуби бефосила номида мешавад.

Масалан, таносуби $a:b=c:d$ ва $c:k=l:c$ таносубҳои бефосиланд.

Мисоли 2. Таносубҳои $15:6=6:24$ ва $15:9=25:15$ таносубҳои бефосиланд.

Аз мафҳуми таносуб истифода бурда, мафҳуми мутаносибии бузургиҳоро дида мебароем.

Як қатор бузургиҳое ҳастанд, ки байни худ чунин вобастагӣ доранд: ба ҳар як қимати як бузургӣ қимати муайяни дигар бузургӣ мувофиқ меояд. **Масалан**, вақти кор ва музди кор; ҳаҷми керосин ва ҳарорат ва ғайраҳо. Вобастагии бузургиҳоро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисоли 3. Дар китобҳои дарсӣ вобастагии байни ҳаҷми керосин ва ҳарорат дар намуди зерин оварда шудааст:

Ҳарорат:	Ҳаҷми керосин:
	1 *литр*;
0°	1,01 *литр*;
10°	1,02 *литр*;
20°	1,03 *литр*;
30°	1,04 *литр*;
40°	.....
.....	

Аз мисоли овардашуда маълум мешавад, ки ба ҳар як қимати ҳарорат ҳаҷми муайяни керосин мувофиқ омада истодааст. Чӣ хеле, ки мебинем бо зиёд шудани дараҷаи ҳарорат, ҳаҷми керосин ҳам зиёд шуда истодааст. Ин аст вобастагии байни ҳарорат ва ҳаҷми керосин.

Таърифи 2. *Агар ду бузурги A ва B яке аз дигаре чунин вобаста бошанд, ки нисбати ду қимати дилхоҳи як бузургӣ ба нисбати қиматҳои мувофиқи бузургии дуюм баробар бошад, он гоҳ чунин бузургиҳоро бузургиҳои мутаносибан роста меноманд.*

Таърифи 3. *Агар бузургиҳои A ва B роста мутаносиб бошад, он гоҳ нисбати ҳар ду қимати мувофиқи онҳо адади доимӣ мебошад. Ин адади доимиро коэффитсиенти мутаносибӣ меноманд.*

Барои ҳисоб кардани коэффитсиенти мутаносибӣ, қимати дилхоҳи як бузургиро ба қимати мувофиқи бузургии дигар тақсим кардан лозим аст.

Қимати дилхоҳи як бузургиро бо y, қимати ба он мувофиқи бузургии дигарро бо x ва коэффитсиенти мутаносибиро бо k ишорат карда навишта метавонем:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{ё ки} \quad y = kx .$$

Баробарии пайдошуда формулаи мутаносибии роста номида мешавад.

Таърифи 4. *Агар дар байни ду бузургии A ва B чунин вобастагие мавҷуд бошад, ки мувофиқи он нисбати ду қимати дилхоҳи бузургии якум ба нисбати чаппаи қиматҳои мувофиқи бузургии дуюм баробар шавад, он гоҳ чунин бузургиҳоро бузургиҳои мутаносибан чаппа меноманд.*

Масалан, агар $a_1, a_2, a_3, \ldots$ қиматҳои бузургии A бошанд ва $b_1, b_2, b_3, \ldots$ қиматҳои бузургии B бошанд ва агар $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_2}{b_1}$; $\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_3}{b_2}$; ..... шавад, он гоҳ бузургҳои A ва B бузургиҳои мутаносибан чаппа мебошанд.

Дар ин ҷо ҳам агар x ва y қиматҳои бузургҳои A ва B бошад ва k коэффитсиенти мутаносибӣ бошад, он гоҳ формулаи мутаносибии чаппа дар намуди $y=\frac{k}{x}$ навишта мешавад.

Мисоли 1. 72%-и ададиро зеринро ёбед:

$$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230{,}04+46{,}75}{0{,}01}.$$

Ҳал. А) Дар аввал ифодаи арифметикиро ҳисоб карда, ададиро додашударо меёбем:

$$1.\ 13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}=1\frac{54-40-180}{216}=\frac{216}{216}-\frac{166}{216}=$$
$$=\frac{216-166}{216}=\frac{50}{216}=\frac{25}{108};$$
$$2.\ \frac{25}{108}\cdot 230{,}04=\frac{25}{108}\cdot 230\frac{4}{100}=\frac{25}{108}\cdot\frac{23004}{100}=$$
$$=\frac{25\cdot 23004}{108\cdot 100}=\frac{1\cdot 213}{1\cdot 4}=\frac{213}{4};$$
$$3.\ \frac{213}{4}+46{,}75=\frac{213}{4}+46\frac{75}{100}=\frac{213}{4}+\frac{4675}{100}=$$
$$=\frac{213\cdot 100+4675\cdot 4}{4\cdot 100}=\frac{21300+18700}{400}=\frac{40000}{400}=100;$$
$$4.\ 100:0{,}01=10000:1=10000.$$

Б) Протсенти ададиро ёфташударо бо ду тарз ҳисоб мекунем:

Тарзи якум. Барои ёфтани 72%-и ададиро 10000 бояд додашударо ба 100 тақсим намуда, баъд ба 72 зарб зад.

$$a=\frac{N}{100}\cdot p \Rightarrow a=\frac{10000}{100}\cdot 72 \Rightarrow a=7200.$$

Тарзи дуюм. Бо тарзи таносуб ҳисоб мекунем:

$$\begin{array}{ccc} 10000 & - & 100\% \\ x & - & 72\% \end{array}$$

$$x = \frac{10000}{100} \cdot 72 \Rightarrow x = 7200.$$

Ҷавоб: 72%-и адади додашуда ба 7200 баробар будааст.

Мисоли 2. Аз таносуби додашуда қимати адади номаълуми x -ро ёбед:

$$\frac{3,6}{14 - 15\frac{1}{8} : 2,2} = \frac{x}{1,5 + 2\frac{2}{3} + 3,75}.$$

Ҳал. А) Ифодаҳои дар махрачи таносуб бударо ҳисоб мекунем:

1. $15\frac{1}{8} : 2,2 = \frac{121}{8} : 2\frac{2}{10} = \frac{121}{8} : \frac{22}{10} = \frac{121}{8} \cdot \frac{10}{22} = \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{55}{8}$;

2. $14 - \frac{55}{8} = \frac{112 - 55}{8} = \frac{57}{8}$;

3. $1,5 + 2\frac{2}{3} + 3,75 = 1\frac{5}{10} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{75}{100} = \frac{15}{10} + \frac{8}{3} + \frac{375}{100} =$

$$= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{15}{4} = \frac{18 + 32 + 45}{12} = \frac{95}{12}.$$

Б) Қиматҳои ҳисоб кардашударо гузошта, таносубро ҳал мекунем:

$$\frac{3,6}{57} = \frac{x}{95}; \quad \frac{3,6 \cdot 8}{57} = \frac{x \cdot 12}{95}; \quad \frac{0,3 \cdot 8}{57} = \frac{x}{95};$$

$$\begin{matrix} 8 & 12 \end{matrix}$$

$$\frac{2,4}{57} = \frac{x}{95} \Rightarrow x = \frac{2,4 \cdot 95}{57} \Rightarrow x = \frac{2,4 \cdot 5 \cdot 19}{3 \cdot 19} = 0,8 \cdot 5 \Rightarrow x = 4.$$

Ҷавоб: 4.

МАШҚҲО

1. Амалҳоро ичро кунед:

а) $\frac{2 \cdot (-4) - 6 : (-2) - 1 + 2 \cdot (-3) + 15}{2 \cdot (-1) + 5}$;

б) $\frac{(1 - 3 + 5 - 9) : (-2) - 2}{(-2) \cdot (-3) + (-7) \cdot (-1,2 + 2,5 - 1,3)}$.

2. Ҳисоб кунед: а) $\frac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1,25) : 2,5}$;

б) $\dfrac{(19\frac{1}{6}+43{,}75):\frac{5}{6}}{(13{,}3-11\frac{1}{2}):1{,}8}-\dfrac{(26{,}8-23\frac{3}{7}):\frac{6}{35}}{0{,}5}$.

3. Магар ин баробариҳо дурустанд?

а) $\dfrac{-2{,}5-8{,}3:(3{,}875+\frac{1}{8})}{13\frac{5}{8}+5\frac{5}{42}\cdot(-1\frac{1}{6}-\frac{7}{12})}\cdot(-4\frac{2}{3})=44$;

б) $\dfrac{2{,}4\cdot(13\frac{1}{5}:6+69{,}3:19{,}8)-13{,}68}{(-5)\cdot(-\frac{3}{5})+(-0{,}8):(-4)}=0$.

4. Аз таносуби додашуда кимати x - ро ёбед:

$$\frac{0{,}9}{14-15\frac{1}{8}:2{,}2}=\frac{x}{1{,}5+2\frac{2}{3}+3{,}75}.$$

5. 25%-и адади зеринро ёбед.

$$\frac{4{,}5:(47{,}375-(26\frac{1}{3}-18\cdot 0{,}75)\cdot 2{,}4:0{,}88)}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}.$$

6. Ифодаро сода карда, x -ро ёбед:

$$\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{7}}+x-3\frac{1}{3}=1\frac{1}{6}.$$

7. x -ро ёбед:

а) $\dfrac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):x+(2{,}5:1{,}25):6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}=\frac{17}{27}$.

б) $\dfrac{x}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\dfrac{9\cdot\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}$.

АЛГЕБРА
БОБИ III. ДАРАҶА ВА РЕША

§1. Дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ

Дар ин параграф мо яке аз мафҳумҳои дараҷа - дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ ва хосиятҳои онро муоина мекунем.

Бигузор $a \in R$ ва $n \in N$ бошад.

Таърифи 1. *Дараҷаи адади a бо нишондиҳандаи натуралии n $(n \geq 2)$ гуфта, ҳосили зарби n-то зарбкунандаҳоро меноманд, ки ҳар яки онҳо ба a баробар аст:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n-маротиба}. \qquad (1)$$

Дар ин ҷо a-ро асоси дараҷа, адади n-ро нишондиҳандаи дараҷа ва натиҷаи бадарачабардориро (a^n) дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ меноманд.

Таърифи 2. *Дараҷаи адади a бо нишондиҳандаи 1 гуфта худи адади a-ро меноманд:*

$$a^1 = a. \qquad (2)$$

Ҳамин тариқ дар асоси таърифҳои якум ва дуюм навишта метавонем:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n-маротиба}, & агар\ n \geq 2, \\ a, & агар\ n = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Ҳангоми $n = 2$ будан, $a^2 = a \cdot a$-ро квадрати адади a меноманд.

Ҳангоми $n = 3$ будан, $a^3 = a \cdot a \cdot a$-ро кубы адади a меноманд.

Аз таърифҳои додашуда бармеояд:

1. Агар $a < 0$ ва n ҷуфт бошад, он гоҳ $a^n > 0$;

Масалан: $(-3)^2 > 0$; $(-\frac{3}{4})^{12} > 0$; $(-2{,}5)^8 > 0$; ...

2. Агар $a < 0$ ва n тоқ бошад, он гоҳ $a^n < 0$ мешавад;

Масалан: $(-5)^3 < 0$; $(-\frac{3}{7})^{11} < 0$; $(-\frac{4}{17})^{21} < 0$; ...

3. Барои ҳар гуна $a > 0$ доимо $a^n > 0$ мебошад.

4. Барои ҳар гуна n-и натуралии охирнок баробарии $0^n = 0$ ҷой дорад. **Масалан:**

$$0^5 = 0;\ 0^{15} = 0;\ 0^{100} = 0;\ldots$$

5. Барои ҳар гуна n-и натуралии охирнок баробарии $1^n = 1$ ҷой дорад. **Масалан:**

$$1^5 = 1;\ 1^{15} = 1;\ 1^{100} = 1;\ 1^{35} = 1;\ \ldots$$

Хосиятҳои асосии дараҷаи нишондиҳандааш натуралиро номбар мекунем:

1. Ҳангоми зарб кардани дараҷаҳои асосашон якхела асосро бетағйир монда, нишондиҳандаҳои дараҷаҳоро ҷамъ кардан лозим аст. **Масалан:**

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, ҳангоми $m, n \in N$.

$a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8;\ 7^2 \cdot 7^5 = 7^{2+5} = 7^7;$

$3^2 \cdot 27 = 3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5.$

2. Ҳангоми ба дараҷа бардоштани дараҷа асосро бетағйир монда, нишондиҳандаҳоро зарб кардан лозим аст.

$(a^m)^n = a^{mn}$, ҳангоми $m, n \in N$. **Масалан:**

$(2^3)^7 = 2^{3 \cdot 7} = 2^{21};$

$(5^3)^5 = 5^{35} = 5^{15};$

$(a^3 \cdot x)^4 = (a^3)^4 \cdot x^4 = a^{12} \cdot x^4;$

$x^2 \cdot (y^2)^3 = x^2 \cdot y^{2 \cdot 3} = x^2 \cdot y^6.$

3. Ҳангоми тақсим кардани дараҷаҳои асосашон якхела асосро бетағйир монда, аз нишондиҳандаи дараҷаи тақсимшаванда нишондиҳандаи дараҷаи тақсимкунандаро тарҳ кардан лозим аст.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, ҳангоми $m, n \in N,\ a \neq 0$. **Масалан:**

$\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3^1 = 3;\ \frac{8^{15}}{8^{13}} = 8^{15-13} = 8^2;$

$\frac{24}{32} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 2^3}{4 \cdot 2^3} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2 \cdot 2^3} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^5} = 3 \cdot 2^{3-5} = 3 \cdot 2^{-2}.$

4. Агар a адади охирнок ва $a \neq 0$ бошад, он гоҳ $a^0 = 1$ аст.

Аз хосиятҳои 3 ва 4 истифода бурда, барои ҳар гуна $a \neq 0$ ва $m, n \in N$ навишта метавонем:

$$\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases} a^{m-n}, & \text{агар } m>n, \\ 1, & \text{агар } m=n, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{агар } m<n. \end{cases} \qquad (4)$$

Масалан: $5^7:5^4=5^{7-4}=5^3=125;$

$$3^7:3^{12}=3^{7-12}=3^{-5}=\frac{1}{3^5};\ \frac{3a^3}{bc}\cdot\frac{4b^2}{2a^2}=\frac{6ab}{c};$$

$$\frac{7^2\cdot 7^5}{7^{12}}=\frac{7^{2+5}}{7^{12}}=\frac{7^7}{7^{12}}=7^{7-12}=7^{-5}=\frac{1}{7^5}.$$

5. Агар $a>0$ ва $m,n\in N$ бошад, он гоҳ:

$$(-a)^n=\begin{cases} a^n, & \text{агар } n \text{ - ҷуфт бошад,} \\ -a^n, & \text{агар } n \text{ - тоқ бошад.} \end{cases}$$

6. Агар $n\in N$ бошад, он гоҳ $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ аст.

7. Агар $b\neq 0$ ва $n\in N$ бошад, он гоҳ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ мешавад.

8. Мувофиқи таърифи дараҷаи нишондиҳандааш натуралӣ барои ҳар гуна $\frac{a}{b}, b\neq 0$ навишта метавонем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\frac{a}{b}}_{n\text{-маротиба}}. \qquad (5)$$

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\frac{12^3\cdot 28^3}{21^3\cdot 4^3}$.

Ҳал. $\frac{12^3\cdot 28^3}{21^3\cdot 4^3}=\frac{(4\cdot 3)^3\cdot(4\cdot 7)^3}{(3\cdot 7)^3\cdot 4^3}=\frac{4^3\cdot 3^3\cdot 4^3\cdot 7^3}{3^3\cdot 7^3\cdot 4^3}=4^3=64.$

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $\frac{(-3)\cdot(-2)^{15}+(-2)^{12}}{4^6\cdot 5^2}$.

Ҳал. $\frac{(-3)\cdot(-2)^{15}+(-2)^{12}}{4^6\cdot 5^2}=\frac{(-3)\cdot(-2)^{15}+(-2)^{12}}{(2^2)^6\cdot 5^2}=$

$$=\frac{(-2)^{12}\left[(-3)\cdot(-2)^3+1\right]}{2^{12}\cdot 5^2}=\frac{2^{12}\left[(-3)\cdot(-8)+1\right]}{2^{12}\cdot 5^2}=\frac{24+1}{5^2}=\frac{25}{25}=1.$$

1. Ҳисоб кунед: а) $\frac{(3\cdot 2^{20}+7\cdot 2^{19})^2}{(13\cdot 8^4)^2}$. б) $(-2{,}56)^3\cdot\left(1\frac{9}{16}\right)^3$;

в) $\frac{15^3\cdot 21^2}{35^2\cdot 3^4}+\frac{(-2)\cdot(-3)^{17}-3^{16}}{9^7\cdot 15}$.

2. Сода кунед: $\frac{5\cdot 2^{k-2}+10\cdot 2^{k-1}}{10^{k+2}}$.

3. Кадоме аз ин ду ададҳо калон аст?

а) 5^{200} ё 3^{300}; б) $(0{,}5)^4$ ё $(0{,}25)^3$.

§2. Дараҷаи нишондиҳандааш бутун

Дар ин ҷо мафҳуми дигари дараҷа - дараҷаи нишондиҳандааш нол ва дараҷаи нишондиҳандааш адади бутуни манфиро муоина мекунем.

Бигузор $a\in R$ ва $n\in Z$ бошад.

Таърифи 1. *Агар a адади охирнок ва нобаробари 0 бошад, он гоҳ $a^0=1$ аст.* **Масалан:**

$$25^0=1;\ 107^0=1;\ (-151)^0=1;\ \left(-\frac{4}{9}\right)^0=1;\ldots$$

Ифодаи 0^0 маъно надорад.

Таърифи 2. *Агар $a\neq 0$ ва $n\in N$ бошад, он гоҳ:*

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Масалан: $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $8^{-3}=\frac{1}{8^3}=\frac{1}{512}$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=\frac{8}{1}=8$ ё ки $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(2^{-1}\right)^{-3}=2^3=8$.

Ифодаи 0^{-n} низ маъно надорад.

Хосиятҳои асосии дараҷаи нишондиҳандааш бутунро қайд мекунем:

1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; 2. $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; 3. $(a^m)^n=a^{mn}$;

4. $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Дар ин ҷо $a \neq 0, b \neq 0$ ададҳои дилхоҳ, n ва m ададҳои бутун мебошанд.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\frac{36^{-4}\cdot 3^4 \cdot 81}{2^{-6}}$.

Ҳал. $\frac{36^{-4}\cdot 3^4 \cdot 81}{2^{-6}} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 81}{36^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{(4\cdot 9)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{4^4 \cdot (3^2)^4} =$

$= \frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} = \frac{2^6 \cdot 3^8}{2^8 \cdot 3^8} = \frac{1\cdot 1}{2^2 \cdot 1} = \frac{1}{4\cdot 1} = \frac{1}{4}$.

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $\frac{18^{-3}\cdot 3^7}{2^{-5}}$.

Ҳал. $\frac{18^{-3}\cdot 3^7}{2^{-5}} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{18^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{(2\cdot 9)^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 9^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot (3^2)^3} =$

$= \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 3^6} = \frac{2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^6 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3 = 4\cdot 3 = 12.$

МАШҚҲО

1. Ҳисоб кунед: $\left(\frac{1{,}7\cdot 6}{5{,}1}\right)^{-3} + \frac{2^{-3}\cdot 4^0 + 3^{-2}\cdot 2^3}{4^{-1}\cdot 8 - 3^{-3}\cdot 27}$.
2. Сода кунед: $\frac{(ab)^4}{(a^{-2}\cdot b^{-3})^{-3}}$.
3. 2,4%-и адади $\frac{18^{-3}\cdot 3^7}{2^{-5}} + \left(3^{-2}\cdot 27 + 2^{-3}\cdot 12\right)\cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ -ро ёбед.

§3. Решаи квадратӣ ва хосиятҳои он

Бигузор $a \in R$ $(a \geq 0)$ бошад.

Таърифи 1. *Решаи квадратии адади* a $(a \geq 0)$ *гуфта, чунин адади* b *-ро меноманд, ки квадрати ш ба* a *баробар аст,* яъне,

$\sqrt{a} = b$, агар $b^2 = a$ бошад. (6)

Масалан, адади 6 решаи квадратӣ аз 36 мебошад, чунки $6^2 = 36$ аст; адади $\frac{1}{7}$ решаи квадратӣ аз $\frac{1}{49}$ мебошад, чунки

$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$ ва адади $\left(-\frac{1}{7}\right)$ решаи квадратӣ аз $\frac{1}{49}$ мебошад, чунки $\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$ аст.

Бо ин гуфта метавонем, ки ададҳои b ва $-b$ решаҳои квадратӣ аз a мебошанд, чунки $b^2 = a$ ва ҳам $(-b)^2 = a$ аст. Бинобар он аз ду реша, решаи мусбаташро қабул карда, онро решаи арифметикӣ меноманд.

Бигузор $a \in R$ $(a \geq 0)$ ва $b \in R$ $(b \geq 0)$ бошад.

Таърифи 2. *Решаи квадратии арифметикии адади* a $(a \geq 0)$ *гуфта, чунин адади гайриманфии* b $(b \geq 0)$*-ро меноманд, ки квадраташ ба* a *баробар аст*, яъне,

$\sqrt{a} = b$, агар $b^2 = a, b > 0$ бошад.

Дар ин ҷо $\sqrt{}$ - аломати решаи квадратӣ, a - ифодаи таҳти решагӣ ва $\sqrt{a}$-ро решаи квадратии арифметикии адади a меноманд. **Масалан:**

7 решаи квадратии арифметикии адади 49 аст, чунки $\sqrt{49} = 7$, яъне $7^2 = 49$ ва 7 адади гайриманфӣ мебошад. -7 решаи квадратии арифметикии адади 49 шуда наметавонад, чунки вай адади манфӣ аст. Пас, аз ин ҷо хулоса мебарояд, ки баробарии $\sqrt{49} = 7$ дуруст аст, баробарии $\sqrt{49} = -7$ ё ки $\sqrt{49} = \pm 7$ нодуруст будааст.

Навиштани $\sqrt{0}$ - решаи квадратии арифметикии 0-ро мефаҳмонад: $\sqrt{0} = 0$, чунки $0^2 = 0$ ва 0 - адади гайриманфист.

Навиштани $\sqrt{1}$ - решаи квадратии арифметикии 1-ро мефаҳмонад: $\sqrt{1} = 1$, чунки $1^2 = 1$ ва 1- адади гайриманфист.

Аз таърифи решаи квадратии арифметикӣ ва мисолҳои дар боло муоина кардашуда чунин натиҷа бармеояд:

1. Ифодаи $\sqrt{a}$ ҳангоми $a < 0$ будан маъно надорад.

Масалан, ифодаи $\sqrt{-5}$ маъно надорад, чунки чунин ададе ҳақиқие нест, ки квадраташ ба адади манфӣ баробар бошад.

2. Агар $\sqrt{a}$ маъно дошта бошад, он гоҳ қимати он ғайриманфист. Ҳамин тариқ, гуфтан мумкин аст, ки барои ҳар гуна $a \in R$ $\sqrt{a^2} = |a|$ аст. **Масалан:**

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5;$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5;$$

$$\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{агар } a \geq b, \\ b-a, & \text{агар } a < b. \end{cases}$$

Хосиятҳои асосии решаи квадратии арифметикиро номбар мекунем:

1. Агар $a \geq 0$ ва $b \geq 0$ бошанд, он гоҳ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

2. Агар $a \geq 0$ ва $b > 0$ бошанд, он гоҳ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

3. Агар $a > b > 0$ бошад, он гоҳ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ мешавад.

Мисоли 1. Ифодаро сода кунед:

$$\left(\sqrt{14} - 2\sqrt{35}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{20}.$$

Ҳал. $\left(\sqrt{14} - 2\sqrt{35}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{20} =$

$$= \left(\sqrt{2 \cdot 7} - 2\sqrt{5 \cdot 7}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} =$$

$$= \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} =$$

$$= \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{5}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot 7 + 2\sqrt{5} =$$

$$= \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{5}\right) + 2\sqrt{5} = \sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{2}.$$

Мисоли 2. Амалҳоро ичро кунед: $\sqrt{125} - \sqrt{75} + 5\sqrt{3} - \sqrt{80}$.

Ҳал. $\sqrt{125} - \sqrt{75} + 5\sqrt{3} - \sqrt{80} =$

$$= \sqrt{25 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{4^2 \cdot 5} =$$

$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5} =$$

$$= 5\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{5} =$$

$$= 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

МАШҚҲО

1. Ифодаро сода кунед: $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{\frac{b^3}{a^2}}$.
2. Ифодаро сода кунед: $\sqrt{\frac{x^2}{y}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$.
3. Амалҳоро ичро кунед: $\sqrt{343} - \sqrt{252} - \sqrt{7}$.
4. Амалҳоро ичро кунед:

$$\sqrt{12} - 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 2\sqrt{75} + 3\sqrt{108}.$$

5. Амалҳоро ичро кунед: $3\sqrt{\frac{1}{27}} - \frac{5}{6}\sqrt{27} - 0{,}1\sqrt{75} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

§4. Решабарорӣ ҳамчун амали баръакси бадарачабардорӣ

Дар ин параграф яке аз мафҳумҳои асосии решаи квадратии арифметикии адади a $(a \geq 0)$-ро дида мебароем, ки вай решабарорӣ мебошад. Чи тавре, ки баён кардем, решаи квадратии адади a $(a \geq 0)$ гуфта, чунин адади b-ро меноманд, ки квадрататаш ба a баробар аст. Яъне, дар ин ҷо ёфтани адади b-ро ҳамчун амали баръакси бадарачабардорӣ дида баромадан мумкин аст. Дар ин ҷо $\sqrt{a}$ адади ҳақиқӣ, ратсионалӣ ва ҳам ирратсионалӣ шуданаш мумкин аст. Чи хеле, ки қайд карда будем, адади ратсионалӣ бо нисбати ду адади бутуни ихтисориашавандаи p ва q ифода карда мешавад:

$$r = \frac{p}{q} \ (q \neq 0), \ r \in Q. \qquad (7)$$

Аммо, қайд кардан лозим аст, ки дар мачмуи ададҳои ратсионалӣ амали решабарорӣ на ҳамеша ичрошаванда аст.

Масалан, ададҳои $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \ldots$ ва гайраҳо ададҳои ирратсионалӣ мебошад ва ба мачмуи Q тааллук надорад.

Таърифи 1. *Адади ратсионалии c $(c > 0)$ қимати тақрибии решаи $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ бо нарасоғи саҳеҳаш то α $(0 < \alpha \in Q)$ номида мешавад*, агар

$$c^2 < a < (c + \alpha)^2 \qquad (8)$$

бошад.

Бузургии $c+\alpha$ қимати тақрибии $\sqrt{a}$ бо барзиёдатии саҳеҳиаш то α номида мешавад.

Мисоли 1. Қимати $\sqrt{3}$ бо саҳеҳии то $\frac{1}{5}$ ҳисоб кунед.

Ҳал. Азбаски, $3=\frac{3\cdot 5^2}{5^2}=\frac{3\cdot 25}{25}=\frac{75}{25}$ аст, пас $\sqrt{3}=\sqrt{\frac{75}{25}}=\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{75}}{5}$ мешавад. Бинобар он кифоя аст, ки $\sqrt{75}$ -ро то саҳеҳии 1 ҳисоб карда, баъд онро ба 5 тақсим намоем.

Азбаски, $\sqrt{75}=8$ (бо саҳеҳии то 1), пас $\sqrt{3}=\frac{8}{5}$ (бо саҳеҳии то $\frac{1}{5}$) мебошад. Пас, дар асоси нобаробарии $c^2<a<(c+\alpha)^2$, нобаробарии

$$\left(\frac{8}{5}\right)^2<3<\left(\frac{8}{5}+\frac{1}{5}\right)^2$$

-ро навиштан мумкин аст.

Мисоли 2. Қимати тақрибии $\sqrt{72,6115}$ бо саҳеҳии 0,01 ҳисоб кунед.

Ҳал. Адад аз таҳти решаи квадратӣ бо усули зерин бароварда мешавад:

$$\sqrt{72,6115}=8,52$$

165	64
+ 5	× 0861
1702	825
2	× 3615
	3404

211 бақия

Яъне, $\sqrt{72,6115}\approx 8,52$ бо норасогии саҳеҳиаш то 0,01 ва $\sqrt{72,6115}=(8,52+0,01)$ бо барзиёдатии саҳеҳиаш то 0,01 мебошад, чунки $(8,52)^2<72,6115<(8,52+0,01)^2$ аст.

§5. Решаи дараҷаи n ва хосиятҳои он

Бигузор $a \in R$ ва $n \in N$ $(n \geq 2)$ бошад.

Таърифи 1. *Решаи дараҷаи n-ум аз адади a гуфта, чунин адади b-ро меноманд, ки дараҷаи n-умаш ба адади a баробар аст,* яъне

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \qquad (9)$$

Мисоли 1. Навиштти $\sqrt[3]{27}$ решаи дараҷаи 3 аз 27-ро мефаҳмонад. Инак, $\sqrt[3]{27} = 3$ мебошад, чунки $3^3 = 27$ аст.

Мисоли 2. Навиштти $\sqrt[3]{-27}$ решаи дараҷаи 3 аз -27-ро мефаҳмонад. Инак, $\sqrt[3]{-27} = -3$ мебошад, чунки $(-3)^3 = -27$ аст.

Таърифи 2. *Решаи дараҷаи n-уми арифметики адади a $(a \geq 0)$ гуфта, чунин адади ғайриманфии b $(b \geq 0)$-ро меноманд, ки дараҷаи n-умаш ба адади a баробар аст,* яъне

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ агар } b^n = a \quad (b \geq 0) \qquad (10)$$

Масалан, ададҳои 2 ва -2 решаҳои дараҷаи чорум аз адади 16 хастанд. Дар ин ҷо 2-ро решаи дараҷаи чоруми арифметикии адади 16 меноманд, лекин адади -2 решаи дараҷаи чоруми арифметикии адади 16 шуда наметавонад, чунки мусбат нест.

Бигузор $a \in R$ $(a > 0)$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{a} = b$ решаи дараҷаи n-уми арифметики адади a-ро мефаҳмонад, агар $b > 0$ бошад, чунки

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$$

мебошад.

Агар $n \in N$ (n-ток, $n \geq 3$) бошад, он гоҳ

$$(-b)^n = -b^n = -a$$

аст. *Аз ин баробарӣ маълум мешавад, ки ҳангоми $b > 0$ будан адади манфӣ $(-b)$ - решаи дараҷаи тоқи n-ум аз адади манфии $(-a)$ аст,* яъне

$$-b = -\sqrt[n]{a} \Rightarrow (-b)^n = -a \qquad (11)$$

аст.

Масалан: $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -\sqrt[3]{4^3} = -4$; $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$ ва ғайраҳо.

Аз мисолҳои дар боло муоина кардашуда қоидаи зерин бармеояд:

1. Агар $n\in N$ (n- тоқ, $n\geq 3$) бошад, он гоҳ ифодаи $\sqrt[n]{a}$ барои ҳар гуна адади ҳақиқии a маъно дорад.

2. Агар $n\in N$ (n- ҷуфт, $n\geq 2$) бошад, он гоҳ ифодаи $\sqrt[n]{a}$ барои ҳаргуна адади ҳақиқии $a\geq 0$ маъно дорад.

Инак, навишти намуди $\sqrt[n]{a}$ решаи дараҷаи n-уми арифметикии адади a, ҳангоми $a\geq 0$-ро мефаҳмонад, ё ки решаи дараҷаи тоқи n-уми ($n\geq 3$, n- тоқ) арифметикии адади a, ҳангоми $a<0$-ро мефаҳмонад.

Хосиятҳои асосии решаи дараҷаи n-умро номбар мекунем:

1. Агар $a\geq 0, n\in N$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ аст;

2. Агар $a\geq 0, b\geq 0$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ аст;

3. Агар $a\geq 0, b\geq 0$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{a^n b}=a\cdot\sqrt[n]{b}$ аст;

4. Агар $a\geq 0, b>0$ бошад, он гоҳ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ аст;

5. Агар $a\geq 0,\ \ m,n\in N$ бошад, он гоҳ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ аст;

6. Агар $a\geq 0,\ \ m,n\in N$ бошад, он гоҳ ҳангоми $n\geq 2,\ m\geq 2$ будан $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ мебошад;

7. Аз $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b},\ \ n\in N$;

8. Аз $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\Rightarrow a>b$ $(a>0, b>0,\ n\in N)$;

9. Агар $a\in R$ ва $n\in N$ бошад, он гоҳ

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, \text{ агар } n \text{ - ҷуфт ва } n\geq 2;\\ a, \text{ агар } n \text{ - тоқ ва } n\geq 3.\end{cases}$$

Таърифи 3. *Решаҳо баробар номида мешаванд, агар ифодаи таҳти решаҳо ва дараҷаи решаҳо якхела бошанд.*

Мисоли 3. Ифодаи $\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+4\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{2}-7\sqrt{3}-15\sqrt{5}\right)$ -ро сода кунед.

Ҳал. $\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+4\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{2}-7\sqrt{3}-15\sqrt{5}\right)=$

$$=2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+4\sqrt{5}-3\sqrt{2}+7\sqrt{3}+15\sqrt{5}=9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+19\sqrt{5}.$$

Мисоли 4. Ҳисоб кунед: $3\cdot\sqrt[3]{1-\frac{25}{27}}$.

Ҳал. $3\cdot\sqrt[3]{1-\frac{25}{27}}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{27-25}{27}}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=\sqrt[3]{27\cdot\frac{2}{27}}=\sqrt[3]{2}$.

Мисоли 5. Амали зарбро ичро кунед: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}$.

Ҳал. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}=\sqrt{2}\cdot(\sqrt[3]{-3})=-(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3})=$

$=-(\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2})=-\sqrt[6]{2^3\cdot3^2}=-\sqrt[6]{8\cdot9}=-\sqrt[6]{72}.$

МАШҚҲО

1. Ҳисоб кунед: а) $\sqrt{\frac{\sqrt{25^2-24^2}}{21{,}5^2-14{,}5^2}}$.

б) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

2. Сода кунед: $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.

3. Сода кунед: $\sqrt{1300}-2\sqrt{52}-12\sqrt{1\frac{4}{9}}+5\sqrt{3\frac{1}{4}}$.

4. Ҳисоб кунед: $\sqrt{\frac{64\cdot324}{529\cdot49}}$.

§6. Дарачаи нишондиҳандааш рационалӣ

Бори дигар хотиррасон мекунем, ки барои ҳар гуна $a\in R$, $m, n\in Z$ баробарии $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ чой дорад.

Барои ҳар гуна $a\in R$ $(a\geq0)$ қимати a^x барои ҳамаи қиматҳои дилхоҳи касрии x адади мусбат мебошад.

Мо дар ин ҷо мафҳуми дарачаи нишондиҳандааш касри рационалиро дохил карда, бо ҳамин мафҳуми дарачаро васеъ мекунем.

Таърифи 1. *Агар $a\geq0$ ва x касри рационалии дилхоҳи намуди $\frac{m}{n}$, $(m\in Z,\ n\geq2$ адади натуралӣ$)$ бошанд,* он гоҳ:

$$a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (11)$$

меша̄вад.

Таърифи 2. *Агар* $a=0$ *ва* $x>0$ *бошанд, он гоҳ* $a^x=0$ *мешавад.*

Таърифи 3. *Агар* $a\neq 0$ *ва* $x=0$ *бошанд, он гоҳ* $a^0=1$ *мешавад.*

Таърифи 4. *Агар* $a>0$ *ва* $x<0$ *бошанд, он гоҳ* $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$ *мешавад.*

Хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандааш ратсионалиро номбар мекунем:

1. Агар $a>0$ ва $x=\frac{mk}{nk}$, $k\in N$ бошанд, он гоҳ:

$$a^{\frac{mk}{nk}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$ мешавад.

2. Агар $a>0$, $b>0$, $r_1, r_2\in Q$ бошанд, он гоҳ:

а) $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$; б) $a^{r_1}:a^{r_2}=a^{r_1-r_2}$;

в) $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1\cdot r_2}$; г) $(ab)^{r_1}=a^{r_1}\cdot b^{r_1}$; г) $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1}=\frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$.

3. Аз $a\neq 0$, $a^0=1$ ва $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$ $(n\in N)\Rightarrow a^x=\frac{1}{a^{-x}}$ барои ҳар гуна $x\in R$ аст.

Дар навбати худ дар хотир доштан зарур аст, ки ифодаҳои маъно надошта низ ҳастанд. **Масалан:** ифодаҳои $0^{-\frac{1}{2}}$; $(-2)^{\frac{3}{8}}$; $(-7)^{\frac{1}{2}}$; $(-5)^{-\frac{1}{4}}$; … **ва гайраҳо.**

Мисоли 1. Сода кунед: $5\sqrt{\frac{2}{5}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{10}-3\sqrt{\frac{10}{9}}+\sqrt{160}$.

Ҳал. $5\sqrt{\frac{2}{5}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{10}-3\sqrt{\frac{10}{9}}+\sqrt{160}=$

$=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{\frac{10}{9}}+\sqrt{4^2\cdot 10}=$

$=\sqrt{5^2\cdot\frac{2}{5}}-\sqrt{2^2\cdot\frac{5}{2}}+\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{3^2\cdot\frac{10}{9}}+\sqrt{4^2\cdot 10}=$

$=\sqrt{5\cdot 2}-\sqrt{2\cdot 5}+\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{2\cdot 5}+\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{10}=4\sqrt{10}.$

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot(0{,}125)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Мисоли 4. Ҳисоб кунед: $3\cdot\sqrt[3]{1-\frac{25}{27}}$.

Ҳал. $3\cdot\sqrt[3]{1-\frac{25}{27}}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{27-25}{27}}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{27}}=\sqrt[3]{27\cdot\frac{2}{27}}=\sqrt[3]{2}$.

Мисоли 5. Амали зарбро ичро кунед: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}$.

Ҳал. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{-3}=\sqrt{2}\cdot(\sqrt[3]{-3})=-(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3})=$

$=-(\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2})=-\sqrt[6]{2^3\cdot3^2}=-\sqrt[6]{8\cdot9}=-\sqrt[6]{72}.$

МАШҚҲО

1. Ҳисоб кунед: а) $\sqrt{\frac{\sqrt{25^2-24^2}}{21{,}5^2-14{,}5^2}}$.

б) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

2. Сода кунед: $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.

3. Сода кунед: $\sqrt{1300}-2\sqrt{52}-12\sqrt{1\frac{4}{9}}+5\sqrt{3\frac{1}{4}}$.

4. Ҳисоб кунед: $\sqrt{\frac{64\cdot324}{529\cdot49}}$.

§6. Дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ

Бори дигар хотиррасон мекунем, ки барои ҳар гуна $a\in R$, $m, n\in Z$ баробарии $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ чой дорад.

Барои ҳар гуна $a\in R$ $(a\geq0)$ қимати a^x барои ҳамаи қиматҳои дилхоҳи касрии x адади мусбат мебошад.

Мо дар ин ҷо мафҳуми дарачаи нишондиҳандааш касри ратсионалиро дохил карда, бо ҳамин мафҳуми дарачаро васеъ мекунем.

Таърифи 1. *Агар* $a\geq0$ *ва* x *касри ратсионалии дилхоҳи намуди* $\frac{m}{n}$, $(m\in Z,\ n\geq2$ *адади натуралӣ) бошанд*, он гоҳ:

$$a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (11)$$

мешавад.

Таърифи 2. *Агар* $a=0$ *ва* $x>0$ *бошанд, он гоҳ* $a^x=0$ *мешавад.*

Таърифи 3. *Агар* $a\neq 0$ *ва* $x=0$ *бошанд, он гоҳ* $a^0=1$ *мешавад.*

Таърифи 4. *Агар* $a>0$ *ва* $x<0$ *бошанд, он гоҳ* $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$ *мешавад.*

Хосиятҳои дараҷаи ношондиҳандааш ратсионалиро номбар мекунем:

1. Агар $a>0$ ва $x=\frac{mk}{nk}$, $k\in N$ бошанд, он гох:

$$a^{\frac{mk}{nk}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$ мешавад.

2. Агар $a>0$, $b>0$, $r_1, r_2\in Q$ бошанд, он гох:

а) $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$; б) $a^{r_1}:a^{r_2}=a^{r_1-r_2}$;

в) $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1\cdot r_2}$; г) $(ab)^{r_1}=a^{r_1}\cdot b^{r_1}$; г) $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1}=\frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$.

3. Аз $a\neq 0$, $a^0=1$ ва $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$ $(n\in N)\Rightarrow a^x=\frac{1}{a^{-x}}$ барои хар гуна $x\in R$ аст.

Дар навбати худ дар хотир доштан зарур аст, ки ифодаҳои маъно надошта низ хастанд. **Масалан:** ифодаҳои $0^{-\frac{1}{2}}$; $(-2)^{\frac{3}{8}}$; $(-7)^{\frac{1}{2}}$; $(-5)^{-\frac{1}{4}}$; ... ва гайраҳо.

Мисоли 1. Сода кунед: $5\sqrt{\frac{2}{5}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{10}-3\sqrt{\frac{10}{9}}+\sqrt{160}$.

Ҳал. $5\sqrt{\frac{2}{5}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{10}-3\sqrt{\frac{10}{9}}+\sqrt{160}=$

$=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{\frac{10}{9}}+\sqrt{4^2\cdot 10}=$

$=\sqrt{5^2\cdot\frac{2}{5}}-\sqrt{2^2\cdot\frac{5}{2}}+\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{3^2\cdot\frac{10}{9}}+\sqrt{4^2\cdot 10}=$

$=\sqrt{5\cdot 2}-\sqrt{2\cdot 5}+\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{2\cdot 5}+\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{10}=4\sqrt{10}.$

Мисоли 2. Ҳисоб кунед: $(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot(0{,}125)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Хал. $(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot(0{,}125)^{-\frac{4}{3}}+\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=\left(\frac{4}{100}\right)^{-1{,}5}\cdot\left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-1{,}5}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{1}{16^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{1}{16^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{5^2}\right)^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{16^2}\right)}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{5^6}\right)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2^{12}}\right)}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{16^2}\right)}}=\cdot\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{5^6}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{2^{12}}}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{16^2}}}=$

$=\sqrt{5^6}\cdot\sqrt[3]{2^{12}}+\sqrt{16^2}=5^3\cdot2^4+16=125\cdot16+16=2000+16=2016.$

МАШҚХО

1. **Ҳисоб кунед:** $\dfrac{2\cdot4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{(125)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

2. **Ифодахоро сода кунед:** а) $3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}+\sqrt{150}$;

б) $32^{\frac{1}{5}}\cdot0{,}5-\left(\sqrt{25^3}\right)^0-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}:\left(-3{,}6^0+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)$.

3. **Қимати ифодаи** $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{12}}\cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$ **-ро, ҳангоми** $a=125$ **будан, ҳисоб кунед.**

4. **Сода кунед:** а) $\dfrac{4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}-4a^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}-25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+5x^{\frac{1}{4}}}$.

5. **Қимати ифодаи зеринро ҳангоми** $x=3$ **будан, ҳисоб кунед:**

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}-\frac{x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}.$$

БОБИ IV
АДАД ВА ТАБДИЛДИҲИҲОИ АЛГЕБРАВӢ

§1. Ифодаҳои ададӣ ва алгебравӣ

1.1. Ифодаҳои ададӣ

Таърифи 1. *Ифодаҳои ададӣ гуфта, ифодаҳоеро меноманд, ки онҳо фақат аз ададҳо, аломати амалҳо ва қавсҳо ташкил ёфтаанд.*

Масалан: $81:27$; $3\cdot\left(10^2+5\right)$; $\sqrt{5^2+24}$; 2^5; 16 **ва гайраҳо.**

Агар амалҳои дар ифодаҳои ададӣ нишондодашударо бо тартибашон ичро намоем, дар натича мо ададеро хосил мекунем, ки онро қимати ифода меноманд. **Масалан**:

$$81:27=\frac{81}{27}=\frac{3^4}{3^3}=\frac{3^3\cdot 3}{3^3}=3;$$

$$3\cdot\left(10^2+5\right)=3\cdot\left(100+5\right)=3\cdot 105=315;$$

$$\sqrt{7^2-8\cdot 3}=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5.$$

Дар навбати худ ифодаҳои ададие ҳам ҳастанд, ки на ҳамаи амалҳои дар онҳо нишондодашуда ичрошавандаанд. Дар ин маврид мегӯянд, ки ин ифодаҳо маъно надоранд.

Масалан: $\left(12-4\cdot 3\right)^0$; $\sqrt{2^2-3^2}$; $\frac{5}{\left(21-7\cdot 3\right)}$ **ва г.**

1.2. Ифодаҳои алгебравӣ

Таърифи 2. *Ифодаҳои алгебравӣ гуфта, ифодаҳоеро меноманд, ки онҳо аз ададҳо, рақам ва ҳарфҳое, ки бо ёрии амалҳои арифметикӣ, бадарачабардорӣ, решабарорӣ ва қавсҳо бо ҳам пайваст шудаанд, ташкил ёфтаанд.*

Масалан:

$$a+c;\ a-b;\ x^3+y^2=x+y;\ x^3-y^3=x-y;$$

$$\frac{x^3-y}{z},\ z\neq 0;\ \sqrt{x^2-2xy+y^2}+y-5$$

ва гайраҳо мисолҳои ифодаи алгебравӣ шуда метавонанд.

Қимати ададии ифодаи алгебравӣ гуфта, ададеро меноманд, ки вай дар натичаи хисобкунӣ, ҳангоми қиматҳои муайян қабул кардани ҳарфҳо хосил мешавад.

Таърифи 3. *Ифодаҳои алгебравие, ки қиматҳояшон ададҳои ратсионалиянд, ифодаҳои ратсионалӣ номида мешаванд.*

Масалан: $a \pm b$; ab^2c; $x^2 + y^2$; $x^3 \cdot y^4$; $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$, $x \neq -y$; 0; 25; 5^2; $a - \frac{3}{b}$ $(b \neq 0)$ ва г. мисолҳои ифодаи ратсионалиянд.

Дар навбати худ ифодаҳои ратсионалӣ бутун ва касрӣ шуда метавонанд.

Таърифи 4. *Агар дар ифодаи ратсионалӣ тақсим бар ифодаи ҳарфӣ мавҷуд набошад, он гоҳ ин гуна ифодаро, ифодаи ратсионалии бутун меноманд.*

Масалан: $a^2 - 0{,}4ab + 5$; $\frac{5}{4}x$; $\frac{4x^2 + 5x + 9}{12}$; $1{,}25x^2$ ва г. мисолҳои ифодаи ратсионалии бутун шуда метавонанд.

Таърифи 5. *Агар дар ифодаи ратсионалӣ тақсим бар ифодаи ҳарфӣ мавҷуд бошад, он гоҳ ин гуна ифодаро, ифодаи ратсионалии касрӣ меноманд.*

Масалан: $3 + \frac{2}{3b}$ $(b \neq 0)$; $\frac{b}{a+1}$ $(a \neq -1)$; $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ $(x \neq -y)$

ва ғайраҳо мисолҳои ифодаи ратсионалии касриянд.

Таърифи 6. *Ифодаҳои алгебравие, ки бо реша (радикал) ифода шудаанд, ифодаҳои иррационалӣ номида мешаванд.*
Масалан:

$\sqrt{x^2 - 1}$ $(|x| > 1)$; $\sqrt{y^2 - 16}$ $(|y| > 4)$; $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ $(x > 0;\ y > 0)$

ва ғайра мисолҳои ифодаҳои иррационалӣ мебошанд.

§2. Якузва ва амалҳо бо он

Дар ин параграф мо бори дигар мафҳумҳои асосии якузвахо ва амалҳо бо онҳоро дар шакли мухтасар хотиррасон мекунем.

Таърифи 1. *Якчанд ҳосили зарбро, ки он аз ададҳо, ҳарфҳо ва ё тағйирёбандаҳо иборат аст, якузва меноманд.* Масалан: a, $5a$, $7a^2x^3$; $3a^2$; $2b^3y$, $-5b^3$; $\frac{7}{3}a$ ва ҳоказо.

Дар навбати худ адад, ҳарф, тағйирёбанда, дарачаи тағйирёбандахоро хам якузва меноманд. Аз сабаби он ки якузва аз хосили зарб иборат аст, пас вай дорои зарбкунандахо мебошад. Агар зарбкунандахои якузва бо харфхо навишта шуда бошад, он гох вайро зарбкунандаи харфии якузва меноманд.

Масалан: ab, a^2bx, ab^2c, $a^2b^3c^4$ ва ғайра.

Агар зарбкунандаҳои якузва аз ададҳо иборат бошад, он гоҳ вайро зарбкунандаҳои ададии якузваҳо меноманд.

Якузваҳоро дар намудҳои гуногун ифода карда, навиштан мумкин аст. **Масалан**: $3a^2 \cdot 3ax^2$ - ро дар намудҳои $3 \cdot a \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot x \cdot x$ ё ки $9 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x$ ё ки $9a^3x^2$ навиштан мумкин аст.

Таърифи 2. *Якузвае, ки як зарбкунандаи ададии дар ҷои якум истодаро дорад ва дар он ҳосили зарби ҳарфҳо ва тағйирёбандаҳои якхела ба воситаи дараҷа ифода шудааст, якузваи стандартӣ номида мешавад.*

Масалан: $4ab^2; -2xy^2; -\frac{4}{5}x^2y; \frac{3}{5}a^3b^2; -7a^3x^2y$ ва ҳоказо.

Таърифи 3. *Зарбкунандаи ададӣ, ки пеш аз зарбкунандаҳои ҳарфӣ меояд, коэффитсиент номида мешавад.*

Масалан: $-4x^2y; -\frac{7}{9}axy^2; -0,25xy^2; \frac{3a^2b \cdot 4ay^3}{6}$ якузваи стандартӣ бошанд, он гоҳ зарбкунандаҳои $-4; -\frac{7}{9}; -0,25$ мувоффиқан коэффитсиентҳои якузваҳои додашуда мебошанд. Барои муайян кардани коэффитсиенти ифодаи $\frac{3a^2b \cdot 4ay^3}{6}$, онро дар шакли дигар менависем:

$$\frac{3a^2b \cdot 4ay^3}{6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot y^3}{6} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot b \cdot y^3}{6} = \frac{12a^3by^3}{6} = 2a^3by^3 .$$

Инак, ададии 2 коэффитсиенти якузваи додашуда мебошад.

Агар якузваи стандартӣ зарбкунандаҳои ададӣ надошта бошад, он гоҳ коэффитсиенти чунин якузва ба 1 ё ба -1 баробар мебошад.

Масалан: коэффитсиентҳои $xy^2; a^3b; bx^2y; -abcx^3; -a^3b^2xy^2$ мувоффиқан ба 1; 1; 1; -1 ва -1 баробар мебошанд.

Таърифи 4. *Ду ё якчанд якузваҳо ба ҳам монанд номида мешаванд, агар онҳо якхела ё фақат бо коэффитсиентҳояшон аз ҳам фарқ кунанд.*

Масалан: $7a^2 \cdot (-3)b^3$ ва $-3a^2 \cdot (-2)b^3$ -ро мегирем. Якузваҳоро дар намуди стандартӣ менависем:

$$7a^2\cdot(-3)b^3=-21a^2b^3;\ \ -3a^2\cdot(-2)b^3=6a^2b^3.$$

Ин ду якузва ба ҳам монанд мебошанд, чунки онхо фақат бо коэффитсиентҳояшон фарқ мекунанд.

Таърифи 5. *Дараҷаи якузвахо ба суммаи нишондиҳандаҳои дараҷаи ҳарфҳо, тағйирёбандаҳои дар он буда баробар мебошад.*

Масалан: агар $12xy^2;\ -7x^2y;\ \frac{5}{2}xy;\ -\frac{3}{4}x^2y^2;\ 45;\ -\frac{3}{5}xyz$ мисолҳои якузвахои стандартӣ бошанд, он гох $12xy^2$ якузвани дараҷааш 3, $-7x^2y$ - якузвăи дараҷааш 3, $\frac{5}{2}xy$ - якузвани дараҷааш 2, 45 - якузвани дараҷааш нол мебошанд.

Бигузор ифодаи $A(x; y; z; \ldots w)$ барои ҳар гуна $x\in R$, $y\in R$, $z\in R$, ..., $w\in R$ маъно дошта бошад.

Таърифи 6. *Соҳаи муайянии ифодаи $A(x; y; z; \ldots w)$ гуфта, маҷмуи қиматҳоеро меноманд, ки ҳангоми онҳоро қабул кардани тағйирёбандаҳо ифода маъно дорад.*

Дар ин ҳолат маҷмуи R соҳаи муайянии ифодаи $A(x; y; z; \ldots w)$ номида мешавад.

Мисоли 1. Соҳаи муайянии ифодаи $\frac{5}{x-2}$ маҷмуи ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи x мебошад, ки барояш $x\neq 2$ аст.

Мисоли 2. Соҳаи муайянии ифодаи $\frac{5y}{4-3y}$ маҷмуи ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи y мебошад, ки барояш $4-3y\neq 0$, ё ки $y\neq\frac{4}{3}$ аст.

Таърифи 7. *Баробарие, ки он барои ҳамаи қиматҳои бузургиҳои дар он мавҷуда дуруст аст, айният номида мешавад.*

Ифодахои дар тарафхои гуногуни баробарӣ бударо айниятан ба хам баробар меноманд.

Агар $A(x; y; z; \ldots w)$ ва $B(x; y; z; \ldots w)$ ва $C(x; y; z; \ldots w)$ ифодахои бутуни алгебравӣ бошанд, он гох айнияти алгебравӣ хосиятхои зеринро дорад:

1. Аз $A(x; y; z; \ldots w) \equiv B(x; y; z; \ldots w)$ ва $B(x; y; z; \ldots w) \equiv C(x; y; z; \ldots w) \Rightarrow A(x; y; z; \ldots w) \equiv C(x; y; z; \ldots w)$

2. Аз $A(x; y; z; \ldots w) \equiv B(x; y; z; \ldots w) \Rightarrow$

$\Rightarrow A(x; y; z; \ldots w) + C(x; y; z; \ldots w) \equiv$

$\equiv B(x; y; z; \ldots w) + C(x; y; z; \ldots w)$

3. Аз $A(x; y; z; \ldots w) \equiv B(x; y; z; \ldots w) \Rightarrow A(x; y; z; \ldots w) \times$

$\times C(x; y; z; \ldots w) \equiv B(x; y; z; \ldots w) \cdot C(x; y; z; \ldots w)$ мешавад.

Амалҳо бо якузваҳоро дида мебароем:

Якузваҳоро ҷамъ, тарҳ, зарб, тақсим ва ба дараҷа бардоштан мумкин аст. Бигузор якузваҳои $6x^2$; $5x$; $-x$; $4x^3$; $-4x$; $-6x^2$ дода шуда бошанд.

Барои ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсим намудани якузваҳо аз қоидаи амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсими ададҳо истифода бурда, амалҳоро иҷро мекунанд.

Ҳангоми иҷро намудани амалҳои арифметикӣ ба қоидаҳои зерин риоя кардан лозим аст:

Қоидаи 1. *Барои ҷамъ кардани якузваҳо онҳоро бо аломатҳояшон паси якдигар ба намуди суммаи алгебравӣ навиштан лозим аст.*

Қоидаи 2. *Агар дар суммаи алгебравӣ аъзоҳои якхела (монанд) мавҷуд бошад, онҳоро ислоҳ кардан лозим аст.*

Мисол. Якузваҳои $6x^2$; $5x$; $-x$; $4x^3$; $-4x$; $-6x^2$ -ро ҷамъ кунед.

Ҳал. Якузваҳои $6x^2$; $5x$; $-x$; $4x^3$; $-4x$; $-6x^2$ -ро дар асоси қоидаи 1 ва 2 ҷамъ карда, пайдо мекунем:

$$6x^2 + 5x + (-x) + 4x^3 + (-4x) + (-6x^2) =$$

$$= 6x^2 + 5x - x + 4x^3 - 4x - 6x^2 = 4x^3.$$

Қоидаи 3. *Барои якузваҳоро аз ҳамдигар тарҳ намудан, камкунандаро бо аломати муқобил ба паҳлӯи камшаванда навиштан кифоя аст.*

Мисол. Аз якузвани $12x^2$ якузваҳои $3x^2$; $4x^2$; $5x^2$; $-x^3$ кам карда шавад.

Ҳал. Аз қоидаи 3 истифода бурда, аз якузвани $12x^2$, якузвани $3x^2$; $4x^2$; $5x^2$; $-x^3$ -ро кам мекунем.

$$12x^2-3x^2-4x^2-5x^2-(-x^3)=12x^2-3x^2-4x^2-5x^2+x^3=x^3.$$

Акнун зарб ва тақсими якузвоҳоро дида мебароем:

Бигузор якузвоҳои $16x^2y^3$ ва $4x^2y$ дода шуда бошад. Барои ичро намудани амалҳои зарб ва тақсим аз қоидаҳои зарб ва тақсими ададҳо ва ҳам аз қонунҳои ҷойивазкунӣ ва комбинатсиягӣ истифода мебаранд.

Қоидаи 4. *Дар вақти зарб намудани якузвоҳо коэффисентҳои онҳо зарб карда шуда, нишондиҳандаҳои дараҷаҳои асосашон якхела ҷамъ карда мешаванд ва зарбшавандаҳои танҳо дар ҳосили зарб бо нишондиҳандаашон оварда мешаванд.*

Мисол. Амали зарбро ичро кунед: $16x^2y^3\cdot 4x^2y$.

Ҳал. Аз қоидаи 4 истифода бурда, якузвоҳои $16x^2y^3$ ва $4x^2y$-ро зарб мезанем:

$$16x^2y^3\cdot 4x^2y=16\cdot 4\cdot x^2\cdot x^2\cdot y^3\cdot y=64x^4y^4.$$

Аз сабаби он, ки амали тақсим, амали баръакси амали зарб мебошад, пас ҳангоми ичро намудани амали тақсим аз қоидаҳои 4 ва 2 истифода бурдан мумкин мебошад.

Мисол. Амалии тақсимро ичро кунед: $16x^2y^3:\left(4x^2y\right)$.

Ҳал. Чи хеле ки дар боло қайд кардем амали тақсим, амали баръакси зарб мебошад, пас дар асоси қоидаи 4 ва қоидаи 2 навишта метавонем:

$$16x^3y^3:4x^3y=\frac{16x^3y^3}{4x^3y}=\frac{4\cdot 4x^3y^2\cdot y}{4x^3y}=4y^2.$$

Аз мисолҳои дар боло муоина кардашуда маълум мешавад, ки ҳангоми ичро намудани амалҳои ҷамъ, тарҳ, зарб ва тақсими якузвоҳо дар натиҷа боз якузва ҳосил мешавад.

§3. Бисёрузва ва амалҳо бо он

Дар ин параграф ба мондаи §2 мафҳумҳои асосии бисёрузва ва амалҳо бо онҳоро дар намуди мухтасар хотиррасон мекунем.

Бигузор якузвоҳои $9a^5;\ 5x^3;\ -3ax;\ -abx$ дода шуда бошанд.

Агар якузвоҳои додашударо дар асоси қоидаҳои якум ва дуюми §2 ҷамъ кунем, дар натиҷа суммаи алгебравиро ҳосил мекунем:

$$9a^5+5x^3+(-3ax)+(-abx)=9a^5+5x^3-3ax-abx.$$

Таърифи 1. *Бисёрузва гуфта, суммаи алгебравии ду ва якчанд якузваҳоро меноманд.*

Масалан: $9a^5+5x^5-3ax-abx$; $\frac{1}{7}xy^2+\frac{3}{5}x^2y-4xy+91$; $-4a^5-5x^5$ ва гайраҳо, мисолҳои бисёрузваҳо шуда метавонанд.

Аъзоҳои бисёрузва аз якузваҳо иборат мебошанд. Агар бисёрузва дар худ якузваҳои монандро дошта бошад, он гоҳ ҷамъшавандаҳои монандро ислоҳ карда, бисёрузваро дар намуди стандартӣ навиштан лозим аст.

Масалан: $3a^3+2a^2+3a-a^3-8a^2-3a+9=2a^3-6a^2+9$.

Таърифи 2. *Дараҷаи бисёрузва гуфта дараҷаи калонтарини якузваи ба он дохилшударо меноманд.*

Масалан, дараҷаи калонтарини бисёрузваи $xy+4x^3y+$ $+4xy^2-4$ ба 4 баробар аст, ки онро якузваи $4x^3y$ дорад.

Агар бисёрузва фақат аз як ҳарфи дараҷааш гуногун дошта сохта шуда бошад, он гоҳ аз қонуни ҷойивазкунии ҷамъ истифода бурда аъзоҳои онро аз рӯи дараҷаҳои ҳарф ба намуди зиёдшаванда ё камшаванда навиштан мумкин аст. **Масалан**, агар бисёрузваи $2x^3-3a^2x^2+4+5ax$-ро аз рӯи дараҷаи зиёдшавандаи ҳарфи x нависем, он гоҳ вай намуди зеринро мегирад:

$$4+5ax-3a^2x^2+2x^3.$$

Аз рӯи дараҷаҳои ҳарфи додашуда ботартиб гузошта шудани бисёрузва табдилдиҳии айниятии ҳамин бисёрузва номида мешавад. Дар бисёрузва ислоҳ кардани узвҳои монанд табдилдиҳии айниятӣ мебошад.

Масалан, бисёрузваи $3x^2-x+5x^3+2x+6x^2-3x+9$ баъд аз табдилдиҳии айниятӣ намуди зеринро мегирад:

$$3x^2-x+5x^3+2x+6x^2-3x+9=$$
$$=5x^3+(3x^2+6x^2)+(-x+2x-3x)+9=$$
$$=5x^3+9x^2-2x+9.$$

Ду бисёрузвае, ки якузваҳояш аз рӯи бузургии мутлақ монанд буда, вале аломатҳои гуногун дорад, бисёрузваҳои муқобил номида мешавад. Ҳосили ҷамъи чунин бисёрузваҳо айниятан ба нол баробар аст.

Масалан, агар $A(x)=3x^2+4x-12$ ва $B(x)=12-4x-3x^2$ бошад, он гоҳ

$$A(x)+B(x)=(3x^2+4x-12)+(12-4x-3x^2)=$$
$$=(3x^2+4x-12)+(-3x^2-4x+12)=$$
$$=3x^2+4x-12-3x^2-4x+12=0.$$

Агар ду ё якчанд бисёрузвахои дар намуди стандартй додашударо чамъ (тарх) кунем, дар натича бисёрузваи стандартиро пайдо мекунем.

Масалан, агар $A(x)=3,2x^2+4,2x-3$ ва $B(x)=x^3-4,1x^2+3,8x-7$ бошад, он гох

1. $A(x)+B(x)=(3,2x^2+4,2x-3)+(x^3-4,1x^2+3,8x-7)=$
$=3,2x^2+4,2x-3+x^3-4,1x^2+3,8x-7=x^3-0,9x^2+8x-10;$
2. $A(x)-B(x)=(3,2x^2+4,2x-3)-(x^3-4,1x^2+3,8x-7)=$
$=3,2x^2+4,2x-3-x^3+4,1x^2-3,8x+7=-x^3+7,3x^2+0,4x+4.$

Агар бисёрузваи $A(x)$-ро бо бисёрузваи $B(x)$ зарб занем, дар хосили зарб (натича) бисёрузваи стандартиро пайдо мекунем.

Барои бисёрузваро бо бисёрузва зарб кардан хар як узви як бисёрузваро ба хар як узви бисёрузваи дигар мувофикан зарб карда, хосили зарби хосилшударо чамъ кардан кифоя аст.

Масалан, агар $A(x)=2x+3ax+2a$ ва $B(y)=3y+4$ бошад, он гох

$A(x)\cdot B(y)=(2x+3ax+2a)\cdot(3y+4)=$
$=2x\cdot 3y+3ax\cdot 3y+2a\cdot 3y+2x\cdot 4+3ax\cdot 4+2a\cdot 4=$
$=6xy+9axy+6ay+8x+12ax+8a$ мешавад.

Фарз мекунем, ки $A(x)$ ва $B(x)$ бисёрузвахои дарачаашон натуралй бошанд.

Агар $A(x)$ ва $B(x)$ нисбат ба x бисёрузвахои коэффитсиентхои хакикй доштта бошанд, он гох $A(x)=B(x)$ факат ва факат хамон вакт мешавад, ки агар коэффитсиентхои назди дарачахои якхелаи онхо бо хам баробар бошанд.

Дар вакти ичрои хисобкунихои бисёрузвахо аз навишти хосили зарби ду ё якчанд якузвахо, ки барои хисобкуний кулай аст, истифода мебаранд.

Ба хамзарбхо чудо кардани бисёрузвахоро, табдилдихихои айниятан баробар меноманд. Агар хамзарбхо маълум набошад,

он гоҳ бисёрузвахоро бо тарзи гурӯҳбандӣ ба хамзарбхо чудо кардан лозим аст.

Масалан: 1. $a(x+y)-b(x+y)=(x+y)(a-b)$;

2. $kx+ky+10x+10y=k(x+y)+10(x+y)=(x+y)(k+10)$;

3. $c(x-y)-x+y=c(x-y)-(x-y)=(x-y)(c-1)$.

§4. Формулахои зарби мухтасар

1. Квадрати сумма $(a+b)^2$

Квадрати сумман ду адад ба квадрати адади якум, чамъи дучанди хосили зарби адади якум бар дуюм, чамъ квадрати адади дуюм баробар аст:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Масалан:

1. $(x+3y)^2=x^2+2x\cdot 3y+(3y)^2=x^2+6xy+9y^2$;

2. $(4x+b)^2=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot b+(b)^2=16x^2+8bx+b^2$;

3. $(10a+5)^2=(10a)^2+2\cdot 10a\cdot 5+(5)^2=$

$=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$;

4. $38^2=(30+8)^2=30^2+2\cdot 30\cdot 8+8^2=$

$=900+480+64=1444$.

Аз натичаи мисоли сеюм истифода бурда, квадрати аддахои зериро хисоб мекунем:

1. $95^2=100\cdot 9\cdot 10+25=9025$;

2. $75^2=100\cdot 7\cdot 8+25=5625$;

3. $35^2=100\cdot 3\cdot 4+25=1225$;

4. $4{,}5^2=4\cdot 5+0{,}25=20{,}25$.

2. Квадрати фарк $(a-b)^2$

Квадрати фарки ду адад ба квадрати адади якум, фарки дучанди хосили зарби адади якум бар дуюм, чамъ квадрати адади дуюм барóбар аст:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Масалан:

1. $(2x-a)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot a+(a)^2=4x^2-4ax+a^2$;

2. $(3x-2b)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2b+(2b)^2=9x^2-12bx+4b^2$;

3. $39^2 = (40-1)^2 = 40^2 - 2\cdot 40\cdot 1 + 1^2 =$

$= 1600 - 80 + 1 = 1521;$

4. $69^2 = (70-1)^2 = 70^2 - 2\cdot 70\cdot 1 + 1^2 =$

$= 4900 - 140 + 1 = 4761.$

3. Куби сумма $(a+b)^3$

Куби сумман ду адад ба куби адади якум, ҷамъ сечанди ҳосили зарби квадрати адади якум бар адади дуюм, ҷамъ сечанди ҳосили зарби адади якум бар квадрати адади дуюм, ҷамъ куби адади дуюм баробар аст:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Масалан: 1. $(3a+b)^3 = (3a)^3 + 3\cdot(3a)^2\cdot b + 3\cdot 3a\cdot b^2 + b^3 =$

$= 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3;$

2. $(2ax + 3a^2x)^3 = (2ax)^3 + 3\cdot(2ax)^2\cdot 3a^2x +$

$+ 3\cdot 2ax\cdot(3a^2x)^2 + (3a^2x)^3 = 8a^3x^3 + 36a^2x^2a^2x +$

$+ 54ax\cdot a^4x^2 + 27a^6x^3 = 8a^3x^3 + 36a^4x^3 + 54a^5x^3 + 27a^6x^3;$

3. $21^3 = (20+1)^3 = 20^3 + 3\cdot 20^2\cdot 1 + 3\cdot 20\cdot 1^2 + 1^3 =$

$= 8000 + 1200 + 60 + 1 = 9261.$

4. Куби фарқ $(a-b)^3$

Куби фарқи ду адад ба куби адади якум, фарқи сечанди ҳосили зарби квадрати адади якум бар адади дуюм, ҷамъ сечанди ҳосили зарби адади якум бар квадрати адади дуюм, фарқи куби адади дуюм баробар аст:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Масалан: 1. $(2a-3)^3 = (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2\cdot 3 + 3\cdot 2a\cdot 3^2 - 3^3 =$

$= 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27;$

2. $49^3 = (50-1)^3 = 50^3 - 3\cdot 50^2\cdot 1 + 3\cdot 50\cdot 1^2 - 1^3 =$

$= 125000 - 7500 + 150 - 1 = 117649.$

5. Фарқи квадратҳо $a^2 - b^2$

Ҳосили зарби сумман ду адад бар фарқи онҳо ба фарқи квадратҳои ҳамин ададҳо баробар мебошад.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Масалан: 1. $(2x-y)(2x+y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2;$

2. $(3x^2-5y^3)(3x^2+5y^3)=(3x^2)^2-(5y^3)^2=9x^4-25y^6$;

3. $47\cdot 53=(50-3)(50+3)=50^2-3^2=2500-9=2491$;

4. $88\cdot 92=(90-2)(90+2)=90^2-2^2=8100-4=8096$.

6. Куби сумма a^3+b^3

Кубҳои сумман ду адад ба ҳосили зарби сумман онҳо бар квадрати нопурраи фаркашон баробар аст:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Масалан: 1. $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$;

2. $64+a^3=4^3+a^3=(4+a)(4^2-4a+a^2)=$

$=(4+a)(16-4a+a^2)$;

3. $8a^3+8b^3=8(a^3+b^3)=8(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

4. $27y^3+x^3=(3y)^3+x^3=(3y+x)(9y^2-3xy+x^2)$.

7. Куби фарқ a^3-b^3

Фарқи куби ду адад ба ҳосили зарби фарқи ин ду адад бар квадрати нопурраи сумман онҳо баробар аст:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Масалан: 1. $y^3-27=y^3-3^3=(y-3)(y^2+3y+9)$;

2. $8-y^3=2^3-y^3=(2-y)(4+2y+y^2)$;

3. $64x^3-y^3=(4x)^3-y^3=(4x-y)(16x^2+4xy+y^2)$;

4. $x^3-2=x^3-(\sqrt[3]{2})^3=(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$.

Аз формулаҳои зарби мухтасар ҳангоми сода намудани ифодаҳои алгебравӣ ва ҳал кардани мисолҳо истифода мебаранд.

Барои он, ки дояр ба истифодабарии формулаҳои зарби мухтасар фаҳмиши пурра ҳосил кунем, якчанд мисолҳоро дида мебарое́м.

Мисоли 1. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)+(a^2-a+1)(a+1)$$

Ҳал. $(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)+(a^2-a+1)(a+1)=$

$=(a^2-1)(a^4+a^2+1)+(a+1)(a^2-a+1)=$

$=(a^2-1)\big((a^2)^2+a^2+1\big)+(a+1)(a^2-a+1)=$

$=\big((a^2)^3-1\big)+(a^3+1)=(a^6-1)+(a^3+1)=$

$=a^6-1+a^3+1=a^6+a^3$.

Мисоли 2. Ифодаи x^4+4-ро ба зарбкунандаҳо чудо кунед.

Ҳал. $x^4+4=x^4+4x^2-4x^2+4=x^4+4x^2+4-4x^2=$

$=(x^4+4x^2+4)-4x^2=\left((x^2)^2+4x^2+4\right)-4x^2=$

$=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=$

$=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$

Мисоли 3. Ифодаи $A(x)=x^3-3x-2$-ро ба ҳамзарбҳо чудо кунед.

Ҳал. $A(x)=x^3-3x-2=x^3-x-2x-2=x(x^2-1)-2(x+1)=$

$=x(x-1)(x+1)-2(x+1)=\left(x+1\right)\left(x(x-1)-2\right)=$

$=(x+1)(x^2-x-2)$.

Мисоли 4. Ифодаи $(x-2)(x-3)+(x+6)(x-5)-2(x^2-7x+13)$ -ро сода карда, натиҷаашро дар ҳолати $x=5{,}6$ будан, ҳисоб кунед.

Ҳал. а) Ифодаро сода мекунем:

$(x-2)(x-3)+(x+6)(x-5)-2(x^2-7x+13)=$

$=x^2-5x+6+x^2-5x+6x-30-2x^2+14x-26=$

$=(x^2+x^2-2x^2)+(-5x-5x+6x+14x)+(6-30-26)=10x-50;$

б) Ба ифодаи сода кардашуда ба ҷои x қиматашро гузошта, ҳисоб мекунем:

$(10x-50)=10\cdot 5{,}6-50=56-50=6.$

МАШҚҲО

1. Ифодаи зеринро ба зарбкунандаҳо чудо намоед:

а) $a^2-2bc+2ac-ab$; б) $(x-a)^3+(a-y)^3+(y-x)^3$;

в) x^3-3x^2+2; г) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$.

2. Ифодаи $(x-5)(x-1)-(x-2)(x-3)$-ро сода карда, натиҷаашро ҳангоми $x=-2{,}25$ будан, ҳисоб кунед.

3. Ифодаи $A(x)=x^3+x^2y-xy^2-y^3$-ро сода карда, натиҷаашро дар ҳолати $x=3{,}6$ ва $y=2{,}6$ будан, ҳисоб кунед.

§5. Касрҳои алгебравӣ

Ифодаи рационалӣ ба ифодаҳои бутуни рационалӣ ва касрҳои рационалӣ чудо мешаванд.

Агар ифодаи ратсионалӣ дар худ амали тақсим ва баларачабарҳории бутуни манфиро надошта бошад, пас чунин ифодаи ратсионалиро ифодаи ратсионалии бутун меноманд.

Масалан, бисёрузваи

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,\ x \in Z$$

ки дар ин ҷо $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ - ададҳои дилхоҳи доимӣ, x - тағйирёбанда мебошанд, мисоли ифодаи ратсионалии бутун шуда метавонад.

Таърифи 1. *Ифодае, ки аз каср иборат буда, сурат ва махраҷаш бисёрузваҳо мебошад, касри алгебравӣ номида мешавад.*

Агар $P(x)$ ва $Q(x)$ бисёрузваҳо бошанд, он гоҳ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $(\forall x, Q(x) \neq 0)$ касри алгебравӣ мешавад. Қимати касри алгебравӣ адади ҳақиқӣ шуда метавонад.

Таърифи 2. *Касрҳои алгебравии* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *ва* $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ *баробар номида мешаванд, агар барои бисёрузваҳои додашуда баробарии*

$$P(x)\cdot Q_1(x) = P_1(x)\cdot Q(x),\ (Q(x) \neq 0,\ Q_1(x) \neq 0)$$

айният ичро шавад.

Масалан, $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1},\ (x \neq 1,\ x \neq -1)$

чунки $(x-1)(x+1) = x^2-1$ ё ки $(x+1)(x-1) = x^2-1$ мебошад.

Таърифи 3. *Ду ифода ҳамон вақт айният баробар мешавад, ки агар онҳо дар ҳамаи қиматҳои равои тағйирёбандаҳо ададан баробар бошанд.*

Масалан, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{x-1},\ x \neq 1,\ x \neq -1.$

Бигузор $P(x)$ - бисёрузваи бутуни ратсионалии дараҷааш n ва $Q(x)$ бисёрузваи бутуни ратсионалии дараҷааш m бошанд. Он гоҳ нисбати онҳо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ $(\forall x, Q(x) \neq 0)$ касри ратсионалӣ мебошад.

Касри ратсионалӣ касри дуруст ва касри нодуруст шуда метавонад.

1. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - касри дуруст номида мешавад, агар дараҷаи бисёрузваи $P(x)$ аз дараҷаи бисёрузваи $Q(x)$ хурд бошад: $n < m$.

2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - касри нодуруст номида мешавад, агар дараҷаи бисёрузваи $P(x)$ аз дараҷаи бисёрузваи $Q(x)$ калон бошад: $n > m$ (Дараҷаи бисёрузва адади натуралиест, ки он ба калонтарин дараҷаи тағйирёбандаи дар ифодаи бисёрузва буда, баробар аст).

Масалан, ифодаи

$\frac{2x^2+4x+5}{3x^3+4x^2+5x-2}$ - касри дурусти ратсионалӣ,

$\frac{4x^3+5x-2}{9x^2+4x+15}$ - касри нодурусти ратсионалӣ мебошад.

Хосиятҳои асосии касрҳои алгебравиро номбар мекунем:

1. *Агар сурат ва махраҷи касри алгебравӣ ба як хел бисёрузва зарб карда шавад, он гоҳ касре ҳосил мешавад, ки ба касри додашуда айниятан баробар аст.*

Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ барои ҳар гуна x $(\forall x)$ $Q(x) \neq 0$ касри алгебравӣ ва $R(x) \neq 0$ бисёрузва бошанд, он гоҳ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot R(x)},\ (\forall x, Q(x)\cdot R(x) \neq 0).$$

2. Агар сурат ва махраҷи касри алгебравиро ба як хел бисёрузва тақсим кунем, дар натиҷа касре пайдо мешавад, ки ба касри додашуда айниятан баробар мебошад.

Агар $\frac{P(x)}{Q(x)}$ барои ҳар гуна x $(\forall x)$ $Q(x) \neq 0$ касри алгебравӣ ва $R(x)$ бисёрузва бошанд, он гоҳ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)/R(x)}{Q(x)/R(x)},\ \forall x, Q(x) \neq 0,\ R(x) \neq 0.$$

3. Агар сурат ва махраҷи каср зарбкунандаи умумӣ дошта бошад, он гоҳ сурат ва махраҷро ба он тақсим карда, касрро сода кардан мумкин аст. Чунин тарзи содакунӣ ё шаклдиҳаркунӣ ихтисори каср номида мешавад.

Масалан:

1. $\frac{12x^2-6x+24}{6x+6} = \frac{6(2x^2-x+4)}{6(x+1)} = \frac{2x^2-x+4}{x+1},\ x \neq -1;$

2. $\frac{4-8x^2}{16-64x} = \frac{4(1-2x^2)}{16(1-4x)} = \frac{4(1-2x^2)}{4\cdot 4(1-4x)} = \frac{(1-2x^2)}{4(1-4x)},\ x \neq \frac{1}{4};$

3. $\frac{8-x^3}{x-2}=\frac{2^3-x^3}{x-2}=\frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{x-2}=$

$$=\frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{-(2-x)}=-(4+2x+x^2).$$

4. Агар аломати назди сурат ва махраҷи касри алгебравӣ ба аломати назди худи каср иваз карда шавад, он гоҳ қимати касри алгебравӣ тағйир намеёбад.

Масалан: 1. $\frac{2-x}{4-x}=\frac{-(x-2)}{-(x-4)}=\frac{x-2}{x-4}$, $x\neq 4$;

2. $\frac{x-3}{9-x}=\frac{-(3-x)}{-(x-9)}=\frac{3-x}{x-9}$, $x\neq 9$.

5. Агар аломати назди сурат ё махраҷи касри алгебравӣ ба аломати назди худи каср иваз карда шавад, он гоҳ қимати касри алгебравӣ тағйир намеёбад.

Масалан: 1. $\frac{3+4x}{2x-5}=\frac{3+4x}{-(5-2x)}=-\frac{3+4x}{5-2x}$, $x\neq\frac{5}{2}$.

2. $\frac{2-3x}{4x-8}=\frac{-(3x-2)}{4x-8}=-\frac{3x-2}{4x-8}$, $x\neq 2$.

3. $\frac{x^2-4x+5}{x-4}=\frac{x^2-4x+5}{-(4-x)}=-\frac{x^2-4x+5}{4-x}$, $x\neq 4$.

4. $\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2-x}$, $x\neq 2$.

§6. Амалҳо бо касрҳои алгебравӣ

Бигузор $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ва $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ $((\forall x)\ Q(x)\neq 0,\ (\forall x)\ Q_1(x)\neq 0)$ касрҳои алгебравӣ бошанд.

I. Ҷамъ ва тарҳи касрҳои алгебравӣ

Иҷрои амалҳои ҷамъ ва тарҳи касрҳои алгебравӣ ба қоидаи ҷамъ ва тарҳи касрҳои арифметикӣ монанд аст. Дар ин ҷо ҷамъи (тарҳ) касрҳои алгебравиро дида мебароем.

а) Агар касрҳои додашуда махраҷҳои якхела доштта бошанд, он гоҳ барои ҷамъ (тарҳ) кардан суратҳои касрҳоро ҷамъ (тарҳ) намуда, ҳосили дар натиҷаи ҷамъ (тарҳ) ҳосилшударо ба махраҷаш тақсим кардан лозим аст.

Масалан: $\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \pm P_1(x)}{Q(x)}$, $\forall x, Q(x) \neq 0$.

1. $\frac{x+2}{a-b} + \frac{2-x}{a-b} = \frac{(x+2)+(2-x)}{a-b} =$

$= \frac{x+2+2-x}{a-b} = \frac{4}{a-b}$, $a \neq b$;

2. $\frac{x+2}{a-b} + \frac{x+1}{b-a} = \frac{x+2}{a-b} - \frac{x+1}{a-b} = \frac{(x+2)-(x+1)}{a-b} =$

$= \frac{x+2-x-1}{a-b} = \frac{1}{a-b}$; $a \neq b$.

3. $\frac{2a+3}{a-3} - \frac{a+6}{a-3} = \frac{(2a+3)-(a+6)}{a-3} = \frac{2a+3-a-6}{a-3} =$

$= \frac{a-3}{a-3} = 1$, $a \neq 3$.

б) Агар касрҳои додашуда махраҷҳои гуногун дошта бошанд, он гоҳ барои ҷамъ (тарҳ) кардани касрҳо аввал онҳоро ба махраҷи умумӣ оварда, баъд амалҳоро иҷро кардан лозим аст.

Масалан: $\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x) \cdot Q_1(x) \pm P_1(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot Q_1(x)}$,

$(\forall x)\ Q(x) \neq 0, \forall x, Q_1(x) \neq 0$.

1. $\frac{a+x}{6} + \frac{a-x}{4} = \frac{2(a+x)+3(a-x)}{12} =$

$= \frac{2a+2x+3a-3x}{12} = \frac{5a-x}{12}$;

2. $\frac{a+x}{4} - \frac{a-x}{6} = \frac{3(a+x)-2(a-x)}{12} =$

$= \frac{3a+3x-2a+2x}{12} = \frac{a+5x}{12}$;

3. $4x + \frac{2x}{3} = \frac{4x}{1} + \frac{2x}{3} = \frac{3 \cdot 4x + 2x}{3} = \frac{12x+2x}{3} = \frac{14x}{3}$;

4. $\frac{3x+1}{2} - 2x = \frac{3x+1}{2} - \frac{4x}{2} = \frac{3x+1-4x}{2} = \frac{1-x}{2}$.

II. Зарб ва таксими касрҳои алгебравӣ

Қоидаи зарб ва таксими касрҳои алгебравӣ ба қоидаи зарб ва таксими касрҳои арифметикӣ монанд мебошад. Бинобар он, дар

ин чо мухтасар зарб ва таксими касрхои алгебравиро бори дигар хотиррасон мекунем.

а) Барои ду касри алгебравиро зарб задан суратхоро алохида ва махрачхоро алохида бо хам зарб карда, хосили зарби суратхоро дар сурат ва хосили зарби махрачхоро дар махрач навиштан лозим аст.

Масалан: $\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x) \cdot P_1(x)}{Q(x) \cdot Q_1(x)}$.

$((\forall x)\, Q(x) \neq 0, \forall x,\ Q_1(x) \neq 0)$.

1. $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$, $x \neq -3$.

2. $\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{x}$, $x \neq 0$.

3. $(x^2-4) \cdot \frac{x}{x-2} = (x-2)(x+2) \cdot \frac{x}{x-2} = x(x+2)$.

б) Барои як касри алгебравиро ба касри дигари алгебравй тақсим намудан, тақсимшавандаро ба касре зарб кардан лозим аст, ки вай нисбат ба тақсимкунанда чаппа бошад.

Масалан:

$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P(x) \cdot Q_1(x)}{Q(x) \cdot P_1(x)}$, $(\forall x, Q(x) \neq 0,\ Q_1(x) \neq 0,\ P_1(x) \neq 0$.

1. $\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x+1}{x-1} =$

$= \frac{(x^2-2x+1) \cdot (x+1)}{(x^2+3x+2)(x-1)} = \frac{(x-1)^2\ (x+1)}{(x+1)(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{x-1}{x+2}$; $x \neq -2$.

2. $x : \frac{x-1}{x+1} = x \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x-1} = \frac{x^2+x}{x-1}$; $x \neq 1$.

3. $\frac{x-1}{x+1} : x = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-1}{(x+1)x}$; $x \neq 0,\ x \neq -1$.

4. $\frac{x-1}{x+1} : \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1} \cdot (x^2-1) =$

$= \frac{x-1}{(x+1)} \cdot (x-1)(x+1) = (x-1)^2$.

Хаман он хосиятхои асосие, ки нисбат ба амалхои арифметикй дурустанд, барои касрхои алгебравй хам чой доранд. Инро хусусан дар вакти содакунй, ихтисоркунии касрхои алгебравй ва табдилдихии касрхои алгебравй дидан мумкин аст.

Мисоли 1. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\left(\frac{x}{x-2}+\frac{x^2}{x^3+8}\cdot\frac{x^2-2x+4}{2-x}\right):\frac{8}{x^2-4x+4}-\frac{x^2+x+6}{4x+8}.$$

Ҳал. Тартиби ичрои амалҳои касрҳои алгебравӣ ба монанди амалҳои касрҳои оддӣ ичро карда мешавад. Яъне, аввал амали зарби дар дохили қавс бударо ичро мекунем, баъд амали ҷамъ ва пас аз он амали тақсиму тарҳро ичро менамоем:

$$1.\ \frac{x^2}{x^3+8}\cdot\frac{x^2-2x+4}{2-x}=\frac{x^2\cdot(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)(2-x)}=$$

$$=\frac{x^2}{(x+2)(2-x)},\ (x\neq -2, x\neq 2).$$

$$2.\ \frac{x}{x-2}+\frac{x^2}{(x+2)(2-x)}=\frac{x}{x-2}-\frac{x^2}{(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{x(x+2)-x^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2+2x-x^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x}{x^2-4};$$

$$3.\ \frac{2x}{x^2-4}:\frac{8}{x^2-4x+4}=\frac{2x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x^2-4x+4}{8}=$$

$$=\frac{2x\cdot(x^2-4x+4)}{(x-2)(x+2)\cdot 8}=\frac{2x\cdot(x-2)^2}{(x-2)(x+2)\cdot 8}=\frac{x(x-2)}{4(x+2)};$$

$$4.\ \frac{x(x-2)}{4(x+2)}-\frac{x^2+x+6}{4x+8}=\frac{x^2-2x}{4x+8}-\frac{x^2+x+6}{4x+8}=$$

$$=\frac{x^2-2x-x^2-x-6}{4x+8}=\frac{-3x-6}{4x+8}=-\frac{3(x+2)}{4(x+2)}=-\frac{3}{4}.$$

Натичаҳои ёфташуда барои ҳаман қиматҳои x, ки $x^3+8\neq 0$, $x-2\neq 0$ аст, яъне дар вақти $x\neq -2$, $x\neq 2$ будан, дуруст мебошад.

Мисоли 2. Ифодаи $\dfrac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$ -ро сода кунед.

Ҳал. Барои сода намудани каср аз мафҳуми ихтисори касрҳо ва ба зарбкунандаҳо ҷудокуни истифода мебарем. Бинобар он аввал сурат ва баъд махраҷи касрро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$a^4-16=a^4-4^2=(a^2)^2-4^2=(a^2+4)(a^2-4)=$$

$$=a^2+4)(a^2-2^2)=(a^2+4)(a-2)(a+2);$$

$$a^4-4a^3+8a^2-16a+16=(a^4+8a^2+16)-(4a^3+16a)=$$

$$=(a^2+4)^2-4a(a^2+4)=(a^2+4)((a^2+4)-4a)=$$

$$= (a^2+4)(a^2-4a+4) = (a^2+4)(a-2)^2.$$

Он гох касри додашударо дар намуди

$$\frac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16} = \frac{(a^2+4)(a-2)(a+2)}{(a^2+4)(a-2)^2} = \frac{a+2}{a-2},\ a \neq 2$$

навиштан мумкин аст.

Мисоли 2. Ифодаи $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$-ро сода кунед.

Ҳал. Касри додашударо бо ду тарз, яъне бо тарзи ба махраҷи умумӣ овардан ва ҳам бо тарзи сурат ва махраҷро ба $a \cdot b$ зарб зада, сода кардан мумкин аст.

Тарзи якум. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \dfrac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \dfrac{b+a}{ab} : \dfrac{b-a}{ab} = \dfrac{b+a}{ab} \cdot \dfrac{ab}{b-a} = \dfrac{b+a}{b-a},\ b \neq a.$

Тарзи дуюм. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \dfrac{ab\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{ab\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = \dfrac{ab\left(\frac{b+a}{ab}\right)}{ab\left(\frac{b-a}{ab}\right)} = \dfrac{b+a}{b-a},\ b \neq a.$

§7. Ифодаҳои ирратсионалӣ

Ифодаҳои ирратсионалӣ гуфта, чунин ифодаҳои алгебравиро меноманд, ки дар онҳо ягон бузургӣ (ҳарф) дар таҳти реша ҷой дорад.

Дигаргунсозиҳои ифодаҳои ирратсионалӣ бошад, дар асоси қонунҳои арифметика ва ҳам амалҳо бо решаҳо гузаронида мешаванд. Мақсади асосӣ ёфтани зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, ки дар вақти ба он зарб намудани ифодаи ирратсионалӣ, бузургии дар таҳти реша буда, аз реша озод мешавад. Дар ин ҷо якчанд намуди зарбкунандаҳои ҳамроҳшударо дида мебароем:

1. Барои ифодаи $\sqrt[n]{a^m b^k}$, ки дар ин ҷо $a \geq 0,\ b \geq 0,$ $m, k \in N,\quad m < n,\ k < n,\ (m > 2,\ k > 2)$ мебошанд, ифодаи $\sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-k}}$, зарбкунандаи ҳамроҳшуда аст, чунки дар вақти бо он зарб задан ab хосил мешавад, яъне:

$$\sqrt[n]{a^m b^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m} b^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m} b^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n b^n} = ab.$$

2. Барои ифодаи $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, ки $a\geq 0,\ b\geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

мешавад.

3. Барои ифодаи $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, ки $a\geq 0,\ b\geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3=a+b$$

мешавад.

4. Барои ифодаи $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, ки $a\geq 0,\ b\geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3=a-b$$

мешавад.

Мисоли 1. Махраҷи ифодаи $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$-ро аз ифодаи ирратсионалӣ озод кунед.

Ҳал. Аз сабаби он, ки ифодаи $\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}$ барои ифодаи $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, бинобар он сурат ва махраҷи касри додашударо бо он зарб зада, дар асоси айниятӣ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ навиштта метавонем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3+2}=\frac{1}{5}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}).$$

Мисоли 2. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right).$$

Ҳал. а) Ифодаи додашуда ҳангоми $a\geq 0,\ b\geq 0$ ва $a\neq b$ будан, маъно дорад.

б) Аз навиштти $b=\sqrt{b^2}=(\sqrt{b})^2,\ b\geq 0$ истифода бурда, касри $\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$-ро ихтисор карда, ифодаи дар дохили қавси якум бударо дар намуди

$$\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

навишгтан мумкин аст.

в) Аз навишгги

$$a-b=\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

истифода бурда, амалҳои дар дохили кавси дуюм бударо сода менамоем:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

г) Натичахои кавсҳои якум ва дуюмро зарб зада, хосил менамоем:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right),\ (a\geq 0,\ b\geq 0,\ a\neq b).$$

Мисоли 3. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}-\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2},\ (x\neq y, x\neq -y).$$

Ҳал. Аз айниятҳои $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ва $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ истифода бурда, касри додашударо сода мекунем.

2. Барои ифодаи $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, ки $a\geq 0,\ b\geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

мешавад.

3. Барои ифодаи $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, ки $a\geq 0,\ b\geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3=a+b$$

мешавад.

4. Барои ифодаи $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, ки $a\geq 0,\ b\geq 0$ аст, ифодаи $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, чунки

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3=a-b$$

мешавад.

Мисоли 1. Махраҷи ифодаи $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$-ро аз ифодаи ирратсионалӣ озод кунед.

Ҳал. Аз сабаби он, ки ифодаи $\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}$ барои ифодаи $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ зарбкунандаи ҳамроҳшуда мебошад, бинобар он сурат ва махраҷи касри додашударо бо он зарб зада, дар асоси айнияти $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ навишта метавонем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3+2}=\frac{1}{5}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}).$$

Мисоли 2. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right).$$

Ҳал. а) Ифодаи додашуда ҳангоми $a\geq 0,\ b\geq 0$ ва $a\neq b$ будан, маъно дорад.

б) Аз навишти $b=\sqrt{b^2}=(\sqrt{b})^2,\ b\geq 0$ истифода бурда, касри $\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$-ро ихтисор карда, ифодаи дар дохили қавси якум бударо дар намуди

$$\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

навиштан мумкин аст.

в) Аз навишти

$$a-b=\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

истифода бурда, амалҳои дар дохили қавси дуюм бударо сода менамоем:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

г) Натиҷаҳои қавсҳои якум ва дуюмро зарб зада, ҳосил менамоем:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right),\ (a\geq 0,\ b\geq 0,\ a\neq b).$$

Мисоли 3. Ифодаи зеринро сода кунед:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}-\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2},\ (x\neq y, x\neq -y).$$

Ҳал. Аз айниятҳои $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ва $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ истифода бурда, касри додашударо сода мекунем.

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}-\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}-\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}=$$

$$=(x+y)-\frac{(x^2+xy+y^2)}{(x+y)}=\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-xy-y^2}{x+y}=$$

$$=\frac{xy}{x+y},\ x\neq -y.$$

Мисоли 4. Қимати ифодаи зеринро ҳангоми $x=-3\frac{3}{4}$ будан, ҳисоб кунед:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right):\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).$$

Ҳ а л. а) Ифодаи дар дохили қавси якум бударо сода мекунем:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1};$$

б) Ифодаи дар дохили қавси дуюм бударо сода мекунем:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}-\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{x^4+2x^2+1-x^4+2x^2-1}{x^4-1}=\frac{4x^2}{x^4-1};$$

в) Натиҷаи қавси якумро ба натиҷаи қавси дуюм тақсим карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{4x}{x^2-1}:\frac{4x^2}{x^4-1}=\frac{4x}{x^2-1}\cdot\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{4x^2}=\frac{x^2+1}{x};$$

г) Ба натиҷаи ҳосилшуда қимати $x=-3\frac{3}{4}$ ё $x=-\frac{15}{4}$-ро гузошта, ҳисоб мекунем:

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{\left(-\frac{15}{4}\right)^2+1}{-\frac{15}{4}}=\frac{\frac{225}{16}+1}{-\frac{15}{4}}=\frac{\frac{225+16}{16}}{-\frac{15}{4}}=$$

$$= \frac{241}{16} : \left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{241}{16} \cdot \frac{-4}{15} = -\frac{241}{4} \cdot \frac{1}{15} = -\frac{241}{60} = -4\frac{1}{60}.$$

МАШҚҲО

1. Ифодаҳоро сода кунед:

а) $\left(\frac{a}{a-2} + \frac{a^2}{a^3+8} \cdot \frac{a^2-2a+4}{2-a}\right) : \frac{8}{a^2-4a+4} - \frac{a^2+a+6}{4a+8}$;

б) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2} - \frac{b}{b-a}\right) : \frac{2b}{a^2-b^2}$;

в) $\left(\frac{ax-b}{a+b} - \frac{bx+a}{b-a}\right) \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{x^2-1} : \frac{a^2+b^2}{x-1}\right)$;

г) $\left(x - \frac{4xy}{x+y} + y\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} - \frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$;

ғ) $\frac{a^2+9}{a^2-6a+9} : \left(3+a-\frac{18}{3-a}\right) \cdot (a-3)$;

д) $A = \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$.

2. Ифодаро сода карда, қимати онро ҳангоми $x = 0{,}5$ будан, ёбед:

$$\frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{4}{x^4+4x^3+4x^2} + \frac{4}{x^3+2x^2}.$$

3. Ифодаро сода карда, қимати онро ҳангоми $a = -0{,}01$ будан, ёбед:

$$\frac{a^2-2a+1}{a-3} \cdot \left(\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a}\right).$$

4. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $36a^2 - (5a-1)^2$; б) $3x^3 + x^2 - x - 3$.

5. Айниятро исбот кунед: $\frac{1+a^2+a}{1-a^3} + \frac{a-a^2}{(1-a)^3} \equiv \frac{1}{(1-a)^2}$.

6. Ҳисоб кунед:

а) $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{19-8\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{11-4\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}}$; г) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

БОБИ V
МУОДИЛАҲО
§1. Мафҳуми муодила ва ҳалҳои он

Мо ҳангоми тадқиқотҳои назариявӣ ва корҳои амалӣ аз муодилаҳо истифода мебарем, чунки онҳо дар ҳалли масъалаҳои гуногун ёрӣ мерасонанд. Барои он ки масъала ё мисол бомуваффақият ҳал карда шавад, худи муодила ва тарзҳои гуногуни ҳалли онро нағз донистан лозим аст, зеро ҳалли муодила ин яке аз мафҳумҳои асосии курси алгебра мебошад.

Таърифи 1. *Баробарии дар таркибаш тағйирёбанда доштаро муодила меноманд.*

Масалан, баробариҳои $ax-b=0,\ a\neq 0,\ a,b\in R,\ x^2-1=0$ муодила мебошанд, чунки ин баробариҳо дар таркибашон тағйирёбандаи x-ро доранд.

Ҳал кардани муодила, ин ёфтани маҷмуи ҳалҳои (решаҳои) он мебошад.

Маҷмуи ҳалҳои (решаҳои) муодила, маҷмуи охирнок, холӣ ва ҳам беохир шуда метавонанд.

Таърифи 2. *Ҳалҳои (решаҳои) муодила гуфта, он қиматҳои тағйирёбандаро меноманд, ки барои онҳо баробарӣ дуруст мебошад.*

Масалан, муодилаи додашудаи $ax-b=0,\ a\neq 0,\ a,b\in R$ ҳалли ягонаи $x=\frac{b}{a}$- ро дорад, чунки ҳангоми $x=\frac{b}{a}$- ро ба ҷои x-и муодила гузоштан, муодила айниятан ба нол баробар мешавад, яъне $a\cdot\frac{b}{a}-b=0\Leftrightarrow 0=0$.

Се хосияти асосии муодиларо дар хотир доштан лозим аст, ки онҳо чунинанд:

1. *Агар ба ду тарафи баробарии дуруст нисбат ба тағйирёбандааш ягон якузва ё бисёрузваро ҷамъ намоем, он гоҳ ин муодила ҳалҳояшро тағйир намедиҳад, яъне баробарии дуруст ҳосил мешавад.*

2. *Агар ду тарафи баробарии дурустро ба ягон адади нобаробар ба нол зарб ё тақсим намоем, он гоҳ ин муодила ҳалҳояшро тағйир намедиҳад, яъне баробарии дуруст ҳосил мешавад.*

3. *Агар ягон ҷамъшавандаро аз як қисми баробарии дуруст ба қисми дигараш бо аломати муқобил гузаронем, баробарии дуруст ҳосил мешавад.*

Азбаски дар ҳалли муодилаҳо аз мафҳуми баробаркувва будани муодилаҳо истифода мебаранд, бинобар он дар асоси ин се хосияти дар боло овардашуда мафҳуми баробаркувва будани муодилаҳоро бори дигар хотиррасон мекунем.

Ду муодила ҳамон вақт баробаркувваст, ки агар муодилаи дуюм натиҷаи муодилаи якум ва муодилаи якум натиҷаи муодилаи дуюм бошад. Инро бо аломати $\Leftrightarrow$ ишора мекунанд.

Барои фаҳмиши пурра доштан, мисоли зеринро меорем.

Мисол. Муодилаҳои $16x = 0{,}64$ ва $x = 0{,}04$, ки тағйирёбандаи x доранд, баробаркувва мебошанд: $16x = 0{,}64 \Leftrightarrow x = 0{,}04$.

Барои исбот намудан аз хосиятҳои дар боло зикршуда истифода мебарем.

Муодилаи $16x = 0{,}64$ барои ҳаргуна қиматҳои x ба баробарии дуруст табдил меёбад. Агар ҳар ду қисми баробарии дурустро ба як адад тақсим кунем, боз баробарии дуруст ҳосил мешавад. Пас, агар дар ягон қимати x муодилаи якум ба баробарии дуруст табдил ёбад, он гоҳ муодилаи дуюм ҳам ба баробарии дуруст табдил меёбад. Аз ин ҷо бармеояд, ки муодилаи дуюм натиҷаи муодилаи якум аст. Агар ҳар ду қисми баробарии дурустро ба як адад зарб занем, боз баробарии дуруст ҳосил мешавад, бинобар он муодилаи якум натиҷаи муодилаи дуюм мебошад. Инак, мо исбот намудем, ки муодилаҳои $16x = 0{,}64$ ва $x = 0{,}04$ баробаркуввааанд.

Таърифи 3. *Фақат ҳамон муодилаҳо баробаркуввааанд, ки агар маҷмуи ҳалҳояшон мувофиқ бошанд.*

Дар ин ҷо бояд дар хотир дошт: муодилаҳое, ки тағйирёбандаҳои якхела доранду ҳал надоранд, баробаркувва ҳисобида мешаванд.

Акнун, намудҳои гуногуни муодилаҳоро дида мебароем.

§2. Муодилаи хаттӣ

Таърифи 1. *Муодилаи* $ax + b = 0$ $(ax - b = 0)$, *ки дар ин ҷо* a *ва* b *ададҳои дилхоҳанд, муодилаи хаттӣ (ё ки муодилаи дараҷаи якуми яктағйирёбанда дошта) номида мешавад.*

Масалан, муодилаи $3x + 4 = 0$, $0{,}8 - 0{,}4x = 0$, $9x + 3 = 0$,

$12x=7$, $2x+4=3$, $\frac{7}{2}x-4=\frac{4}{5}x-5$ ва амсоли ин, муодилаҳои хаттӣ мебошанд. Чи хеле, ки дар §1 қайд кардем, ҳал кардани муодила – ин ёфтани маҷмуи ҳалҳои (решаҳои) муодила мебошад. Маҷмуи решаҳои муодилаи хаттӣ, маҷмуи охирнок, холӣ ва беохир шуда метавонад.

Ҳангоми ҳал кардани муодилаҳои хаттӣ аз навишти $ax=-b$ $(ax=b)$ истифода мебаранд, чунки муодилаи $ax+b=0$ $(ax-b=0)$ бо муодилаи $ax=-b$ $(ax=b)$ баробаркувва аст.

Ҳалли (решаи) муодилаи хаттии $ax-b=0$ - ро дида мебароем:

1. Агар $a\neq 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax-b=0\Leftrightarrow ax=b$ ҳалли ягонаи $x=\frac{b}{a}$ - ро дорад.

Масалан: а) $2x-7=0;\ 2x=7;\ x=\frac{7}{2}=3,5;$

б) $12-4x=0;\ 4x=12;\ x=\frac{12}{4}=3;$

в) $7x-36=0;\ 7x=36;\ x=\frac{36}{7}=5\frac{1}{7};$

г) $\frac{3}{5}x-\frac{x}{2}=0,2;\ 6x-5x=10\cdot 0,2;\ x=2.$

2. Агар $a=0$ ва $b=0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax-b=0$ ё ки $ax=b$ намуди $0\cdot x=0$ - ро мегирад. Маҷмуи решаҳои муодилаи $0\cdot x=0$ маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад, яъне ин маҷмуи беохир аст.

Агар $a=0$, вале $b\neq 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax-b=0$ ё ки $ax=b$ намуди $0\cdot x=b$- ро мегирад. Маҷмуи решаҳои муодилаи $0\cdot x=b$ $(b\neq 0)$ маҷмуи холӣ мебошад ва бо рамзи Ø ифода карда мешавад.

Масалан: 1. $ax=a$ (a - параметр мебошад).

Ҳ а л. а) Агар $a\neq 0$ бошад, он гоҳ $ax=a\Rightarrow x=1$ мебошад.

б) Агар $a=0$ бошад, он гоҳ $ax=a\Rightarrow 0\cdot x=0$ мебошад. Маҷмуи ҳалҳои муодилаи $0\cdot x=0$, маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ аст.

2. $ax=x+1$ (a - параметр мебошад).

Ҳ а л. а) $ax = x + 1;\ ax - x = 1;\ (a-1)x = 1;\ x = \dfrac{1}{(a-1)}$, яъне агар $a \neq 1$ бошад, муодила ҳалли ягонаи $x = \dfrac{1}{(a-1)}$ - ро дорад.

б) Агар $a - 1 = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи $(a-1)x = 1$ намуди $0 \cdot x = 1$ - ро мегирад, яъне муодила ҳал (реша) надорад, маҷмуи ҳалҳояш Ø мебошад.

Дар охир ҳалҳои (решаҳои) муодилаҳои хаттии гуногунро меорем.

М и с о л и 1. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

1. $4x - 7 = 9;$
2. $9 - 3x = 3;$
3. $5 + 4x = 1;$
4. $4x - 5 = 2x + 7;$
5. $x - 0{,}4 = 3x + 11{,}6;$
6. $3{,}4 - 2x = x - 8{,}6.$

Ҳ а л. 1. $4x - 7 = 9; 4x = 9 + 7;\ 4x = 16;\ x = \dfrac{16}{4};\ x = 4;$

2. $9 - 3x = 3;\ 3x = 9 - 3;\ 3x = 6;\ x = \dfrac{6}{3};\ x = 2;$

3. $5 + 4x = 1;\ 4x = 1 - 5;\ 4x = -4;\ x = \dfrac{-4}{4};\ x = -1;$

4. $4x - 5 = 2x + 7;\ 4x - 2x = 7 + 5;\ 2x = 12;\ x = \dfrac{12}{2};\ x = 6;$

5. $x - 0{,}4 = 3x + 11{,}6;\ x - 3x = 11{,}6 + 0{,}4; -2x = 12;\ x = \dfrac{12}{-2};\ x = -6;$

6. $3{,}4 - 2x = x - 8{,}6;\ 3{,}4 + 8{,}6 = x + 2x;\ 12 = 3x;\ x = \dfrac{12}{3};\ x = 4.$

М и с о л и 2. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

1. $\dfrac{x}{2} + x = 4;$
2. $\dfrac{x+3}{4} - 2 = 0;$
3. $\dfrac{x-2}{2} - 4 = \dfrac{3x+21}{5};$
4. $\dfrac{x-5}{2} + \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{x-3}{4} + \dfrac{x-4}{3}.$

Ҳ а л. 1. $\dfrac{x}{2} + x = 4;\ \dfrac{x+2x}{2} = 4;\ \dfrac{3x}{2} = 4;\ 3x = 8;\ x = \dfrac{8}{3};\ x = 2\dfrac{2}{3}.$

2. $\dfrac{x+3}{4} - 2 = 0;\ \dfrac{x+3-8}{4} = 0;\ \dfrac{x-5}{4} = 0;\ x - 5 = 0; x = 5.$

3. $\frac{x-2}{2}-4=\frac{3x+21}{5}$; $\frac{x-2-8}{2}=\frac{3x+21}{5}$;

$\frac{x-10}{2}=\frac{3x+21}{5}$; $\frac{5(x-10)}{2\cdot 5}=\frac{2(3x+21)}{5\cdot 2}$;

$\frac{5x-50}{10}=\frac{6x+42}{10}$; $5x-50=6x+42$;

$5x-6x=50+42$; $-x=92$; $x=-92$.

4. $\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8}=\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}$;

$\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8}-\frac{x-3}{4}-\frac{x-4}{3}=0$;

$12(x-5)+3(x-1)-6(x-3)-8(x-4)=0$;

$12x-60+3x-3-6x+18-8x+32=0$;

$12x-60+3x-3-6x+18-8x+32=0$;

$x-13=0$; $x=13$.

Мисоли 3. Муодилаҳоеро, ки дар махраҷашон тағйирёбанда доранд, ҳал кунед:

1. $\frac{7}{2x-4}-\frac{3}{x+2}=0$;
2. $\frac{3}{x-1}+6=\frac{4}{x-1}$;
3. $\frac{a}{1-bx}=\frac{b}{1-ax}$, $a;b\neq 0$;
4. $\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2-9}$

Ҳ а л. 1. $\frac{7}{2x-4}-\frac{3}{x+2}=0$ ё ки $\frac{7}{2(x-2)}-\frac{3}{x+2}=0$.

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x\neq -2$, $x\neq 2$ дуруст мебошад. Муодиларо бо тарзи ба махраҷи умумӣ овардан ҳал карда, ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 7(x+2)-6(x-2)=0, \\ x+2\neq 0, \\ x-2\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x+14-6x+12=0, \\ x\neq \pm 2. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x+26=0$ ё ки $x=-26$ мешавад.

Ҷавоб: -26.

2. $\frac{3}{x-1}+6=\frac{4}{x-1}$.

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x\in R$, $x\neq 1$ дуруст буда, ҳалли ягонаро дорад.

$\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x-1}+6=0$ ё ки $-\frac{1}{x-1}+6=0$;

$-1+6(x-1)=0$;

$-1+6x-6=0$;

$6x=7;\ x=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$. **Ҷавоб:** $1\frac{1}{6}$.

3. $\frac{a}{1-bx}=\frac{b}{1-ax}$.

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x\in R,\ x\neq\frac{1}{a},\ x\neq\frac{1}{b}$ дуруст аст, он гоҳ муодиларо ҳал карда, ҳосил мекунем:

$\frac{a}{1-bx}-\frac{b}{1-ax}=0;\ \frac{a(1-ax)-b(1-bx)}{(1-bx)(1-ax)}=0;$

$\frac{a-a^2x-b+b^2x}{(1-bx)(1-ax)}=0;\ \frac{(a-b)+(b^2-a^2)x}{(1-bx)(1-ax)}=0;$

$(a-b)+(b^2-a^2)x=0,\ (1-bx)(1-ax)\neq 0;$

$(b^2-a^2)x=-(a-b);\ \ (1-bx)\neq 0,\ \ (1-ax)\neq 0;$

$x=-\frac{(a-b)}{b^2-a^2};\ x=\frac{b-a}{(b-a)(b+a)};\ x=\frac{1}{b+a}$. **Ҷавоб:** $\frac{1}{b+a}$.

4. $\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2-9}$ ё ки $\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x+3}-\frac{4}{(x-3)(x+3)}=0$.

Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x\in R,\ x\neq -3,\ x\neq 3$ дуруст буда, ҳалли ягонаро дорад.

$\frac{5(x+3)+7(x-3)-4}{(x-3)(x+3)}=0;\ \frac{5x+15+7x-21-4}{(x-3)(x+3)}=0;$

$\frac{12x-10}{(x-3)(x+3)}=0\Rightarrow 12x-10=0;$

$x^2-9\neq 0;\ 12x=10;\ x^2-9\neq 0;\ x=\frac{10}{12};\ x=\frac{5}{6}$.

Ҷавоб: $\frac{5}{6}$.

МАШҚҲО

Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

1. $4-\frac{x}{3x-2}=0;$

2. $\frac{x}{2x+1}-\frac{4}{5}=0;$

3. $\frac{3x+2}{3-4x}=\frac{1}{5}$;

4. $\frac{3}{x-4}-2=\frac{3x-5}{x-4}$;

5. $\frac{4}{3x-4}-\frac{3}{4-3x}=0$;

6. $\frac{0,5}{x}-\frac{1}{3}=\frac{2,5}{x}$;

7. $\frac{3x-2}{4}-3=\frac{4x+5}{6}$;

8. $\frac{2x}{x+5}+4-\frac{5}{x+5}=0$.

§3. Муодилаи квадратӣ

Таърифи 1. *Муодилаи квадратӣ гуфта, муодилаи намуди*

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо a, b, c *- ададҳои ҳақиқӣ,* x *- тағйирёбанда мебошад.*

Ададҳои a, b, c - ро коэффитсиентҳои муодилаи квадратӣ меноманд. Дар ин ҷо b - коэффитсиенти назди тағйирёбандаи дараҷаи якум, a - коэффитсиенти назди тағйирёбандаи дараҷаи дуюм ва адади c - узви озод мебошад.

I. Муодилаи квадратии нопурра

Агар дар муодилаи (1) яке аз коэффисентҳо b ва ё c, ё ки ҳар ду ба нол баробар бошанд, он гоҳ муодилаи (1)- ро муодилаи нопурраи квадратӣ меноманд. Намудҳои муодилаҳои нопурраи квадратӣ ҳангоми $a\neq 0$ будан, чунинанд:

а) $ax^2=0$; б) $ax^2+c=0$; $(c\neq 0)$; в) $ax^2+bx=0$ $(b\neq 0)$.

Ҳалли муодилаҳои нопурраи квадратиро ҳангоми $a\neq 0$ будан, бори дигар хотиррасон мекунем:

а) Муодилаи $ax^2=0$ решаҳои баробари $x=0$ - ро дорад.

б) Муодилаи $ax^2+c=0$, $(c\neq 0)$:

$$ax^2=-c;\ x^2=-\frac{c}{a}.$$

Ҳангоми ҳал кардани ин хел муодила ду ҳолатро дида баромадан мумкин аст:

Агар $\frac{c}{a}>0$ бошад, он гоҳ $-\frac{c}{a}<0$ мешавад, ки дар ин маврид муодилаи $x^2=-\frac{c}{a}$ дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал (реша) надорад.

Агар $\frac{c}{a}<0$ бошад, он гоҳ $-\frac{c}{a}>0$ мешавад, ки дар ин ҳолат муодилаи $x^2=-\frac{c}{a}$ ду реша дорад:

$$x^2=-\frac{c}{a}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}};\quad x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}};\quad x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

в) Муодилаи $ax^2+bx=0\ \ (b\neq 0)$- ро бо роҳи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан, (ё ки x-ро аз қавс баровардан), ҳал кардан мумкин аст.

$ax^2+bx=0$ ё ки $x(ax+b)=0$. Муодила дорои ду ҳал аст:

Аз ин ҷо, $x=0$ ё ки $ax+b=0$.

Аз муодилаи якум $x_1=0$ ва аз муодилаи дуюм $x_2=-\frac{b}{a}$ мешавад.

Ҷавоб: $0;\ -\frac{b}{a}$.

Мисоли 4. Ҳалли муодилаҳои зеринро меорем:

1. $7x^2=0;$ **2.** $-5x^2=0;$ **3.** $3x^2-24=0;$

4. $36-4x^2=0;$ **5.** $12x^2+36x=0;$ **6.** $4x-9x^2=0;$

7. $9x^2+72x=0;$ **8.** $0{,}5x^2-1{,}25x=0;$ **9.** $\frac{3}{2}x^2-6=0$

Ҳал. 1. $7x^2=0;\ x^2=0;\ x=0.$

2. $-5x^2=0;\ x^2=0;\ x=0.$

3. $3x^2-24=0;\ 3x^2=24;\ x^2=8;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{8}.$

4. $36-4x^2=0;\ 36=4x^2;\ 9=x^2;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{9};\ x_1=-3;x_2=3.$

5. $12x^2+36x=0;\ x(12x+36)=0.$

Аз ин ҷо, $x=0$ ё ки $12x+36=0$ шуда, $x_1=0;\ x_2=-3$ мешавад.

6. $4x-9x^2=0;\ x(4-9x)=0$ Аз ин ҷо, $x=0$ ё ки $4-9x=0$ шуда, $x_1=0;\ x_2=\frac{4}{9}$ мешавад.

7. $9x^2+72x=0;\ x(9x+72)=0.$ Аз ин ҷо $x=0$ ё ки $9x+72=0$ шуда, $x_1=0;\ x_2=-8$ мешавад.

8. $0{,}5x^2-1{,}25x=0;\ x(0{,}5x-1{,}25)=0$ шуда, $x=0$ ё ки $0{,}5x-1{,}25=0$ шуда, $x_1=0;\ x_2=2{,}5$ мешавад.

9. $\frac{3}{2}x^2-6=0;\ 3x^2-12=0;\ 3x^2-12=0;$

$3x^2=12;\ x^2=4;\ x_1=-2;\ x_2=2.$

Дар ҳолатҳои умумӣ барои ҳал намудани муодилаҳои квадратӣ аз тарзи ба квадрати пурра ҷудокунӣ истифода мебаранд. Татбиқи ин тарзро дар муодилаи квадратии намуди (1) дида мебароем.

Тарафи чапи муодилаи $ax^2+bx+c=0$- ро дар намуди зерин менависем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c.$$

Барои ифодаи дар дохили қавс бударо ба квадрати пурра овардан, узви дуюмашро ба 2 зарб ва тақсим намуда, баъд бо ҷамъ ва тарҳ карда квадрати $\frac{b}{2a}$ ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{2b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$$

$$=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Пас, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ мешавад.

Он гоҳ, муодилаи (1) намуди зеринро мегирад.

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0;$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (2)$$

Ҳалли муодила аз аломати ифодаи дар тарафи рости баробарии (2) буда, вобаста аст. Аз сабаби он, ки $4a^2>0$ мебошад, бинобар он аломати ифодаи тарафи рости баробарии (2) аз аломати b^2-4ac вобаста аст.

Таърифи 2. *Ифодаи b^2-4ac дискриминанти муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ буда, бо рамзи D ишорат карда мешавад.*

Яъне, $D = b^2 - 4ac$.

«**Дискриминант**» - калимаи лотинӣ буда, маънояш **фарққунанда** мебошад.

Мисоли 5. Муодилаҳои зринро бо тарзи ба квадрати пурра ҷудокунӣ ҳал мекунем:

1. $x^2 - 6x - 7 = 0;$
2. $x^2 - 4x - 5 = 0;$
3. $3x^2 + 2x - 5 = 0;$
4. $x^2 - 5x + 6 = 0.$

Ҳал. Барои ҳал намудани муодилаҳои овардашуда, аз формулаҳои зарби мухтасар $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ва $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ истифода мебарем.

1. Тарафи чапи муодиларо дар намуди зерин табдил дода, онро ҳал мекунем:

$$x^2 - 6x - 7 = 0;$$
$$x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x - 7 = 0;$$
$$x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 9 - 7 = 0;$$
$$(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9) - 9 - 7 = 0;$$
$$(x-3)^2 - 16 = 0;$$
$$(x-3)^2 = 4^2;$$
$$(x-3)^2 - 4^2 = 0;$$
$$((x-3) - 4)((x-3) + 4) = 0;$$
$$(x-7)(x+1) = 0.$$

Аз ин ҷо $x_1 = -1;\ x_2 = 7$ мешавад.

2. Тарзи якум. Тарафи чапи муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$x^2 - 4x - 5 = 0;$$
$$x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x - 5 = 0$$
$$x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 - 5 = 0;$$
$$(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4) - 4 - 5 = 0;$$
$$(x-2)^2 - 9 = 0.$$

Тарзи дуюм. Муодилаи $x^2 - 4x - 5 = 0$ - ро дар чунин намуд навишта, ҳаллашро меорем:

$$x^2+x-5x-5=0;$$
$$x(x+1)-5(x+1)=0;$$
$$(x+1)(x-5)=0.$$

Аз ин чо, $x+1=0$ ё ки $x-5=0$ шуда, $x_1=-1$ ва $x_2=5$ мешавад.

3. $3x^2+2x-5=0;$

Тарзи якум. $x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=0;$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{5}{3}=0;$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0;$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=0;$$
$$\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}\right)=0;$$
$$\left(x+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)=0;$$
$$(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right)=0.$$

Аз ин чо, $x_1=1;\ x_2=-\frac{5}{3}$ мебошад.

Тарзи дуюм. $3x^2+2x-5=0;$

$$3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)-5=0;$$
$$3\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)-5=0;$$
$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-5-\frac{3}{9}=0;\quad 3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-5-\frac{1}{3}=0;$$
$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{3}=0;\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9}.$$

Дар ин чо, $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9}\Rightarrow\left|x+\frac{1}{3}\right|=\frac{4}{3}$ мебошад. Аз ин чо,

$x+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ва $-\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$ шуда, $x_1=-\frac{5}{3}$ ва $x_2=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$; $x_2=1$ мебошад. Чӣ хеле ки мебинем $x_1=-\frac{5}{3}$ ва $x_2=1$ ҳалҳои муодилаи квадратии $3x^2+2x-5=0$ мебошанд.

4. $x^2-5x+6=0$;

$$x^2-2x\cdot\frac{5}{2}+6=0$$

$$x^2-2x\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6=0;$$

$$x^2-2x\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}-\frac{25-24}{4}=0;$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0;$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0;$$

$$\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)=0;$$

$$\left(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=0;$$

$$(x-2)\cdot(x-3)=0.$$

Аз ин ҷо, $x_1=2$ ва $x_2=3$ мешавад.

II. Муодилаи квадратии пурра

Ҳалҳои муодилаи $ax^2+bx+c=0$-ро дида мебароем. Пеш аз ҳама барои муодилаи $ax^2+bx+c=0$ дискриминанташ $D=b^2-4ac$-ро ҳисоб мекунем.

а) Агар $D=b^2-4ac>0$ бошад, он гоҳ аз (2) бармеояд, ки $ax^2+bx+c=0$ ду ҳал дорад:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ ва } x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad (3)$$

б) Агар $D=b^2-4ac=0$ бошад, он гоҳ муодилаи $ax^2+bx+c=0$ ҳалли ягона дорад:

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a} \qquad (4)$$

в) Агар $D=b^2-4ac<0$ бошад, муодила дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад, яъне маҷмуи ҳалҳояш холӣ ($\varnothing$) мебошад.

г) Агар дар муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ коэффитсиенти дуюмаш b - адади ҷуфт, яъне $b=2k$ бошад, он гоҳ формулаҳои ҳалҳои муодилаи квадратии $ax^2+2kx+c=0$ намуди

$$x_1=\frac{-2k-\sqrt{D}}{2a};\ x_2=\frac{-2k+\sqrt{D}}{2a};$$

$$D=(2k)^2-4ac=4\left(k^2-ac\right)=4D_1 \qquad (5)$$

ё ки $x_1=\dfrac{-k-\sqrt{D_1}}{a}$ ва $x_2=\dfrac{-k+\sqrt{D_1}}{a}$ (6)

-ро мегиранд.

Аз ин ҷо дида мешавад, ки мавҷудияти ҳалҳои муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ ва шумораи онҳо аз аломати дискриминант D вобаста аст.

Мисоли 6. Ҳалҳои муодилаҳои зеринро меорем:

1. $3x^2-10x+3=0;$ 2. $2x^2-10x+8=0;$
3. $x^2-8x+12=0;$ 4. $5x^2+6x+1=0;$
5. $9x^2-6x+1=0;$ 6. $2x^2+5x+9=0.$

Ҳал. 1. Дискриминанти муодилаи додашударо ҳисоб мекунем.

$$D=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot 3\cdot 3=100-36=64>0$$

Азбаски $D>0$ аст, пас муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодила бо формулаи (3) ёфта мешаванд.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-10)-\sqrt{64}}{2\cdot 3}=\frac{10-8}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-10)+\sqrt{64}}{2\cdot 3}=\frac{10+8}{6}=\frac{18}{6}=3.$$

Пас, $x_1=\frac{1}{3}$ ва $x_2=3$ мешавад.

2. Дискриминанти муодилаи додашударо ҳисоб мекунем.

$$D=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot 2\cdot 8=100-64=36>0.$$

Азбаски $D>0$ аст, пас муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодила бо формулаи (3) ёфта мешаванд.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-10)-\sqrt{36}}{2\cdot 2}=\frac{10-6}{4}=\frac{4}{4}=1 \text{ ё ки } x_1=1.$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-10)+\sqrt{36}}{2\cdot 2}=\frac{10+6}{4}=\frac{16}{4}=4.$$

ё ки $x_2=4$ аст.

3. Дискриминанти муодиларо аз рӯи формулаи $\frac{D}{4}=k^2-ac$ $(b=2k)$ ёфтан мумкин аст, чунки $b=-8$ адади ҷуфт мебошад:

$$\frac{D}{4}=k^2-ac=\left(\frac{8}{2}\right)^2-1\cdot 12=16-12=4>0.$$

Пас, муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодиларо аз рӯи формулаи (6) меёбем:

$$x_1=4-2=2;\ \ x_2=4+2=6.$$

4. Дискриминанти муодила

$$D_1=k^2-ac=3^2-5=9-5=4>0 \text{ аст.}$$

Пас, муодила ду ҳал дорад. Ҳалҳои муодила аз рӯи формулаи (6) ёфта мешаванд.

$$x_1=\frac{-k-\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-3-\sqrt{4}}{5}=\frac{-3-2}{5}=-1.$$

$$x_2=\frac{-k+\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-3+\sqrt{4}}{5}=\frac{-3+2}{5}=-\frac{1}{5}.$$

5. Дискриминанти муодила

$$D_1=k^2-ac=3^2-9=9-9=0 \text{ аст.}$$

Пас, муодила ду ҳалли баробар дорад. Ҳалли муодила аз рӯи формулаи (4) ёфта мешавад.

$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$. Ҳангоми $b=2k$ будан

$$x_1=x_2=\frac{-k}{a}=\frac{-6}{2\cdot 9}=\frac{-6_1}{18}=-\frac{1}{3} \text{ мешавад.}$$

6. Дискриминанти муодила

$$D=5^2-4\cdot 9\cdot 2=25-72=-47<0 \text{ мешавад.}$$

Пас, муодилаи додашуда дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад, яъне маҷмуи ҳалҳояш холӣ (Ø) мебошад.

III. Муодилаи квадратии ислоҳкардашуда

Агар дар муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ коэффитсиенти якумаш $a=1$ бошад, он гоҳ ишораҳои нави $b=p$ ва $c=q$ - ро дохил карда, муодилаи квадратии

$$x^2+px+q=0 \qquad (7)$$

- ро ҳосил мекунем.

Муодилаи квадратии (7) - ро муодилаи квадратии ислоҳкардашуда меноманд.

Ҳалҳои муодилаи (7) бо формулаҳои зерин ёфта мешаванд:

$$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ ва } x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad (8)$$

Агар дар муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ коэффитсиенти якумаш $a\neq 1$ бошад, он гоҳ ишораҳои нави $\frac{b}{a}=p$ ва $\frac{c}{a}=q$ -ро дохил карда, муодилаи квадратии ислоҳкардашударо ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+px+q=0.$$

IV. Теореми Виет

Теорема. *Суммаи решаҳои ҳақиқии муодилаи квадратии* $ax^2+bx+c=0$ *ба* $-\frac{b}{a}$ *ва ҳосили зарби онҳо ба* $\frac{c}{a}$ *баробар аст,* яъне,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ (x_1+x_2=-p) \text{ ва}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\ (x_1\cdot x_2=q) \qquad (9)$$

мебошад (Исботи теорема ба хонандагон супорида мешавад).

Мисоли 7. Ҳалҳои муодилаҳои зеринро меорем:

1. $x^2+12x+36=16(2x-3)$; 2. $x^2-7x+12=0$;

3. $x^2-2x-3=0$; 4. $3x^2-7x+2=0$.

Ҳал. 1. Муодилаи $x^2+12x+36=16(2x-3)$ -ро сода мекунем:

$$x^2+12x+36=32x-48$$

$$x^2+12x+36-32x+48=0;$$

$$x^2-20x+84=0.$$

Муодилаи дар натиҷаи содакунӣ ҳосилшударо, муодилаи квадратии ислоҳкардашуда номидан мумкин аст. Ҳалҳои ин хел муодила аз рӯи формулаи (8) ёфта мешаванд:

$$x_1=\frac{20}{2}-\sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2-84}=10-\sqrt{100-84}=$$

$$=10-\sqrt{16}=10-4=6;$$

$$x_2=\frac{20}{2}+\sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2-84}=10+\sqrt{100-84}=$$

$$=10+\sqrt{16}=10+4=14.$$

2. Муодилаи квадратии додашуда, муодилаи квадратии ислоҳкардашуда мебошад, бинобар он ҳалҳояш бо формулаи (8) ёфта мешаванд:

$$x_1=\frac{7}{2}-\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-12}=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}-12}=$$

$$=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49-48}{4}}=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3;$$

$$x_2=\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-12}=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}-12}=$$

$$=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49-48}{4}}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

3. Муодилаи сеюм айнан монанди муодилаҳои дар боло овардашуда ҳал карда мешавад:

$$x_1=\frac{2}{2}-\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+3}=1-\sqrt{1+3}=$$

$$=1-\sqrt{4}=1-2=-1;$$

$$x_2=\frac{2}{2}+\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+3}=1+\sqrt{1+3}=$$

$$=1+\sqrt{4}=1+2=3.$$

4. Муодилаи чорумро бо роҳи ба 3 тақсим намудани ду тарафи баробарӣ, ба муодилаи квадратии ислоҳкардашуда оварда, онро ҳал менамоем.

$3x^2-7x+2=0$ ё ки $x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=0$.

Ҳалҳои муодилаи $x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=0$ аз рӯи формулаи (8) ёфта мешаванд:

$$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=\frac{7}{3}:2-\sqrt{\left(\frac{7}{3}:2\right)^2-\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{7}{6}-\sqrt{\left(\frac{49}{36}\right)-\frac{2}{3}}=\frac{7}{6}-\sqrt{\frac{49-24}{36}}=$$

$$=\frac{7}{6}-\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{7}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

$$x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=\frac{7}{3}:2+\sqrt{\left(\frac{7}{3}:2\right)^2-\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{7}{6}+\sqrt{\left(\frac{49}{36}\right)-\frac{2}{3}}=\frac{7}{6}+\sqrt{\frac{49-24}{36}}=$$

$$x_2=\frac{7}{6}+\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{7}{6}+\frac{5}{6}=\frac{12}{6}=2.$$

Мисоли 8. Решаҳои муодилаи $4x^2-3x-8=0$- ро наёфта, ифодаҳои $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, $x_1^2+x_2^2$ ва $x_1^3+x_2^3$ ёфта шаванд (дар ин ҷо x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи додашуда мебошанд).

Ҳал. Дискриминанти муодилаи додашуда $D=b^2-4ac=9+4\cdot4\cdot8=9+128>0$ мебошад, пас, муодила ду решаи ҳақиқии гуногуни x_1 ва x_2- ро дорад.

Дар асоси теоремаи Виет

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}; \qquad x_1+x_2=\frac{3}{4};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}; \qquad x_1\cdot x_2=-\frac{8}{4}=-2.$$

мебошанд. Он гоҳ:

$$\text{а)}\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{\frac{3}{4}}{-2}=\frac{3}{-2\cdot4}=-\frac{3}{8};$$

б) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2-2(-2)=\frac{9}{16}+4=$

$=\frac{9+64}{16}=\frac{73}{16}$;

в) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\cdot(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\times$

$\times(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=(x_1+x_2)\cdot(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)=$

$=(x_1+x_2)\cdot((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\cdot(-2)\right)=$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{9}{16}+6\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{9+96}{16}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{105}{16}=\frac{315}{64}$.

Мисоли 9. Аз рӯи решаҳои додашудаи $x_1=1$ ва $x_2=4$, муодилаи квадратии ислоҳкардашударо тартиб дихед.

Ҳал. Барои тартиб додани муодилаи квадратӣ аз формулаҳои теоремаи Виет

$x_1+x_2=-p\Rightarrow p=-(x_1+x_2)$;

$x_1\cdot x_2=q\Rightarrow q=x_1\cdot x_2$

истифода мебарем. Азбаски, $x_1=1$ ва $x_2=4$ мебошад, пас, $p=-(x_1+x_2)=-(1+4)=-5$, $q=x_1\cdot x_2=1\cdot 4=4$.

Он гоҳ дар асоси қиматҳои $p=-5$ ва $q=4$ ифодаи муодилаи квадратии ислоҳшудаи (7), ҳосил мекунем: $x^2-5x+4=0$.

Мисоли 10. Қимати p ёфта шавад, агар суммаи квадратҳои решаҳои муодилаи квадратии $x^2+px-3=0$ ба 10 баробар бошад.

Ҳал. Адади p - и дар муодила буда, бо истифодаи теоремаи Виет ёфта мешавад.: $x_1+x_2=-p$ ва $x_1\cdot x_2=q$ Мувофиқи шарти масъала $x_1^2+x_2^2=10$ ва $q=x_1\cdot x_2=-3$ аст, пас

$x_1^2+x_2^2=10$;

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=10$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$;

$(-p)^2-2\cdot(-3)=10$;

$p^2+6=10;$

$p^2=10-6$ ё $p^2=4.$

Аз ин ҷо, $|p|=2$ ё ки $p_1=-2$ ва $p_2=2$ мешавад.

§4. Ба зарбкунандаҳо ҷудо намудани сеузваи квадратӣ

1. Бисёрузваи дараҷаи дуюм сеузваи квадратӣ номида мешавад. Сеузваи квадратии зеринро дида мебароем:

$ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0).$

Дар аввал сеузваи квадратиро ба нол баробар карда, решаҳояшро муайян мекунем. Бигузор дискриминанти муодилаи квадратии $ax^2+bx+c\ (a\neq 0),\ \ D=b^2-4ac>0$ бошад, он гоҳ муодила ду решаҳои ҳақиқии гуногуни x_1 ва x_2- ро дорад, ки дар асоси теоремаи Виет

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ ва } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \text{ мебошад.}$$

Аз теоремаи Виет истифода бурда, дар сеузваи квадратии ax^2+bx+c табдилдиҳиҳоро иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1x_2\right)=$$

$$=a\left(x^2-(x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1x_2\right)=$$

$$=a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Теорема. *Агар* x_1 *ва* x_2- *решаҳои сеузваи квадратии* $ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$ *бошад, он гоҳ*

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),(a\neq 0) \qquad (10)$$

мешавад.

Баробарии (10)- ро формулаи ба ҳамзарбҳои хаттӣ ҷудо кардани сеузваи квадратӣ меноманд.

2. Намуди умумии муодилаи алгебравиро дида мебароем. Муодилаи намуди

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (11)$$

муодилаи алгебравии дараҷаи n- ум номида мешавад.

Тарафи чапи муодилаи (11) нисбат ба x бисёрузваи дараҷаи n - ум мебошад.

Ҳангоми $n=1$ будан, муодилаи (11) ба муодилаи хаттии $a_0x+a_1=0$ мубаддал мегардад.

Ҳангоми $n=2$ будан, муодилаи (11) ба муодилаи квадратии $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ табдил меёбад. Мо бо тарзҳои ҳалли ин муодилаҳо дар §1 шинос будем.

Агар дар муодилаи (11) $n>2$ бошад, он гоҳ ҳалли ин гуна муодилаҳо хеле мураккаб мешаванд.

Дар ҳолати хусусӣ, ин гуна муодилаҳоро бо ёрии ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан, ё ки бо воситаи дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал мекунанд.

Ҳангоми $n\geq 5$ будан, формулаҳои дар ҳолати умумӣ ифодакунандаи решаҳои муодилаи (11) аз рӯи коэффитсиентҳо мавҷуд нестанд.

Мисоли 11. Ифодаи $\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$ -ро сода кунед.

Ҳал. Дискриминанти сеузваи квадратии $3x^2-7x+2$ $D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 3\cdot 2=49-24=25>0$ мебошад, бинобар он муодилаи квадратии $3x^2-7x+2=0$ ду решаҳои ҳақиқии гуногуни x_1 ва x_2 - ро дорад. Решаҳои муодиларо бо формулаи (3) меёбем:

$$x_1=\frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\frac{7-5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

$$x_2=\frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\frac{7+5}{6}=\frac{12}{6}=2.$$

Он гоҳ дар асоси формулаи (10) навишта метавонем:

$$3x^2-7x+2=3\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}\right),$$

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot(x-2)=(3x-1)(x-2).$$

Аз ин ҷо: $\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-4}=\dfrac{(3x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3x-1}{x+2}, (x\neq -2).$

Мисоли 12. Бигузор $x=3$ яке аз решаҳои сеузваи $3x^2-5x+q$ бошад. Адади q- ро ёфта, сеузваи квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем.

Ҳал. Аз сабаби он ки $x=3$ яке аз решаҳои сеузваи $3x^2-5x+q=0$ мебошад, бинобар он $x=3$- ро ба он гузошта, ҳосил мекунем:

$$3\cdot 3^2-5\cdot 3+q=0\Rightarrow 27-15+q=0\Rightarrow q=-12.$$

Пас, дар асоси теоремаи Виет

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{q}{3}\Rightarrow x_1\cdot x_2=-\frac{12}{3}\Rightarrow x_1\cdot x_2=-4.$$

Агар $x_1=3$ бошад, он гоҳ $x_2=-\frac{4}{3}$ мешавад, чунки

$$3\cdot x_2=-4\Rightarrow x_2=-\frac{4}{3}$$ аст.

Аз қиматҳои $x_1=3$, $x_2=-\frac{4}{3}$ ва формулаи (10) истифода бурда, сеузваи квадратии $3x^2-5x-12$-ро ба ҳамзарбҳо ҷудо мекунем:

$$3x^2-5x-12=3(x-3)(x+\frac{4}{3})=$$

$$=(x-3)\left(3\cdot x+3\cdot\frac{4}{3}\right)=(x-3)(3x+4).$$

Мисоли 13. Муодилаи $x^3+2x-12=0$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодиларо бо тарзи ба ҳамзарбҳо ҷудо кардан ҳал мекунем:

$$x^3+2x-12=0;$$

$$x^3-8+2x-4=0;$$

$$(x^3-8)+2(x-2)=0;$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)+2(x-2)=0;$$

$$(x-2)(x^2+2x+4+2)=0;$$

$$(x-2)(x^2+2x+6)=0.$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки

$x^3+2x-12=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+6)=0$ мебошад. Он гоҳ аз $x-2=0$, $x^2+2x+6\neq 0$ мебарояд, ки $x_1=2$ ва аз $(x-2)\neq 0$, $x^2+2x+6=0$ хулоса мебарояд, ки муодилаи квадратии $x^2+2x+6=0$ дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад, чунки дискриминанташ хурд аз нол мебошад: $D<0$. Инак, муодилаи $x^3+2x-12=0$ якто ҳалли ҳақиқии $x=2$- ро доштааст.

Мисоли 14. Муодилаи $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар тарафи чапи муодилаи додашуда қоидаи ба квадрати пурра чудокуниро татбиқ намуда, муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3;$$

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}-2x\cdot\frac{x}{x+1}+2x\cdot\frac{x}{x+1}=3;$$

$$x^2-2x\cdot\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}+2x\cdot\frac{x}{x+1}=3;$$

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x+1}-3=0;$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2x\cdot\frac{x}{x+1}-3=0.$$

Муодилаи ҳосил кардашударо бо тарзи дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал мекунем. Дар ин чо $\frac{x^2}{x+1}=t$ ишора карда, муодилаи квадратии $t^2+2t-3=0$- ро ҳосил мекунем, ки ду решаҳои ҳақиқии гуногуни $t_1=-3$ ва $t_2=1$- ро дорад, чунки дискриминанти муодилаи квадратӣ $D>0$ мебошад. Он гоҳ қиматҳои t_1 ва t_2- ро ба муодилаи $\frac{x^2}{x+1}=t$ гузошта, муодилаҳои $\frac{x^2}{x+1}=-3$ ва $\frac{x^2}{x+1}=1$- ро ҳосил мекунем. Ҳалҳои ин муодилаҳоро меорем:

а) $\frac{x^2}{x+1}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{x+1}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)\neq 0,\ x^2-x-1=0.$

Аз сабаби он ки дискриминанти муодилаи квадратии $x^2-x-1=0,\ D>0$ аст, пас муодила ду решаҳои ҳақиқии гуногунро дорад. Решаҳои муодилаи $x^2-x-1=0$ чунинанд:

$$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ва } x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

б) $\frac{x^2}{x+1}=-3;\ \frac{x^2}{x+1}+3=0;\ \frac{x^2+3x+3}{x+1}=0;$

$x+1\neq 0,\ x^2+3x+3=0.$

Аз сабаби он ки дискриминанти муодилаи квадратии $x^2+3x+3=0,\ D<0$ мебошад, бинобар он муодилаи $x^2+3x+3=0$ дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад.

Инак, муодилаи матлуб решаҳои $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ва $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$-ро доштааст.

§5. Муодилаи биквадратӣ

Муодилаи намуди

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0, c\neq 0) \qquad (12)$$

-ро муодилаи биквадратӣ меноманд.

Муодилаи биквадратии (12) бо тарзи дохил кардани тағйирёбандаи нав ба яке аз намудҳои муодилаҳои квадратӣ оварда, ҳал карда мешавад.

Ду тарзи ба муодилаи квадратӣ овардани муодилаи (12)-ро хотиррасон мекунем.

Тарзи якум. Бузургии x^2 - ро бо y ишора карда, нисбат ба y муодилаи квадратии $ay^2+by+c=0$ - ро ҳосил мекунем, ки ҳангоми дискриминанташ $D\geq 0$ будан, решаҳояш аз рӯи формулаҳои

$$y_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ ва } y_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad (13)$$

ёфта мешаванд. Қиматҳои ёфташударо ба $x^2 = y$ гузошта, решаҳои муодилаи $x^2 = y$ - ро меёбем, ки онҳо решаҳои муодилаи биквадратии $ax^4 + bx^2 + c = 0$ мешаванд.

Тарзи дуюм. Бигузор муодилаи биквадратии $x^4 + px^2 + q = 0$ $(p \neq 0,\ q \neq 0)$ дода шуда бошад. Он гоҳ, аввал ду тарафи муодиларо ба $x^2 \neq 0$ тақсим мекунем ва баъд тағйирёбандаи навро дохил карда, муодиларо ба муодилаи квадратӣ меоварем.

$$x^4 + px^2 + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + p + \frac{q}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{q}{x^2} + p = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{q} + \frac{q}{x^2} - 2\sqrt{q} + p = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\sqrt{q}}{x}\right)^2 - 2\sqrt{q} + p = 0.$$

Яъне, $x^4 + px^2 + q = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\sqrt{q}}{x}\right)^2 - 2\sqrt{q} + p = 0.$

Он гоҳ, $x + \frac{\sqrt{q}}{x}$ - ро бо y ишорат карда, нисбат ба y муодилаи квадратии $y^2 - 2\sqrt{q} + p = 0$- ро ҳосил мекунем, ки ҳаллаш дар §2 оварда шудааст.

Мисоли 15. Муодилаи $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Тарзи якум. Барои ҳал кардани муодила аз гузориши $x^2 = y$ истифода бурда, муодиларо ба муодилаи квадратии $y^2 - 13y + 36 = 0$ табдил медиҳем. Азбаски он дискриминанти муодила

$$D = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 > 0$$

аст, пас муодила ду решаи ҳақиқии гуногунро дорад. Решаҳои муодиларо аз рӯи формулаи (13) меёбем:

$$y_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$y_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Акнун қиматҳои $y_1 = 4$ ва $y_2 = 9$- ро ба $x^2 = y$ гузошта, решаҳои муодилаи $x^2 = y$ - ро меёбем:

$$x^2 = y_1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 2.$$

$$x^2 = y_2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x_3 = -3;\ x_4 = 3.$$

Инак, $x_1 = -2;\ x_2 = 2;$ $x_3 = -3;\ x_4 = 3$ ҳалҳои муодилаи биквадратии додашуда мебошанд.

Тарзи дуюм. Ду тарафи муодилаи матлубро ба $x^2 \neq 0$ тақсим карда, муодиларо дар намуди муодилаи зерин менависем:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} - 13 = 0.$$

Муодилаи охиронро бо тарзи ба квадрати пурраҷудокунӣ ба муодилаи квадратӣ табдил медиҳем:

$$x^2 + \frac{36}{x^2} - 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12 + \frac{36}{x^2} - 12 - 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12 - 13 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 25 = 0.$$

Дар муодилаи охирон $x + \frac{6}{x}$ - ро бо y ишорат карда, нисбат, y муодилаи квадратии $y^2 - 25 = 0$- ро ҳосил мекунем. Аз муодилаи охирон $y_1 = -5$ ва $y_2 = 5$ -ро ҳосил мекунем. Он гоҳ қиматҳои $y_1 = -5$ ва $y_2 = 5$ - ро пайдарпай ба $x + \frac{6}{x} = y$ гузошта, решаҳои муодилаҳои $x + \frac{6}{x} = -5$ ва $x + \frac{6}{x} = 5$ - ро меёбем.

$$x + \frac{6}{x} = -5 \Leftrightarrow x + \frac{6}{x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 6}{x} = 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

$$(x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = -2.$$

$$x + \frac{6}{x} = 5 \Leftrightarrow x + \frac{6}{x} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x} = 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x \neq 0,\ (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_3 = 2;\ x_4 = 3.$$

Инак, $x_1=-3;\ x_2=-2;\quad x_3=2;\ x_4=3$ ҳалҳои муодилаи биквадратии $x^4-13x^2+36=0$ мебошанд.

МАШҚҲО

1. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{37}{x^2+5x+6}$;

б) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{4}{x^2+2x-3}=0$;

в) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$;

г) $x^3+x^2-2=0$.

2. Касрҳоро ихтисор кунед:

а) $\dfrac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$; б) $\dfrac{a^2+9ab+14b^2}{a^2+ab-2b^2}$;

в) $\dfrac{6c^2+11c+3}{3+5c-12c^2}$.

3. Муодилаҳои биквадратиро ҳал намоед:

а) $x^4-10x^2+1=0$; б) $x^4+6x^2-40=0$;

в) $x^4-3x^2+2=0$.

4. Бигузор $x=2$ яке аз решаҳои муодилаи квадратии $4x^2-14x+q=0$ бошад. Қимати q - ро ёфта, баъд тарафи чапи онро ба зарбкунандаҳои хаттӣ ҷудо намоед.

5. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216=0$;

б) $x^3+27=0$;

в) $x\cdot(x^2-1)\cdot(x+2)+1=0$;

г) $x(x+1)(x+2)(x+3)=840$;

ғ) $x^4-81=0$;

д) $x^6-64=0$;

е) $x^4+4=0$;

ё) $x^3+x-2=0$;

ж) $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$;

з) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9$.

БОБИ VI
СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО

§1. Муодилаи хаттии дутағйирёбандадор

Агар a, b, c ададҳои дилхоҳ, x ва y тағйирёбандаҳо бошанд, он гоҳ муодилаи

$$ax + by = c \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0 \qquad (1)$$

-ро муодилаи хаттии дутағйирёбандадор меноманд.

Таърифи 1. *Ҷуфти қиматҳои тағйирёбандаҳо* $(x; y)$, *ки муодилаи дутағйирёбандадорро ба баробарӣ табдил медиҳад, ҳалли муодила номида мешавад.*

Масалан, муодилаи $3x - 4y = 2$, муодилаи дутағйирёбандаи x ва y мебошад. Нуқтаҳои $(-2; -2)$, $(0; -\frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}; 0)$ ва $(2; 1)$ муодилаи $3x - 4y = 2$-ро қонеъ мекунонанд, лекин $(0; 1)$ онро қонеъ намекунонад. Бинобар он дар асоси таърифи 1 ҳар яке аз ҷуфтҳои $(-2; -2)$, $(0; -\frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}; 0)$ ва $(2; 1)$ ҳалли муодила ҳастанд, аммо $(0; 1)$ ҳал шуда наметавонад.

Муодилаи дараҷаи якуми дутағйирёбандадор ҳалли бисёр дорад. Аз сабаби он, ки

$$ax + by = c \Leftrightarrow by = c - ax \Rightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$$

мебошад, маҷмуи ҳалҳои муодилаи $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \quad (b \neq 0)$ бо маҷмуи ҳалҳои муодилаи $ax + by = c$ якхела мебошад. Чӣ хеле, ки дар боби $\vee$ қайд кардем, муодилаҳо фақат ҳамон вақт баробарқувва номида мешаванд, ки агар маҷмуи ҳалҳояшон айниятан якхела бошанд. Масалан, муодилаҳои $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$ ва $ax + by = c\ (b \neq 0)$ баробарқувваанд.

Аз муодилаи $ax + by = c\ (b \neq 0)$ хосиятҳои зерин бармеояд:

агар $a \neq 0,\ c \neq 0$ бошад, он гоҳ,

$$ax + by = c \Leftrightarrow by = c - ax \Rightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x\ ;$$

агар $a \neq 0,\ c = 0$ бошад, он гоҳ,

$$ax+by=0 \Leftrightarrow by=-ax \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x;$$

агар $a=0,\ c\neq 0$ бошад, он гоҳ, $by=c$ ё ки $y=\frac{c}{b}$ мешавад.

§2. Мафҳуми системаи муодилаҳо ва ҳалҳои он

Бигузор ёфтани буриши маҷмуи ҳалҳои муодилаҳои дутағйирёбандадори $2x+y=3$ ва $2x-y=1$ талаб карда шавад.

Барои буриши маҷмуи ҳалҳои ин ду муодиларо ёфтан, мо бояд ин ду муодилаҳоро ҳамҷоя (системаро) ҳал кунем. Системаи муодилаҳоро бо ёрии қавси фигуравӣ менависанд, **масалан**:

$$1.\begin{cases}2x+y=3,\\2x-y=1.\end{cases}\qquad 2.\begin{cases}x-2=0,\\x^2+x+6=0.\end{cases}\qquad 3.\begin{cases}x+y=z,\\3x-y=3z.\end{cases}$$

Дар ин ҷо, системаи (1) системаи ду муодилаи дутағйирёбандадор номида мешавад, системаи (2) бошад, системаи ду муодилаи яктағйирёбандадор номида мешавад ва дар охир системаи (3) системаи ду муодилаи сетағйирёбандадор ном дорад. Ҳал кардани системаҳо ин ёфтани маҷмуи ҳалҳои он мебошад.

Таърифи 2. *Ҷуфти қиматҳои тағйирёбандаҳо, ки ҳар як муодилаи системаро ба баробарӣ табдил медиҳад, ҳалли системаи дутағйирёбандадор номида мешавад.*

Масалан, барои системаи (1) ҷуфти қиматҳои тағйирёбандаҳо (1;1) ҳал шуда метавонад, чунки ҳар як муодилаи системаи (1)-ро ба баробарӣ табдил медиҳад.

Таърифи 3. *Ду системаи муодилаҳо баробарқувва номида мешаванд, агар ҳаргуна ҳалли як система ҳалли системаи дуюм бошад ва баръакс.*

Агар ҳар ду система ҳал надошта бошанд, онҳоро низ баробарқувва номидан мумкин аст.

§3. Системаи ду муодилаи хаттии дутағйирёбандадор

Ҳар гуна системаи ду муодилаҳои хаттии дараҷаи якуми дутағйирёбандадорро дар намуди

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}\qquad (2)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 - ададҳои додашуда, x ва y тағйирёбандаҳо мебошанд.

Баъзе шаклдигаркуниҳоро, ки пас аз иҷро намудани онҳо системаи нави ҳосилшуда ба системаи додашуда баробаркувва мешавад, дида мебароем. Ин шаклдигаркуниҳоро дар асоси қоидаҳои зерин гузаронидан мумкин аст:

1. Яке аз муодилаҳои системаро ба муодилаи ба он баробаркувва иваз кардан мумкин аст. **Масалан**, системаҳои

$$\begin{cases} x-2y=2, \\ 2x+y=14. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x-2y=2, \\ 4x+2y=28. \end{cases}$$

баробаркувва мебошанд, чунки муодилаи дуюми системаи якум бо муодилаи дуюми системаи дуюм баробаркувва мебошад.

2. Ҳар яке аз муодилаҳои системаро бо ҳосили ҷамъ ё бо фарқи муодилаҳои додашуда (муодилаи дигарро бетағйирот нигоҳ дошта) иваз кардан мумкин аст. **Масалан**, системаҳои

$$\begin{cases} 5x-6y=3, \\ 9x+6y=39. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 14x=42, \\ 5x-6y=3. \end{cases}$$

баробаркувва мебошад, чунки муодилаи якуми системаи дуюм аз ҳосили ҷамъи муодилаҳои системаи якум ва муодилаи дуюми системаи дуюм (муодилаи якуми системаи якум) ҳосил шудааст.

3. Ягон тағйирёбандаи як муодилаи системаро бо тағйирёбандаи дигар ифода карда, онро ба муодилаи дуюм гузоштан мумкин аст. Муодилаи нав бо муодилаи якум (ё дуюм) якҷоя системаро ташкил медиҳад, ки бо системаи додашуда баробаркувва мебошад. **Масалан**, системаҳои

$$\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 2x-y=1. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 3x+4(2x-1)=7, \\ y=2x-1. \end{cases}$$

баробаркувва мебошад (*дар муодилаи якум y бо ифодаи аз муодилаи дуюм, ки нисбат бо x ёфта шудааст, иваз карда шудааст*).

§4. Тарзҳои гуногуни ҳалкунии системаи муодилаҳо

Системаи муодилаҳоро бо тарзҳои гуногун ҳал кардан мумкин аст. Дар ин ҷо системаи муодилаҳоро бо тарзҳои ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ), гузориш ва графикӣ нишон медиҳем:

I. Тарзи ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ). Схемаи ёфтани ҳал бо тарзи ҷамъкунии (тарҳкунии) системаи муодилаҳо чунин аст:

а) аввал модули коэффитсиентҳои яке аз тағйирёбандаҳоро якхела кардан лозим аст;

б) бо тарзи аъзо бо аъзо ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ) ҳосил кардани муодилае, ки як тағйирёбанда дорад;

в) ёфтани он тағйирёбанда;

г) қимати ёфташударо ба яке аз муодилаҳои система гузошта, тағйирёбандаи дигар ёфта мешавад.

Мисоли 1. Бо тарзи ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ) системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

1. $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-5y=-3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 2y-3x=5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6}, \\ 2\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{13}{6}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 0{,}3x-0{,}75y=1{,}05, \\ 2{,}5x+0{,}4y=2{,}1. \end{cases}$

Ҳал. 1. $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-5y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x+4y=10, \\ -6x+15y=9; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+4y=10, \\ 6x+4y-6x+15y=10+9; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x+4y=10, \\ 19y=19; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2\cdot 1=5, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

Ҷавоб: $(1;\ 1)$.

2. $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 2y-3x=5; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+4y=1, \\ 6y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+4\cdot 1=1, \\ y=1; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x=-3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=1; \end{cases}$

Ҷавоб: $(-1;\ 1)$.

3. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6}, \\ 2\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{13}{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\frac{5}{6}, \\ \frac{5}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{13}{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5x}{2}+\frac{5y}{3}=\frac{25}{6}, \\ \frac{5x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{13}{6}; \end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{5x}{2}+\dfrac{5y}{3}=\dfrac{25}{6},\\ \dfrac{5x}{2}+\dfrac{5y}{3}-\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)=\dfrac{25}{6}-\dfrac{13}{6};\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{5x}{2}+\dfrac{5y}{3}=\dfrac{25}{6},\\ 2y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{5}{6},\\ y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6},\\ y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{3},\\ y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{6},\\ y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$$

Ҷавоб: $(1;\ 1)$.

4. $\begin{cases}0{,}3x-0{,}75y=1{,}05,\\ 2{,}5x+0{,}4y=2{,}1;\end{cases}\quad\begin{cases}0{,}12x-0{,}3y=0{,}42,\\ 1{,}875x+0{,}4y=2{,}1;\end{cases}$

$$\begin{cases}1{,}995x=1{,}995,\\ 1{,}875x+0{,}4y=2{,}1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ 2{,}5x+0{,}4y=2{,}1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ 2{,}5\cdot 1+0{,}4y=2{,}1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1,\\ 0{,}4y=2{,}1-2{,}5;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ 0{,}4y=-0{,}4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$$

Ҷавоб: $(1;\ -1)$.

II. Тарзи гузориш. Схемаи ёфтани ҳал бо тарзи гузориш дар системаи муодилаҳо чунин аст:

а) дар яке аз муодилаҳои система, яке аз тағйиёбандаро нисбат ба дигараш ифода кардан;

б) ифодаи ёфташударо ба муодилаи дигари ҳамин система гузошта, муодилаи яктағйирёбандадорро ҳосил кардан;

в) муодилаи яктағйирёбандадорро ҳал карда, номаълумро ёфтан;

г) қимати ёфташудаи номаълумро ба ифодаи ёфташудаи пункти (а) гузошта, қимати тағйирёбандаи дуюмро ёфтан.

Мисоли 2. Бо тарзи гузориш ҳал кардани системаҳои зеринро нишон медиҳем:

1. $\begin{cases}3x-2y=1,\\ 2x+y=3.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{7}{6},\\ x-y=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}1{,}5x+0{,}3y=1{,}2,\\ 2x+y=1.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\ x-y=1.\end{cases}$

Ҳал. 1. $\begin{cases}3x-2y=1,\\2x+y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}3x-2y=1,\\y=3-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}3x-2(3-2x)=1,\\y=3-2x;\end{cases}$

$\begin{cases}3x-6+4x=1,\\y=3-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}7x=7,\\y=3-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=3-2\cdot 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

Ҷавоб: $(1;\,1)$.

2. $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{7}{6},\\x-y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{7}{6},\\y=x;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}x=\frac{7}{6},\\y=x;\end{cases}$

$\begin{cases}9x-2x=7,\\y=x;\end{cases}$ $\begin{cases}7x=7,\\y=x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

Ҷавоб: $(1;\,1)$.

3. $\begin{cases}1{,}5x+0{,}3y=1{,}2,\\2x+y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}1{,}5x+0{,}3y=1{,}2,\\y=1-2x;\end{cases}$

$\begin{cases}1{,}5x+0{,}3(1-2x)=1{,}2,\\y=1-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}1{,}5x+0{,}3-0{,}6x=1{,}2,\\y=1-2x;\end{cases}$

$\begin{cases}0{,}9x=0{,}9,\\y=1-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1-2\cdot 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

Ҷавоб: $(1;\,-1)$.

4. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\x-y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\y=x-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-x(x-1)+(x-1)^2=7,\\y=x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-x^2+x+x^2-2x+1=7,\\y=x-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-x-6=0,\\y=x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+2x-3x-6=0,\\y=x-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x(x+2)+3(x+2)=0,\\y=x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+2)(x+3)=0,\\y=x-1.\end{cases}$

Системаи муодилаҳои ҳосилшуда, ба ду системаи муодилаҳои зерин баробар мешавад:

$\begin{cases} x+2=0, \\ y=x-1. \end{cases}$ ё ки $\begin{cases} x+3=0, \\ y=x-1. \end{cases}$

Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

1. $\begin{cases} x+2=0, \\ y=x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-2-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+3=0, \\ y=x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3, \\ y=-3-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3, \\ y=-3-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3, \\ y=-4. \end{cases}$

Ҷавоб: $(-2;-3),(-3;-4)$.

Ш. Тарзи графикӣ. Системаи муодилаҳои хаттии дутағйирёбандаеро дида мебароем, ки дар ҳар як муодилаи он ақаллан яке аз коэффисентҳо ғайринолӣ аст. Ҳалли графикии чунин системаҳо аз ёфтани координатаҳои нуқтаҳои умумии ду хати рост иборат аст.

Тарзи графикии ҳалли системаи муодилаҳо чунин аст:

а) графики ҳар як муодилаи системаро месозем;

б) координатаҳои нуқтаҳои буриши хатҳои рости сохташударо меёбем;

в) координатаҳои нуқтаи буриши хатҳои рост ҳалли системаи муодилаҳо мебошанд.

1. Ҳангоми сохтани хатҳои рост мумкин аст, ки хатҳои рости сохташуда ҳамдигарро дар як нуқта буранд, он гоҳ системаи муодилаҳо ҳалли ягона дорад. Дар ин ҳолат координатаҳои нуқтаи буриши хатҳои рост ҳалли системаи муодилаҳои додашуда мебошад.

2. Ҳангоми сохтани хатҳои рост мумкин аст, ки хатҳои рости сохташуда ҳамҷоя шаванд. Дар ин ҳолат системаи муодилаҳо ҳалли беохир дорад.

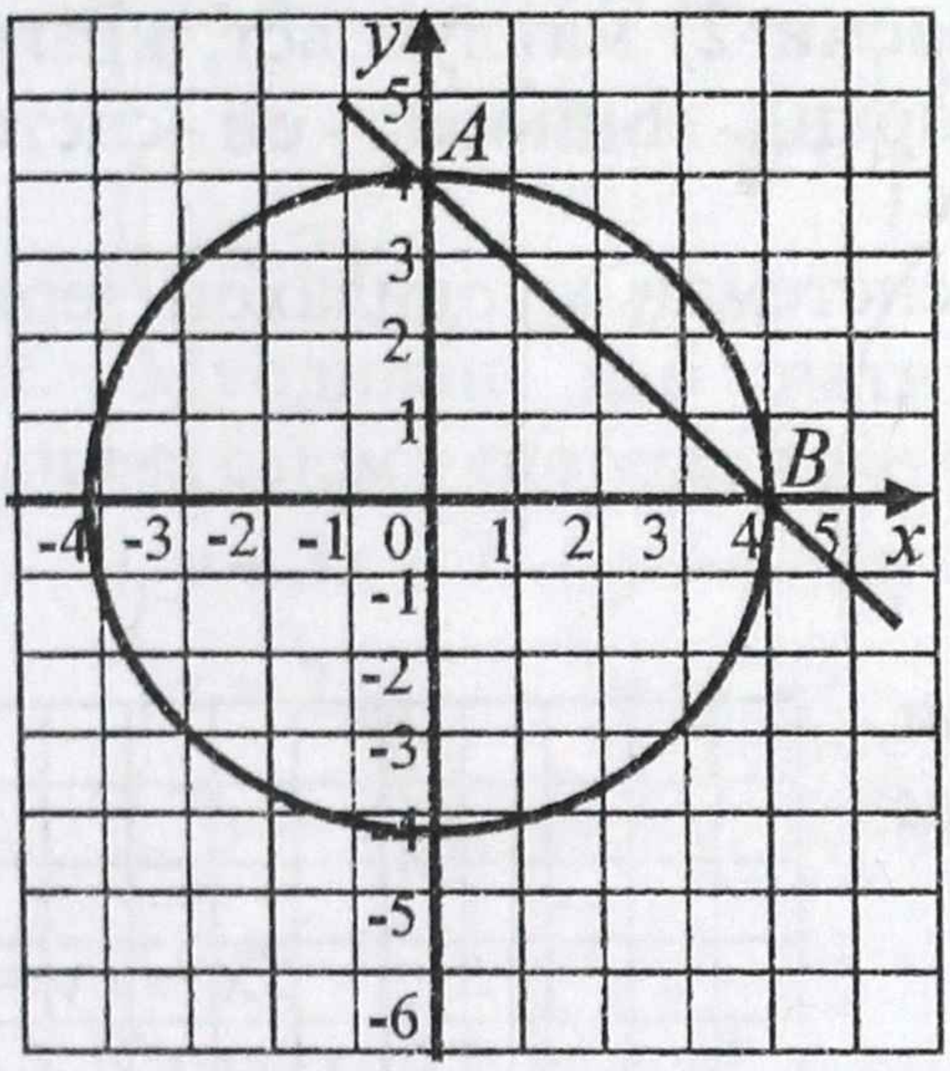
3. Ҳангоми сохтани хатҳои рост мумкин аст, ки хатҳои рости сохташуда параллел бошанд. Дар ин ҳолат системаи муодилаҳо ҳал надорад.

М и с о л и 3. Ҳалли графикии системаи зеринро меорем.

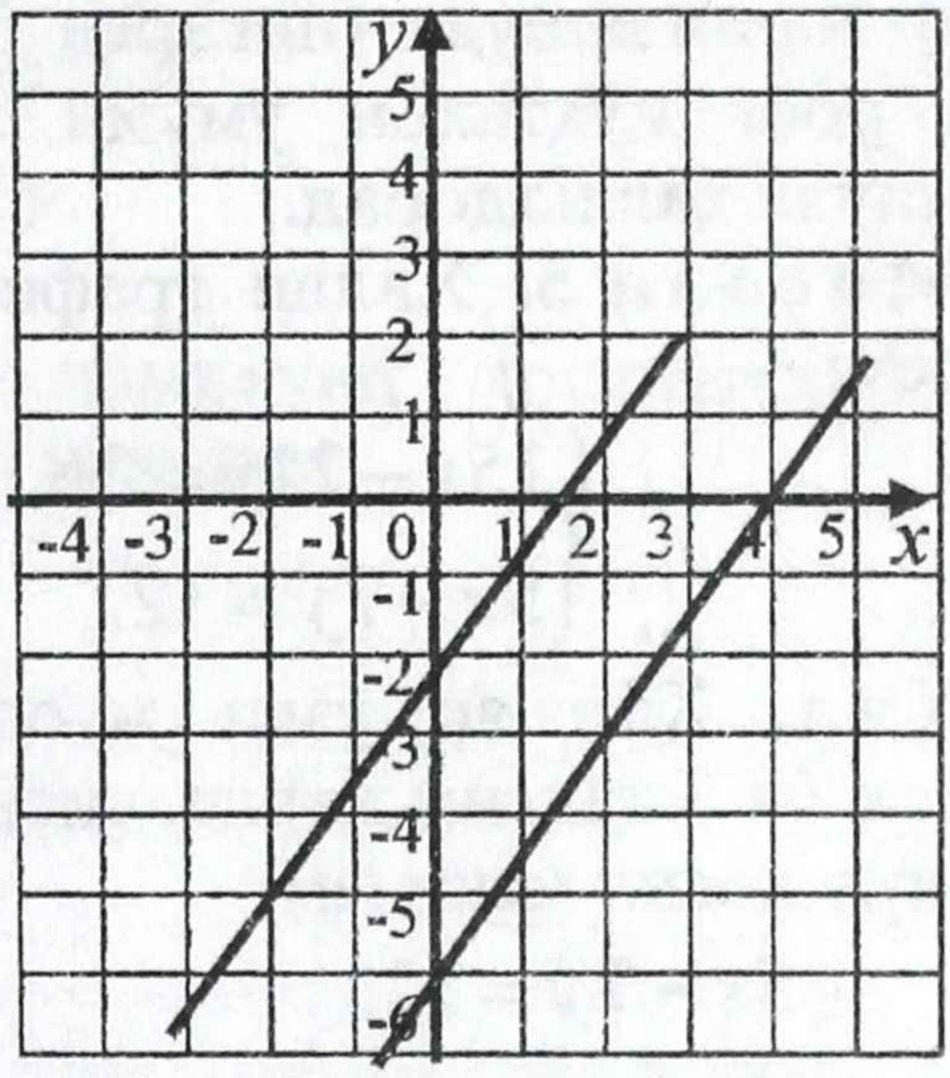
$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x+y=4. \end{cases}$$

Х а л. Графики ҳар яке аз ин муодилаҳоро месозем. Графики муодилаи якум давраи марказаш дар ибтидои координатаҳо ҳобида, радиусаш ба 4 баробар мебошад. Графики муодилаи

дуюм бошад, хати рости AB аст, ки вай аз нуқтаҳои $A(4;\ 0)$ ва $B(0;\ 4)$ мегузарад. Пас, координатаҳои нуқтаҳои буриши давра ва хати рости AB маҷмуи ҳалҳои муодилаи якум ва дуюм мебошанд.



Расми 1



Расми 2

Агар ин ду муодила ҳалли умумӣ дошта бошанд, он гоҳ нуқтаи ба ҳал мувофиқ буда, ҳам дар давра ва ҳам дар хати рости AB бояд ҷойгир бошад, яъне, давра ва хати рости AB нуқтаҳои умумӣ (нуқтаи буриш) доштанашон лозим аст. Аз нақшаи кашидашуда (нигаред ба расми 1) маълум аст, ки чунин нуқтаи умумӣ (нуқтаи буриши хатҳо) нуқтаҳои A ва B мебошанд, ки координатаҳояшон онҳо $(x_1 = 4;\ y_1 = 0)$ ва $(x_2 = 0;\ y_2 = 4)$ мебошанд. Ин нуқтаҳо ҳалҳои системаро ташкил медиҳанд.

Мисоли 4. Ҳалли графикии системаи зеринро меорем.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 6x - 4y = 11. \end{cases}$$

Ҳал. 1. Дар ҳар як муодила y-ро ба воситаи x ифода карда, пайдо мекунем:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 6x - 4y = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 4y = 6x - 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ y = 1{,}5x - 2{,}75. \end{cases}$$

2. Чи хеле, ки маълум аст, хатҳои рости $y = 1{,}5x - 6$ ва $y = 1{,}5x - 2{,}75$ коэффитсиентҳои кунҷии (коэффитсиентҳои назди

x) баробарро доранд, пас, ин хатҳои рост байни худ параллеланд.

3. Хати рости $y = 1{,}5x - 6$ тири Oy-ро дар нуқтаи $(0;-6)$ ва хати рости $y = 1{,}5x - 2{,}75$ дар нуқтаи $(0;-2{,}75)$ мебурад. Аз расми кашидашуда (нигаред ба расми 2) маълум аст, ки ин ду хати рост нуқтаҳои умумӣ надоранд. Бинобар он системаи додашуда ҳал надорад.

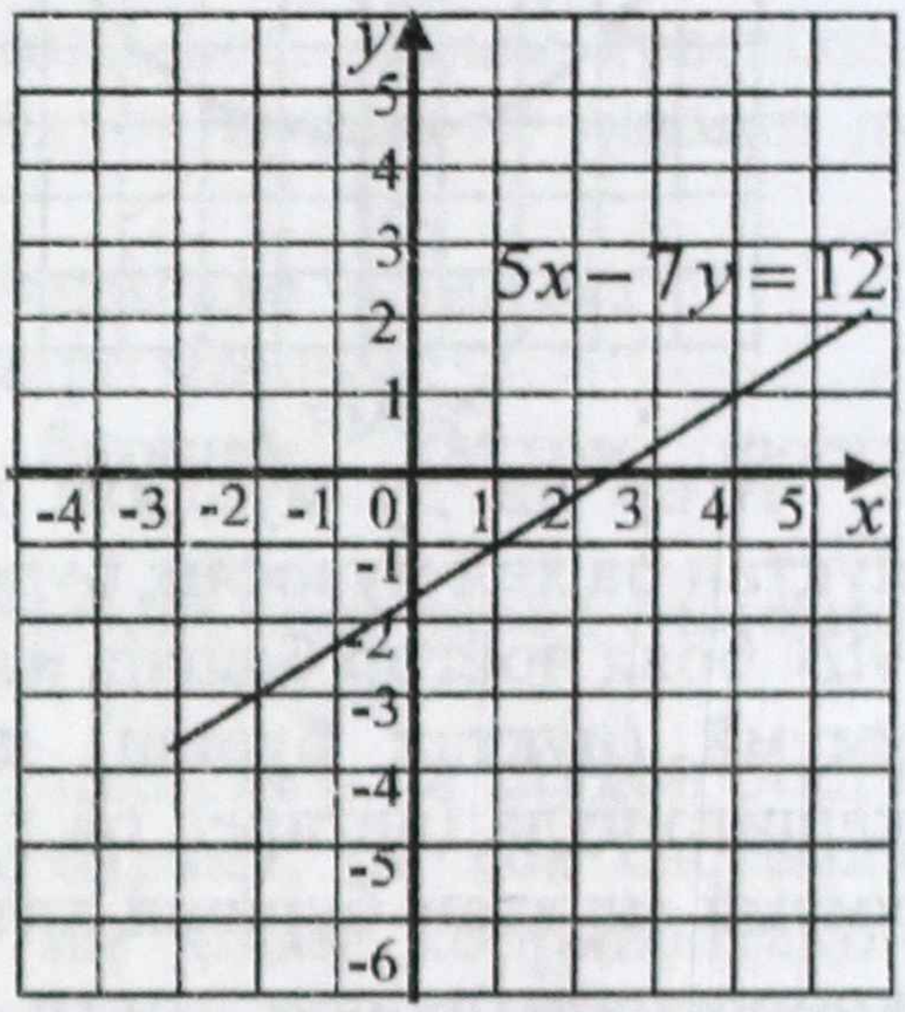
Мисоли 5. Ҳалли графики системаи муодилаҳои зеринро меорем:

$$\begin{cases} 15x - 21y = 36, \\ 5x - 7y = 12. \end{cases}$$

Ҳал. Ҳар як узви муодилаи якумро ба 3 тақсим карда, системаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 5x - 7y = 12, \\ 5x - 7y = 12. \end{cases}$$

Чӣ хеле, ки мебинем, системаи ҳосилшуда аз муодилаи якхела иборат аст. Агар графики ин муодилаҳоро созем, он гоҳ мебинем, ки графикҳои ин муодилаҳо ҳамчоя мешаванд. Пас, координатаҳои нуқтаи дилхоҳи график ҳар як муодилаи системаро қаноат мекунонанд, яъне ҳалли система мешаванд. Бинобар он системаи додашуда ҳалҳои беҳад зиёд дорад.



Расми 3

IV. Ба ғайр аз системаҳои муодилаҳои дутағйирёбандадор боз системаҳои муодилаҳои сетағйирёбандадор низ мавҷуданд. Системаҳои муодилаҳои сетағйирёбандадор ҳам монанди системаҳои муодилаҳои дутағйирёбандадор бо тарзҳои ҷамъкунӣ, тарҳкунӣ ва ҳам гузориш ҳал карда мешаванд.

Акнун системаи се муодилаи сетағйирёбандадорро дида мебароем:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 6z = 16, \\ x + y + z = 3, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Ҳ а л. Системаи додашударо бо тарзҳои ҷамъкунӣ, тарҳкунӣ ва ҳам гузориш ҳал кардан мумкин мебошад. Мо яке аз роҳҳои ҳал кардани системаро меорем:

1. Муодилаи дуюми системаро бо (-3) зарб зада, баъд бо муодилаи якуми система ҷамъ мекунем:

$$\begin{cases} 3x+4y+6z=16, \\ -3x-3y-3z=-9, \\ z=2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y+3z=7, \\ z=2y. \end{cases}$$

2. Муодилаи дар натиҷаи ҷамъкунӣ ҳосилшударо бо муодилаи сеюми система якҷоя ҳал мекунем:

$$\begin{cases} y+3z=7, \\ z=2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y+3\cdot 2y=7, \\ z=2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y=7, \\ z=2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y=1, \\ z=2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y=1, \\ z=2. \end{cases}$$

3. Қиматҳои $y=1$ ва $z=2$-ро ба яке аз муодилаҳои системаи додашуда, ки x-ро дорад, гузошта қимати тағйирёбандаи дигарро меёбем, яъне, қиматҳои $y=1$ ва $z=2$-ро ба муодилаи $x+y+z=3$ гузошта, қимати x-ро меёбем:

$$x+1+2=3 \Rightarrow x=0.$$

Инак, қиматҳои $x=0;\ y=1;\ z=2$ ҳалли система мебошанд.

Дар охир қайд мекунем, ки муодилаҳои дутағйирёбандадор, сетағйирёбандадор ва ҳоказои хаттиро муодилаҳои дараҷаи якуми дутағйирёбандадор, сетағйирёбандадор ва ҳоказо меноманд.

М и с о л и 6. Ҳалли системаҳои зеринро меорем.

1. $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2-7x-12y+1=0, \\ x-y+1=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2y^3=8, \\ x^3y^2=4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$

Ҳ а л. 1. Аз тарзи гузориш истифода бурда, системаро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x(x+1) + 3(x+1)^2 - 7x - 12(x+1) + 1 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x^2 - x + 3x^2 + 6x + 3 - 7x - 12x - 12 + 1 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 14x - 8 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 7x - 4 = 0, \\ y = x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+1)(x-4) = 0, \\ y = x + 1. \end{cases}$$

Аз ин чо, $\begin{cases} 2x+1=0, \\ y = x+1. \end{cases}$ ё ки $\begin{cases} x-4=0, \\ y = x+1 \end{cases}$ мешавад.

Системаи муодилаҳои ҳосилшударо ҳал карда, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 4$ ва $y_2 = 5$-ро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $(-0{,}5;\ 0{,}5)$, $(4;\ 5)$.

2. Системаро бо роҳи аъзо ба аъзо зарбзанӣ ҳал мекунем.

$$\begin{cases} x^2y^3 = 8, \\ x^3y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2y^3 \cdot x^3y^2 = 8 \cdot 4, \\ x^3y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} (xy)^5 = 2^5, \\ x^3y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 2, \\ x^3y^2 = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^3y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^3 \cdot \frac{4}{x^2} = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ҷавоб: $(1;\ 2)$.

3. Системаи муодилаҳоро бо тарзи дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал мекунем. Гузориши $\frac{1}{x}=u$ ва $\frac{1}{y}=\vartheta$ истифода бурда, системаро дар намуди зерин менависем:

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^2+v^2=13; \end{cases} \quad \begin{cases} u=5-v, \\ u^2+v^2=13; \end{cases} \quad \begin{cases} u=5-v, \\ (5-v)^2+v^2=13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=5-v, \\ 25-10v+v^2+v^2=13; \end{cases} \quad \begin{cases} u=5-v, \\ 2v^2-10v+12=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=5-v, \\ v^2-5v+6=0; \end{cases} \quad \begin{cases} u=5-v, \\ v^2-2v-3v+6=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=5-v, \\ v(v-2)-3(v-2)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} u=5-v, \\ (v-2)(v-3)=0. \end{cases}$$

Аз ин чо: 1. $\begin{cases} u=5-v, \\ v-2=0. \end{cases}$ ё ки 2. $\begin{cases} u=5-v, \\ v-3=0. \end{cases}$

Аз системаи муодилаҳои якум: $u_1=3,\ v_1=2$ ва аз системаи муодилаҳои дуюм $u_2=2,\ v_2=3$ -ро ҳосил мекунем.

Акнун ба тағйирёбандаҳои ибтидоӣ гузашта, қиматҳои x ва y -ро меёбем:

1. $\begin{cases} u=2, \\ v=3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x}=2, \\ \frac{1}{x}=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}, \\ x_2=\frac{1}{3}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u=3, \\ v=2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x}=3, \\ \frac{1}{x}=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}, \\ x_2=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Ҷавоб: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

4. Муодилаи дуюми системаро бо 2 зарб зада, системаҳои баробаркувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 2xy=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=10+6, \\ x^2-2xy+y^2=10-6; \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+y)^2=16,\\(x-y)^2=4;\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=\pm4,\\x-y=\pm3.\end{cases}$$

Аз системаи муодилаҳои ҳосилшуда чор системаҳои муодилаҳои хаттиро тартиб медиҳем:

1. $\begin{cases}x+y=4,\\x-y=3.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x+y=4,\\x-y=-3.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+y=-4,\\x-y=3.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x+y=-4,\\x-y=-3.\end{cases}$

Бо тарзи ҷамъкунии (тарҳкунии) алгебравӣ системаҳои муодилаҳои ҳосилшударо ҳал карда, мувофиқан 4-то ҳалҳои

$x_1=3,\ y_1=1,\ x_2=1,\ y_2=3,\ x_3=-3,\ y_3=-1,\ x_4=-3,\ y_4=-1$

-ро меёбем, ки онҳо ҳалли системаи додашуда мебошанд.

Ҷавоб: $(3;1),(1;3),(-3;-1),(-1;-3)$.

МАШҚҲО

1. Системаи муодилаҳоро бо тарзи ҷамъкунӣ (тарҳкунӣ) ҳал кунед:

а) $\begin{cases}3x+4y=7,\\y-3x+2=0.\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x+5y=14,\\3x-y=1.\end{cases}$

в) $\begin{cases}2y-x=1,\\3x-5y=1.\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},\\\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.\end{cases}$

2. Системаи муодилаҳоро бо тарзи гузориш ҳал кунед:

а) $\begin{cases}4x+3y=6,\\y+x=2.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y=11,\\5x-3y=3.\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x+3y=-1,\\3x-4y=7.\end{cases}$ г) $\begin{cases}x:y=3:4,\\(x-1):(y+2)=1:2.\end{cases}$

г) $\begin{cases}xy-3^0=0,\\x+y=3\frac{1}{3}.\end{cases}$ д) $\begin{cases}x+y-z=2,\\2x-y+4z=1,\\-x+6y+z=5.\end{cases}$

БОБИ VII
НОБАРОБАРИҲО

§1. Нобаробариҳои ададӣ ва хосиятҳои он

Таърифи 1. *Ду адад, ки байни худ бо аломатҳои «>» (калон) ё «<» (хурд), ё ки бо аломатҳои «≥» (калон ё баробар) «≤» (хурд ё баробар) алоқамандand, нобаробариҳоро ташкил медиҳад.*

Масалан: $a>b$; $a<b$; $a\geq b$; $a\leq b$; $4>3$; $2<3$ мисолҳои нобаробариҳои ададӣ шуда метавонанд.

Нобаробариҳои $a>b$ ва $c<d$ нобаробариҳои муқобил ва нобаробариҳои $a<b$ ва $c<d$ ё $a>b$ ва $c>d$ нобаробариҳои якхела номида мешаванд.

Бигузор $a\in R$ ва $b\in R$ бошад. Он гоҳ барои ҳаргуна ду адади ҳақиқии a ва b фақат яке аз муносибатҳои $a=b$; $a<b$; $a>b$ ҷой дорад.

Нобаробариҳое, ки бо ёрии аломатҳои «>» ва «<» тартиб дода шудаанд, нобаробариҳои қатъӣ номида мешаванд.

Нобаробариҳое, ки бо ёрии аломатҳои «≥» ва «≤» тартиб дода шудаанд, нобаробариҳои ғайриқатъӣ номида мешаванд.

Масалан: $7<11$; $8>3$; $3<25$; $9>2$ мисолҳои нобаробариҳои қатъӣ ва $13\geq 12$; $7\geq 7$; $3\leq 4$; $5\leq 5$ мисолҳои нобаробариҳои ғайриқатъӣ шуда метавонанд.

Акнун хосиятҳои асосии нобаробариҳои ададиро номбар мекунем:

1. Агар $a>b$ бошад, $b<a$ аст ва баръакс, агар $a<b$ бошад, $b>a$ аст.

2. Агар $a>b$ ва $b>c$ бошад, он гоҳ $a>c$ аст.

Ин хосияти нобаробариҳоро муносибати транзитивии нобаробариҳо меноманд.

3. Агар $a>b$ бошад ва адади c чи хеле ки набошад, он гоҳ $a+c>b+c$ аст. Инак, агар ба ҳар ду қисми нобаробарии дуруст як ададро ҷамъ намоем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

4. Агар $a\in R$ ва $b\in R$ бошанд, он гоҳ:

а) аз $a-b>0\Rightarrow a>b$ ва $a-b<0\Rightarrow a<b$;

б) аз $a-b\geq 0\Rightarrow a\geq b$ ва $a-b\leq 0\Rightarrow a\leq b$.

Инак, агар ягон ҷамъшавандаро аз як қисми нобаробарии дуруст ба қисми дигараш бо аломати муқобил гузаронем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

5. *Агар* $a>b$ *ва* $c>0$ *бошад, он гоҳ* $ac>bc$ *аст ва агар* $c<0$ *бошад, он гоҳ* $ac<bc$ *аст.*

Инак, агар ҳар ду қисми нобаробарии дурустро ба як адади мусбат зарб занем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад. Агар ҳар ду қисми нобаробарии дурустро бо як адади манфӣ зарб намоем ва аломати нобаробариро ба муқобилаш иваз кунем, он гоҳ нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

Агар $-a>-b$ бошад, он гоҳ $a<b$ аст ва баръакс, агар $-a<-b$ бошад, он гоҳ $a>b$ аст.

Инак, агар аломати ҳар ду қисми нобаробарии дурустро ба муқобилаш иваз кунем ва аломати нобаробариро ҳам бо муқобилаш иваз намоем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад.

7. *Агар* $a>0, b>0$ *ва* $a>b$ *бошад, он гоҳ барои ҳар гуна* $n\in N$ *нобаробарӣ* $a^n>b^n$ *ҷой дорад.*

8. *Агар* $a>0, b>0$ *ва* $a>b$ *бошад, он гоҳ барои ҳар гуна* $n\in N$ $(n\geq 2)$ *нобаробарӣ* $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ *ҷой дорад.*

Акнун якчанд мисолҳоро доир ба амалҳо бо нобаробариҳои адади дида мебароем:

1. $15>9$,
$-3<2$,

$15-(-3)>9-2$,
$15+3>9-2$,
$18>7$.

2. $-3>-7$,
$5<9$,

$-3-5>-7-9$,
$-8>-16$,

3. $3>-2$,
$-10>-21$,

$3+(-10)>-2+(-21)$,
$3-10>-2-21$,
$-7>-23$.

4. $-12>-19$,
$-3>-17$,

$-12+(-3)>-19+(-17)$,
$-12-3>-19-17$,
$-15>-36$.

5. $9>4$, $-5>-9$, $5>3$,
$\times$ $4>3$, $\times$ $-2>-7$, $\times$ $-2>-5$,

$9\cdot 4>4\cdot 3$, $-5\cdot(-2)>-9\cdot(-7)$, $5\cdot(-2)>3\cdot(-5)$,
$36>12$. $10<63$. $-10>-15$.

§2. Нобаробариҳои хаттӣ ва ҳалҳои он

Таърифи 1. *Ду адад ё ду ифодаи алгебравӣ, ки байни худ бо аломатҳои «<» ё «>», ё ки бо аломатҳои «≥» ё «≤» алоқаманданд, нобаробариҳоро ташкил медиҳанд.*

Нобаробариҳои хаттӣ ва квадратии як тағйирёбандадор нобаробариҳои оддитарин мебошанд.

Таърифи 2. *Нобаробариҳои намуди* $ax>b$ *ё* $ax<b$ *- ро, ки дар ин ҷо* a *ва* b *ададҳои дилхоҳанд, нобаробариҳои хаттӣ меноманд.*

Намуди умумии нобаробариҳои хаттии яктағйирёбандадор чунин аст:

$$ax+b\vee 0 \quad (a\neq 0)$$

Дар ин ҷо аломати $\vee$ шуда метавонад: «<» ё «>», «≥» ё «≤».

Барои муайянӣ ҳалли яке аз нобаробариҳои хаттии $ax+b>0$ $(a\neq 0)$ -ро меорем:

1. $ax+b>0\Leftrightarrow ax>-b\Rightarrow x>-\frac{b}{a}$;

2. Агар $a>0$ бошад, он гоҳ аз

$ax+b>0\Rightarrow ax>-b\Rightarrow x>-\frac{b}{a}$;

3. Агар $a<0$ бошад, он гоҳ аз

$ax+b>0\Rightarrow x<-\frac{b}{a}$ мешавад.

Мисоли 1. Ҳалли нобаробариҳои хаттии зеринро меорем.

1. $2x+1>0$; 2. $x-12>3x+1$;

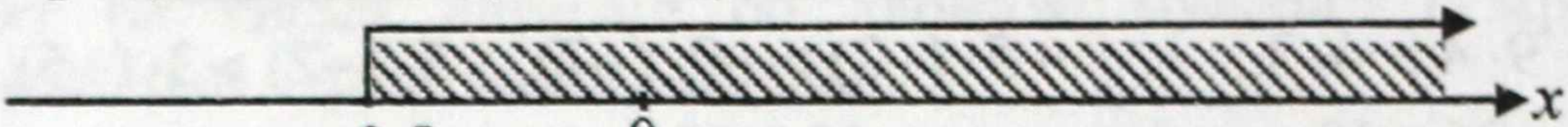
3. $\frac{x-3}{5}+2>\frac{x-1}{10}$; 4. $2(x-1)+1>3-(1-2x)$;

5. $2(x+8)-5x<4-3x$.

1. Ҳал. $2x+1>0$; $2x>-1$. Аз ин ҷо, $x>-0{,}5$ мешавад.

Ҳалли ин нобаробарӣ маҷмуи ададҳои ҳақиқие мебошанд, ки аз адади $-0{,}5$ калонанд: $(-0{,}5;+\infty)$. Маънои геометрияш

тамоми нуқтаҳои тири ададие, ки дар тарафи рости нуқтаи $-0,5$ ҷойгир шудаанд, аст (Расми 1).

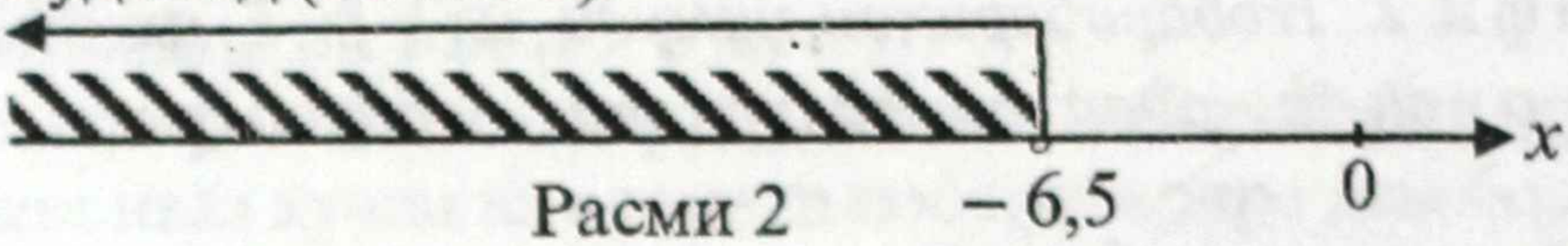


Расми 1

Ҷавоб: $(-0,5;+\infty)$.

2. Ҳал. $x-12>3x+1;\ x-3x>12+1;\ -2x>13;\ x<-6,5$

Ҳалли нобаробарии мазкур маҷмуи ададҳои ҳақиқие мебошанд, ки аз адади $-6,5$ хурданд. Маънои геометрияш тамоми нуқтаҳои тири ададие, ки дар тарафи чапи нуқтаи $-6,5$ ҷойгир шудаанд (Расми 2).



Расми 2

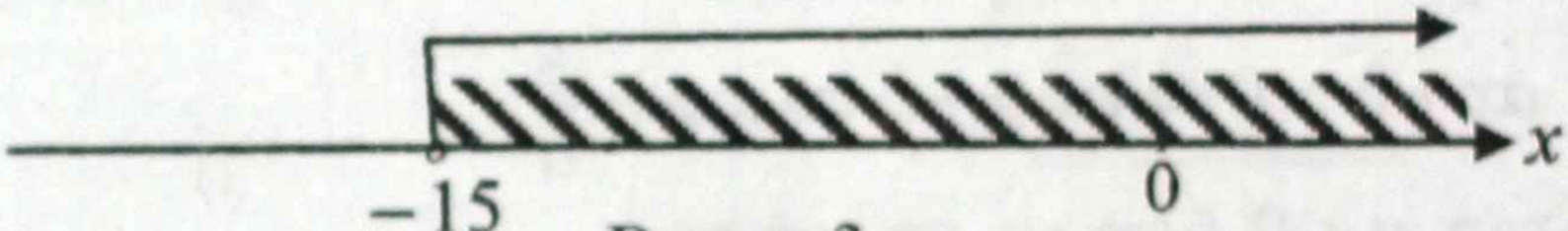
Ҷавоб: $(-\infty;-6,5)$.

3. Ҳал. $\frac{x-3}{5}+2>\frac{x-1}{10};\ \frac{x-3+10}{5}>\frac{x-1}{10};$

$$\frac{2(x+7)}{10}>\frac{x-1}{10};\ 2(x+7)>x-1;\ 2x+14>x-1;$$

$$2x-x>-1-14;\ x>-15.$$

Маҷмуи ададҳои ҳақиқие, ки аз адади -15 калонанд, ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошанд (Расми 3).



Расми 3

Ҷавоб: $(-15;+\infty)$.

4. Ҳал. $2(x-1)+1>3-(1-2x);\ 2x-2+1>3-1+2x;$

$$2x-2x>3-1+2-1;\ 0\cdot x>3.$$

Ин нобаробарӣ ҳал надорад, чунки тарафи чапи он $0\cdot x$ барои ҳар гуна x ба нол баробар мебошад, пас нобаробарии $0>3$ нодуруст аст. Инак, нобаробарӣ ҳал надорад, яъне маҷмуи ҳалҳои он холист.

Ҷавоб: $\varnothing$.

5. Ҳал. $2(x+8)-5x<4-3x;\ 2x+16-5x<4-3x;$

$$-3x+16<4-3x;\ -3x+3x<4-16;\ 0\cdot x<-12.$$

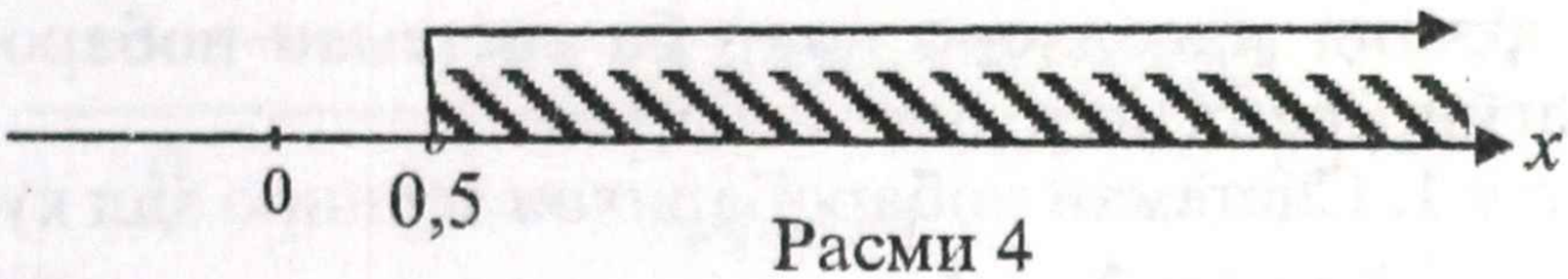
Нобаробарии $0\cdot x<-12$ ҳал надорад, чунки барои ягон қимати x он ба баробарии дуруст табдил намеёбад. Пас, нобаробарии $2(x+8)-5x<4-3x$ ҳам ҳал надорад, яъне маҷмуи ҳалҳои он холист.

Ҷавоб: $\varnothing$.

Мисоли 2. Барои кадом қиматҳои x касри $\frac{2x-1}{3}$ мусбат аст?

Ҳал. Мувофиқи шарт $\frac{2x-1}{3}>0;\ 2x-1>0;\ 2x>1;\ x>\frac{1}{2}$.

Яъне, касри додашуда барои ҳамаи қиматҳои x, ки аз адади $\frac{1}{2}$ калонанд, мусбат мебошад (Расми 4).



Расми 4

Ҷавоб: $(0,5;+\infty)$.

§3. Системаи нобаробариҳои яктағйирёбандадор

Агар дар ягон масъала ёфтани маҷмуи ҳалҳои умумии ду ё якчанд нобаробариҳо талаб карда шавад, он гоҳ мегӯянд, ки системаи нобаробариҳоро ҳал кардан лозим аст.

Таърифи 1. *Қимати тағйирёбандаро, ки дар вақти онро қабул кардан ҳар як нобаробарии система ба нобаробарии ададии дуруст табдил меёбад, ҳалли системаи нобаробариҳо меноманд.*

Ҳангоми ҳалли системаи нобаробариҳо аз мафҳуми баробарқувва будани нобаробариҳо истифода мебаранд.

Баробарқувва будани ду нобаробариҳоро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисол. Нобаробариҳои $12x-25>0$ ва $12x>25$, ки нобаробариҳои дорои тағйирёбандаи x мебошанд, баробарқувва мешаванд. Инро исбот мекунем. Дар §2 омадааст, ки агар ягон ҷамъшавандаро аз як қисми нобаробарии дуруст ба қисми дигараш бо аломати муқобил гузаронем, нобаробарии дуруст ҳосил мешавад. Чӣ хеле, ки аз нобаробариҳои додашуда маълум аст, нобаробарии дуюм аз нобаробарии якум ҳангоми (-25) - ро аз як қисм ба қисми дигараш бо аломати муқобилаш гузаронидан ҳосил шудааст. Пас, нобаробарии дуюм натиҷаи нобаробарии

якум ва нобаробарии якум натиҷаи нобаробарии дуюм мебошад, яъне, ин нобаробариҳо баробаркувваанд:

$$12x-25>0 \text{ ё ки } 12x>25.$$

Аз ин ҷо бармеояд, ки агар ҳар як ҳалли нобаробарии якум ҳалли нобаробарии дуюм бошад, он гоҳ нобаробарии якум натиҷаи нобаробарии дуюм аст. Баробаркуввагии нобаробариҳоро дар намуди умумӣ ин тавр баён кардан мумкин аст.

Фақат ҳамон нобаробариҳо баробаркувва мебошанд, ки агар маҷмуи ҳалҳояшон мувофиқ оянд.

Қайд. Нобаробариҳое, ки тағйирёбандаҳои якхела доранду аммо ҳал надоранд, низ баробаркувва ҳисобида мешаванд.

Акнун якчанд мисолҳоро доир ба системаи нобаробариҳои хаттии яктағйирёбандадор дида мебароем.

Мисоли 1. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

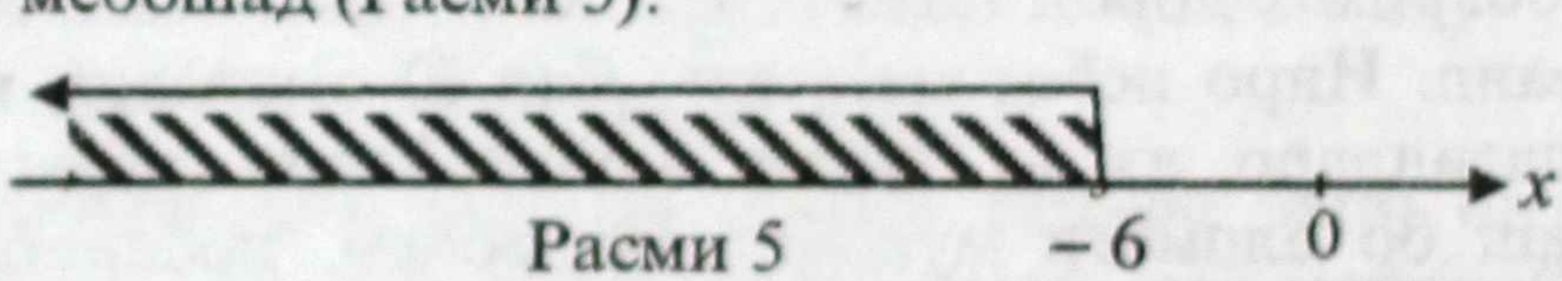
$$\begin{cases} 2x+1>3x+4, \\ 5x+3>8x+21. \end{cases}$$

Ҳал. Ҳар як нобаробариро ба нобаробарии оддитарини ба он баробаркувва иваз карда, системаи нобаробариҳои ба системаи додашуда баробаркувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 2x+1>3x+4, \\ 5x+3>8x+21; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3x>4-1, \\ 5x-8x>21-3; \end{cases} \quad \begin{cases} -x>3, \\ -3x>18; \end{cases} \quad \begin{cases} x<-3, \\ x<-6. \end{cases}$$

Фосилаи ададии $(-\infty;-3)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $x<-3$ ва фосилаи ададии $(-\infty;-6)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $x<-6$ мебошад.

Аз хати рости ададӣ истифода бурда, нишон медиҳем, ки фосилаи ададии $(-\infty;-6)$ буриши фосилаҳои ададии $(-\infty;-3)$ ва $(-\infty;-6)$ мебошад (Расми 5).



Расми 5

Ҷавоб: $(-\infty;-6)$.

Мисоли 2. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал кунед:

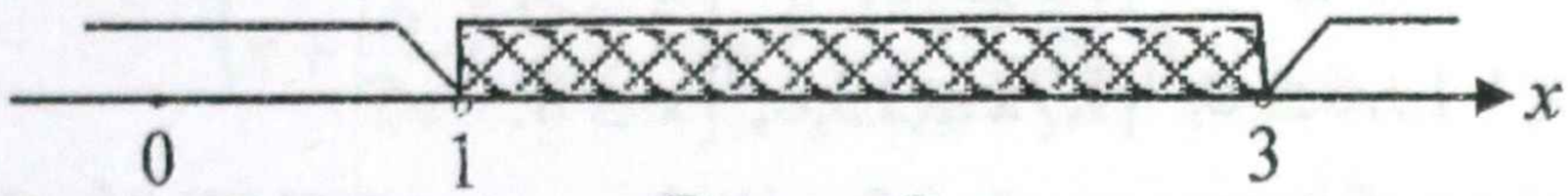
$$\begin{cases} 5x-2>2x+1, \\ 2x+3<18-3x. \end{cases}$$

Ҳ а л. а) Ҳар яке аз нобаробариҳои дар система додашударо ба нобаробариҳои содатарини ба он баробаркувва иваз карда, системаи баробаркувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 5x-2>2x+1, \\ 2x+3<18-3x; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-2x>1+2, \\ 2x+3x<18-3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>3, \\ 5x<15; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x<3. \end{cases}$$

б) Фосилаи ададии $(1;+\infty)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $x>1$ ва фосилаи ададии $(-\infty;3)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $x<3$ мебошад.

в) Пас, фосилаи ададии $(1;3)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии системаи додашуда мебошад (Расми 6).



Расми 6

Ҷавоб: $(1;3)$.

М и с о л и 3. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

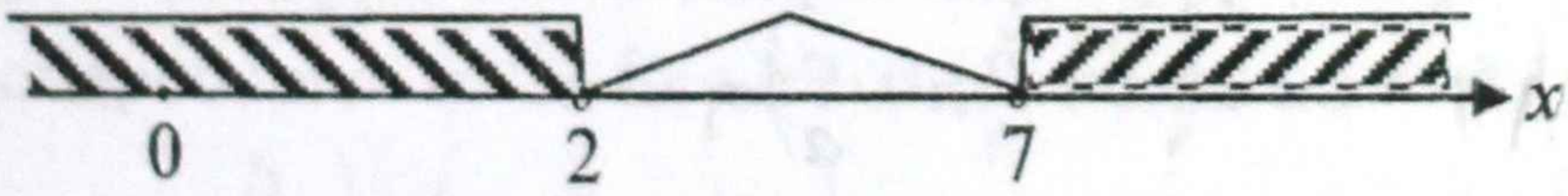
$$\begin{cases} 7x-14<0, \\ -5x<-35. \end{cases}$$

Ҳ а л. а) Ҳар як нобаробариҳои дар система додашударо ба нобаробариҳои содатарини ба он баробаркувва иваз карда, системаи баробаркувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 7x-14<0, \\ -5x<-35; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x<14, \\ 5x>35; \end{cases} \quad \begin{cases} x<2, \\ x>7. \end{cases}$$

б) Аз ин ду нобаробарӣ бармеояд, ки фосилаи ададии $(-\infty;2)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $x<2$ ва фосилаи ададии $(7;+\infty)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $x>7$ мебошад.

в) Пас, чӣ хеле, ки аз фосилаҳои ададии $(-\infty;2)$ ва $(7;+\infty)$ маълум аст, буриши ин маҷмӯъҳо холист (Расми 7).



Расми 7

Ҷавоб: Ø.

Мисоли 4. Системаи нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 2x-3\geq 0, \\ 5x-15\geq 0, \\ 1{,}7x-13{,}6\leq 0. \end{cases}$$

Ҳал. а) Ҳар як нобаробарии дар системаи нобаробариҳои додашударо ба нобаробарии соддатарини ба он баробаркувва иваз карда, системаи ба системаи додашуда баробаркувваро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 2x-3\geq 0, \\ 5x-15\geq 0, \\ 1{,}7x-13{,}6\leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x\geq 3, \\ 5x\geq 15, \\ 1{,}7x\leq 13{,}6; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1{,}5, \\ x\geq 3, \\ x\leq 8. \end{cases}$$

б) Аз нобаробариҳои $x\geq 1{,}5;\ x\geq 3$ ва $x\leq 8$ маълум мешавад, ки фосилаи ададии $[3;\ 8]$ ҳалли системаи нобаробариҳои додашуда мебошад (Расми 8).



Расми 8

Ҷавоб: $[3;\ 8]$.

§4. Нобаробариҳои квадратии якмаҷҳулаи ёбандадор

Таърифи 1. *Нобарабарии квадратӣ гуфта, нобарабарии намуди*

$$ax^2+bx+c\vee 0\ (a\neq 0) \qquad (2)$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо рамзи $\vee$ *яке аз аломатҳои «<», «>», «≥», «≤»- ро ифода мекунад.*

Бигузор сеузваи квадратии зерин дода шуда бошад:

$$ax^2+bx+c,\ (a\neq 0) \qquad (3)$$

Аз (3) квадрати пурра ҷудо карда, ҳосил мекунем:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-$$

$$-a\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right]=$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Инак,

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right], \qquad (4)$$

дар ин ҷо $D=b^2-4ac$ дискриминанти сеузваи квадратӣ мебошад. Ҳолатҳои $D<0,\ D>0$ ва $D=0$-ро дида мебароем.

I. Агар $D<0$ бошад, он гоҳ аз (4) бармеояд, ки аломати сеузва бо аломати адади a якхела аст, чунки барои ҳар гуна x ифодаи

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \quad \text{ва} \quad \left(-\frac{D}{4a^2}\right)>0$$

мебошад. Аз ин ҷо:

а) Агар $a>0$ бошад, он гоҳ, барои ҳар гуна x $ax^2+bx+c>0$ аст;

б) Агар $a<0$ бошад, он гоҳ, барои ҳар гуна x $ax^2+bx+c<0$ аст.

Аз ин ҷо бармеояд, ки ҳангоми $D=b^2-4ac<0$ будан, нобаробариҳои квадратии $ax^2+bx+c>0$ ва $ax^2+bx+c\geq 0$ барои ҳар гуна $x\in(-\infty;+\infty)$ дурустанд, агар $a>0$ бошад ва ҳал надоранд, агар $a<0$ бошад.

Ҳамин тариқ, дар ҳолати $D=b^2-4ac<0$ будан, нобаробариҳои квадратии $ax^2+bx+c\leq 0$ ва $ax^2+bx+c<0$ ҳал надоранд.

II. Агар $D=0$ бошад, он гоҳ аз баробарии (4) бармеояд, ки

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (5)$$

мешавад.

а) нобаробарии $ax^2+bx+c>0$ ҳангоми $a>0$ будан, дорои ҳалли $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ буда, ҳангоми $a<0$ будан, ҳал надорад.

б) нобаробарии $ax^2+bx+c<0$ ҳангоми $a<0$ будан, дорои ҳалли $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ буда, ҳангоми $a>0$ будан, ҳал надорад.

в) ҳангоми $a>0$ будан, ҳалли нобаробарии $ax^2+bx+c\geq 0, \forall x$ буда, ҳангоми $a<0$ будан, ҳалли он нуқтаи $x=-\frac{b}{2a}$ мебошад.

г) ҳангоми $a<0$ будан $\forall x$ ҳалли нобаробарии $ax^2+bx+c\leq 0$ буда, ҳангоми $a>0$ будан, $x=-\frac{b}{2a}$ мешавад.

III. Агар $D>0$ бошад, он гоҳ, сеузваи квадратиро дар намуди

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad (6)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо x_1 ва x_2 решаҳои ҳақиқии сеузваи квадратӣ мебошанд. Дар ин ҷо ҳам агар $a>0$ ва $ax^2+bx+c>0$ бошад, он гоҳ, $x\notin[x_1;\ x_2]$ мешавад. Инчунин, агар $ax^2+bx+c<0$ ва $a<0$ бошад, $x\in[x_1;\ x_2]$ мешавад.

Ба монанди ҳамин агар $ax^2+bx+c>0$ ва $a<0$ бошад $x\in[x_1;\ x_2]$ шуда, $ax^2+bx+c<0$ ва агар $a>0$ бошад, $x\notin[x_1;\ x_2]$ мешавад.

Акнун мисолҳоро доир ба нобаробариҳои квадратӣ муоина мекунем.

Мисоли 1. Нобаробарии $x^2-x-6>0$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Дискриминанти муодилаи квадратии $x^2-x-6=0$-ро ҳисоб мекунем:

$$D=b^2-4ac;\ D=1+24;\ D=25>0.$$

Азбаски $D>0$ аст, пас дар асоси баробарии (6) ҳосил мекунем:

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2).$$

Ҳамин тавр, нобаробарии додашуда, намуди зеринро мегирад:

$$(x-3)(x+2)>0.$$

Нобаробарии $(x-3)(x+2)>0$ ба нобаробариҳои зерин баробаркувва мешавад:

а) $\begin{cases} x-3>0, \\ x+2>0. \end{cases}$ ё ки б) $\begin{cases} x-3<0, \\ x+2<0. \end{cases}$

Системаи нобаробариҳоро ҳал карда, пайдо мекунем:

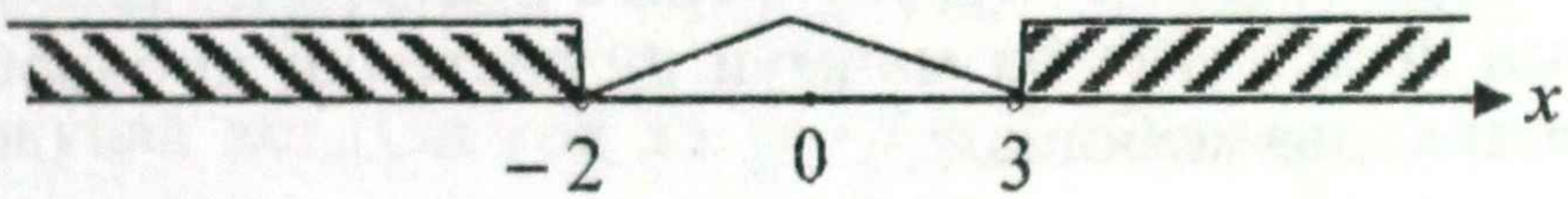
а) $\begin{cases} x-3>0, \\ x+2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ x>-2. \end{cases}$

Аз ин ҷо $x>3$ мешавад.

б) $\begin{cases} x-3<0, \\ x+2<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<3, \\ x<-2. \end{cases}$

Аз ин ҷо, $x<-2$ мешавад.

Аз қиматҳои ёфташуда, қиматҳои x, ки бароябшон $x<-2$ ё $x>3$ ҳастанд, ҳалҳои нобаробарии $x^2-x-6>0$ шуда метавонанд (Расми 9).



Расми 9

Ҷавоб: $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $3x^2-4x+5<0$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Решаҳои муодилаи квадрати $3x^2-4x+5=0$-ро меёбем.

$D=16-60;\ D=-44;\ D<0.$

Аз сабаби он, ки $a=3>0$ аст, пас $3x^2-4x+5$ фақат қиматҳои мусбатро қабул мекунад, бинобар ҳамин нобаробарӣ ҳал надорад.

Ҷавоб: $\varnothing$.

Мисоли 3. Нобаробарии $4x^2+4x+1>0$-ро ҳал кунед.

Ҳал. а) $4x^2+4x+1=0$.

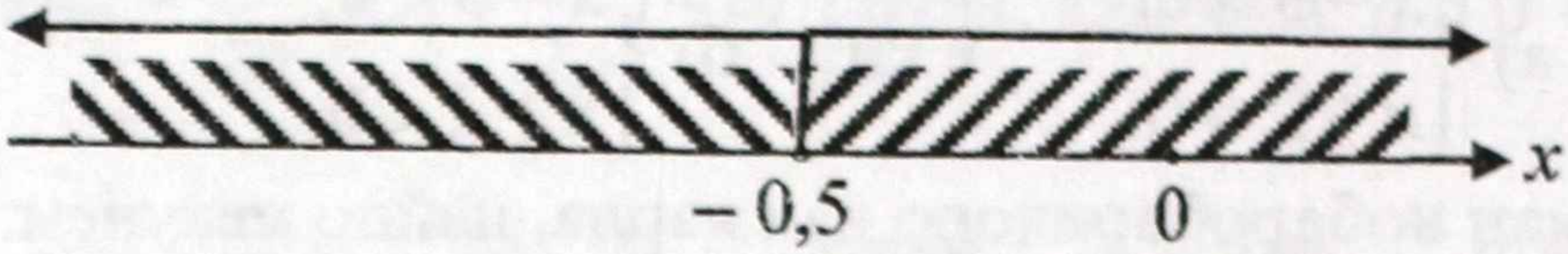
б) $D=16-16;\ D=0.$

в) $4x^2+4x+1>0$ ё ки $(2x+1)^2>0.$

г) Аз ин ҷо мебарояд, ки фосилаи ададии $(-\infty;+\infty)$, $x\neq-0{,}5$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии

$4x^2+4x+1>0=(2x+1)^2>0$

мебошад, пас ҳалли нобаробарии $4x^2+4x+1>0$, $x\neq -0,5$ мешавад (Расми 10).



Расми 10

Ҷавоб: $x\neq -0,5$.

§5. Ҳалли нобаробариҳо. Методи интервалҳо

Мисоли 1. Нобаробарии $\frac{2x-1}{x+1}<1$-ро ҳал кунед.

Ҳал. а) Нобаробарии додашударо ба тариқи зерин табдил медиҳем:

$$\frac{2x-1}{x+1}-1<0;\quad \frac{2x-1-x-1}{x+1}<0;\quad \frac{x-2}{x+1}<0.$$

б) Каср ҳамон вақт манфӣ мешавад, ки агар сурат ва махраҷаш аломатҳои гуногун дошта бошанд. Бинобар он нобаробарии ҳосилшуда ба маҷмуи ду системаи нобаробариҳои зерин баробаркуввa мебошад:

$$1)\begin{cases}x-2>0,\\ x+1<0.\end{cases}\quad \text{ва}\quad 2)\begin{cases}x-2<0,\\ x+1>0.\end{cases}$$

в) Системаҳои нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал карда, пайдо мекунем:

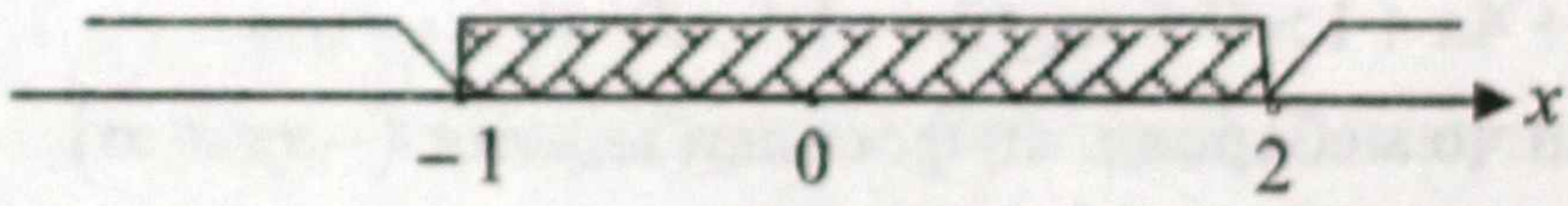
$$1)\begin{cases}x-2>0,\\ x+1<0;\end{cases}\quad\begin{cases}x>2,\\ x<-1.\end{cases}$$

Системаи нобаробариҳои охирон ҳал надорад.

$$2)\begin{cases}x-2<0,\\ x+1>0;\end{cases}\quad\begin{cases}x<2,\\ x>-1.\end{cases}$$

Аз ин ҷо, $-1<x<2$ мешавад.

Инак, нобаробарии матлуб дорои ҳалли $-1<x<2$ мебошад (Расми 11).



Расми 11

Ҷавоб: $(-1;\ 2)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $|2x-5| \le 7$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. а) Аз хосияти модули ададҳо истифода бурда, нобаробарии матлубро дар намуди зерин менависем:

$$-7 \le 2x-5 \le 7.$$

б) $-7+5 \le 2x \le 7+5;\ -2 \le 2x \le 12;\ -1 \le x \le 6.$

в) Фосилаи ададии $[-1;\ 6]$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $|2x-5| \le 7$ мебошад (Расми 12).

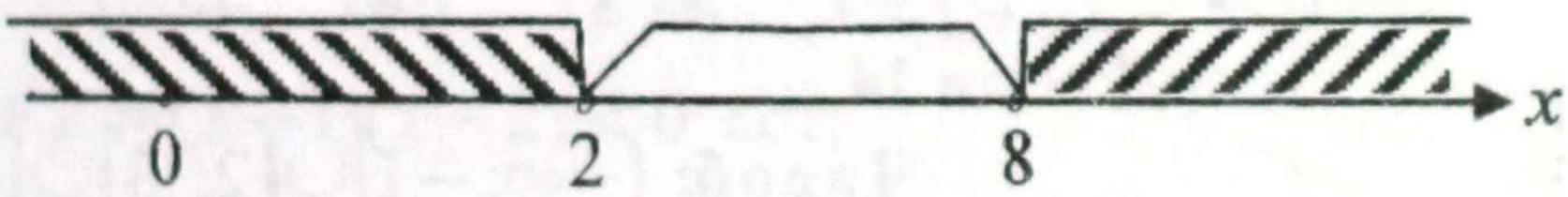


Расми 12

Ҷавоб: $[-1;\ 6]$

Мисоли 3. Нобаробарии $|5-x| \ge 3$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз хосияти модули ададҳо истифода бурда, нобаробарии $|5-x| \ge 3$ - ро ҳал мекунем. Азбаски $|5-x| = |x-5|$ аст, пас нобаробарии аввала ба нобаробарии $|x-5| \ge 3$ баробаркуввa аст. Он гоҳ аз $|x-5| \ge 3$ бармеояд, ки $x-5 \ge 3$ ё $x-5 \le -3$, ё ки $x \ge 8$ ва $x \le 2$. Аз ин ду нобаробарӣ маълум аст, ки фосилаҳои ададии $(8;+\infty)$ ва $(-\infty;\ 2)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии $|5-x| \ge 3$ мебошанд (Расми 13).



Расми 13

Ҷавоб: $(-\infty;\ 2) \cup (8;+\infty)$.

Мисоли 4. Нобаробарии $|x^2-5x| \ge 6$ - ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз хосиятҳои модули ададҳо истифода бурда, нобаробарии додашударо дар намуди ду нобаробариҳои зерин менависем:

$$x^2-5x \ge 6 \text{ ва } x^2-5x \le -6.$$

Нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

1) $x^2-5x \ge 6;\ x^2-5x-6 \ge 0;\ (x-6)(x+1) \ge 0.$

Аз ин ҷо, системаи нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

а) $\begin{cases} x-6\geq 0, \\ x+1\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x\geq 6, \\ x\geq -1. \end{cases}$ Аз ин ҷо: $x\geq 6$.

б) $\begin{cases} x-6\leq 0, \\ x+1\leq 0; \end{cases} \begin{cases} x\leq 6, \\ x\leq -1. \end{cases}$ Аз ин ҷо: $x\leq -1$.

2) $x^2-5x\leq -6;\ x^2-5x+6\leq 0;\ (x-2)(x-3)\leq 0$.

Нобаробарии ҳосилшударо дар шаклҳои зерин менависем:

а) $\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x-3\leq 0. \end{cases}$ ва б) $\begin{cases} x-2\leq 0, \\ x-3\geq 0. \end{cases}$

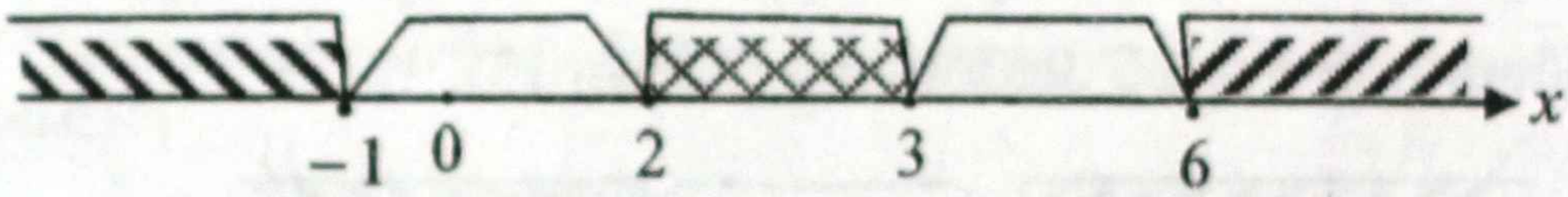
Системаҳои нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал мекунем:

а) $\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x-3\leq 0; \end{cases} \begin{cases} x\geq 2, \\ x\leq 3. \end{cases}$ Аз ин ҷо, $2\leq x\leq 3$ мешавад.

б) $\begin{cases} x-2\leq 0, \\ x-3\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x\leq 2, \\ x\geq 3. \end{cases}$

Системаи нобаробариҳои ҳосилшудаи охирон ҳал надорад.

Аз ин ҷо ҳамаи қиматҳои x, ки онҳо ё $2\leq x\leq 3$ ё $x\geq 6$ ва ё $x\leq -1$- ро қонеъ мекунанд, ҳалҳои нобаробарии додашудаанд (Расми 14).



Расми 14

Ҷавоб: $(-\infty;-1]\cup[2;\ 3]\cup[6;\ +\infty)$.

Методи интервалҳо. Методи интервалҳо бо чунин хосиятҳои бисёрузвоҳо асос карда шудааст.

Бигузор $P(x)$ - бисёрузва бошад. Адади $x=x_0$ яке аз решаҳои ҳақиқии бисёрузваи $P(x)$ номида мешавад, агар бисёрузваро ба нол табдил диҳад, яъне $P(x)=0$ шавад. Хосиятҳои решаҳои ҳақиқии бисёрузваро меорем.

Бигузор x_1 ва x_2 $(x_1<x_2)$ решаҳои бисёрузва бошанд. Агар бисёрузва дар интервали $(x_1;x_2)$ дигар реша надошта бошад, он гоҳ барои ҳар гуна $x\in(x_1;x_2)$ бисёрузва қиматҳои аломаташон якхеларо қабул мекунад.

Барои аломатро муайян намудан аз интервали $(x_1; x_2)$ як ададро интихоб карда, дар он аломати бисёрузваро муайян кардан кифоя мебошад.

Ин хосияти решаҳои бисёрузваро ин хел ҳам фаҳмидан мумкин аст:

Агар $x = x_0$ яке аз решаҳои ҳақиқии бисёрузваи $P(x)$ бошад, он гоҳ бисёрузваи $P(x)$ фақат ҳангоми аз нуқтаи $x = x_0$ гузаштан аломаташро тағйир медиҳад. Инро дар мисоли зерин дида мебарем:

Агар $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ решаҳои ҳақиқии бисёрузваи дараҷаи дуюми $x^2 - 3x + 2$ бошад, он гоҳ дар асоси теоремаи Виет навишта метавонем:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

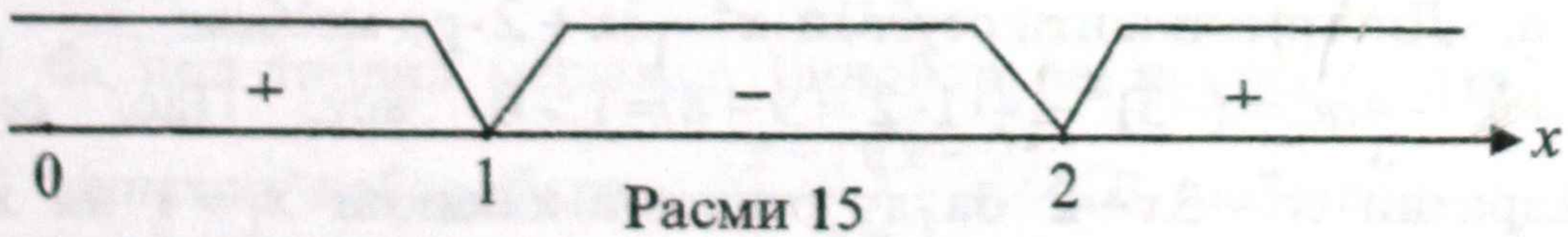
Нуқтаҳои $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ фосилаи ададии $(-\infty; +\infty)$-ро ба се фосилаҳои ададии $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ ва $(2; +\infty)$ тақсим мекунанд.

Аз баробарии $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ бармеояд, ки дар ҳар як фосилаи ададӣ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2$ аломаташро нигоҳ медорад:

а) барои ҳар гуна $x \in (-\infty; 1)$ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) > 0$ аст;

б) барои ҳар гуна $x \in (1; 2)$ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) < 0$ аст;

в) барои ҳар гуна $x \in (2; +\infty)$ сеузваи квадратии $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) > 0$ мебошад (Расми 15).



Расми 15

Аз методи интервалҳо ҳалли нобаробариҳои намуди

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0, \qquad (7)$$

ки дар ин ҷо $P(x)$ ва $Q(x)$ - бисёрузва, рамзи $\vee$ яке аз аломатҳои «$<$», «$>$», «$\geq$», «$\leq$» мебошад, низ истифода бурда мешавад.

Барои нобаробарии (7)- ро бо методи интервалҳо ҳал кардан бояд:

1. Ҳамаи решаҳои ҳақиқии бисёрузваҳои $P(x)$ ва $Q(x)$ - ро ёфтан лозим аст;

2. Аз решаҳои ёфташуда, ҳамон решаҳоро боқӣ гузоштан лозим аст, ки дар як вақт решаҳои $P(x)$ ва ҳам $Q(x)$ набошанд ва дар намуди зиёдшавиашон навишта шуда бошанд;

3. Тири ададиро дар асоси решаҳои ёфташуда ба фосилаҳои адади тақсим кардан лозим аст, ки дар ҳар яки онҳо касри $\frac{P(x)}{Q(x)}$ аломаташро нигоҳ медорад;

4. Аз ҳар як фосилаи ададӣ як нуқтаро интихоб карда аз рӯи он аломати касри $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - ро дар ҳар як фосилаҳои ададӣ ёфтан лозим аст;

5. Пайдарпаии аломатҳои касрро тасвир карда ҳамаи фосилаҳое, ки онҳо ҳалли нобаробарии (7) мебошанд, ёфтан даркор аст.

Мисоли 5. Нобаробарии зеринро ҳал кунед:

$$\frac{(x^2-3x+2)(x^2+2x+2)}{(x-3)(x-1-2x^2)} \geq 0.$$

Ҳал. Нобаробарии додашударо бо методи интервалҳо ҳал мекунем:

1. Дискриминанти сеузваҳои квадратии x^2-3x+2, x^2+2x+2 ва $-2x^2+x-1$ - ро ҳисоб мекунем:

а. Дискриминанти сеузваи x^2-3x+2 -ро меёбем:

$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1>0$ аст. Пас, сеузваи квадратии x^2-3x+2 ба ду решаҳои ҳақиқии $x_1=1$ ва $x_2=2$ дороанд. Бинобар он $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ мешавад.

- Дискриминанти сеузваҳои квадратии x^2+2x+2 ва $-2x^2+x-1$ манфӣ мебошад.

$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot 2=4-8=-4<0;$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-2) = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Бинобар он сеузваҳои квадратӣ барои ҳамаи x - ҳо аломатҳои бо аломати коэффитсиенти назди x^2 якхеларо дорад. Бинобар ин нобаробарии додашударо бо нобаробарии баробаркувваи

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} \le 0$$

иваз карда, ҳосил мекунем: $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \le 0$.

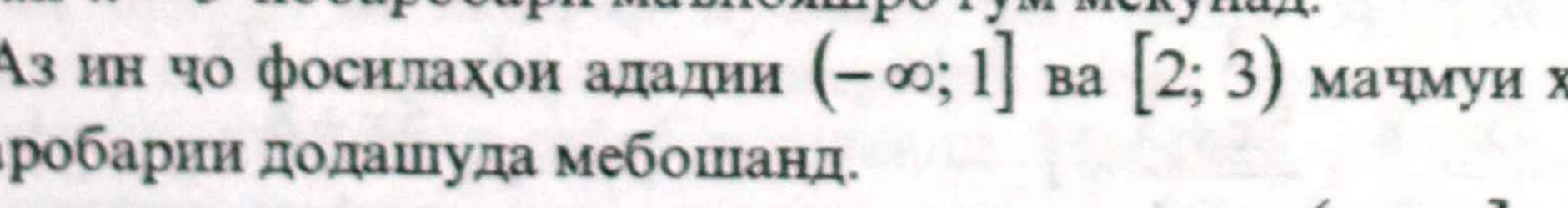
2. Дар тири ададӣ нуқтаҳои $x = 1;\ x = 2;\ x = 3$ - ро тасвир карда фосилаҳои ададии $(-\infty;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 3)$ ва $(3;\ +\infty)$ ҳосил мекунем.

3. Аз фосилаҳои ададӣ нуқтаҳои $x = 0;\ x = \frac{3}{2};\ x = \frac{5}{2};\ x = 4$ - ро интихоб мекунем.

4. Дар нуқтаи $x = 0$ касри $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} = -\frac{2}{3}$ мебошад. Инак, барои ҳар гуна $x \in (-\infty;\ 1)$ каср манфӣ аст.

Айнан ба монанди ҳамин аломати касрро дар дигар нуқтаҳо низ нишон додан лозим аст.

5. Пайдарпаии аломатҳои касрро дар тири ададӣ тасвир мекунем (Расми 16).



Расми 16

6. Аз сабаби он, ки касри $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$ дар нуқтаҳои $x = 1$ ва $x = 2$ ба нол табдил мешавад, бинобар он нуқтаҳои $x = 1$ ва $x = 2$ решаҳои нобаробарии $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \le 0$ мебошад ва дар нуқтаи $x = 3$ нобаробарӣ маънояшро гум мекунад.

Аз ин ҷо фосилаҳои ададии $(-\infty;\ 1]$ ва $[2;\ 3)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошанд.

Ҷавоб: $(-\infty;\ 1] \cup [2;\ 3)$.

МАШҚҲО

1. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $5(x-1)+7 \le 1-3(x+2)$; б) $\frac{4-x}{5}-5x>0$;

в) $4(b-1,5)-1,2>6b-1$; г) $4(a+8)-7(a-1)<12$;

г) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}<4$.

2. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\begin{cases}5(x-2)-x>2,\\1-3(x-1)<-2.\end{cases}$ б) $\begin{cases}7x+3\ge 5x-19,\\4x+1\le 22-3x.\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x-(x-4)<6,\\x>3(2x-1)+18.\end{cases}$ г) $\begin{cases}3(2-3x)-2(3-2x)>x,\\6<x^2-x(x-8).\end{cases}$

г) $\begin{cases}\frac{5x}{4}-\frac{6x-1}{4}<\frac{4x+1}{12},\\\frac{2x+1}{5}-\frac{2-x}{5}>1.\end{cases}$ д) $\begin{cases}6-x-x^2\ge 0,\\3x+6\ge 0.\end{cases}$

е) $\begin{cases}(x+2)(x-5)\ge 0,\\8-x<0.\end{cases}$ ё) $\begin{cases}|x+4|>6,\\x-4>0.\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\frac{3x-4}{2}\ge x+3,\\2x-4\le x+11.\end{cases}$ з) $\begin{cases}5x-8\le \frac{13x+4}{3},\\2x-1\ge x+3.\end{cases}$

3. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $3x^2-4x+5>0$; б) $-2x^2+x-1\le 0$;

в) $x^2+2x+1>0$; г) $5-x-\frac{6}{x}\ge 0$.

г) $7x^2-4(x+2)\ge 4x(2x+3)-5x-8$;

д) $4x(x+3)-2x+1\ge 5x(x+4)+3x-13$;

е) $x(x+3)+2(3x-4)\ge 2x^2-3x+3$;

ё) $3x+1\ge \frac{2x-1}{2}-\frac{4-5x}{3}+x$; ж) $\frac{5x+3}{x}\le \frac{7+15x}{2x}-3$;

з) $\frac{7x-8}{x+3}<\frac{5x+3}{x+3}+1$; и) $-1<\frac{5x+8}{4}-x<2$.

БОБИ VIII
ФУНКСИЯ

§1. Бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбанда

Вақте ки мо ягон ҳодисаи табиатро мушоҳида менамоем, ё ба рафти протсесси техникӣ диққат медиҳем, ҳар дафъа мебинем, ки бузургиҳои дар ин ҳодиса ё протсесс иштирок дошта гуногунанд. Яке аз онҳо бо гузаштани протсесс қимати доимии худро нигоҳ медорад, аммо дигарашон қиматҳои ададии гуногунро қабул карда метавонанд, яъне тағйир меёбанд.

Масалан, ҳангоми парвози самолёт шумораи пассажирон, миқдори ҷойҳои холӣ, дарозии қанотҳои самолёт тағйир намеёбад, лекин суръат ва баландии парвоз, захираи сӯзишворӣ, ҳарорати ҳавои атроф тағйир меёбад.

Инак, аз мисоли овардашуда маълум мешавад, ки ҳангоми мушоҳида доим ба мо лозим меояд, ки бо бузургиҳои доимӣ ва тағйирёбанда кордор шавем.

Таърифи 1. *Бузургие, ки қимати доимии худро нигоҳ медорад, бузургии доимӣ номида мешавад.*

Бузургии доимиро бо ададҳо ва ҳарфҳо: $a, b, c, d, \ldots$ ишорат мекунанд.

Масалан, дар мисоли овардашуда шумораи пассажирон, миқдори ҷойҳои холӣ, дарозии қанотҳои самолёт ва дигарҳо мисолҳои бузургиҳои доимӣ шуда метавонанд.

Таърифи 2. *Бузургие, ки қиматҳои ададии гуногунро қабул карда метавонад, бузургии тағйирёбанда номида мешавад.*

Бузургии тағйирёбандаро бо ҳарфҳои $x, y, z, u, \ldots$ ва ғайраҳо ишорат мекунанд. Масалан, дар мисоли дар боло овардашуда суръат ва баландии парвоз, захираи сӯзишворӣ, ҳарорати ҳавои атроф ва дигарҳо мисолҳои бузургиҳои тағйирёбанда шуда метавонанд.

§2. Мафҳуми функсия

Ҳангоми омӯзиши қонуниятҳое, ки дар табиат дучор меоянд, одатан бо маҷмуи бузургиҳои тағйирёбандадор кордор мешавем. Бузургиҳои дар худи ҳамон як ҳодиса ё ки маҷмӯъ иштирок дошта, одатан аз якдигар мустақил не, балки бузургиҳои ба ҳамдигар вобастаанд, чунки тағйирёбии яке аз онҳо ба тағйироти мувофиқи дигарашон сабаб мешаванд. **Масалан**, чӣ хеле, ки ба хонандагон маълум аст, дарозии давра, $C = 2\pi R$ аст (2π -

бузургии доимӣ). Агар радиуси давра R - ро зиёд кунем, он гоҳ дарозии давра C ҳам зиёд мешавад. Инак, дар вақти муқоиса кардани ду бузургии тағйирёбанда якеашро чун бузургии тағйирёбандаи мустақил ва дигарашро чун бузургии тағйирёбандаи вобаста дида баромадан мумкин мебошад. **Масалан**, дар мисоли овардашуда радиуси давра R - ро бузургии тағйирёбандаи мустақил ва дарозии давра C - ро бузургии тағйирёбандаи вобаста ҳисоб кардан мумкин аст.

Таърифи 1. *Агар ба ҳар як қимати муошнашавандаи бузургии тағйирёбандаи x қимати ягонаи комилан муайяни бузургии тағйирёбандаи дигар y бо ягонӣ тарз мувофиқ ояд, пас мегӯянд, ки функсия дода шудааст.*

Дар ин маврид бузургии y - ро бузургии тағйирёбандаи вобаста ё функсия ва бузургии x - ро бузургии тағйирёбандаи мустақил, ё аргумент меноманд. Барои ифодаи он, ки y функсияи аргументи x аст, одатан аз аломатҳои $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$ ва ғайраҳо истифода мебаранд.

Бояд қайд кард, ки интихоби ҳарфҳо барои ишорат кардани функсия (f, g, φ, ...) он қадар муҳим нест. Муҳимаш дар он аст, ки ин ҳарф чӣ гуна алоқамандии бузургиҳои x ва y - ро ифода мекунад.

Қимати функсияи дилхоҳи $f(x)$ - ро, ки ҳангоми $x=a$ будан функсия қабул мекунад, бо $f(a)$ ишорат мекунанд. Агар, масалан, $f(x)=x^3+5$ бошад, пас, $f(0)=0^3+5=5$; $f(2)=2^3+5=8+5=13$; $f(a)=a^3+5$; $f(a+2)=(a+2)^3+5$ ва ғайра мешавад.

§3. Тарзи дода шудани функсия

Дода шудани функсия ин нишон додани он аст, ки аз рӯи қиматҳои аргумент қиматҳои мувофиқи функсия чӣ тавр муайян карда мешаванд.

Дар ин ҷо се тарзи дода шудани функсияро муоина мекунем: тарзи аналитикӣ, ҷадвалӣ ва графикӣ.

1. Тарзи аналитикӣ. Ба хонандагон аз курси мактабии математика маълум аст, ки функсия бо тарзи аналитикӣ дода мешавад, яъне бо ёрии формулае, ки вай бузургии тағйирёбандаи вобаста (функсия) - ро бо бузургии тағйирёбандаи мустақил

(аргумент) пайваст мегардонад. **Масалан**, $y=\sqrt{x+4}$, $y=\log_a x$, $S=\pi R^2$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ ва ғайра мисолҳои бо тарзи аналитикӣ дода шудани функсия мебошанд.

Агар функсияи дилхоҳи $y=f(x)$ дар намуди формула дода шуда бошад, он гоҳ ҳарфи f маҷмуи амалҳоеро ифода мекунад, ки ба аргумент x қиматҳои гуногун дода, қиматҳои мувофиқи функсияи $f(x)$ - ро ҳисоб мекунем.

Масалан, агар $f(x)=\sqrt{2x^2-x+5}$ бошад, пас,

$$f(0)=\sqrt{2\cdot 0^2-0+5}=\sqrt{5};$$

$$f(1)=\sqrt{2\cdot 1^2-1+5}=\sqrt{2-1+5}=\sqrt{6};$$

$$f(-2)=\sqrt{2\cdot(-2)^2-(-2)+5}=\sqrt{2\cdot 4+2+5}=\sqrt{15}$$

ва ғайра.

2. Тарзи ҷадвалӣ. Агар функсия ба намуди ҷадвале дода шуда, дар он ба қиматҳои гуногуни аргумент x гузоштани қиматҳои мувофиқи функсия y мумкин бошад, он гоҳ чунин тарзро тарзи ҷадвалии дода шудани функсия меноманд.

Дар техника ва амалияи инсонӣ баъзан ба воситаи таҷриба ё бо ёрии ченкунӣ қиматҳои аргумент ва қиматҳои мувофиқи функсияро дар намуди ягон ҷадвал навишта, дар натиҷа ҷадвали аз ададҳо ташкилшударо ҳосил мекунанд. **Масалан**, ба ин ҷадвали логарифмҳо, ҷадвали функсияҳои тригонометрӣ ва ғайраҳо мисол шуда метавонанд. Яке аз хусусиятҳои арзандаи тарзи ҷадвалӣ дода шудани функсия дар он аст, ки бевосита, бе ҳеҷ як ҳисоббарорӣ аз рӯи қиматҳои мувофиқи аргумент, қиматҳои мувофиқи функсияро муайян кардан мумкин аст.

3. Тарзи графикӣ. Тарзи аналитикӣ ва ҷадвалии дода шудани функсияҳо аёният надоранд, чунки дар онҳо мувофиқати байни аргумент x ва функсия y бо ёрии график муқаррар (тасвир) карда нашудааст. Тасвири графикии мувофиқатии байни аргумент x ва функсия y -ро тарзи графикии дода шудани функсия меноманд. Тарзи графикии дода шудани функсия ҳамон вақт қулай аст, ки агар ба таври аналитикӣ додани функсия хеле душвор бошад. Баъзан, ҳангоми мушоҳида бо чунин асбобҳое кордор мешавем, ки онҳо ин мушоҳидаро фақат ба таври графикӣ тасвир карда метавонанд. **Масалан**, ба ин барометр

(навишти асбоби худнавис – барограф), ки ҳангоми мушоҳида бо гузаштани вақт тағйирёбии фишори атмосфераро ба таври графикӣ тасвир мекунад, мисол шуда метавонад. Дар математика бошад, барои тасвир кардани ин ё он хосияти функсия аксар вақт аз тарзи графикӣ дода шудани функсия истифода мебаранд.

§4. Соҳаи муайянӣ ва соҳаи тағйирёбии функсия

Функсияи $y = f(x)$ дар кадом тарзе, ки дода шуда набошад, мо дар вақти дида баромадани он доимо бо ду маҷмӯъ кордор мешавем: маҷмуи қиматҳое, ки аргумент x ва маҷмуи қиматҳое, ки функсия y қабул карда метавонад.

Таърифи 1. *Маҷмуи ҳамаи он қиматҳои аргумент (x), ки барои элементҳои онҳо қиматҳои функсия $y = f(x)$ муайян аст, соҳаи муайянӣ ё соҳаи мавҷудияти функсия меноманд.*

Барои ифода кардани он, одатан аз ишоратҳои $D(f)$ ё ки $D(y)$ истифода мебаранд. Аксаран, соҳаи муайянии функсия фосилаи $(a;\ b)$, ё порчаи (сегмент) - и $[a;\ b]$, ё ки маҷмуи кушоди беохири $(-\infty;+\infty)$ шуда метавонанд. **Масалан**, барои функсияи $f(x)=x^2+4$ маҷмуи кушоди беохири $(-\infty;+\infty)$ соҳаи муайянии ин функсия мебошад, чунки барои $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ қимати функсия муайян аст.

Бинобар соҳаи муайянии функсияро бо $D(f)$ ишорат карда, менависем: $D(f)=(-\infty;+\infty)$ ё ки $D(f)=R$.

Таърифи 2. *Маҷмуи ҳамаи қиматҳое, ки худи функсия y қабул мекунад, соҳаи тағйирёбии ин функсия номида мешавад.*

Барои ифодаи он одатан аз ишоратҳои $E(f)$ ё ки $E(y)$ истифода мебаранд. **Масалан**, барои функсияи $f(x)=x^2+4$ нимсегменти $[4;+\infty)$ маҷмуи қиматҳои функсия мебошад, чунки барои $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ нобаробарии $x^2+4\geq 0$ ҳамеша ҷой дорад. Бинобар он маҷмуи қиматҳои функсияро бо $E(f)$ ишорат карда менависем: $E(f)=[4;+\infty)$.

Барои ёфтани соҳаи муайянии функсияҳо истифодаи ҷадвали зеринро истифода кардан мумкин аст:

Функсияҳо	Соҳаи муайянии функсияҳо
$y=\sqrt{f(x)}$	$f(x)\geq 0$
$y=\log_a f(x)$	$f(x)>0$
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$
$y=\arcsin f(x)$	
$y=\arccos f(x)$	$-1\leq f(x)\leq 1$

Барои он, ки нисбат ба соҳаи муайянии функсия маълумоти муфассал гирем, ҳалли якчанд мисолҳоро меорем.

Мисоли 1. Соҳаи муайянии функсияҳои зеринро ёбед:

1. $y=\sqrt{4-x^2}$;
2. $y=\log_4(81-x^2)$;
3. $y=\log_3(x+4)+\log_6(3-x)$;
4. $y=\arcsin\dfrac{4x-3}{5}$;
5. $y=\arcsin 2x+\sqrt{3x}$;
6. $y=\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+3}$.

Ҳал. 1. Функсияи $y=\sqrt{4-x^2}$ ҳангоми $4-x^2\geq 0$ будан, маъно дорад. Нобаробарии $4-x^2\geq 0$- ро ҳал карда, пайдо мекунем: $4-x^2\geq 0$; $4\geq x^2$; $|x|\leq 2$. Пас, порчаи $-2\leq x\leq 2$ соҳаи муайянии функсия мебошад.

Ҷавоб: $D(y)=[-2;\ 2]$.

2. Функсияи $y=\log_4(81-x^2)$ ҳангоми $81-x^2>0$ будан, маъно дорад. Он гоҳ нобаробарии $81-x^2>0$-ро ба монанди мисоли 1 ҳал карда, пайдо мекунем:

$-9<x<9$.

Яъне, сохаи муайянии функсияи матлуб интервали $(-9;\ 9)$ мебошад.

Ҷавоб: $D(y)=(-9;\ 9)$.

3. Функсияи $y=\log_3(x+4)+\log_6(3-x)$ ҳангоми

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 3-x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-4, \\ x<3 \end{cases}$$

муайян мешавад.

Пас, соҳаи муайянии функсия интервали $(-4;\ 3)$ мебошад.

Ҷавоб: $D(y)=(-4;\ 3)$.

4. Функсияи $y=\arcsin\dfrac{4x-3}{5}$ ҳангоми $\left|\dfrac{4x-3}{5}\right|\le 1$ будан, маъно дорад. Бинобар он, ин нобаробарии ҳосилшударо ҳал карда, ҳосил мекунем:

$$-1\le\frac{4x-3}{5}\le 1 \text{ ё ки } -5\le 4x-3\le 5;$$

$$\begin{cases} 4x-3\ge -5, \\ 4x-3\le 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x\ge -2, \\ 4x\le 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -0{,}5, \\ x\le 2. \end{cases}$$

Аз ин чо, $-0{,}5\le x\le 2$ мешавад.

Пас, порчаи $-0{,}5\le x\le 2$ соҳаи муайянии функсияи додашуда мебошад.

Ҷавоб: $D(y)=[-0{,}5;\ 2]$.

5. Функсияи $y=\arcsin 2x+\sqrt{3x}$ барои ҳамаи қиматҳои $|2x|\le 1$ ва $3x\ge 0$ маъно дорад. Аз ин ду нобаробарии ҳосилшуда, системаи нобаробариҳо тартиб дода, онро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} |2x|\le 1, \\ 3x\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -1\le 2x\le 1, \\ x\ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x\ge -1, \\ 2x\le 1, \\ x\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -0{,}5, \\ x\le 0{,}5, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

Аз ин чо, $0\le x\le 0{,}5$ мешавад.

Пас, барои функсияи додашуда, порчаи $0\le x\le 0{,}5$ соҳаи муайянӣ мешавад.

Ҷавоб: $D(y)=[0;\ 0{,}5]$.

6. Функсияи $y=\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+3}$ ҳангоми $x+2\ge 0$ маъно дорад, чунки барои ҳамаи қиматҳои $x\ge -2$ ин функсия муайян

аст. Пас, ниминтервали $[-2;+\infty)$ соҳаи муайянии функсияи додашуда мешавад.

Ҷавоб: $D(y)=[-2;+\infty)$.

§5. Хосиятҳои функсия

Фарз мекунем, ки функсияи дилхоҳи $y=f(x)$ дар мачмуи D дода шуда бошад. Мачмуи D аз интервали $(a;\ b)$, порчаи $[a;\ b]$ ва ё аз ниминтервали $(a;\ b]$ иборат шуда метавонад.

1. Функсияҳои ҷуфт ва тоқ

а) *Агар барои ҳамаи қиматҳои* $x\in D$ *баробарии* $f(-x)=f(x)$ *ичро шавад, он гоҳ* $f(x)$ *- ро функсияи ҷуфт меноманд.*

Масалан, функсияҳои $y=x^2$; $y=x^2\pm4$; $y=3x^2\pm2$; $y=\cos x$; $y=7x^4$; $y=|x|$ ва ғайра мисолҳои функсияи ҷуфт шуда метавонанд.

Мисоли 1. Функсияи $f(x)=x^2+4$ функсияи ҷуфт мебошад, чунки баробарии $f(-x)=(-x)^2+4=x^2+4=f(x)$ ичро мегардад.

б) *Агар барои ҳамаи қиматҳои* $x\in D$ *баробарии* $f(-x)=-f(x)$ *ичро шавад, он гоҳ* $f(x)$ *- ро функсияи тоқ меноманд.*

Масалан, функсияҳои $y=x^3$; $y=x^3\pm x$; $y=\sin x$ ва ғайра мисолҳои функсияи тоқ мебошанд.

Мисоли 2. Функсияи $f(x)=x^3+x$ функсияи тоқ мебошад, чунки баробарии

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-f(x)$$

ичро мегардад.

в) Функсияҳои ҷуфт ва тоқ дар навбати худ хосиятҳои зеринро доранд:

1. *Суммаи ду ё якчанд функсияҳои ҷуфт, боз функсияи ҷуфт мебошад.*
2. *Сумма ва фарқи функсияҳои тоқ, боз функсияи тоқ мебошад.*
3. *Хосили зарби функсияҳои ҷуфт, боз функсияи ҷуфт мебошад.*

4. *Хосили зарб ва тақсими функсияҳои тоқ, функсияи ҷуфтро медиҳад.*

5. *Функсияи дилхоҳро чун суммаи функсияҳои ҷуфт ва тоқ ифода кардан мумкин аст.*

Бояд дар хотир дошт, ки на ҳар як функсия ҳатман ҷуфт ё ки тоқ аст. Функсияҳое ҳам ҳастанд, ки на ҷуфт ва на тоқ мебошанд.

Мисоли 3. Функсияи $f(x)=x^3+x^2$ дар соҳаи муайяниаш $(-\infty;+\infty)$ на ҷуфт ва на тоқ мебошад, чунки

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)^2=-x^3+x^2$$

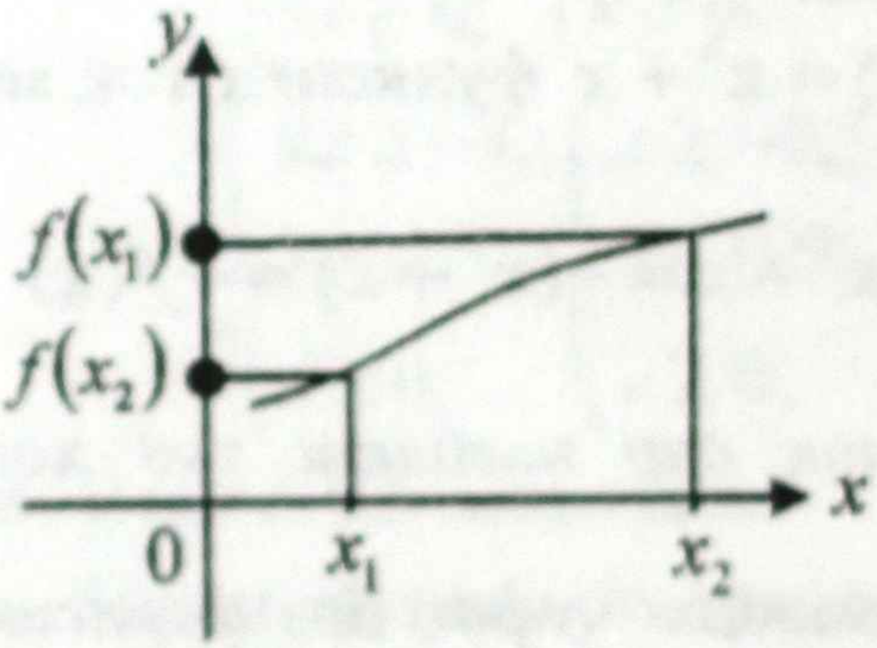
буда, баробариҳои $f(-x)=-f(x)$ ва $f(-x)=f(x)$ ичро намешаванд.

2. Функсияҳои монотонӣ

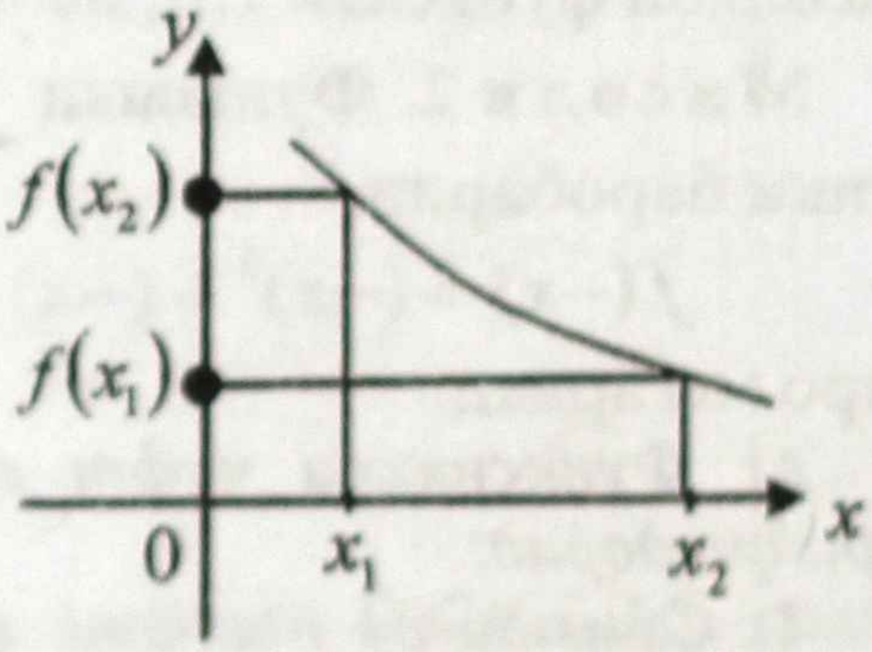
Фарз мекунем, ки функсияи дилхоҳи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;\ b]$ дода шуда бошад.

а) Функсияи $y=f(x)$-и дар порчаи $a\le x\le b$ муайян буда, афзуншаванда (камшаванда) номида мешавад, агар барои $\forall x_1x_2\in[a;\ b]$ дар холати $x_1<x_2$ будан, нобаробарии $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ ичро шавад (Расми 1).

б) Функсияи $y=f(x)$-и дар порчаи $a\le x\le b$ муайян буда, камшаванда (афзуншаванда) номида мешавад, агар барои $\forall x_1x_2\in[a;\ b]$ дар холати $x_1<x_2$ будан, нобаробарии $f(x_1)>f(x_2)$ $(f(x_1)\le f(x_2))$ ичро шавад (Расми 2).



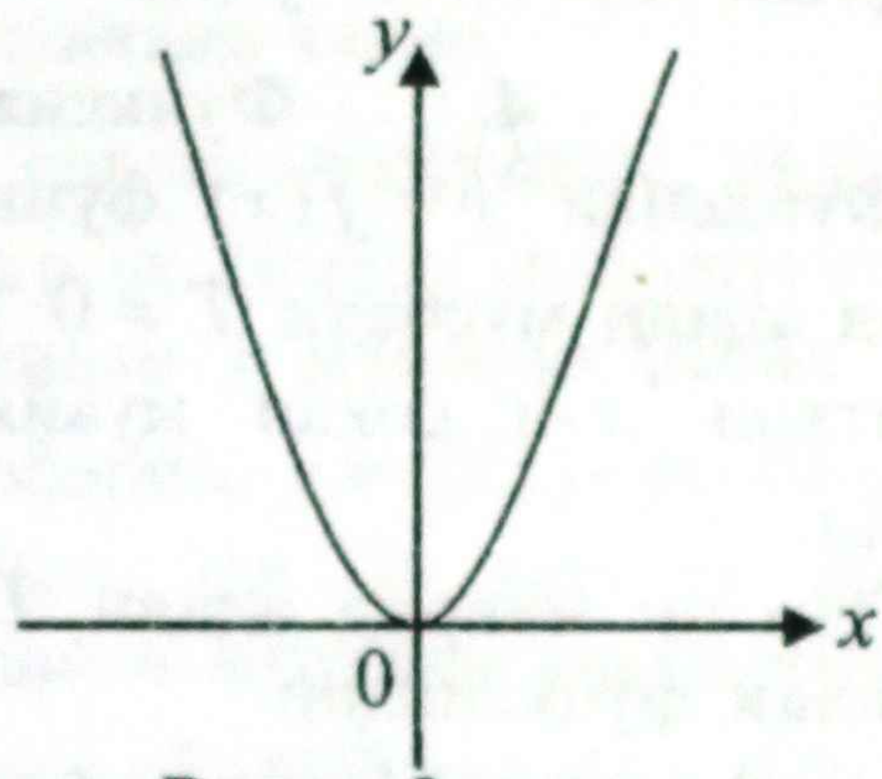
Расми 1



Расми 2

в) Функсияеро, ки дар порчаи $[a;\ b]$ фақат меафзояд ё фақат кам мешавад, функсияи дар ҳамин порча монотонӣ меноманд.

Масалан, функсияи $y = x^2$ дар соҳаи муайяниаш $(-\infty; +\infty)$ монотонӣ мебошад, чунки вай дар ниминтервали $[0; +\infty)$ афзуншаванда ва дар ниминтервали $(-\infty; 0]$ камшаванда мебошад (Расми 3).



Расми 3

Дар ин чо мо функсияи $y = f(x)$- ро дар порчаи $[a; b]$ дида баромадем. Порчаи $a \le x \le b$ ё ки $[a; b]$- ро интервали сарбаст ҳам меноманд, чунки ба ин гуна интервал нуқтаҳои канории $x = a$ ва $x = b$ дохил мешаванд. Лекин дар баъзе мавридҳо функсияро дар интервали сарбастаи $a \le x \le b$ дида баромадан хуб нест. **Масалан**, функсияи $y = tgx$ дар интервали сарбастаи $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ монотонӣ меафзояд гуфтан хатост, чунки ин функсия ҳангоми $x = -\frac{\pi}{2}$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ умуман муайян карда нашудааст. Бинобар он ба ҷои интервали сарбастаи $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ дар бораи интервали кушоди $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ сухан рондан лозим аст, чунки ин интервал нуқтаҳои канории $x = -\frac{\pi}{2}$ ва $x = \frac{\pi}{2}$ надорад.

3. Порчаи аломаташ доимӣ. Нолҳои (решаҳои) функсия

а) Порчаеро, ки дар он функсия аломаташро доимӣ нигоҳ медорад, порчаи аломаташ доимӣ меноманд.

Масалан, функсияи $f(x) = x^2 + 2$ дар ҳамаи соҳаи муайяниаш $(-\infty; +\infty)$ мусбат мебошад, аммо функсияи $f(x) = x^3$ барои қиматҳои $x > 0$ мусбат ва барои қиматҳои $x < 0$ манфӣ мебошад, бинобар он порчаи аломаташ доимӣ интервалҳои $(-\infty; 0]$ ва $[0; +\infty)$ мебошанд.

б) Он қиматҳои аргумент, ки барояшон қимати функсия ба нол табдил мегардад, нолҳои (решаҳои) функсия номида мешаванд.

Масалан, нолҳои функсияи $f(x)=x^2$, $x=0$ мебошад, чунки дар ҳолати $x=0$ будан, қимати функсия ҳам ба нол мубаддал мегардад. Функсияи $f(x)=x^2+4$ решаҳо (нолҳо) надорад.

4. Функсияҳои даврӣ

Функсияи $y=f(x)$ функсияи даври номида мешавад, агар чунин адади мусбати $T\neq 0$ мавҷуд бошад, ки барои ҳама гуна қиматҳои x-и соҳаи муайянии ин функсия $f(x+T)=f(x)$ бошад.

Дар ин маврид адади T даврӣ функсия номида мешавад. **Масалан**, функсияҳои

$$f(x)=\sin x;\ \ f(x)=\cos x;\quad f(x)=tgx;\quad f(x)=ctgx$$

функсияҳои даврӣ буда, даври хурдтаринашон барои функсияҳои $f(x)=\sin x$ ва $f(x)=\cos x$ адади $T=2\pi$, барои функсияҳои $f(x)=tgx$ ва $f(x)=ctgx$ бошад, адади $T=\pi$ мебошад. Агар T даври функсияи $f(x)$ бошад, он гоҳ 2π, 3π; 4π; … ва ғайра ҳам даврҳои ин функсия мебошанд, чунки

$$f(x+2T)=f(x+T+T)=f\big((x+T)+T\big)=f(x+T)=f(x),$$
$$f(x+3T)=f(x+2T+T)=f(x+2T)=f(x),$$

ва ғайра. Ба ғайр аз ин ҳар яке аз ададҳои $-T;-2T;-3T;\ldots$ ва ғайра ҳам даврӣ функсияи $y=f(x)$ шуда метавонанд, чунки

$$f(x-T)=f\big((x-T)+T\big)=f(x),$$
$$f(x-2T)=f\big((x-2T)+2T\big)=f(x),$$

ва ғайра.

Пас, аз баробарии $f(x+T)=f(x)$ чунин хулоса мебарояд, ки ҳамаи қиматҳои функсияи $y=f(x)$ бо даври T даври такрор мешудаанд. Инак, агар T даври функсияи $f(x)$ бошад, он гоҳ барои ҳар гуна $n\in N$ адади nT ҳам даври функсияи $f(x)$ мебошад, яъне $f(x+nT)=f(x)$ аст. Бинобар ин гуфтан мумкин аст, ки ҳар як функсияи даврӣ маҷмуи беохири даврҳоро дорад.

Масалан:

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x; \quad \cos(x\pm 2\pi)=\cos x;$$
$$\sin(x\pm 4\pi)=\sin x; \quad \cos(x\pm 4\pi)=\cos x;$$
$$tg(x\pm\pi)=tgx; \quad ctg(x\pm\pi)=ctgx;$$
$$tg(x\pm 2\pi)=tgx; \quad ctg(x\pm 2\pi)=ctgx\ .$$

§6. Функсияҳои чаппа

Агар функсияи $y=f(x)$ дар соҳаи муайяниаш додашуда бошад, он гоҳ маълум аст, ки ба ҳар як қимати имконпазири x қимати комилан муайяни тағйирёбандаи y мувофиқ меояд.

Аммо дар баъзе мавридҳо баробарии $y=f(x)$- ро ба таври дигар дида баромадан мумкин аст, ки ба ҳар як қимати имконпазири тағйирёбандаи y қимати муайяни тағйирёбандаи x мувофиқ меояд. Ин дар натичаи баробарии $y=f(x)$- ро нисбат ба x ҳал кардан ҳосил мешавад. Инак, агар баробарии $y=f(x)$- ро нисбат ба x ҳал кунем, дар натича функсияи аргументаш y-ро ҳосил мекунем: $x=f^{-1}(y)$. Дар ин ҷо ба ҳар як қимати имконпазири бузургии y якто ва фақат якто қимати бузургии x- ро пайдо кардан мумкин аст.

Дар ин ҳолат барои ин функсия тағйирёбандаи y- ро аргумент ва тағйирёбандаи x - ро функсия меноманд. Ҳамин тавр функсияи муайяни $x=f^{-1}(y)$ нисбат ба функсияи $y=f(x)$ функсияи чаппа номида мешавад. Азбаски дар математика одат шудааст, ки ҳарфи x- ро барои ишорати аргумент ва ҳарфи y- ро барои ишорати функсия истифода бурда мешавад, бинобар он функсияи чаппаи $x=\varphi^{-1}(y)$- ро ҳам дар намуди зерин навиштан мумкин аст: $y=\varphi(x)$.

Мисоли 1. Барои функсияи $y=2x-1$ функсияи чаппаро ёбед. Соҳаи муайянӣ ва соҳаи тағйирёбии функсияи додашуда ва функсияи ба он чаппаро нишон диҳед.

Ҳал. а) Функсияи $y=2x-1$ дар маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ муайян мебошад. Пас, $D(y)=R=(-\infty;+\infty)$.

б) Азбаски ба ҳар як қимати $x\in R$ як қимати муайяни y мувофиқ меояд, пас $E(y)=R=(-\infty;+\infty)$ аст.

в) Функсияи $y=2x-1$- ро нисбат ба x ҳал карда функсияи ба он чаппаро ҳосил мекунем:

$$y=2x-1;\ 2x=y+1;\ x=\frac{y+1}{2}.$$

г) Соҳаи муайянии ин функсия $D(x)=R=(-\infty;+\infty)$ иборат буда, соҳаи тағйирёбиаш бошад, ба $E(x)=R=(-\infty;+\infty)$ баробар мебошад.

Аз мисоли муоина карда шуда хулоса мебарояд, ки соҳаи тағйирёбии функсияи $y=2x-1$ барои функсияи чаппа $x=\frac{y+1}{2}$ соҳаи муайянӣ ва соҳаи муайянии функсияи $y=2x-1$ барои функсияи чаппа $x=\frac{y+1}{2}$ соҳаи тағйирёбӣ мешаванд.

Мисоли 2. Функсияи ба $y=2^x$ чаппаро ёбед. Соҳаи муайянӣ ва соҳаи тағйирёбии функсияи додашуда ва функсияи ба он чаппаро нишон диҳед.

Ҳал. а) Функсияи $y=2^x$ дар маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ муайян мебошад. Пас, $D(y)=R$.

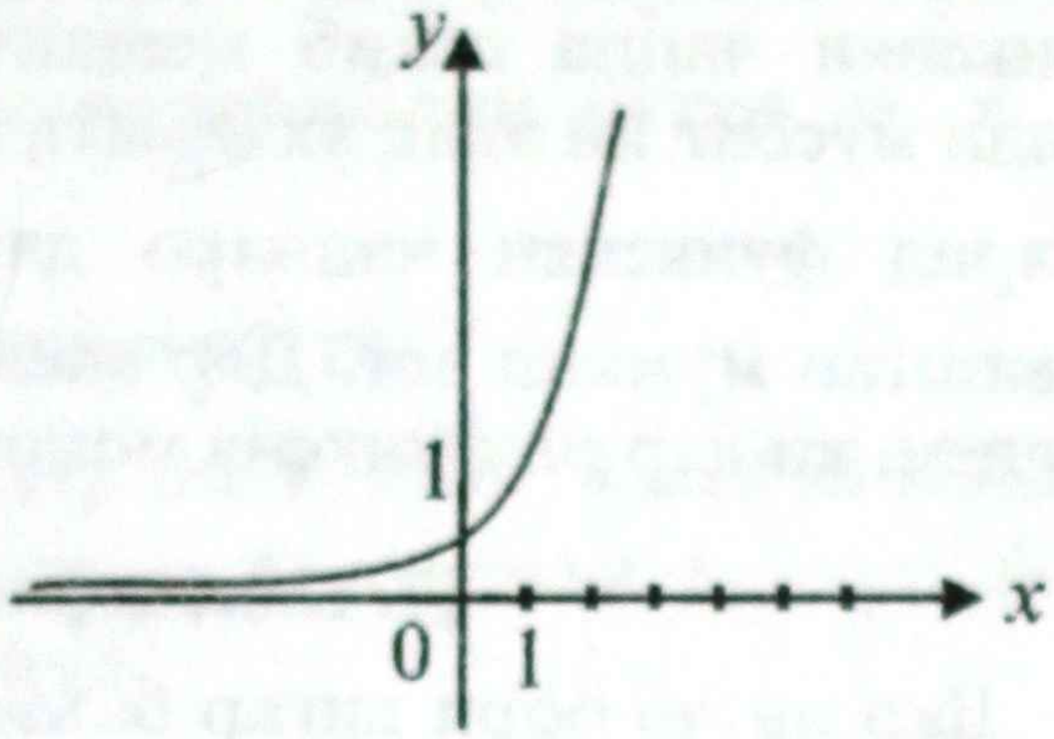
б) Азбаски дар функсияи додашуда ба ҳар як қимати $x\in R$ як қимати муайяни y мувофиқ меояд, пас соҳаи тағйирёбиаш маҷмуи ҳамаи ададҳои мусбат мебошад: $E(y)=(0;+\infty)$.

в) Функсияи $y=2^x$- ро нисбат ба x ҳал карда функсияи ба он чаппаи $x=\log_2 y$- ро ҳосил мекунем. Бинобар ин функсияи $x=\log_2 y$ нисбат ба $y=2^x$ функсияи чаппа аст.

г) Барои функсияи чаппаи $\log_2 y$ бошад, баръакс маҷмуи ҳамаи ададҳои мусбат ($D(x)=(0;+\infty)$) соҳаи муайянӣ ва маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи тағйирёбии он мебошад ($E(x)=R=(-\infty;+\infty)$).

г) Функсияи $y=2^x$ дар маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ: $D(y)=R$ афзоянда мебошад, аммо функсияи ба он чаппа $x=\log_2 y$ бошад, дар маҷмуи ҳамаи ададҳои мусбат $D(x)=(0;+\infty)$ афзоянда мешавад (Расми 4).

Дар ин мисолҳои муоинакардашуда мо мафҳуми монотонӣ будани функсияи чаппаро истифода бурдем, ки вай аз математикаи курси мактабӣ ба мо маълум аст:



Расми 4

- агар функсияи $y = f(x)$ дар интервали сарбастаи $[a; b]$ монотонӣ афзояд (ё кам шавад), пас ҳангоми $a \le x \le b$ будан функсияи ба он чаппа вуҷуд дорад;
- агар функсияи $y = f(x)$, $x \in R$ дар порчаи E монотонӣ ва $E(y) = Y$ бошад, пас ҳангоми $y \in Y$ будан функсияи ба он чаппа $x = f^{-1}(y)$ вуҷуд дорад, ки он ҳам дар порчаи Y монотонӣ мебошад.

Аз монотонӣ будани функсияи $y = f(x)$ бармеояд, ки ҳангоми $x_1 \neq x_2$ будан, $f(x_1) \neq f(x_2)$ аст.

Аз мисолҳои дар боло муоинакардашуда саволе бармеояд, ки оё барои ҳар гуна функсияи $y = f(x)$ функсияи чаппаи $x = f^{-1}(y)$ вуҷуд дорад? Барои ба ин савол ҷавоб додан мисоли зеринро дида мебароем.

Мисоли 3. Функсияи $y = x^2$ дар ҳамаи нуқтаҳои хати рости ададӣ, яъне дар R муайян аст. Агар функсияи $y = x^2$-ро нисбат ба x ҳал кунем, он гоҳ ду функсияи ба функсияи додашуда чаппаро ҳосил мекунем: $x = \sqrt{y}$ ва $x = -\sqrt{y}$. Чӣ хеле ки маълум аст, ба ҳар як қимати $y = y_1$ ду қимати x мувофиқ меояд: $x = \sqrt{y_1}$ ва $x = -\sqrt{y_1}$. **Масалан**, ба қимати $y = 1$ қиматҳои $x = 1$ ва $x = -1$, ба қимати $y = 2$ қиматҳои $x = \sqrt{2}$ ва $x = -\sqrt{2}$, ба қимати $y = 3$ қиматҳои $x = \sqrt{3}$ ва $x = -\sqrt{3}$, ба қимати $y = 4$ қиматҳои $x = 2$ ва $x = -2$ мувофиқ меояд ва ғайра. Бинобар ин, агар функсияи $y = x^2$-ро дар маҷмуи R, яъне дар ҳамаи нуқтаҳои хати рости ададӣ дида бароем, он гоҳ ин функсия ба

функсияи чаппа доро намешавад. Лекин, агар ин функсияро фақат барои қиматҳои мусбати x дида бароем, он гоҳ вай ба функсияи чаппа соҳиб мешавад. Мувофиқи қимати квадрати адади мусбат ин адад якқимата муқаррар карда мешавад. Дар ин маврид функсияи чаппаро дар намуди $x=\sqrt{y}$ ва $x=-\sqrt{y}$ навиштан мумкин аст. Дар мисоли додашуда мо интервале ҷудо кардем, ки дар он функсия монотонӣ мебошад.

§7. Классификатсияи функсияҳо

Дар ин ҷо бори дигар баъзе синфи функсияҳоро хотиррасон мекунем, ки онҳо классификатсияи функсияҳоро муқаррар менамояд.

1. Функсияи ратсионалии бутун

Функсияи нисбат ба аргумент x бутун ифода шударо функсияи ратсионалии бутун (ё ки бисёрузва) меноманд.

Маслан, бисёрузваи

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

функсияи ратсионалии бутун мебошад. Дар ин ҷо, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ададҳои ҳақиқии дилхоҳ мебошанд. Соҳаи муайянии ин гуна функсия маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

2. Функсияи ратсионалии касрӣ

Агар $P(x)$ ва $Q(x)$ функсияҳои ратсионалии бутун, яъне

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

$$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$$

бошанд, он гоҳ нисбати ин ду функсияро функсияи ратсионалии касрӣ меноманд.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m},\ (\forall x: Q(x)\neq 0).$$

Ин функсия барои ҳамаи қиматҳои x, ғайр аз он қиматҳое, ки дар онҳо махраҷ ба нол баробар мешавад, муайян аст.

3. Функсияи алгебравӣ

Функсияи алгебравии x гуфта, тағйирёбандаи y - ро меноманд, агар он муодилаи

$$A_0(x)+A_1(x)y+A_2(x)y^2+\ldots+A_n(x)y^n=0$$

- ро қаноат кунонад. Дар ин ҷо, $n \in N$, $A_0(x)$, $A_1(x)y$, $A_2(x)y^2$, ..., $A_n(x)y^n$ функсияҳои ратсионалии бутун аз x ва $A_0(x) \neq 0$ мебошанд.

§8. Функсияи хаттӣ

Функсияи $y = kx + b$ - ро, ки дар он k ва b ададҳои ҳақиқӣ мебошанд, дида мебароем. Ин функсия бисёрузваи дараҷаи якум буда, онро функсияи хаттӣ меноманд.

Масалан, функсияҳои

$$y = 2x + 1;\ y = -3x + 4;\ y = 4x - \frac{5}{6};\ y = -\frac{3}{4} - x$$

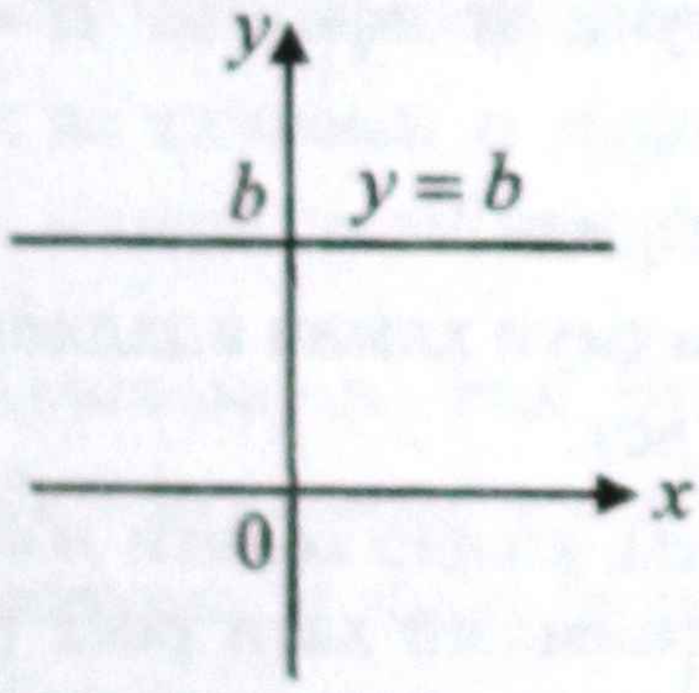
ва ғайраҳо мисолҳои функсияи хаттӣ шуда метавонанд.

Функсияи хаттӣ дорои хосиятҳои зерин мебошад:

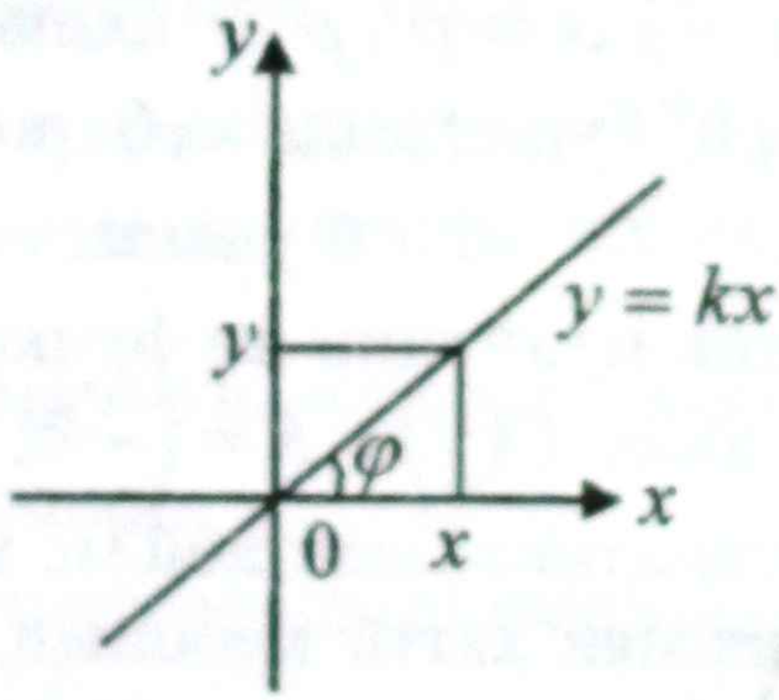
а) Соҳаи муайянии функсия маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ мебошад: $D(y) = R$. Соҳаи тағйирёбии функсия бошад, ба $E(y) = R = (-\infty; +\infty)$ баробар аст.

б) Графики функсия хати рост мебошад. Дар ҳолати $k > 0$ будан функсия афзуншаванда ва дар ҳолати $k < 0$ будан, камшаванда мебошад.

в) Ҳангоми $k = 0$ ва $b \neq 0$ будан, функсия $y = b > 0$ мешавад, ки графикаш дар расми 5 оварда шудааст.



Расми 5

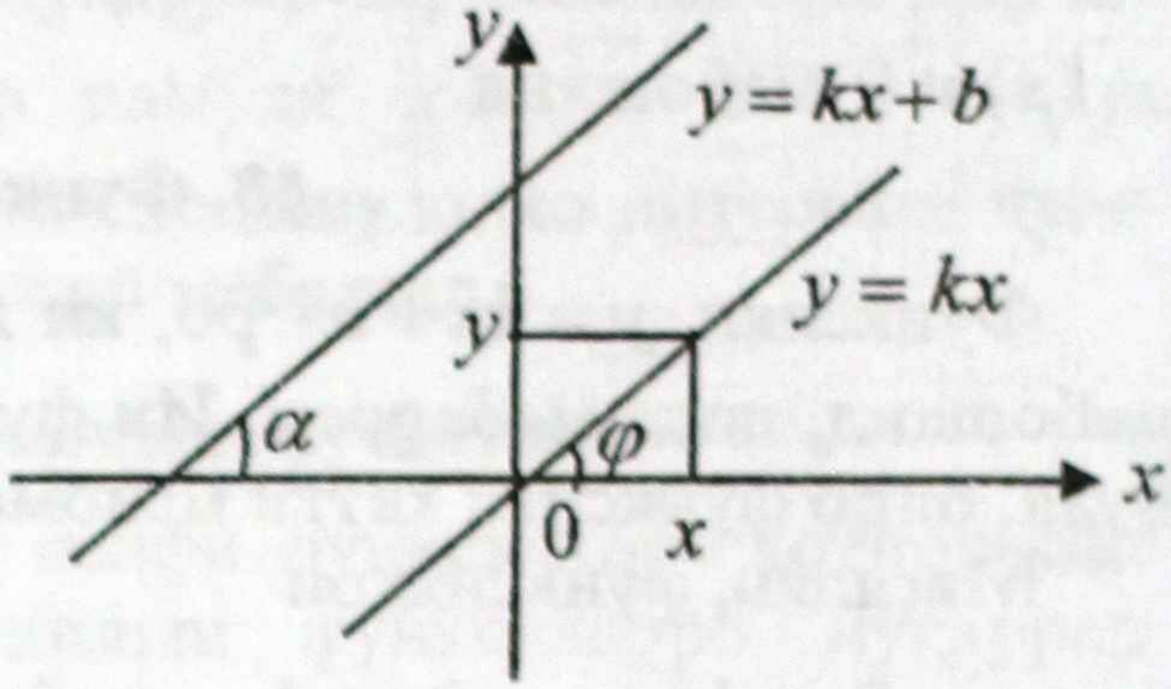


Расми 6

г) Ҳангоми $k \neq 0$ ва $b = 0$ будан, функсия намуди $y = kx$ - ро мегирад, ки графикаш хати рост буда, аз ибтидои координатаҳо гузашта, бо тири $0x$ кунҷи φ - ро ташкил мекунад. Дар ин ҷо, $tg\varphi = k$ аст, ки графикаш дар расми 6 оварда шудааст.

г) Агар $k>0$ ва $b\neq 0$ бошад, он гоҳ графики функсияи $y=kx+b$ ба графики хати рости $y=kx$ параллел мебошад.

Графики функсияи $y=kx+b$ дар ҳолати $b>0$ будан, ба b воҳид боло ва дар ҳолати $b<0$ будан, ба b воҳид поён ҷойгир мешавад (Расми 7).



Расми 7

Бузургии кунҷи моили графики функсияи хаттӣ ба тири x аз коэффитсиенти k вобаста аст. Агар $k>0$, яъне ададӣ мусбат бошад, ин кунҷ тез аст. Агар $k<0$, яъне ададӣ манфӣ бошад, кунҷ кунд аст. Бинобар он дар ин маврид ададӣ k - ро коэффитсиенти кунҷии хати рост меноманд.

§9. Функсияи дараҷагӣ

Функсияи $y=x^{\alpha}$ - ро функсияи дараҷагӣ меноманд. Дар ин ҷо, α - ададӣ дилхоҳи ҳақиқӣ мебошад. Ҳангоми $\alpha=0$ будан, ададӣ доимии $y=x^0=1$ ҳосил мешавад, ки графикаш хати рост аст.

Дар ин ҷо, функсияи $y=x^{\alpha}$ - ро ҳангоми $\alpha=n\,(n\in N)$, $\alpha=p$ (p - ададӣ бутуни манфӣ) ва $\alpha=r$ (r - ададӣ касрӣ) будан дида мебароем.

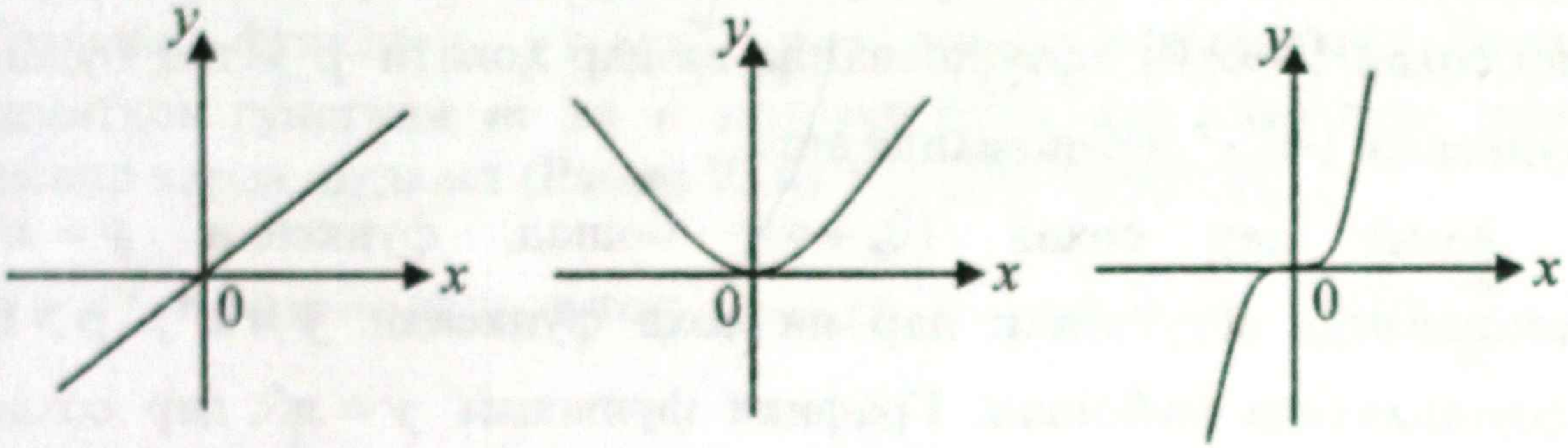
I. Функсияи $y=x^n$, $n\in N$.

а) Соҳаи муайянии ин функсия маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад, яъне $D(y)=R=(-\infty;+\infty)$ аст.

Аз математикаи мактабӣ мо медонем, ки дар ҳолати $n=1$ будан, $y=x$ функсияи хаттӣ мебошад, ки графикаш хати рост (Расми 8) аст, дар ҳолати $n=2$ будан, $y=x^2$ парабола аст, ки графикаш дар расми 9 ва дар ҳолати $n=3$ будан, $y=x^3$ параболаи кубӣ мебошад, ки графикаш дар расми 10 оварда шудааст. Хосиятҳои ин се функсияро дида намебароем, чунки бо он шинос ҳастем.

Дар ин ҷо, хосиятҳои функсияи $y=x^n$ - ро ҳангоми қиматҳои дилхоҳ ва намудҳои графики онро муайян мекунем.

а) Агар $x=0$ бошад, он гоҳ $y=0$ аст. Бинобар ин, графики функсияи $y=x^n$ аз ибтидои координатаҳо мегузарад.



Расми 8 Расми 9 Расми 10

б) Агар $x\neq 0$ ва n адади ҷуфт бошад, он гоҳ функсияи $y=x^n$ функсияи ҷуфт мебошад: $f(-x)=(-x)^n=x^n=f(x)$. Пас, графики функсияи $y=x^n$ ҳангоми $x\neq 0$ ва n адади ҷуфт будан, тири симметрия дорад, ки он тири Oy мебошад.

в) Агар $x\neq 0$ ва n адади тоқ бошад, он гоҳ функсияи $y=x^n$ функсияи тоқ мебошад: $f(-x)=(-x)^n=-x^n=-f(x)$. Пас, графики функсияи $y=x^n$, ҳангоми n тоқ будан маркази симметрия дорад, ки он ибтидои координатаҳо мебошад.

г) Ҳангоми n тоқ будан, функсияи $y=x^n$ афзуншаванда мебошад ва ҳангоми n ҷуфт будан, функсияи $y=x^n$ дар маҷмуи ададҳои манфӣ кам мешавад ва дар маҷмуи ададҳои мусбат меафзояд.

ғ) Ҳангоми n тоқ будан маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи тағйирёбии функсияи $y=x^n$ мебошад.

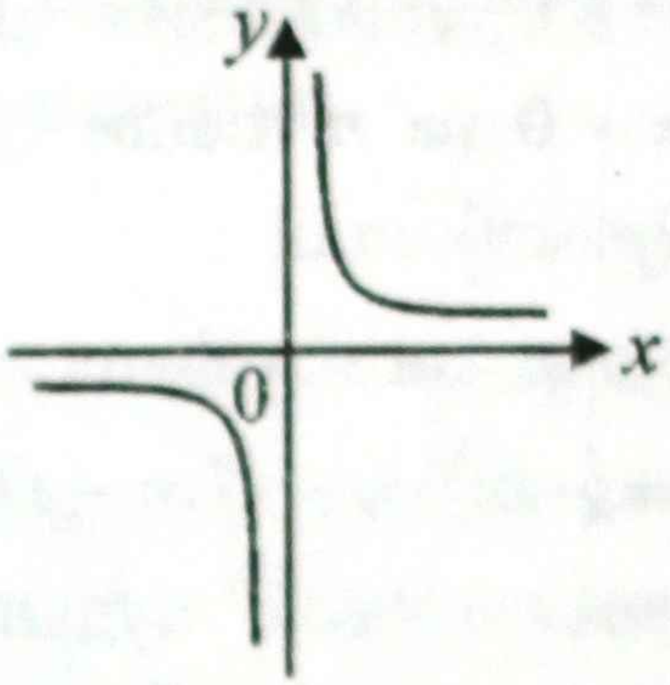
д) Ҳангоми n ҷуфт будан маҷмуи ададҳои ғайриманфӣ соҳаи тағйирёбии функсияи $y=x^n$ мебошад.

2. Функсияи $y=x^p$ (p - адади бутуни манфӣ)

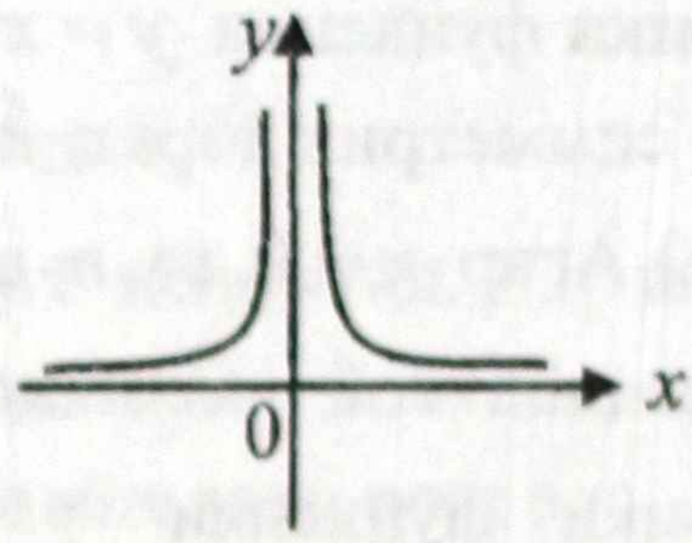
Агар p - адади бутуни манфӣ бошад, он гоҳ функсияро дар намуди $y=x^{-p}=\frac{1}{x^p}$, $x\neq 0$ менависем. Соҳаи муайянии ин функсия фосилаҳои $(-\infty;0)$ ва $(0;+\infty)$ иборат мебошад. Дар ин

чо, агар p - адади чуфт бошад, он гоҳ функсияи $y = x^{-p}$ ҳам чуфт мебошад ва агар p - адади тоқ бошад, он гоҳ функсияи $y = x^{p}$, функсияи тоқ аст. Функсияи $y = x^{p}$ дар ҳолати p - чуфт будан, дар соҳаи $(-\infty; 0)$ афзуншаванда ва дар ҳолати p - тоқ будан, функсияи $y = x^{p}$ камшаванда аст.

Аммо дар соҳаи $(0; +\infty)$ бошад, функсияи $y = x^{p}$ камшаванда аст, чунки дар ин соҳа функсияи $y = x^{p}$, $p > 0$ афзуншаванда мебошад. Графики функсияи $y = x^{p}$ дар соҳаи додашудааш барои қиматҳои муайяни $p = -1$ ва $p = -2$ намудҳои зеринро дорад, ки тасвири он дар расмҳои 11 ва 12 оварда шудааст.



Расми 11



Расми 12

3. Функсияи $y = x^{r}$ (r - адади касрӣ)

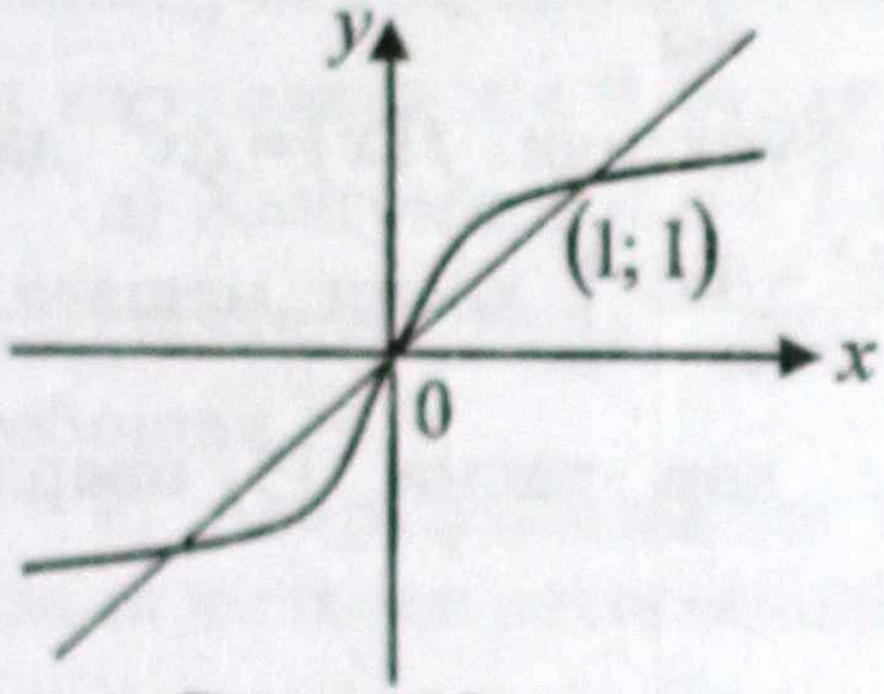
Агар r - адади касри ратсионалӣ, яъне $r = \frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$ бошад, он гоҳ функсияи $y = x^{r}$ - ро дар намуди $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^{m}}$ навиштан мумкин аст.

Соҳаи муайянии ин функсия дар ҳолати n тоқ будан, аз фосилаи $(-\infty; +\infty)$ ва дар ҳолати n чуфт будан, аз нимсегменти $[0; +\infty)$ иборат аст. Агар дар функсияи додашуда m ва n тоқ бошад, он гоҳ функсияи $y = \sqrt[n]{x^{m}}$ тоқ ва агар n тоқу m чуфт бошад, он гоҳ функсия чуфт аст. Функсияи $y = \sqrt[n]{x^{m}}$ дар соҳаи $[0; +\infty)$ афзуншаванда мебошад. Аммо ин функсия дар ҳолати n

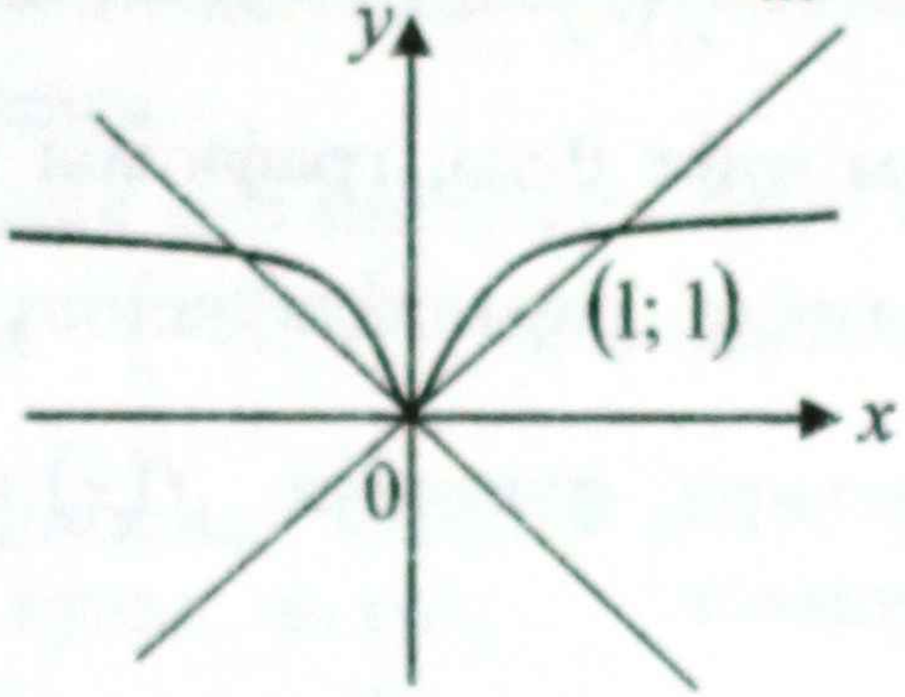
тоқ ва m чуфт будан, дар соҳаи $(-\infty; 0)$ камшаванда аст ва дар ҳолати m, n - тоқ будан, функсия афзуншаванда мебошад.

Графики функсияи $y=\sqrt[n]{x^m}$ дар соҳаи додашудааш барои қиматҳои гуногуни m ва n гуногун буда, дар намудҳои зерин тасвир карда шудааст (Расми 13 ва 14). Дар мавриди:

$y=x^{\frac{m}{n}}$, n *ва* m – ададҳои тоқ $y=x^{\frac{m}{n}}$, n – тоқ ва m – чуфт, $\frac{n}{m}<1$



Расми 13



Расми 14

§10. Функсияи $f(x)=ax^2+bx+c$

Пеш аз ҳама функсияи $f(x)=ax^2+bx+c$ - ро дар асоси ба зарбкунандаҳо чудо кардани сеузваи квадратӣ дар намуди зерин менависем:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

а) Соҳаи муайянии ин функсия маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ мебошад: $D(f)=R$.

б) Ҳангоми $a>0$ будан, функсия дар фосилаи $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ монотонӣ камшаванда буда, дар фосилаи $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ монотонӣ афзоянда мебошад.

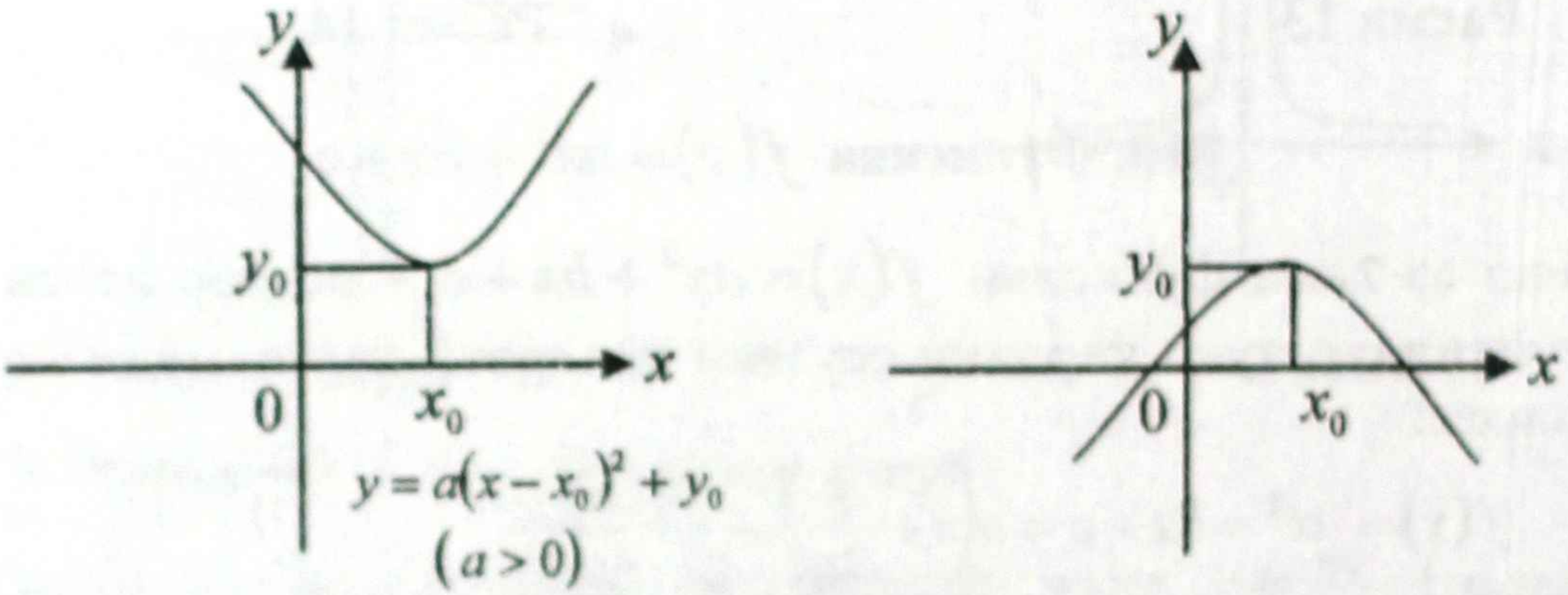
в) Ҳангоми $a<0$ будан, функсия дар фосилаи $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ монотон афзоянда буда, дар фосилаи $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ монотонӣ камшаванда мебошад.

г) Ҳангоми $a>0$ будан функсия дар нуқтаи $x=-\frac{b}{2a}$ дорои қимати хурдтарин $\frac{\left(b^2-4ac\right)}{4a}$ буда, дар ҳолати $a<0$ будан, дар нуқтаи $x=-\frac{b}{2a}$ дорои қимати калонтарин $\frac{\left(b^2-4ac\right)}{4a}$ мебошад.

г) Азбаски функсияи $f(x)=ax^2$ ҷуфт ва графикаш нисбат ба тири ордината симметрӣ аст, пас функсияи

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ҳам ҷуфт буда, графикаш аз графики функсияи $f(x)=ax^2$ дар натиҷаи параллелкӯчонии $\vec{r}\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ ҳосил мешавад. Тасвири функсияи $f(x)=ax^2+bx+c$ дар расми 15 оварда шудааст.



Расми 15

§11. Функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он

Функсияи $f(x)=a^x$- и $\left(0<a\neq 1\right)$ дар маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқии $\left(-\infty;+\infty\right)$ муайян бударо, функсияи нишондиҳандагӣ меноманд.

Функсияи нишондиҳандагӣ дорои хосиятҳои зерин мебошад:

а) Агар маҷмуи $D(f)=R=\left(-\infty;+\infty\right)$ соҳаи муайянии функсия бошад, он гоҳ соҳаи тағйирёбии функсия $E(f)=(0;+\infty)$ мебошад.

б) Функсияи нишондиҳандагӣ фақат қиматҳои мусбат қабул мекунад.

в) Агар $x=0$ ва a чӣ хеле, ки набошад, $a^x=1$ аст, яъне $y=a^0=1$ аст.

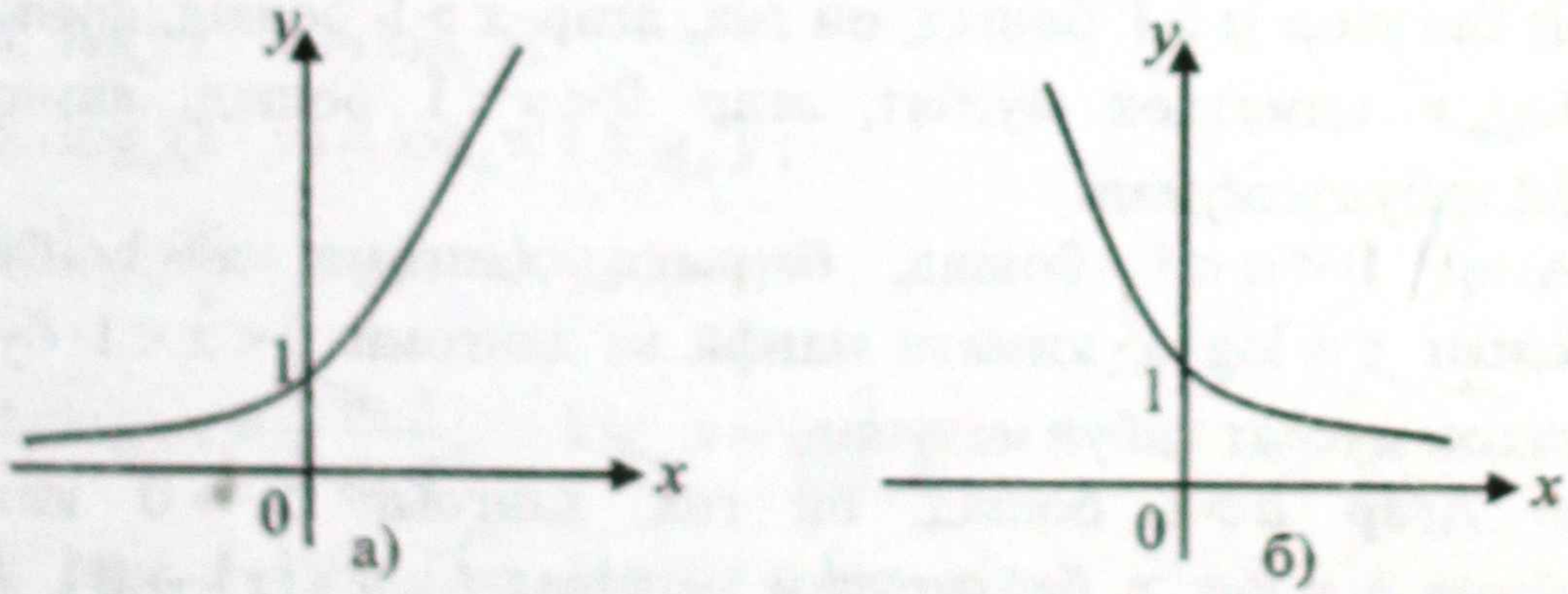
г) Агар $a>1$ бошад, он гоҳ функсияи нишондиҳандагии $f(x)=a^x$ монотонӣ меафзояд ва агар $a<1$ бошад, он гоҳ ин фуниксия монотонӣ камшаванда мебошад.

г) Агар $a>1$ бошад, он гоҳ дар ҳолати $x>0$ будан, $a^x>1$ мешавад ва дар ҳолати $x<0$ будан $a^x<1$ мешавад. Агар $a<1$ бошад, он гоҳ баръакс, дар ҳолати $x>0$ будан, $a^x<1$ мешавад ва дар ҳолати $x<0$ будан $a^x>1$ мешавад.

д) Ҳангоми $0<a<1$ будан, функсия дар интервали $(0;+\infty)$ камшаванда буда, дар интервали $(-\infty;0)$ афзуншаванда мебошад.

е) Агар функсия аз соҳаи додашудааш қимати $x=r$ (r - адади дилхоҳи ратсионалӣ)- ро қабул кунад, он гоҳ:

- Ҳангоми $r\in N$ будан, $a^r=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{r-маротиба}$ мебошад;
- Ҳангоми $m, n\in N$ ва $r=\frac{m}{n}$ будан, $a^r=\sqrt[n]{a^m}$ мебошад;
- Ҳангоми r - адади манфӣ будан, $a^r=\frac{1}{a^{-r}}$, $a\neq 0$ мебошад;
- Графики функсияи $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ дар соҳаи муайяниаш $D(f)=(-\infty;+\infty)$ барои қиматҳои $a=2$ ва $a=\frac{1}{2}$ дар расмҳои 16 а) ва б) оварда шудааст.



Расми 16

§12. Функсияи логарифмӣ ва хосиятҳои он

Функсияи намуди $f(x)=\log_a x$ функсияи логарифмӣ номида мешавад, ки дар ин ҷо, a ягон адади муайяни мусбати аз 1 фарққунанда аст, яъне $(0<a\neq 1)$.

Формулаҳои $y=\log_a x$ ва $a^y=x$ ҳаммаъно мебошанд. Аз ин ҷо, вобастагии байни функсияи логарифмӣ $a^y=x$ ва функсияи нишондиҳандагии $y=a^x$ - ро нишон додан осон аст. Чӣ хеле, ки дар §6 мо дидем, функсияи логарифмии $y=\log_a x$ барои функсияи нишондиҳандагии $y=a^x$ функсияи чаппа мебошад.

Функсияи логарифмӣ доро̀и хосиятҳои зерин мебошад:

а) Соҳаи муайянии функсияи логарифмӣ маҷмуи ҳамаи ададҳои мусбат мебошад.

б) Маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ соҳаи тағйирёбии функсияи логарифмӣ мебошад: $E(f)=R=(-\infty;+\infty)$.

в) Агар $a>1$ бошад, он гоҳ функсияи логарифмии $y=\log_a x$ монотонӣ меафзояд ва агар $0<a\neq 1$ бошад, он гоҳ функсияи логарифмии $y=\log_a x$ монотонӣ камшаванда аст.

г) Агар логарифми ду адад аз рӯи ҳамон як асоси a $(0<a\neq 1)$ байни худ баробар бошанд, он гоҳ худи ададҳо низ баробаранд:

$$\log_a x=\log_a y\Rightarrow x=y\,(x>0;\ \ y>0).$$

ғ) Ҳангоми $x=1$ будан, қимати функсияи логарифмии $y=\log_a x$ ба нол баробар мешавад: $\log_a 1=0$.

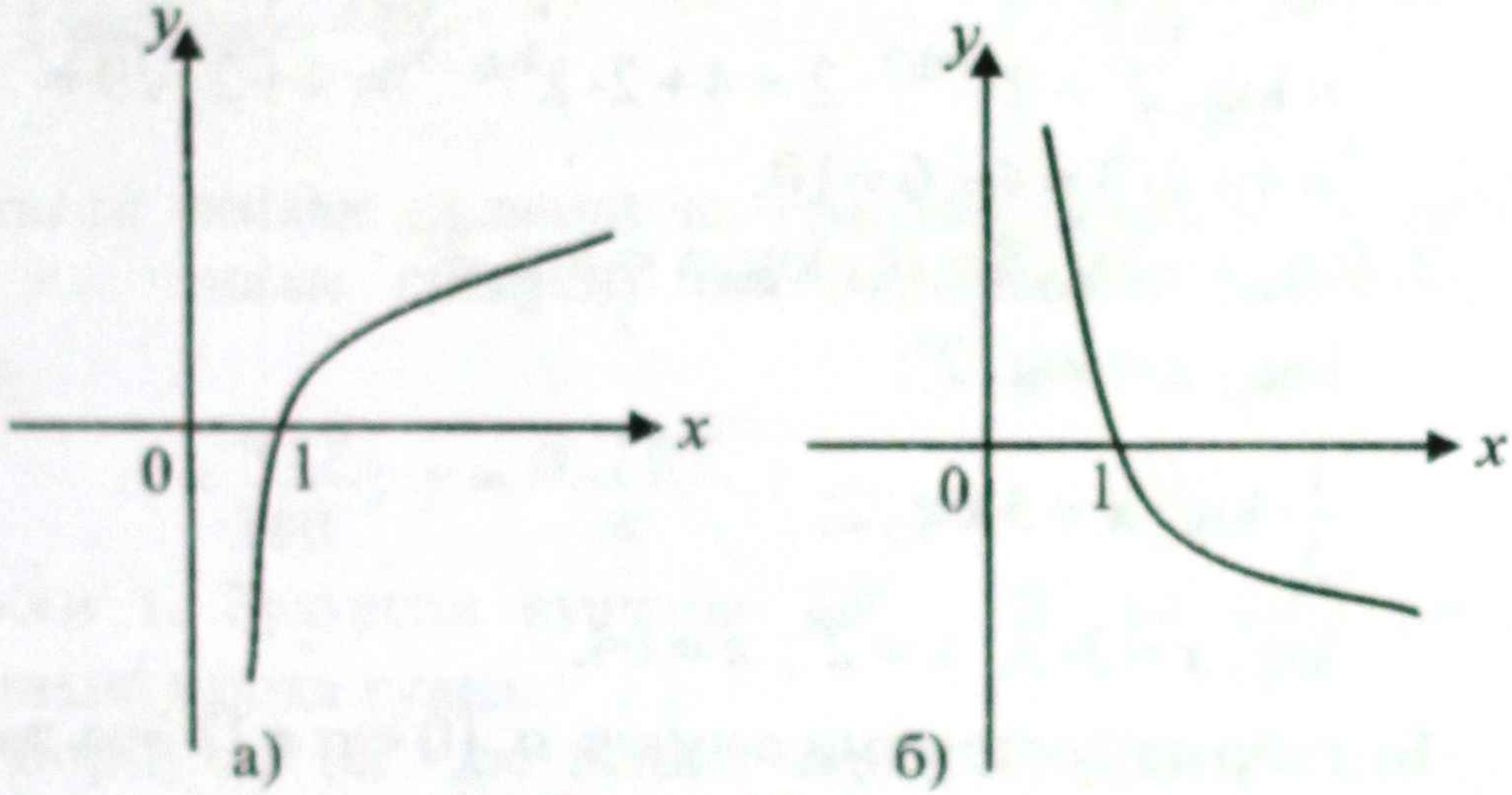
д) Бигузор $a>1$ бошад, он гоҳ, агар $x>1$ бошад, функсияи $y=\log_a x$ қиматҳои мусбат, агар $0<x<1$ бошад, қиматҳои манфӣ қабул мекунад.

Агар $0<a<1$ бошад, баръакс, ҳангоми $x>1$ будан, функсияи $y=\log_a x$ қимати манфӣ ва ҳангоми $0<x<1$ будан, қиматҳои мусбат қабул мекунад.

е) Агар $a>1$ бошад, он гоҳ, ҳангоми $x\to 0$ қимати функсияи $y=\log_a x$ беохир кам мешавад ($y=f(x)\to 0$). Агар

$0<x<1$ бошад, он гоҳ ҳангоми $x\to 0$ қимати функсияи $y=\log_a x$ беохир меафзояд ($y=f(x)\to\infty$).

ё) Графики функсияи $y=\log_a x$ дар соҳаи муайяниаш $D(f)=(0;+\infty)$ барои қиматҳои муайяни $a=2$ ва $a=\frac{1}{2}$ намудҳои зеринро дорад, ки тасвираш дар расмҳои 17 а) ва б) оварда шудааст.



Расми 17

ж) *Функсияи логарифмии* $y=\log_a x$ $(x>0,\ 0<a\neq 1)$ *дорои хосиятҳои зерин мебошад* $(x>0;\ y>0,\ a\neq 1,\ a>0)$:

1. $\log_a x=b\Rightarrow x=a^b$;
2. $a^{\log_a x}=x;\quad \log_a 1=0$;
3. $\log_a x=\log_a y\Rightarrow x=y$;
4. $\log_a x^m=m\log_a x$;
5. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$;
6. $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;
7. $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a};\quad \log_a x=\frac{1}{\log_x a}$;
8. $\log_{a^k} x=\log_a\sqrt[k]{x};\ \log_{\frac{1}{a^k}} x=\log_a x^k$;

9. $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a x.$

Мисол. Қиматҳои ифодаҳоро ёбед:

1. $\log_3 81 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \log_3 81 + \frac{3}{2} = \log_3 3^4 + \frac{3}{2} =$

$= 4\log_3 3 + \frac{3}{2} = 4 \cdot 1 + \frac{3}{2} = 4 + 1{,}5 = 5{,}5.$

2. $\log_2 16 + \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 9 + 2} = \log_2 16 + \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 9} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 =$

$= \log_2 2^4 + 2^{\frac{1}{2}\log_2 9} \cdot 2 = 4 + 2 \cdot 2^{\log_2 \sqrt{9}} = 4 + 2 \cdot \sqrt{9} =$

$= 4 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10.$

3. $\log_4 x - \log_2 8 = 0;\ \ \log_4 x = \log_2 8;$

$\log_{2^2} x = \log_2 2^3;$

$\frac{1}{2} \cdot \log_2 x = 3\log_2 2;$

$\log_2 x = 3 \cdot 2;\ \ x = 2^6;\ x = 64.$

Ба ғайр аз логарифми асосаш a $(0 < a \neq 1)$ боз логарифмҳое ҳастанд, ки онҳо логарифмҳои натуралӣ ва даҳӣ ном доранд.

Агар асоси логарифми $\log_a x$ ба ададн e баробар бошад, он гоҳ логарифмро логарифми натуралӣ ё логарифми неперӣ (аз номи олими математики шотландӣ Непер гирифта шудааст) меноманд ва чунин ишорат карда шудааст:

$$\log_e x = \ln x$$

а) $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0).$

б) Ҳангоми $x = e$ будан, $\log_a e = \frac{1}{\ln a},\ \ln e = 1$ чунки

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x;\ \ \log_a e = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln e;\ \ \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

мебошад.

в) Ҳангоми $a = 10$ будан, $\log_{10} x = \lg x$, ки дар ин чо, $\lg x = M \ln x,\ M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e = 0{,}43429$ мебошад. Дар ин чо,

$M = \ln e = \frac{1}{\ln 10}$ - ро модули гузариш аз логарифми натуралӣ ба логарифми дахӣ меноманд.

§13. Мафҳуми ченак ва функсияҳои тригонометрӣ

I. Дар курси математикаи мактабӣ, хонандагон дар синфи 9 бо мафҳуми ченаки радиании кунҷ шинос шудаанд. Бори дигар хотиррасон мекунем, ки

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (1)$$

мебошад.

Вобастагии ченаки радианӣ ва градусии кунҷ (α - ченаки радианӣ, γ - ченаки градусӣ) бо формулаҳои зерин дода мешаванд:

$$\alpha = \frac{\pi \cdot \gamma}{180^\circ}; \quad \gamma = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi} \qquad (2)$$

Мисоли 1. Бузургии кунҷҳои 45°, 30° ва 20° - ро бо ченаки радианӣ ифода кунед.

Ҳал. Формулаи (2) - ро татбиқ карда, бузургиҳои кунҷҳои (ченаки градусии) 45°, 30° ва 20° - ро бо ченаки радианӣ ифода мекунем. Ҳангоми $\gamma = 45^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ ва $\gamma = 20^\circ$ будан,

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha = \frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}; \quad \alpha = \frac{\pi \cdot 20^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{9}$$

мешавад.

Мисоли 2. Ченакҳои радиании $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{2}{3}\pi$ - ро бо ченаки градусӣ ифода кунед.

Ҳал. Формулаи (2) - ро татбиқ карда, ченаки радиании $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{2}{3}\pi$ - ро бо ченаки градусӣ ифода мекунем.

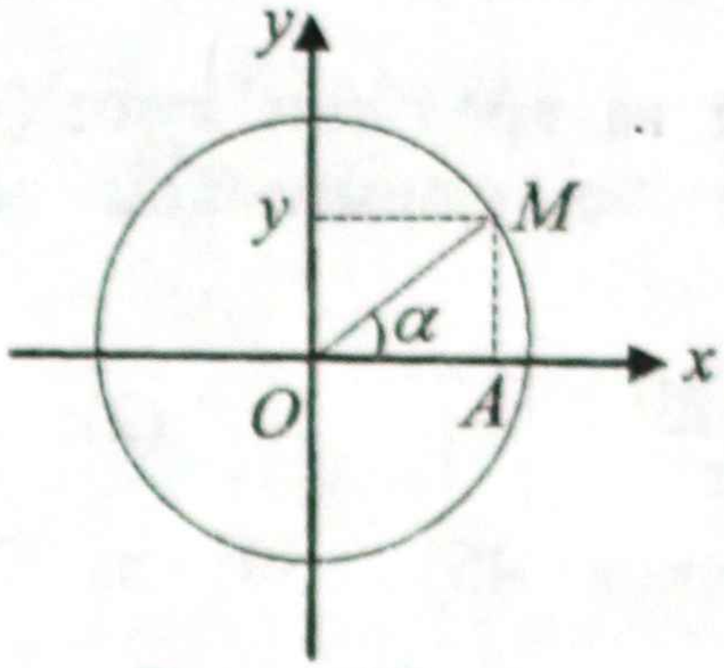
Ҳамин тариқ, ҳангоми $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ва $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ будан,

$$\gamma = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ; \quad \gamma = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ;$$

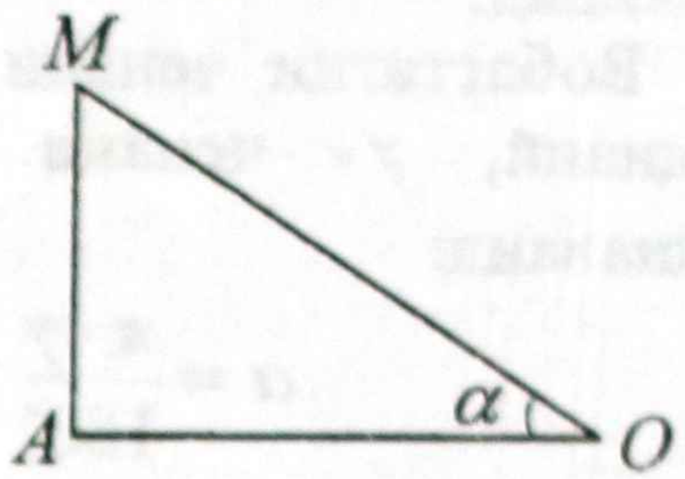
$$\gamma = \frac{\frac{2\pi}{3}\cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{2\cdot 180^\circ}{3} = 120^\circ$$ мешавад.

II. Агар дар давраи воҳидӣ нуқтаи дилхоҳи M - ро интихоб карда, онро бо ибтидои координатаҳо пайваст кунем, дар натиҷа секунҷаи росткунҷаи дорои кунҷи тези MOA - ро ҳосил мекунем (Расми 18).

Дар ин ҷо тарафҳои OA ва AM - ро катетҳои секунҷа, OM - ро гипотенузаи секунҷа ва $\angle MOA = \alpha$ - ро кунҷи тези секунҷа меноманд.



Расми 18



Расми 19

Агар MOA (Расми 19) секунҷаи росткунҷаи дорои кунҷи дорои тез бошад, он гоҳ маълум аст, ки функсияҳои тригонометрӣ ба воситаи тарафҳои секунҷа бо формулаҳои зерин ифода карда мешаванд:

1. $\frac{AM}{OM} = \sin\alpha;$
2. $\frac{OA}{OM} = \cos\alpha;$
3. $\frac{AM}{OA} = tg\alpha;$
4. $\frac{OA}{AM} = ctg\alpha;$
5. $\frac{OM}{OA} = \sec\alpha;$
6. $\frac{OM}{AM} = \operatorname{cosec}\alpha.$

§14. Хосиятҳои функсияҳои тригонометрӣ

1. Хосиятҳои функсияи $y = \sin x$ $(y = \cos x)$ ва графики он.

а) Соҳаи муайянии функсияи $y = \sin x$ $(y = \cos x)$ маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад:

$$D(y) = R = (-\infty;\ +\infty),\ D(y) = D(\cos x) = (-\infty;\ +\infty)$$

б) Аз сабаби он ки абсциссаҳо ва ординатаҳои нуқтаҳои давраи воҳидӣ ҳамаи қиматҳои дар порчаи $[-1;1]$ бударо қабул мекунад, пас соҳаи қиматҳои ҳар яке аз ин функсияҳо порчаи $[-1;1]$ мебошад:

$E(\sin x)=[-1;1]$ $\quad (E(\cos x)=[-1;1])$.

в) Синус (косинус) барои ҳамаи $x\in R$ функсияи даврӣ буда, хурдтарин даври мусбаташ ба 2π баробар мебошад:

$\sin(x+2\pi)=\sin x;$ $\quad (\cos(x+2\pi)=\cos x)$

г) Синус (косинус) барои ҳамаи $x\in R$ функсияи ток (ҷуфт) мебошад:

$\sin(-x)=-\sin x;$ $\quad (\cos(-x)=\cos x)$.

г) Барои ҳамаи $x=\pi k$, ки $k\in Z$ мебошад, $\sin x=0$ $(\cos x\neq 0)$.

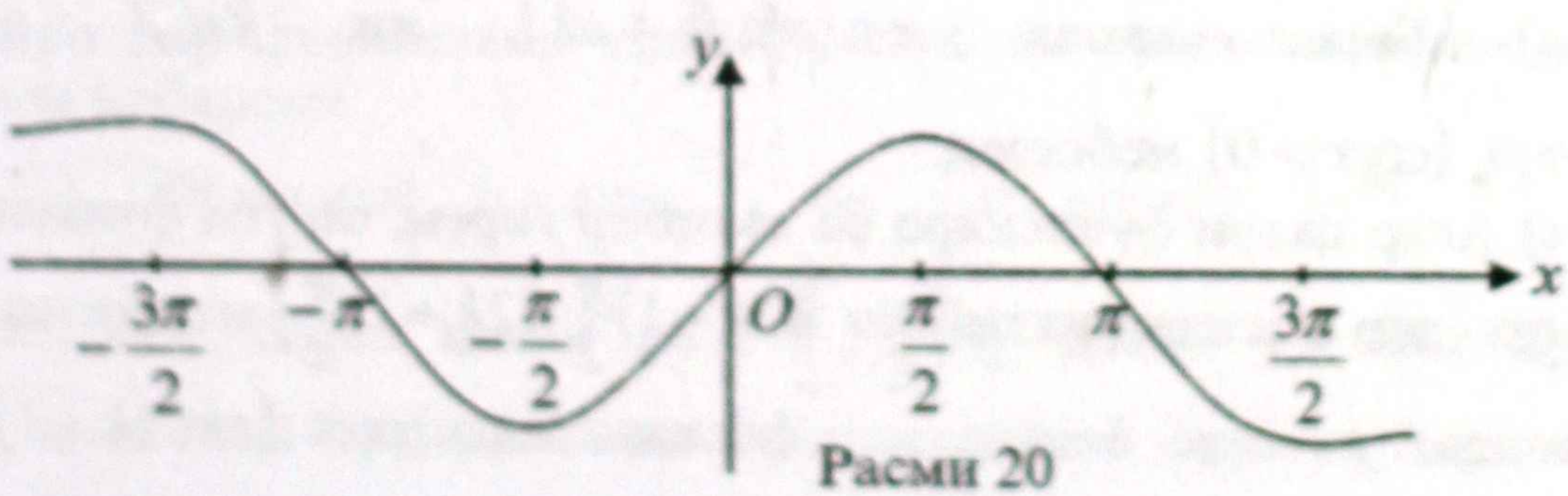
д) Барои ҳамаи $x\in(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)$, ки $k\in Z$ мебошад, $\sin x>0$ $(\cos x>0)$ аст.

е) Барои ҳамаи $x\in(\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, $\left(x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right)$, ки $k\in Z$ мебошад, $\sin x<0$ $(\cos x<0)$ аст.

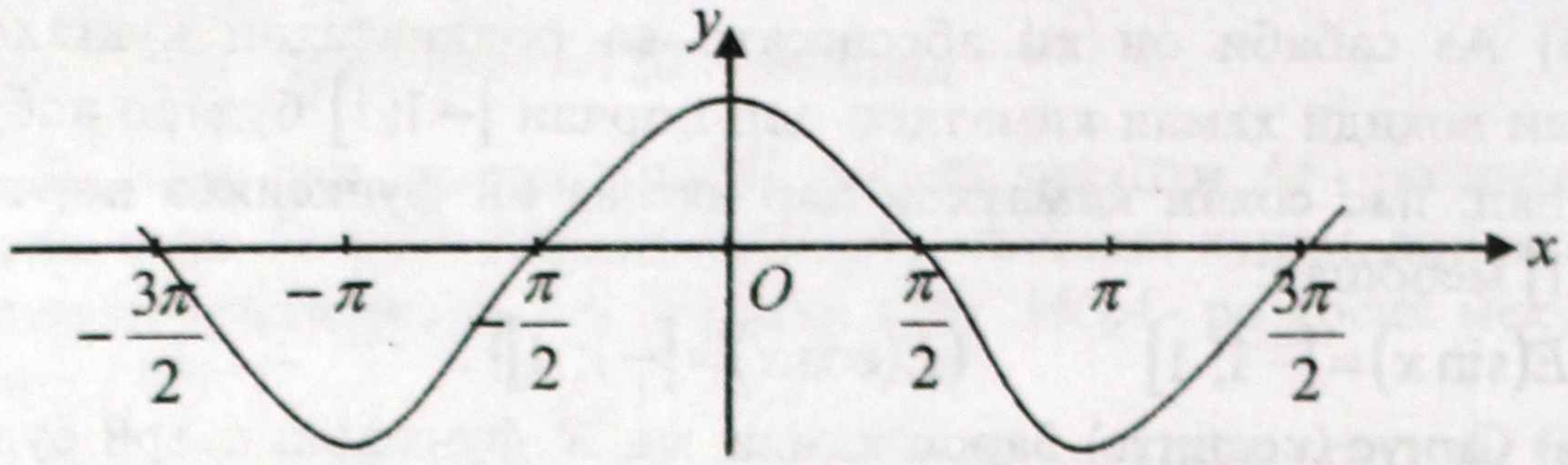
ё) Дар фосилаҳои $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ $([-\pi+2\pi k;\ 2\pi k])$, ки $k\in Z$ мебошад, функсияи $\sin x$ $(\cos x)$ аз -1 то 1 меафзояд.

ж) Дар фосилаҳои $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ $([2\pi k;\ \pi+2\pi k])$, ки $k\in Z$ мебошад, функсияи $\sin x$ $(\cos x)$ аз 1 то -1 кам мешавад.

з) Тасвири графики функсияҳои $\sin x$ ва $\cos x$ мувофиқан дар расми 20 ва 21 оварда шудааст.



Расми 20



Расми 21

2. Хосиятҳои функсияи $y=tgx \quad (y=ctgx)$ ва графики он

а) Маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, ғайр аз ададҳои намуди $\frac{\pi}{2}+\pi k \quad (\pi k)$, ки $k\in Z$ аст, соҳаи муайянии функсияи $y=tgx \quad (y=ctgx)$ мебошад.

б) Соҳаи тағйирёбии функсияи $y=tgx \quad (y=ctgx)$ аз ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ иборат мебошад:

$$E(tgx)=R \qquad (E(ctgx)=R).$$

в) Функсияи $y=tgx \quad (y=ctgx)$ барои ҳамаи $x\in D(tgx)=R$ $(x\in D(ctgx)=R)$ тоқ мебошад:

$$tg(-x)=-tgx \qquad ctg(-x)=-ctgx$$

г) Функсияи $y=tgx \quad (y=ctgx)$ барои ҳамаи $x\in D(tgx)=R$ $(x\in D(ctgx)=R)$ функсияи даврӣ буда, хурдтарин даври мусбаташ ба π баробар мебошад:

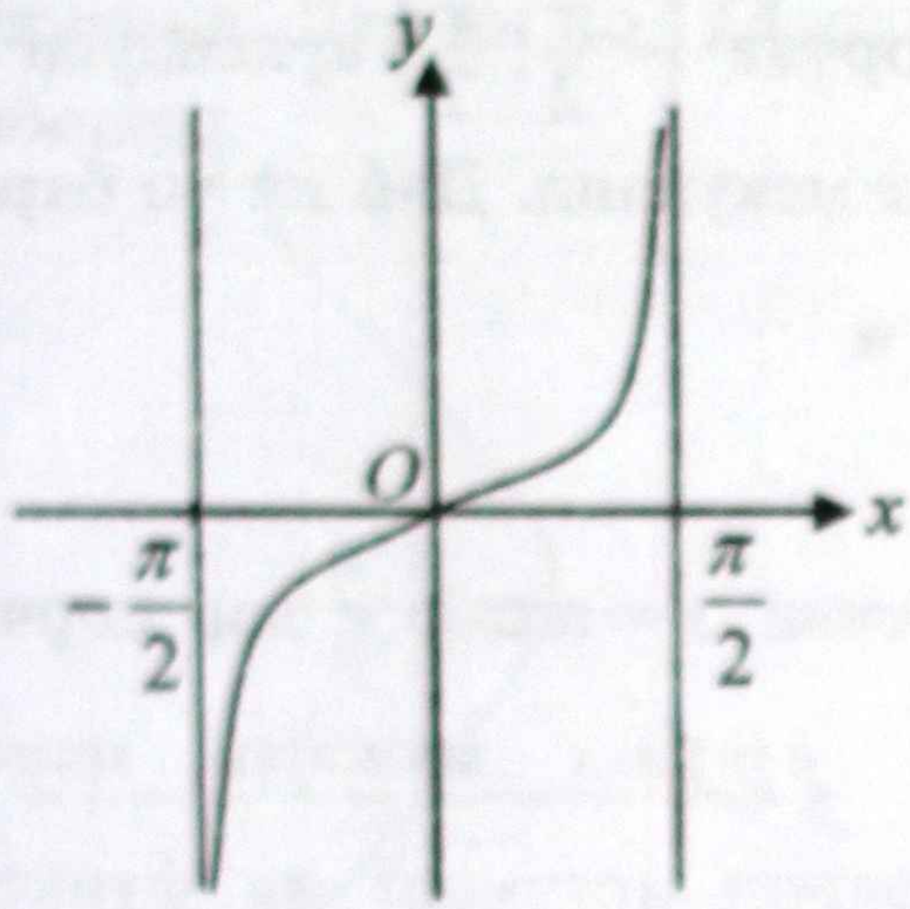
$$tg(x+\pi)=tgx \ (ctg(x+\pi)=ctgx).$$

г) Барои ҳамаи $\pi k \ \left(x=\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, ки $k\in Z$ мебошад, $tgx=0 \ (ctgx=0)$ аст.

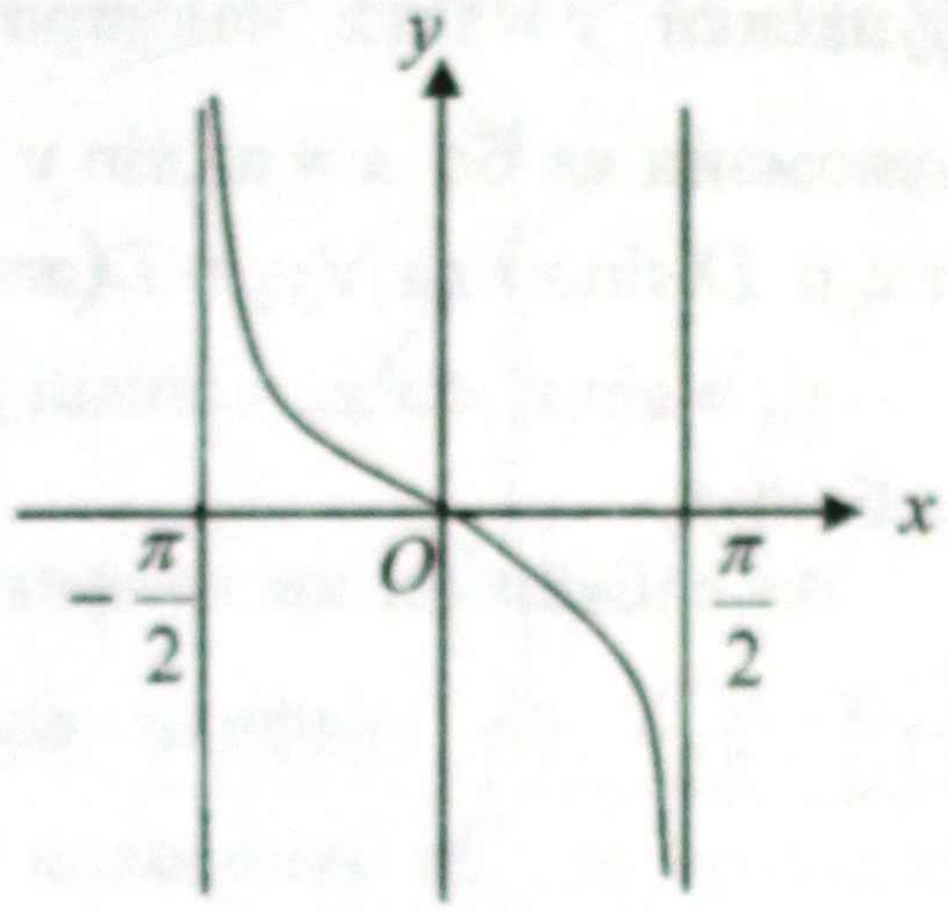
д) Барои ҳамаи $x\in\left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, ки $k\in Z$ аст, $tgx>0 \ (ctgx>0)$ мебошад.

е) Агар даври функсияро ба эътибор гирем, он гоҳ функсияи $y=tgx$ дар фосилаи ихтиёрии $\left((2k-1)\frac{\pi}{2};(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ меафзояд ва функсияи $y=ctgx$ бошад, дар фосилаи ихтиёрии $(\pi k;\ (k+1)\pi)$ кам мешавад.

ё) Тасвири графики функсияҳои $y = tgx$ ва $y = ctgx$ мувофиқан дар расмҳои 22 ва 23 оварда шудааст.



Расми 22



Расми 23

§15. Функсияҳои тригонометрии чаппа

Дар §14 хосиятҳои функсияҳои тригонометриро баён карда, тасвири графики ҳар яке аз онҳоро овардем.

Аз графикҳои тасвир кардашуда маълум мешавад, ки функсияҳои тригонометрӣ дар тамоми тири аддӣ функсияҳои гайримонотонианд. Бинобар ин, функсияҳо дар тамоми тири аддӣ функсияи чаппаи худро надоранд. Аз ҳамин сабаб, фосилаҳои монотонии функсияҳои тригонометриро дар назар дошта, функсияҳои тригонометрии чаппаро баён мекунем.

Функсияҳои $f(x)$ ва $g(y)$ байни худ чаппа номида мешаванд, агар $D(f) = E(g)$, $E(f) = D(g)$ ва барои $\forall x_0 \in D(f)$ ва $\forall y_0 \in D(g)$ $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x_0 = g(y_0)$ шавад. Ин нишон медиҳад, ки агар функсияи $g(y)$ ба функсияи $f(x)$ чаппа бошад, он гоҳ функсияи $f(x)$ ҳам ба функсияи $g(y)$ чаппа мебошад. Инро дар функсияҳои тригонометрӣ ва тригонометрии чаппа дида мебароем.

1. Функсияи $y = \sin x$ - ро дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ дида мебароем. Барои ҳамаи $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функсияи $y = \sin x$ муайян ва монотонӣ афзуншаванда буда, қиматҳои функсия дар порчаи

$[-1;\ 1]$ мехобад. Пас, функсияи чаппааш ҳам дар порчаи $[-1;\ 1]$ муайян ва афзуншаванда мебошад. Чунин функсияи нисбат ба функсияи $y=\sin x$ чаппаро дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ арксинуси y меноманд ва бо $x=\arcsin y$ ишорат мекунанд. Дар ин ҷо барои $\forall x_0 \in D(\sin x)$ ва $\forall y_0 \in D(\arcsin y)$

$$y_0=\sin x_0 \Leftrightarrow x_0=\arcsin y_0$$

мебошад.

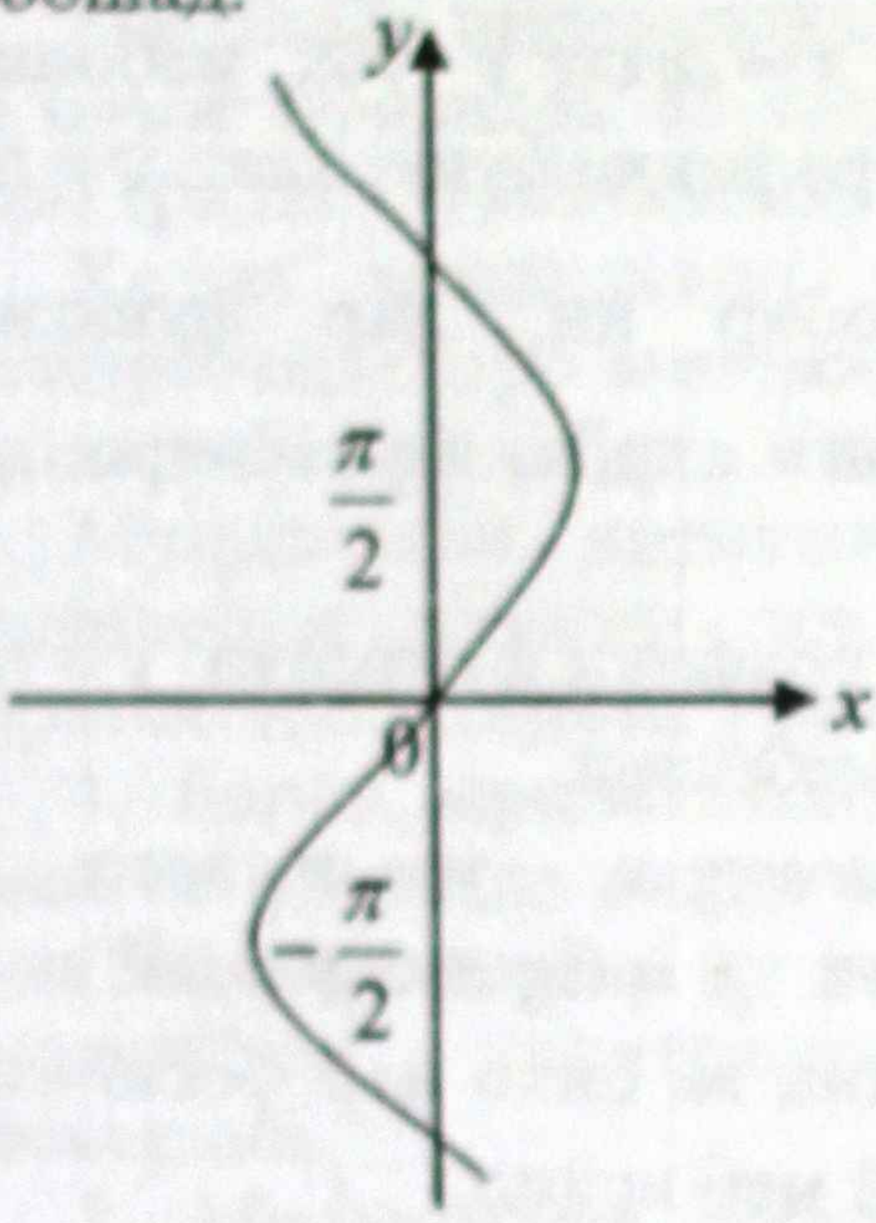
Аз сабаби он ки графики функсияи $x=\arcsin y$ дар порчаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ бо графики функсияи $y=\sin x$ мувофиқ меояд, бинобар он, аз ишораҳои муқаррарии аргумент ва функсия истифода бурда, функсияи тригонометрии чаппаро дар намуди $y=\arcsin x$ менависем. Инак, функсияи $y=\arcsin x$ нисбат ба $x=\sin y$ функсияи чаппа аст.

Агар функсияи $x=\sin y$ дар порчаи $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ муайян ва афзуншаванда буда, порчаи $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$-ро ба порчаи $-1\le x\le 1$ инъикос кунонад, он гоҳ функсияи тригонометрии чаппаи $y=\arcsin x$ ҳам дар порчаи $-1\le x\le 1$ муайян ва афзуншаванда буда, порчаи $-1\le x\le 1$- ро ба порчаи $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ инъикос менамояд.

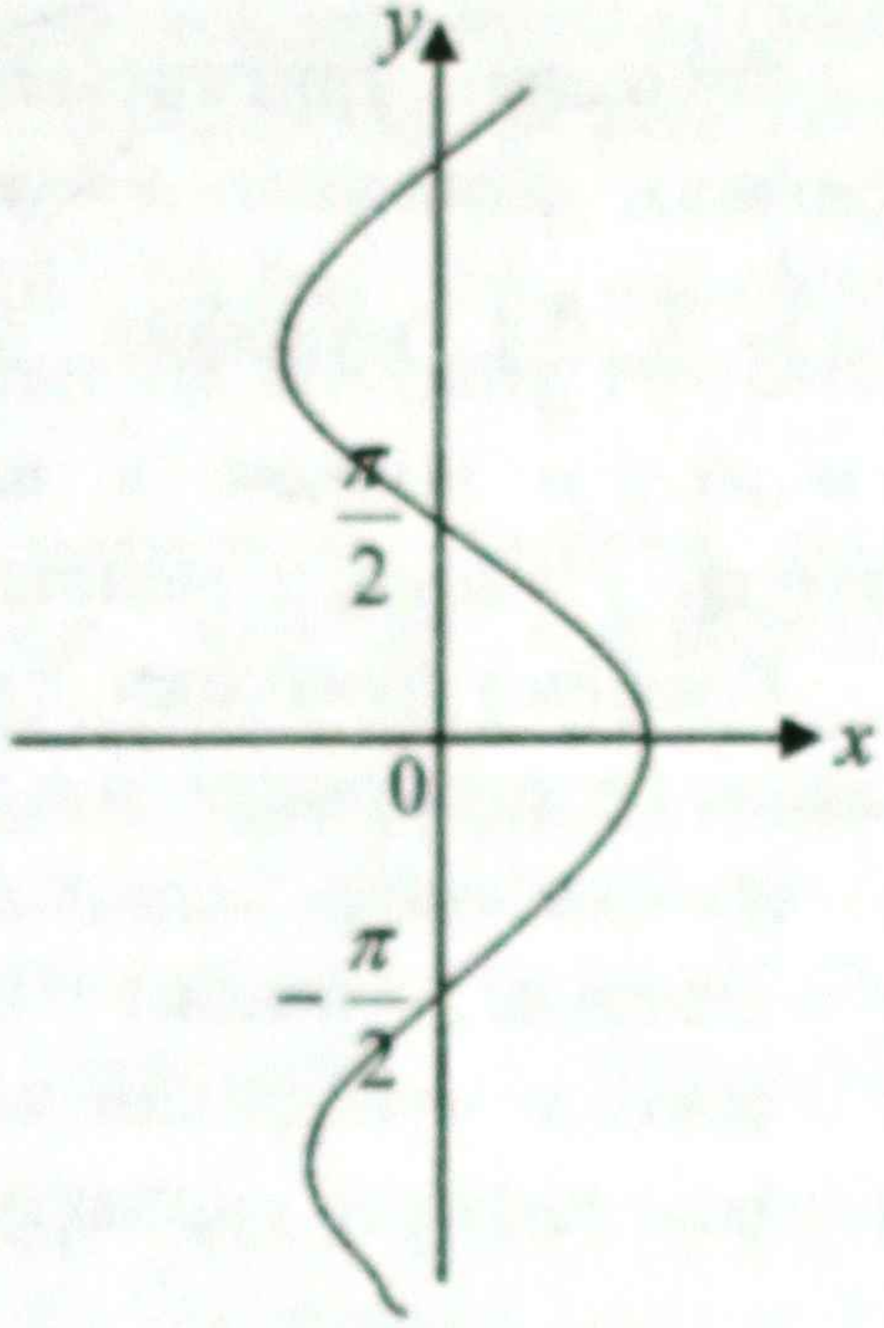
Функсияи $y=\arcsin x$ тоқ мебошад. Графикаш ба графики функсияи $x=\sin y$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ нисбат ба хати рости $x=y$ симметрӣ аст (Расми 24).

2. Функсияи $y=\cos x$ - ро дар порчаи $[0;\pi]$ дида мебароем. Ин функсия дар ҳамаи порчаи $[0;\pi]$ муайян ва камшаванда буда, маҷмуи қиматҳои дар порчаи $[-1;\ 1]$ бударо қабул мекунад. Пас, чунин функсияи ба функсияи $y=\cos x$ чаппа вуҷуд дорад, ки он ҳам дар порчаи $[-1;\ 1]$ муайян ва камшаванда мебошад. Бинобар он, функсияи нисбат ба функсияи $y=\cos x$ чаппаро дар порчаи

$[0;\pi]$ арккосинуси y меноманд ва бо $x=\arccos y$ ишорат мекунанд. Дар ин чо, $D(\arccos y)=[-1;1]$ ва $E(\arccos y)=[0;\pi]$ мебошад.



Расми 24



Расми 25

Азбаски графики функсияи $x=\arccos y$ бо графики функсияи $y=\cos x$ мувофик меояд, бинобар ин, чойхои x ва y - ро иваз карда, функсияи тригонометрии чаппаи $y=\arccos x$ - ро хосил мекунем.

Функсияи $y=\arccos x$ чуфт мебошад. Графикаш ба графики функсияи $x=\cos y$ $y\in[0;\pi]$ нисбат ба хати рости $x=y$ симметрй аст (Расми 25).

3. Функсияи $y=tgx$ - ро дар фосилаи $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ дида мебароем. Ин функсия дар хамаи фосилаи додашуда муайян ва афзуншаванда мебошад ва мачмуи хамаи киматхои дар тири ададй бударо кабул мекунад. Бинобар ин, функсияи тригонометрии чаппаро бо арктангенси y ишорат карда, дар намуди $x=arctg\,y$ менависанд.

Азбаски барои $\forall x_0\in D(tg\,x)$ ва $\forall y_0\in D(arctg\,y)$

$$y_0=tg\,x_0\Leftrightarrow x_0=arctg\,y_0$$

мебошад, пас соҳаи муайянии функсияи тригонометрии чаппаи $x = arctg\, y$ мачмуи ҳамаи тири ададӣ шуда метавонад: $D(arctg\, y) = R$. Соҳаи тағйирёбиаш $E(arctg\, y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ аст.

Функсияи тригонометрии чаппа $x = arctg\, y$ тоқ мебошад. Графики функсияи $x = arctg\, y$ бо графики функсияи $y = tgx$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ мувофиқ меояд. Бинобар ин, дар функсияи $x = arctg\, y$ чойҳои x ва y- ро иваз карда, функсияро дар намуди $y = arctg\, x$ менависем.

Графики функсияи $x = arctg\, y$ ба графики функсияи $y = tgx$ нисбат ба хати рости $y = x$ симметрӣ мебошад.

Ҳамин тавр, функсияҳои $y = arcctg\, x$, $y = arc\sec x$ ва $y = \arccos ec\, x$ нисбат ба функсияҳои $y = ctg\, x$, $y = \sec x$ ва $y = \cos ec\, x$ мувофиқан чаппа мебошанд ва онҳо дар фосилаҳои муайяни интихоб кардашуда монотонӣ мебошанд.

МАШҚҲО

1. Соҳаи муайянии функсияҳоро ёбед:

а) $y = \sqrt{4 - x}$; б) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-6}}$;

в) $y = \sqrt{4x - x^2}$; г) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$;

г) $y = \sqrt{6x - x^2} + \sqrt{\frac{x-1}{x-6}}$.

2. Нишон диҳед, ки кадоме аз ин функсияҳо чуфт ва кадоме аз ин онҳо тоқ аст:

а) $y = 2^x - 2^{-x}$; б) $y = \sqrt[3]{x} + 2x^5$;

в) $y = 5^{x^2}$; г) $y = a^x + a^{-x}$; г) $y = \frac{x}{x^2 + 2}$.

3. Графики функсияҳои зерин сохта шавад:

а) $y = x^3 - x$; б) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

в) $y = \frac{x}{x}$, $x > 0$; г) $|y| = |x|$;

г) $y = |x|$; д) $y = |2x + 1|$.

БОБИ IX
МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ ИРРАТСИОНАЛӢ

§1. Муодилаи ирратсионалӣ

Муодилаи ирратсионалӣ гуфта, чунин муодилаеро меноманд, ки баъзе ифодаҳои аз тағйирёбандаҳо вобаста буда, дар таҳти реша (радикал) мебошанд.

Ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ гуфта, он қиматҳои тағйирёбандаҳоро меноманд, ки ҳангоми ба муодила гузоштан, муодила ба нол табдил мегардад.

Муодилаҳои ирратсионалӣ дар намудҳои гуногун дода шуданашон мумкин аст. Бинобар он, ҳар як муодилаҳои ирратсионалӣ тарз ва услуби хоси ҳалли худро дорад.

1. Барои муодилаҳои ирратсионалиро ҳал кардан, пеш аз ҳама бо усули аз таҳти реша (радикал) озод намудани ифода, яъне ба воситаи ҳар ду тарафро ба дарачаи реша бардоштан – муодилаҳои ирратсионалиро ба муодилаи ратсионалӣ меоваранд.

2. Муодилаҳои ирратсионалиро бо усули дохил кардани тағйирёбандаи нав (бо усули гузориш) ба муодилаи соддатар (бе реша) оварда мешавад.

Дар вақти ҳал намудани муодилаҳои ирратсионалӣ решаҳои бегона пайдо шуданашон мумкин аст. Он решаҳое, ки муодиларо ба нол табдил намедиҳад, решаҳои бегона номида мешавад. Барои ҳамин санҷидани дурустии ҳалҳои ёфташуда ҳатмист. Дар навбати худ ҳангоми ҳал намудани муодилаҳо яке аз ҳалҳо гум шуданаш мумкин аст. Гум шудани яке аз ҳалҳои муодила дар натиҷаи ду тарафи муодиларо ба ифодаи якҳелаи тағйирёбандадор тақсим намудан рӯй медиҳад.

Дар хотир бояд дошт, ки пеш аз ҳал кардани муодилаҳои ирратсионалӣ аввал соҳаи муайянии муодиларо нишон додан лозим аст.

Барои он ки доир ба тарзи ҳалли муодилаҳои ирратсионалӣ маълумоти муфассал пайдо кунем, ҳалли якчанд муодилаҳоро меорем.

Мисоли 1. Муодилаи $\sqrt{x^2+3x+1}=3x$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Пеш аз ҳама маҷмуи қиматҳои x - ро меёбем, ки барояшон муодила маъно дорад.

$$x^2+3x\geq 0;\quad x(x+3)\geq 0$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x+3 \ge 0; \end{cases} \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge -3. \end{cases} \text{ ё } \begin{cases} x \le 0, \\ x+3 \le 0; \end{cases} \begin{cases} x \le 0, \\ x \le -3. \end{cases}$$

Аз қиматҳои ёфташудаи $x \ge 0$, $x \ge -3$, $x \le 0$ ва $x \le -3$ маълум мешавад, ки муодила дар маҷмӯъҳои $(-\infty; -3)$ ва $(0; +\infty)$ маъно доштааст. Бинобар он, ҳалли муодиларо дар ҳамин маҷмӯъ ҷустуҷӯ менамоем.

Барои ҳалҳояшро ёфтан, муодилаи додашударо дар намуди $\sqrt{x^2+3x}+1=3x$ ё ки $\sqrt{x^2+3x}=3x-1$ навишта, баъд ду тарафи муодилаи ҳосилшударо ба квадрат бардошта, муодилаи $x^2+3x=(3x-1)^2$ - ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо, $8x^2-9x+1=0$ мебошад.

Аз сабаби он, ки дискриминанти муодилаи квадратӣ

$$D=b^2-4ac=(-9)^2-4\cdot 8\cdot 1=81-32=49>0$$

аст, пас вай ду решаҳои ҳақиқии гуногунро дорад:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-9)-\sqrt{49}}{2\cdot 8}=\frac{9-7}{16}=\frac{1}{8},$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-9)+\sqrt{49}}{2\cdot 8}=\frac{9+7}{16}=1.$$

Аз решаҳои ёфташуда фақат решаи $x=1$ ҳалли муодилаи ирратсионалӣ шуда метавонад, чунки, ҳангоми ба он гузоштан тарафи чап ба нол табдил мегардад. Решаи $x=\frac{1}{8}$ бошад, ҳалли бегонаи муодилаи ирратсионалӣ аст, чунки, вай дар натиҷаи ба дараҷа бардоштан ҳосил шудааст, решаи $x=\frac{1}{8}$ муодилаи $\sqrt{x^2+3x+1}=3x$ - ро қаноат намекунонад, аммо решаи муодилаи $x^2+3x=(3x-1)^2$ мебошад.

Санҷиш: а) $\sqrt{x_1^{\,2}+3x_1}+1=3x_1$; $\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2+3\cdot\frac{1}{8}}+1=3\cdot\frac{1}{8}$; $\frac{13}{8}\ne\frac{3}{8}$;

б) $\sqrt{x_2^{\,2}+3x_2}+1=3x_2$; $\sqrt{1^2+3\cdot 1}+1=3\cdot 1$; $3=3$.

Ин нишон медиҳад, ки қимати $x=1$ ҳалли муодилаи додашуда мебошад.

Мисоли 2. Муодилаи $\sqrt{x+3}+\sqrt{22-x}=7$ - ро хал кунед.

Хал. Мачмуи киматҳои x - ро меёбем, ки дар он муодила маъно дорад, яъне,

$$\begin{cases} x+3\geq 0, \\ 22-x\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq -3, \\ 22\geq x. \end{cases}$$

Аз ин чо, $-3\leq x\leq 22$ мешавад.

Пас, муодилаи додашуда дар фосилаи $[-3;\ 22]$ муайян аст. Бинобар ин, халли муодиларо дар ин мачмўъ чустучў менамоем.

Муодилаи додашударо бо тарзҳои гуногун хал кардан мумкин аст. Се тарзи халли муодиларо нишон медихем:

Тарзи якум. Ду тарафи муодиларо ба дарачаи реша бардошта, хосил мекунем.

$$\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{22-x}\right)^2=7^2;$$

$$(x+3)+2\sqrt{(x+3)(22-x)}+(22-x)=49;$$

$$2\sqrt{(x+3)(22-x)}=24;$$

$$\sqrt{(x+3)(22-x)}=12.$$

Бори дигар баробарии охиронро ба квадрат бардошта, хосил мекунем:

$$\left(\sqrt{(x+3)(22-x)}\right)^2=12^2;$$

$$(x+3)(22-x)=144;$$

$$22x+66-x^2-3x=144;$$

$$x^2-19x+78=0.$$

Муодилаи квадратиро хал мекунем. Дискриминанти он

$$D=b^2-4ac=(-19)^2-4\cdot 78\cdot 1=361-312=49>0$$

мебошад, пас вай ду решаҳои ҳақиқии гуногунро дорад, яъне:

$$x_1=\frac{-(-19)-\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{19-7}{2}=6;$$

$$x_2=\frac{-(-19)+\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{19+7}{2}=13.$$

Дар ин чо, $x_1=6$ ва $x_2=13$ решаҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Тарзи дуюм. Дар муодилаи додашуда яке аз решаҳоро ба тарафи дигари баробарӣ бо аломати муқобилаш гузаронида, баъд ба квадрат бардошта, пайдо мекунем:

$$\sqrt{x+3}=7-\sqrt{22-x};$$

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(7-\sqrt{22-x}\right)^2;$$

$$x+3=49-14\sqrt{22-x}+22-x;$$

$$14\sqrt{22-x}=68-2x;$$

$$7\sqrt{22-x}=34-x.$$

Муодилаи ҳосилшударо бори дигар ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$\left(7\sqrt{22-x}\right)^2=(34-x)^2;$$

$$49(22-x)=1156-68x+x^2;$$

$$1078-49x=1156-68x+x^2;$$

$$x^2-19x+78=0.$$

Чӣ хеле, ки дар боло муоина кардем, муодилаи квадратӣ решаҳои $x_1=6$ ва $x_2=13$ - ро дорад ва ин решаҳо ҳалли муодилаи додашуда мебошанд.

Тарзи сеюм. Муодиларо бо воситаи дохил намудани тағйирёбандаи нав (методи гузориш) ҳал мекунем. Дар муодилаи додашуда, $\sqrt{x+3}=y$ -ро ишорат карда, муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=y^2;$$

$$x+3=y^2;\ x=y^2-3.$$

$$y+\sqrt{22-y^2+3}=7;$$

$$y+\sqrt{25-y^2}=7;$$

$$\sqrt{25-y^2}=7-y;$$

$$\left(\sqrt{25-y^2}\right)^2=(7-y)^2;$$

$$25-y^2=49-14y+y^2;$$

$$y^2-7y+12=0;$$

$$(y-3)(y-4)=0.$$

Аз ин чо, $y_1=3$ ва $y_2=4$ мешавад.

Киматхои $y=3$ ва $y=4$-ро ба муодилаи $x=y^2-3$ гузошта, киматхои x - ро меёбем:

$$x_1=y_1^2-3\Rightarrow x_1=3^2-3\Rightarrow x_1=9-3\Rightarrow x_1=6;$$

$$x_2=y_2^2-3\Rightarrow x_2=4^2-3\Rightarrow x_2=16-3\Rightarrow x_2=13.$$

Киматхои $x_1=6$ ва $x_2=13$ халхои муодилаи додашуда мебошанд.

Санчиш. а) $x_1=6$: $\sqrt{6+3}+\sqrt{22-6}=7;$

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}=7; \qquad 3+4=7;\ 7=7;$$

б) $x_2=13$: $\sqrt{13+3}+\sqrt{22-13}=7;$

$$\sqrt{16}+\sqrt{9}=7;\ 4+3=7\Rightarrow 7=7.$$

Санчиш нишон медихад, ки киматхои $x_1=6$ ва $x_2=13$ халхои муодилаи ирратсионалй мебошанд.

Чавоб: 6; 13.

Мисоли 3. Муодилаи $\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+3=0$-ро хал кунед.

Хал. Муодила дар хамаи мачмуи R маъно дорад. Ду тарзи халли муодиларо меорем.

Тарзи якум. Муодилаи матлубро дар намуди

$$4\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}=-3$$

навишта, баъд ду тарафи муодиларо ба дарачаи реша, яъне, ба куб бардошта дар асоси

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

ё ки

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

менависем.

$$\left(4\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)^3=(-3)^3;$$

$$\left(4\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3-3\cdot 4\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(4\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)=27;$$

$$64x-12x\left(4\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)-x^2=27.$$

Агар x муодилаи додашудаи ирратсионалиро қаноат кунонад, пас аз баробарии

$$4\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}=-3$$

истифода бурда, муодилаи ҳосилшударо дар намуди $64x-12x\cdot 3-x^2=27$ навишта, ҳал мекунем:

$$64x-12x\cdot 3-x^2=27;$$

$$64x-36x-x^2=27;$$

$$64x-36x-x^2-27=0;$$

$$x^2-28x+27=0.$$

Муодилаи квадратиро ҳал мекунем. Дискриминанти он

$$D=b^2-4ac=(-28)^2-4\cdot 27\cdot 1=784-108=676>0$$

мебошад, пас, вай ду решаҳои гуногуни ҳақиқӣ дорад, яъне:

$$x_1=\frac{-(-28)-\sqrt{676}}{2\cdot 1}=\frac{28-26}{2}=1;$$

$$x_2=\frac{-(-28)+\sqrt{676}}{2\cdot 1}=\frac{28+26}{2}=27.$$

Дар ин ҷо, $x_1=1$ ва $x_2=27$ ба маҷмуи R тааллуқ дорад, бинобар он онҳо ҳалҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Тарзи дуюм. Муодиларо ба воситаи дохил кардани тағйирёбандаи нав (яъне, бо усули гузориш) ҳал мекунем. Ишораи $\sqrt[3]{x}=y$ - ро дохил карда, муодиларо чунин менависем: $y^2-4y+3=0$. Муодилаи квадратиро ҳал мекунем. Дискриминанти муодила

$$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 1=16-12=4>0$$

мебошад, пас, муодила ду решаҳои (ҳалҳои) гуногуни ҳақиқиро дорад, яъне:

$$y_1=\frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4-2}{2}=1;$$

$$y_2=\frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4+2}{2}=3.$$

Қиматҳои y_1 ва y_2 - ро ба $\sqrt[3]{x}=y$ гузошта, қиматҳои x - ро меёбем:

$\sqrt[3]{x} = y_1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x_1 = 1;$

$\sqrt[3]{x} = y_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x_2 = 3^3 \Rightarrow x_2 = 27.$

Санчиш: а) $x_1 = 1$; $\sqrt[3]{1} - 4\sqrt[3]{1} + 3 = 0 \Rightarrow 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$;

б) $x_2 = 27$; $\sqrt[3]{27} - 4\sqrt[3]{27} + 3 = 0 \Rightarrow 3 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Санчиш нишон медиҳад, ки қиматҳои $x_1 = 1$ ва $x_2 = 27$ ҳалҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Ҷавоб: 1; 27.

Мисоли 4. Муодилаи $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7} = 5$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодилаи ирратсионалӣ ду решаи квадратиро дарбар мегирад. Муодила дар маҷмуи $x \geq 7$, яъне, дар фосилаи $[7; +\infty)$ ҳал доштанаш мумкин аст. Бинобар он, ҳаллашро дар ҳамин маҷмӯъ дида мебароем. Муодилаи матлубро бо тарзҳои гуногун ҳал кардан мумкин аст.

Тарзи якум. Дар муодилаи додашуда, яке аз решаҳоро ба тарафи дигари баробарӣ бо аломати мукобилаш гузаронида, баъд муодилаи ҳосилшударо ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$\sqrt{x+6} = 5 + \sqrt{x-7}$;

$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = \left(5 + \sqrt{x-7}\right)^2$;

$x + 6 = 25 + 10\sqrt{x-7} + (x-7)$;

$x + 6 - 25 - x + 7 = 10\sqrt{x-7}$;

$5\sqrt{x-7} = -6.$

Азбаски, тарафи чапи муодила мусбат ва тарафи росташ манфӣ мебошад, бинобар он, муодилаи додашуда дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал надорад.

Тарзи дуюм. Ду тарафи муодилаи додашударо ба квадрат бардошта, дар асоси формулаи $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ менависем:

$\left(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7}\right)^2 = 5^2$;

$(x+6) - 2\sqrt{(x+6)(x-7)} + (x-7) = 25$;

$2x - 1 - 2\sqrt{(x+6)(x-7)} = 25$;

$$2x-1-25=2\sqrt{(x+6)(x-7)};$$

$$2x-26=2\sqrt{(x+6)(x-7)};$$

$$x-13=\sqrt{(x+6)(x-7)}.$$

Ҳар ду тарафи муодилаи $x-13=\sqrt{(x+6)(x-7)}$ - ро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$(x-13)^2=\left(\sqrt{(x+6)(x-7)}\right)^2;$$

$$(x-13)^2=(x+6)(x-7);$$

$$x^2-26x+169=x^2-x-42;$$

$$25x=211\Rightarrow x=\frac{211}{25}.$$

Қимати $x=\frac{211}{25}$ ба маҷмуи $x\geq 7$, яъне $[7;+\infty)$ тааллуқ дорад, лекин барои муодилаи додашуда ҳалли бегона мебошад, чунки муодилаи додашударо қаноат намекунонад.

Тарзи сеюм. Муодиларо бо воситаи дохил намудани тағйирёбандаи нав ҳал мекунем. Ишораи $\sqrt{x+6}=y$ - ро дохил намуда, муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$x+6=y^2;$$

$$x=y^2-6;$$

$$y-\sqrt{y^2-6-7}=5;$$

$$y-\sqrt{y^2-13}=5;$$

$$y-5=\sqrt{y^2-13}.$$

Ҳар ду тарафи муодилаи охиронро ба квадрат бардошта, қимати y - ро меёбем:

$$(y-5)^2=\left(\sqrt{y^2-13}\right)^2;$$

$$y^2-10y+25=y^2-13;$$

$$-10y=-38;\ -5y=-19;$$

$$5y=19\Rightarrow y=\frac{19}{5}.$$

Қимати $y=\frac{19}{5}$ - ро ба $\sqrt{x+6}=y$ гузошта, кимати x - ро меёбем:

$$\sqrt{x+6}=y \Rightarrow \sqrt{x+6}=\frac{19}{5} \Rightarrow x+6=\frac{361}{25} \Rightarrow x=\frac{211}{25}.$$

Қимати ҳосилшудаи $x=\frac{211}{25}$ решаи бегона мебошад.

Тарзи чорум. Ду тарафи муодиларо ба зарбкунандаи ҳамрохшудааш $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}$ зарб зада менависем:

$$\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-7}\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}\right)=5\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}\right)$$

$$(x+6)-(x-7)=5\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}\right)$$

$$13=5\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}\right)$$

ё ки $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}=\frac{13}{5}$.

Аз муодилаи ҳосилшуда ва муодилаи додашуда, системаи муодилаҳо тартиб дода, онро бо тарзи чамъкунӣ ҳал мекунем:

$$\begin{cases}\sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}=5,\\ \sqrt{x+6}+\sqrt{x-7}=\frac{13}{5}.\end{cases}$$

$2\sqrt{x+6}=\frac{13+25}{5}$ ё ки $\sqrt{x+6}=\frac{19}{5}$.

Ду тарафи муодилаи охиронро ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(\frac{19}{5}\right)^2 \Rightarrow x+6=\frac{361}{25} \Rightarrow x=\frac{361}{25}-6 \Rightarrow x=\frac{211}{25}.$$

Чи хеле, ки дар боло қайд кардем, кимати $x=\frac{211}{25}$ барои муодилаи додашуда ҳалли бегона мебошад.

Санҷиш: Ҳангоми $x=\frac{211}{25}$: $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-7}=5$;

$$\sqrt{\frac{211}{25}+6}-\sqrt{\frac{211}{25}-7}=5;\ \sqrt{\frac{211+150}{25}}-\sqrt{\frac{211-175}{25}}=5;$$

$$\sqrt{\frac{361}{25}}-\sqrt{\frac{36}{25}}=5;\ \frac{19}{5}-\frac{6}{5}=5;\ \frac{19-6}{5}=5;\ \frac{13}{5}\neq 5.$$

Пас, муодилаи матлуб ҳал надоштааст.

Ҷавоб: $\varnothing$.

§2. Ҳалли нобаробариҳои ирратсионалӣ

Мисоли 1. Нобаробарии $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Пеш аз ҳама маҷмуи қиматҳои x - ро меёбем, ки дар он нобаробарии додашуда маъно дорад. Бинобар ин, аввал нобаробарии $x^2-3x+2\geq 0$ - ро ҳал мекунем. Аз он $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\geq 0$ бармеояд. Аз ин ҷо:

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x-2\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x\geq 1, \\ x\geq 2. \end{cases} \Rightarrow x\geq 2 \text{ ва } \begin{cases} x-1\leq 0, \\ x-2\leq 0; \end{cases} \begin{cases} x\leq 1, \\ x\leq 2. \end{cases} \Rightarrow x\leq 1.$$

Аз қиматҳои ёфташудаи $x\leq 1$ ва $x\geq 2$ маълум аст, ки нобаробарии додашуда дар маҷмуи $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ маъно доштааст. Бинобар он ҳалли нобаробариро дар ин маҷмӯъ дида мебароем.

Нобаробарии додашуда, ба ҷамъбасти системаҳои нобаробариҳои

$$\begin{cases} x+3<0, \\ x^2-3x+2\geq 0; \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x+3\geq 0, \\ x^2-3x+2\geq 0, \\ x^2-3x+2>(x+3)^2 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад. Аз сабаби он, ки нобаробарии дуюми системаи дуюм натиҷаи нобаробарии сеюми системаи дуюм мебошад, бинобар он, мо фақат нобаробариҳои якуми системаи якум ва нобаробариҳои якум ва сеюми системаи дуюмро ҳал мекунем, яъне, ҳалҳои

$$\begin{cases} x+3<0, \\ x^2-3x+2\geq 0; \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x+3\geq 0, \\ x^2-3x+2>(x+3)^2 \end{cases}$$

- ро меорем. Аз $x+3<0$ бармеояд, ки $x<-3$ аст.

Акнун системаи нобаробариҳоро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} x+3\geq 0, \\ x^2-3x+2>(x+3)^2; \end{cases} \begin{cases} x+3\geq 0, \\ x^2-3x+2>x^2+6x+9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3\geq 0, \\ x^2-9x-x^2>9-2; \end{cases} \begin{cases} x+3\geq 0, \\ -9x>7; \end{cases} \begin{cases} x\geq -3, \\ x<-\frac{7}{9}. \end{cases}$$

Аз системаи нобаробариҳои охирон $-3 \le x < -\frac{7}{9}$ меёбад.

Аз ҳалҳои ёфташудаи $x < -3$ ва $-3 \le x < -\frac{7}{9}$ маълум мешавад, ки мачмуи $-\infty \le x < -\frac{7}{9}$ ё ки $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$ халли нобаробарии додашуда мебошад.

Чавоб: $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$-ро хал кунед.

Хал. Сохаи муайянии нобаробарии додашударо муайян мекунем:

$$x^2 - x - 12 \ge 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) \ge 0.$$

Аз ин чо:

$$\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ x-4 \ge 0; \end{cases} \begin{cases} x \ge -3, \\ x \ge 4. \end{cases} \Rightarrow x \ge 4$$

ва

$$\begin{cases} x+3 \le 0, \\ x-4 \le 0; \end{cases} \begin{cases} x \le -3, \\ x \le 4. \end{cases} \Rightarrow x \le -3.$$

Аз киматҳои ёфташудаи $x \le -3$ ва $x \ge 4$ факат мачмуи $[4; +\infty)$ сохаи муайянии нобаробарии додашуда мебошад. Бинобар он, халҳои нобаробарии додашударо дар мачмуи $x \ge 4$ дида мебароем.

Аз сабаби он, ки нобаробарӣ бо системаи нобаробариҳои

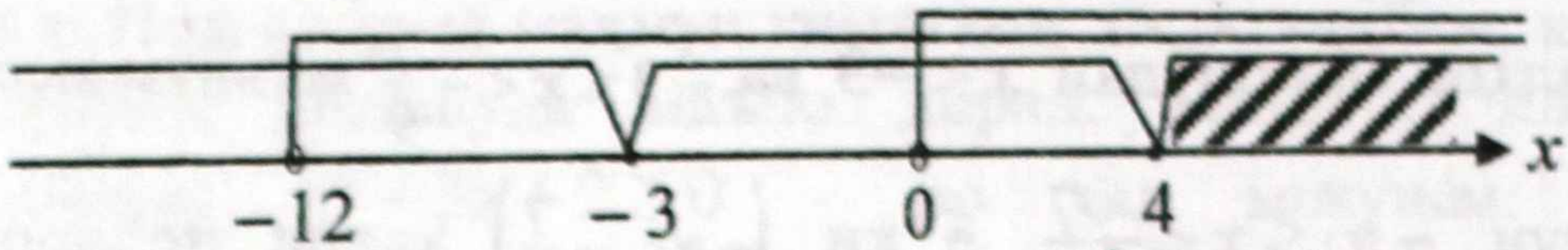
$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 12 \ge 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад, халли системаи нобаробариҳои зеринро меёбем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 12 \ge 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \ge 0, \\ x^2 - x^2 - x - 12 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \ge 0, \\ -x - 12 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \ge 0, \\ -x < 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ (x+3)(x-4) \ge 0, \\ x > -12. \end{cases}$$

Ҳалли системаи нобаробариҳои охиронро дар тири координатӣ тасвир мекунем:



Пас, ҳалли нобаробарии додашуда аз $[4;+\infty)$ мешавад.

Ҷавоб: $[4;+\infty)$.

Мисоли 3. Нобаробарии $\sqrt{3x-1}<2$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Соҳаи муайянии нобаробарии додашударо меёбем: $3x-1\geq 0;\ 3x\geq 1$ ё $x\geq\frac{1}{3}$. Аз сабаби он, ки тарафи рости нобаробарӣ адади мусбат аст, бинобар он, ду тарафи нобаробариро ба квадрат бардошта, онро ҳал мекунем:

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2<2^2;\ 3x-1<4;\ 3x<5 \text{ ё } x<\frac{5}{3}.$$

Дар ин маврид маҷмуи $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$ ҳалли нобаробарӣ шуда метавонад.

МАШҚҲО

I. Муодилаҳои ирратсионалиро ҳал кунед:

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6;$
2. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=3;$
3. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x};$
4. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6;$
5. $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=3;$
6. $\sqrt{x-1+\sqrt{x+2}}=3;$
7. $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5;$
8. $\sqrt{x^2+5}=5-x;$
9. $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-12=0;$
10. $\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{x-2}=2;$
11. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1;$
12. $\frac{x-2}{\sqrt{2x-5}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-5}.$

II. Нобаробариҳоро ирратсионалиро хал кунед:

1. $\sqrt{x^2+3x}>2;$
2. $\sqrt{x^2-7x}>-3;$
3. $\sqrt{3x-1}<\sqrt{x};$
4. $\sqrt{x^2-4x}>x-3;$
5. $\sqrt{x^2-x-12}<x;$
6. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2};$
7. $\sqrt{9x^2+6x+1}<2-x;$
8. $\sqrt{\frac{1+4x}{x}}<1.$

БОБИ X
МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

§1. Хосиятҳои асосии функсияи нишондиҳандагӣ

Аз сабаби он ки дар халли муодилаҳо ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣ аз мафҳуми функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он истифода мебаранд, бинобар он, бори дигар маълумотро доир ба функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он ба таври мухтасар ба хотир меорем:

Бигузор функсияи $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ дар мачмуи R дода шуда бошад. Он гоҳ:

1. Агар $x=0$ бошад, он гоҳ $a^0=1$ аст.
2. Барои ҳар гуна $x\in R$, $a^x>0$ мебошад.
3. Барои ҳар гуна $x_1, x_2\in R$ ва $x_1<x_2$, $a>1$:
$$a^{x_1}<a^{x_2}\Rightarrow x_1<x_2,\ a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow x_1>x_2.$$
4. Барои ҳар гуна $x_1, x_2\in R$ ва $0<a<1$:
$$a^{x_1}<a^{x_2}\Rightarrow x_1>x_2,\ a^{x_1}>a^{x_2}\Rightarrow x_1<x_2.$$
5. Барои ҳар гуна $x\in R$ ва $0<a\neq 1$:
$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2};$$
$$a^{x_1}:a^{x_2}=a^{x_1-x_2};$$
$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2}=\left(a^{x_2}\right)^{x_1}.$$
6. Барои ҳар гуна $x\in R$ ва $a>0,\ b>0$:
$$a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}.$$

§2. Муодилаи нишондиҳандагӣ

Бори дигар ба хотир меорем, ки муодилаи дилхоҳи муодилаҳои нишондиҳандагӣ бо тарзи баробаркунии асосҳои нишондиханда хал карда мешавад. Ҳангоми хал аз воситаи дохил кардани тағйирёбандаи нав ва дигаргунсозиҳо, ки муодиларо ба муодилаи содатар меоварад, истифода бурдан мумкин аст.

Муодилаи нишондиҳандагӣ гуфта, муодилаи намуди

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \left(0 < a \neq 1\right)$$

ва муодилаҳои ба ин намуд овардашавандаро меноманд.

Умуман, асоси ҳалли муодилаи нишондиҳандагии $a^{f(x)} = a^{g(x)} \left(a > 0,\ a \neq 1\right)$ ва муодилаҳои ба ин намуд овардашавандаро теоремаҳои зерин ташкил медиҳанд.

Теорема (бе исбот). Муодилаи нишондиҳандагии

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \left(0 < a \neq 1\right) \qquad (1)$$

ба муодилаи

$$f(x) = g(x) \qquad (2)$$

баробаркувва мебошад.

Аз теореми овардашуда бармеояд, ки агар ду тарафи муодилаи нишондиҳандагӣ асосҳои якхеларо дошта бошад, он гоҳ нишондиҳандаҳои асосҳоро баробар карда, муодиларо ҳал кардан мумкин аст.

Барои он, ки доир ба тарзи ҳалли муодилаҳои нишондиҳандагӣ маълумоти муфассал пайдо кунем, ҳалли якчанд муодилаҳоро меорем:

Мисоли 1. Муодилаи $3^{x^2-x} = 3^{2x-2}$ - ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар асоси хосияти функсияи нишондиҳандагӣ муодилаи додашуда ба муодилаи $x^2 - x = 2x - 2$ баробаркувва аст. Бинобар он, муодилаи квадратии зеринро ҳосил мекунем:

$$x^2 - x = 2x - 2.$$

Муодилаи ҳосилшударо бо тарзи ба ҳамзарбҳо ҷудокунӣ ҳал мекунем:

$$x(x-1) = 2(x-1);$$

$$x(x-1) - 2(x-1) = 0;$$

$$(x-1)(x-2) = 0.$$

Аз ин ҷо, $x-1=0$ ё ки $x-2=0$.

Аз муодилаҳои ҳосилшуда, $x_1 = 1$ ва $x_2 = 2$ - ро меёбем.

Санҷиш: ҳангоми $x=1$ будан, $3^{1-1} = 3^{2-2};\ 3^0 = 3^0;\ 1=1$ мешавад, пас $x=1$ ҳалли муодилаи додашуда мебошад.

Агар $x=2$ бошад, он гоҳ, $3^{4-2} = 3^{4-2};\ 3^2 = 3^2;\ 9=9$ мешавад, бинобар он, $x=2$ ҳалли муодилаи додашуда мешавад.

Ҷавоб: 1; 2.

Мисоли 2. Муодилаи $\frac{(0,5)^{x-0,5}}{\sqrt{2}} = 2 \cdot 0,25^{x-1}$ - ро хал кунед.

Хал. Дар асоси хосиятхои функсияи нишондихандагй хар ду тарафи муодиларо ба асоси $\frac{1}{2}$ меорем.

$$(0,5)^{x-0,5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot 0,25^{x-1};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-0,5+0,5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{x-1};$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$ ё ки $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$.

Аз ин чо, $x = 2x - 3$ ё ки $x = 3$ мешавад.

Чавоб: 3 .

Мисоли 3. Муодилаи $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$ - ро хал кунед.

Хал. Дар асоси хосиятхои функсияи нишондихандагй муодилаи додашударо ба намуди зерин табдил медихем:

$$2 \cdot 2^{2x} + 2^2 \cdot 2^x = 16;$$

$$2 \cdot (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x = 16$$

ё ки $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$.

Гузоришш $2^x = y$ - ро истифода кунем, муодилаи охиронро ба намуди зерин менависем:

$$y^2 + 2y - 8 = 0.$$

Муодиларо бо тарзи гурўхбандй хал мекунем:

$$y^2 + 2y \cdot 1 + 1 - 8 - 1 = 0;$$

$$(y+1)^2 - 3^2 = 0;$$

$$(y+1-3)(y+1+3) = 0;$$

$$(y-2)(y+4) = 0.$$

Аз ин чо, $y_1 = 2$ ва $y_2 = -4$ -ро хосил мекунем. Азбаски $2^x = y$ барои $\forall x$ мусбат $(2^x > 0)$ мебошад, бинобар он, аз халхои

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

Хал. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{7x-3}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{3-7x}$.

Аз ин чо: $3x-7=3-7x$; $3x+7x=3+7$; $10x=10$ ё $x=1$.

Чавоб: 1.

2. $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$

Хал. $\left(2^{-1}\right)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=\left(2^6\right)^{-1}$;

$2^{-x^2}\cdot 2^{2x+2}=2^{-6}$;

$2^{-x^2+2x+2}=2^{-6}$..

Аз ин чо, $-x^2+2x+2=-6$ ё ки $x^2-2x-8=0$.

Муодилаи охиронро бо тарзи ба ҳамзарбҳо ҷудокунӣ ҳал мекунем:

$x^2-4x+2x-8=0$;

$x(x-4)+2(x-4)=0$;

$(x+2)(x-4)=0$.

Аз ин чо, $x+2=0$ ё ки $x-4=0$ мешавад.

Аз муодилаҳои охирон қиматҳои x -ро меёбем:

$x_1=-2;\ \ x_2=4.$

Чавоб: $-2;\ 4.$

3. $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

Хал. $\frac{1}{8}\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$;

$2^{-3}\cdot 4^{2x-3}=\left(2^{0,5}\cdot 2^{-3}\right)^{-x}$;

$2^{-3}\cdot 2^{2(2x-3)}=\left(2^{0,5-3}\right)^{-x}$;

$2^{-3+4x-6}=2^{2,5x}$.

Аз ин чо, $-3+4x-6=2{,}5x$, ё ки $1{,}5x=9$ шуда, $x=6$ мешавад.

Чавоб: 6.

4. $(0{,}1)^x = 1000$.

Х а л. Муодиларо ба намуди зерин менависем:

$$(0{,}1)^x = 10^3 \text{ ё ки } 10^{-x} = 10^3$$

Аз ин чо, $-x = 3$ ё ки $x = -3$ мешавад.

Чавоб: -3.

5. $100^{4-8x} = 1$.

Х а л. $100^{4-8x} = 100^0$.

Аз ин чо, $4 - 8x = 0$ ё ки $x = 0{,}5$ мешавад.

Чавоб: 0,5.

6. $(0{,}3)^x = \sqrt[3]{0{,}027}$.

Х а л. $(0{,}3)^x = \sqrt[3]{0{,}3^3}$ ё ки $(0{,}3)^x = 0{,}3^1$. Аз ин чо: $x = 1$.

Чавоб: 1.

7. $3^{1-2x} = \frac{1}{243}$.

Х а л. $3^{1-2x} = 3^{-5}$; $1 - 2x = -5$; $-2x = -6$; $x = 3$.

Чавоб: 3.

8. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2-1}$.

Х а л. $-5 = -x^2 - 1$; $x^2 = 4$.

Аз ин чо, $x_{1,2} = \pm 2$ мешавад.

Чавоб: ± 2.

§3. Нобаробарии нишондихандагй

Хар гуна нобаробарихои нишондихандагиро ба воситаи табдилдихихо ба нобаробарии намуди

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right), (0 < a \neq 1) \qquad (1)$$

оварда, хал кардан мумкин аст. Халли нобаробарии (1) аз киматхои $a > 1$ ва $0 < a < 1$ вобаста мебошад.

Хангоми хал намудани нобаробарихои нишондихандагии намуди (1) ин ду теоремаро ба хотир овардан лозим аст:

Теоремаи 1 (бе исбот). *Агар* $a > 1$ *бошад, он гох, нобаробарии*

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right)$$

ба нобаробарии

$$f(x) > g(x) \ (f(x) < g(x)) \qquad (2)$$

баробарқувва мебошад.

Теореман 2 (бе исбот). *Агар* $0 < a < 1$ *бошад, он гоҳ, нобаробарии*

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \ \left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right) \qquad (3)$$

ба нобаробарии

$$f(x) < g(x) \ (f(x) > g(x)) \qquad (4)$$

баробарқувва мебошад.

Акнун тарзи ҳалли якчанд нобаробариҳои нишондиҳандагиро дар зер меорем.

Мисоли 1. Нобаробарии $27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Нобаробарии додашударо дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ дар намуди зерин менависем:

$$3^{3x} \cdot 3^{1-x} < 3^{-1}$$

ё ки, $3^{1+2x} < 3^{-1}$.

Азбаски, асоси функсияи нишондиҳандагӣ $a = 3 > 1$ мебошад, бинобар он, дар асоси хосияти функсияи нишондиҳандагӣ ҳосил мекунем:

$1 + 2x < -1$.

Нобаробарии $1 + 2x < -1$- ро ҳал карда, маҷмуи ҳалҳои онро меёбем:

$2 + 2x < 0$; $2x < -2$ ё ки, $x < -1$.

Ҷавоб: $(-\infty; -1)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $2^x \cdot 5^x > (0,1) \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ тарафҳои рост ва чапи нобаробариро табдил медиҳем:

$$2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x = 10^x; \ 0,1 = 10^{-1};$$

$$\left(10^{x-1}\right)^5 = 10^{5(x-1)} = 10^{5x-5}.$$

Акнун нобаробарии додашуда ба намуди зерин доро мешавад:

$10^x > 10^{-1} \cdot 10^{5x-5}$ ва ё ки $10^x > 10^{5x-6}$.

Нобаробарии охирон ба нобаробарии $x > 5x - 6$ баробаркувва аст.

Инак, нобаробарии охиронро хал карда, мачмуи халхояшро меёбем:

$x > 5x - 6;\ -4x > -6$, ё ки $x < 1{,}5$.

Ҷавоб: $(-\infty;\ 1{,}5)$.

Мисоли 3. Нобаробарии $3^{x^2-2x} - \frac{1}{9} \geq 0$ -ро хал кунед.

Хал. Азбаски, $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ аст, пас, нобаробарии додашударо ба намуди зерин табдил медиҳем:

$$3^{x^2-2x} \geq 3^{-2}.$$

Дар асоси хосияти функсияи нишондиҳандагӣ ин нобаробарӣ бо нобаробарии $x^2 - 2x \geq -2$ ё ки $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ баробаркуввa аст.

Дар тарафи чапи нобаробарии $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ квадрати пурра чудо карда, нобаробарии $x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 0$, ё ки $(x-1)^2 + 1 \geq 0$- ро хосил мекунем, ки барои хар гуна $\forall x$ дуруст аст. Инак, мачмуи халҳои ин нобаробарӣ фосилаи $(-\infty;\ +\infty)$ мебошад.

Азбаски, нобаробарии додашуда, бо нобаробарии $(x-1)^2 + 1 \geq 0$ баробаркуввa аст, бинобар он, мачмуи халҳои ёфташуда, мачмуи халҳои нобаробарии додашуда мешавад.

Ҷавоб: $(-\infty;\ +\infty)$.

Мисоли 4. Нобаробарии $2^{2x-1} > 1 - 2^{x-1}$ -ро хал кунед.

Хал. Дар асоси хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ, нобаробарии додашуда намуди зеринро мегирад:

$$2^{2x-1} > 1 - 2^{x-1};$$

$$2^{2x} \cdot 2^{-1} > 1 - 2^{x} \cdot 2^{-1}$$

$$(2^{x})^2 \cdot 2^{-1} + 2^{x} \cdot 2^{-1} > 1.$$

Дар нобаробарии хосилшуда, $2^x = y$ - ро иваз карда, нобаробарии квадратии $y^2 + y - 2 > 0$ - ро хосил мекунем. Нобаробарии хосилшуда ба системаҳои нобаробариҳои

$$\begin{cases} y+2>0, \\ y-1>0. \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} y+2<0, \\ y-1<0 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад.

Ҳалҳои нобаробарии системаи якум $y>1$ ва нобаробарии системаи дуюм $y<-2$ мебошанд. Азбаски 2^x барои $\forall x$ мусбат аст, пас, ҳалли нобаробарии аввала $y>1$, ҳалли нобаробарии $2^x>1$ ё ки $x>0$ аст. Ҳалли ёфташуда маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(0;\ +\infty)$.

Аз ҳалли нобаробариҳои дар боло муоина кардашуда ва ҳам аз хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ истифода бурда, ҳалҳои нобаробариҳои зеринро меорем.

1. $36^{1-x}<216$.

Ҳ а л. $36^{1-x}<6^3$; $6^{2-2x}<6^3$.

Аз ин ҷо, $2-2x<3$; $-2x<3-2$; $-2x<1$, ё ки $x>-0,5$.

Ҷавоб: $(-0,5;+\infty)$.

2. $81^{1-x}<3$.

Ҳ а л. Нобаробариро ба намуди зерин меорем: $3^{4(1-x)}<3^1$.

Аз ин ҷо, $4(1-x)<1$; $4-4x<1$; $-4x<1-4$; $-4x<-3$, ё $x>\frac{3}{4}$ мешавад.

Ҷавоб: $(0,75;+\infty)$.

3. $16^{1-2x}>4$.

Ҳ а л. $4^{2-4x}>4^1$; $2-4x>1$; $-4x>1-2$; $-4x>-1$.

Аз ин ҷо, $x<0,25$ мешавад.

Ҷавоб: $(-\infty;\ 0,25)$.

4. $(0,3)^x<0,027$.

Ҳ а л. Нобаробариро ба намуди зерин менависем: $(0,3)^x<(0,3)^3$. Азбаски, асоси дарача $a=0,3<1$ аст, бинобар ин, $x>3$ мешавад.

Ҷавоб: $(3;+\infty)$.

5. $(0{,}5)^x \le 128$.

Ҳал. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 128$; $2^{-x} \le 2^7$. Аз ин чо, $-x \le 7$ ё ки $x \ge -7$, мешавад.

Ҷавоб: $[-7; +\infty)$.

6. $\left(\frac{2}{7}\right)^x < 12{,}25$.

Ҳал. $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \frac{1225}{100}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \frac{49}{4}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{7}{2}\right)^2$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$. Асбаски, асоси дарача хурд аз 1 аст, бинобар он, $x > -2$ мешавад.

Ҷавоб: $(-2; -\infty)$.

7. $2^{x^3-3} < 32$.

Ҳал. $2^{x^3-3} < 2^5$; $x^3 - 3 < 5$; $x^3 < 8$; $x^3 < 2^3$;

$$x^3 - 2^3 < 0;$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) < 0.$$

Асбасти, дискриминанти $x^2 + 2x + 4$ хурд аз нол аст, бинобар ин, ҳар ду тарафи нобаробарии охиронро ба $x^2 + 2x + 4$ тақсим карда, нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$x - 2 < 0$, ё ки $x < 2$ мешавад.

Ҷавоб: $(-\infty; 2)$.

8. $3^{x^2-3x} > 81$

Ҳал. $3^{x^2-3x} > 3^4$. Аз ин чо, $x^2 - 3x > 4$ мешавад.

$$x^2 - 3x - 4 > 0;$$

$$x^2 + x - 4x - 4 > 0;$$

$$x(x+1) - 4(x+1) > 0;$$

$$(x+1)(x-4) > 0.$$

Нобаробарии ҳосилшуда ба системаи нобаробарихои зерин баробарқувва мебошад:

а) $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x-4 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1, \\ x > 4. \end{cases}$

Аз ин чо, $x > 4$ мешавад.

б) $\begin{cases} x+1<0, \\ x-4<0; \end{cases} \begin{cases} x<-1, \\ x<4. \end{cases}$

Аз ин ҷо, $x<-1$ мешавад.

Бинобар он, қиматҳои $x<-1$ ва $x>4$ ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошанд.

Ҷавоб: $(-\infty;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$.

МАШҚҲО

1. Муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

а) $\sqrt{2^x}=1024$;

б) $2^x\cdot 3^x=216$;

в) $10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950$;

г) $4^x+2^{x+1}=24$;

г) $5^{1+x^3}-5^{1-x^3}=24$;

д) $3^{-2x+1}+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$;

е) $2^{-2x+3}=2^{-x+1}+1$;

ё) $6\cdot 5^{-2x+3}-1=5^{-x+1}$;

ж) $3\cdot 2^{2x}+6^x-2\cdot 3^{2x}=0$;

з) $5\cdot 3^{2x}+2\cdot 15^x-3\cdot 5^{2x}=0$;

и) $2\cdot 5^{\frac{2}{x}}-3\cdot 10^{\frac{1}{x}}-5\cdot 2^{\frac{2}{x}}=0$;

й) $14\cdot 4^{\frac{x+1}{x}}+3\cdot 14^{\frac{x+1}{x}}-2\cdot 49^{\frac{x+1}{x}}=0$;

й) $27\cdot 2^{4(x^2+1)}-3\cdot 6^{2(x^2+1)}-4\cdot 3^{4(x^2+1)}=0$;

к) $9\cdot 256^{\frac{1}{x}}-6\cdot 144^{\frac{1}{x}}-8\cdot 81^{\frac{1}{x}}=0$;

к) $10\cdot 81^x+9\cdot 225^x-9\cdot 625^x=0$;

л) $9\cdot 16^x-7\cdot 12^x-16\cdot 9^x=0$;

м) $3^{x+1}-2=\sqrt{10-3^{x+5}}$;

н) $5^x-1=\sqrt{6+2\cdot 5^x}$.

2. Маҷмуи ҳалҳои нобаробариҳои зеринро ёбед:

а) $16^x>0{,}125$;

б) $\left(\frac{1}{49}\right)^{6x}>7\sqrt[3]{49}$;

в) $(0{,}1)^x=100$;

г) $10^{x-2}>0{,}01$;

г) $0{,}1\le 10^x\le 10000$;

д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}}>25$.

БОБИ XI
МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ ЛОГАРИФМӢ

§1. Логарифмиронидан ва потенсиронидан

Бори дигар таъриф ва хосиятҳои асосии логарифмро мухтасар хотиррасон мекунем.

Муодилаи

$$a^x = N \qquad (1)$$

- ро дида мебароем, ки дар он ҷо, a $(0 < a \neq 1)$ ва N - ададҳо мебошанд.

а) Ҳангоми $N \leq 0$ будан, муодилаи (1) ҳал надорад.

б) Ҳангоми $N > 0$ будан, муодилаи (1) соҳиби ҳалли ягона мебошад.

Ҳалли муодилаи $a^x = N$ - ро логарифми ададии N аз рӯи асоси a $(a > 0,\ a \neq 1)$ меноманд.

Таъриф. *Логарифми ададии N аз рӯи асоси дилхоҳи a $(a > 0,\ a \neq 1)$ гуфта, нишондиҳандаи дараҷа C - ро меноманд, ки барои ҳосил кардани ададии N ададии a - ро ба ҳамон дараҷа C бардоштан лозим аст.*

$$\log_a N = C \Leftrightarrow N = a^C \qquad (2)$$

Дар ин ҷо, ишорати $\log_a N$ - логарифми ададии N аз рӯи асоси a - ро мефаҳмонад, C - нишондиҳандаи дараҷа мебошад, ки ҳангоми a - ро ба ҳамон дараҷа бардоштан, ададии N ҳосил мешавад.

Масалан, мувофиқи таъриф $\log_2 16 = 4$, чунки, $2^4 = 16$; $\log_3 \frac{1}{27} = -3$, чунки, $3^{-3} = \frac{1}{27}$ ва $\log_7 1 = 0$, чунки, $7^0 = 1$ мебошад.

Бояд дар хотир дошт, ки логарифми ададии манфӣ ва нол маъно надорад.

Умуман, ифодаи $\log_a N$ $(0 < a \neq 1)$, фақат ҳангоми $N > 0$ будан, маъно дорад.

Агар дар таъриф $a = 10$ бошад, он гоҳ логарифми ададии N аз рӯи асоси 10-ро логарифми даҳӣ номида, бо $\lg N$ ишорат мекунанд:

$$\lg N = C \Leftrightarrow N = 10^C \qquad (3)$$

Масалан, $\lg 10 = 1$, чунки, $10^1 = 10$; $\lg 1 = 0$, чунки, $10^0 = 1$; $\lg 100 = 2$, чунки, $10^2 = 100$; $\lg 10000 = 4$, чунки, $10^4 = 10000$; $\lg 0{,}1 = -1$, чунки, $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $\lg(0{,}001) = -3$, чунки, $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ мешавад.

Агар дар таъриф $a = e$ бошад, он гоҳ, логарифми адади N аз рӯи асоси e -ро, ки логарифми натуралӣ номида, бо $\ln N$ ишорат мекунанд:

$$\ln N = C \Leftrightarrow N = e^C .$$

Масалан, $\ln e = 1$; $\ln e^k = k$; $\ln \frac{1}{e} = -1$; $\ln 1 = 0$ мебошад.

МАШҚҲО

а) $\log_3(2x) = \log_3(x+4) \Rightarrow 2x = x+4 \Rightarrow x = 4$;

б) $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 \Rightarrow x = 32$;

в) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$;

г) $\log_4 n = \log_2 \sqrt{n} = \frac{1}{2}\log_2 n$;

г) $\log_4 n = \log_{2^2} n = \frac{1}{2}\log_2 n$.

I. Хосиятҳои логарифм дар ҳисобкунии ифодаҳои мураккаб, ҳалли муодила ва нобаробариҳои логарифмӣ мавқеи муҳимро мебозад. Масалан, ифодаҳои мураккаб бо ёрии хосиятҳои логарифм, ба воситаи логарифмҳои ададҳои дар он буда, ифода карда, ҳисоб карда мешаванд. Ин хел намуди дигаргунсозиро логарифмиронидани ифода меноманд.

Мисоли 1. Ифодаи $A = \frac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^2}}{c \cdot \sqrt[4]{k \cdot d^3}}$-ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Ду тарафи ифодаи додашударо аз рӯи логарифми асосаш дилхоҳи n $(n > 0, n \neq 1)$ логарифмиронида, баъд дар асоси хосияти логарифма онро дар намуди зерин менависем:

$$\log_n A = \log_n \frac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^2}}{c \cdot \sqrt[4]{k \cdot d^3}};$$

$$\log_n A = \log_n \left(a^3 \cdot \sqrt[5]{b^2}\right) - \log_n \left(c \cdot \sqrt[4]{k \cdot d^3}\right).$$

Дар асоси хосиятҳои логарифмҳо тарафи рости баробарии охиронро табдил медиҳем:

$$\log_n\left(a^3\cdot\sqrt[5]{b^2}\right)=\log_n a^3+\log_n\sqrt[5]{b^2}=$$

$$=3\log_n a+\log_n b^{\frac{2}{5}}=3\log_n a+\frac{2}{5}\log_n b.$$

$$\log_n\left(c\cdot\sqrt[4]{k\cdot d^3}\right)=\log_n c+\log_n\sqrt[4]{k\cdot d^3}=\log_n c+\log_n\left(kd^3\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\log_n c+\frac{1}{4}\log_n\left(kd^3\right)=\log_n c+\frac{1}{4}\left(\log_n k+3\log_n d\right).$$

Дар натиҷа, баробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\log_n A=3\log_n a+\frac{2}{5}\log_n b-\log_n c-\frac{1}{4}\left(\log_n k+3\log_n d\right).$$

Дар ин ҷо, ҳисобкунии логарифми ифодаи A нисбат ба ҳисобкунии логарифмҳои ададҳои a, b, c, d ва k оварда шудааст.

Мисоли 2. Ифодаи $A=\sqrt[3]{\dfrac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}}$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Монанди мисоли якум, ифодаи додашударо аз рӯи логарифми асосаш n $(n>0, n\neq 1)$ логарифмиронида, мувофиқи хосиятҳои логарифм онро сода мекунем:

$$\log_n A=\log_n\sqrt[3]{\frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}}=$$

$$=\frac{1}{3}\log_n\frac{a^2(a+b)^2}{b(a-b)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\log_n a^2(a+b)^2-\log_n b(a-b)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\log_n a^2+\log_n(a+b)^2-\left(\log_n b+\log_n(a-b)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\log_n a+2\log_n(a+b)-\log_n b-\log_n(a-b)\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\log_n a-\frac{1}{3}\log_n b+\frac{2}{3}\log_n(a+b)-\frac{1}{3}\log_n(a-b).$$

$$\log_n A=\frac{2}{3}\log_n(a+b)-\frac{1}{3}\log_n(a-b)+\frac{2}{3}\log_n a-\frac{1}{3}\log_n b.$$

IV. Потенсиронидан. Дар ҳалли бисёр масъалаҳои амалӣ ва назарӣ лозим меояд, ки дар ҳисобкуниҳо табдилоти ба амали логарифмиронидан чаппаро ичро намоем.

Агар якчанд логарифми ифодаҳои содаи асосҳои якхела доштаро аз рӯи аломаташон дар асоси хосиятҳои логарифм ба логарифми як ифода табдил дихем, он гоҳ аз логарифм озод намудани ифода, яъне, амали ба амали логарифмиронидан чаппаро, амали потенсиронидан меноманд.

Масалан, агар $a>0,\ b>0,\ c>0$ бошад, он гоҳ,

$$\log_n A=\log_n a+\log_n b-\log_n c\Rightarrow \log_n A=\log_n \frac{a\cdot b}{c}\Rightarrow A=\frac{a\cdot b}{c}$$

мешавад.

Мисоли 3. A - ро ёбед, агар,

$$\log_n A=2\log_n a+\frac{1}{2}\log_n b-\frac{2}{3}\log_n c-\frac{1}{3}\log_n d$$

бошад.

Ҳал. Баробарии додашударо дар асоси хосиятҳои логарифм бо логарифми як ифода, ки намуди

$$\log_n A=\log_n a^2+\log_n \sqrt{b}-\frac{1}{3}\left(\log_n c^2+\log_n d\right)=$$

$$=\log_n\left(a^2\cdot\sqrt{b}\right)-\frac{1}{3}\log_n\left(c^2\cdot d\right)=$$

$$=\log_n\left(a^2\cdot\sqrt{b}\right)-\log_n\sqrt[3]{c^2\cdot d}=$$

$$=\log_n\frac{a^2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2\cdot d}}$$

-ро дорад, навишта, дар натича, $\log_n A=\log_n\frac{a^2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2\cdot d}}$ - ро пайдо мекунем. Аз сабаби он, ки ду тарафи баробарии ҳосилшуда логарифмҳои асосашон якхеларо доранд, бинобар он, онро потенсиронида ҳосил мекунем:

$$A=\frac{a^2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2\cdot d}}.$$

Мисоли 4. Ҳангоми $\log_a A=\log_a c+5$ будан, A - ро ёбед.

Ҳал. Дар асоси хосияти логарифм $n=\log_a a^n$ $(\log_a a=1)$ баробарии додашударо дар намуди

$$\log_a A = \log_a c + \log_a a^5$$

навишта, дар натича

$$\log_a A = \log_a\left(c \cdot a^5\right)$$

-ро пайдо мекунем. Баробарии охиронро потенсиронида, дорои

$$A = c \cdot a^5$$

мешавем.

Мисоли 5. Агар $\log_5 x = 2\log_5 6 + 3\log_5 b - 2\log_5 3$ бошад, x - ро ёбед.

Ҳал. Дар ифодаи додашуда, хосиятҳои логарифмро татбиқ намуда, баробариҳои зеринро навиштан мумкин аст:

$$\log_5 x = \log_5 6^2 + 3\log_5 b - \log_5 3^2;$$

$$\log_5 x = \log_5 36 + \log_5 b^3 - \log_5 9;$$

$$\log_5 x = \log_5 \frac{36 \cdot b^3}{9};$$

$$\log_5 x = \log_5\left(4b^3\right)$$

Баробарии ҳосилшударо потенсиронида, $x = 4b^3$ -ро ҳосил мекунем.

§2. Муодилаҳои логарифмӣ

Муодилаи логарифмӣ гуфта, муодилаи намуди

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \left(0 < a \neq 1\right) \qquad (1)$$

ва муодилаи ба ин намуд овардашавандаро меноманд.

Барои муодилаи логарифмиро ҳал кардан пеш аз ҳама соҳаи қиматҳои имконпазири функсияҳои $f(x)$, $g(x)$ ва параметрҳоро тадқиқ кардан ва дар асоси хосиятҳои логарифм муодилаи додашударо ба намуди (1) овардан лозим аст.

Ду теоремаро меорем, ки истифодаи онҳо дар иҷрои корҳои амалӣ фоиданок мебошад.

Теореми 1 (бе исбот). *Муодилаи* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *ба системаи омехтаи*

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \qquad (2)$$

баробаркувва мебошад.

Аз тарафи дигар системаи (2) дар навбати худ ба ҳар яке аз системаҳои

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \tag{3}$$

баробаркувва мебошад.

Агар муодила дар намуди

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x) \tag{4}$$

дода шуда бошад, он гоҳ, дар асоси хосияти логарифм муодиларо дар намуди

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a h(x) \tag{5}$$

навиштан мумкин аст. Дар ин ҳолат муодилаҳои (4) ва (5) баробаркувва нашуданашон ҳам мумкин, чунки, соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи муодилаи (4) аз рӯи системаи

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

ёфта мешавад, аммо соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи муодилаи (5) бошад, аз рӯи $f(x) \cdot g(x) > 0$ ёфта мешавад, ки вай дар навбати худ бо системаҳои нобаробариҳои

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ё} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \tag{6}$$

баробаркувва мебошад. Ҳангоми ҳалли муодилаи (5) решаи бегона пайдо шуданаш мумкин аст, бинобар он аз решаҳои ёфташуда, он решаҳо ҳалли муодилаи (4) мешаванд, ки онҳо ба соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбандаи муодилаи (4) тааллуқ дошта бошанд, яъне, системаи омехтаи

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ f(x) g(x) = h(x) \end{cases}$$

- ро қаноат кунонанд.

Теореман 2 (бе исбот). *Муодилаи*

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

ба системаи омехтаи

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)=g(x), \\ a>0, \\ a\neq 1 \end{cases}$$

баробарқувва мебошад.

Мисоли 1. Муодилаи $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Соҳаи қиматҳои равои муодиларо меёбем:

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-4, \\ x>-1,5, \\ x<0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1,5, \\ x<0,5. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, СҚР-и муодила $-1,5<x<0,5$ мешавад.

Акнун муодилаии матлубро ҳал мекунем:

$$\lg((x+4)\cdot(2x+3))=\lg(1-2x).$$

Баробарии охиронро потенсиронида, ҳосил мекунем:

$$(x+4)\cdot(2x+3)=(1-2x).$$

Аз ин ҷо, $2x^2+13x+11=0$ шуда, решаҳои он, $x_1=-5,5$ ва $x_2=-1$ мебошад.

Азбаски қимати $x=-1$ ба фосилаи $(-1,5;\ 0,5)$ тааллуқ дорад, пас, $x=-1$ ҳалли муодилаи додашуда мебошад. Қимати $x=-5,5$ ба фосилаи $(-1,5;\ 0,5)$ тааллуқ надорад, бинобар он, $x=-5,5$ барои муодилаи матлуб ҳалли бегона мебошад.

Ҷавоб: -1.

Мисоли 2. Муодилаи $\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Соҳаи қиматҳои равои муодиларо меёбем:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+14>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2, \\ x>-14 \end{cases}$$ ё ки СҚР $(-2;\ +\infty)$ мешавад.

Маҷмуи қиматҳои x, ки барои онҳо муодила маъно дорад, фосилаи $(-2;\ +\infty)$ аст, чунки, функсияи логарифмӣ дар соҳаи

ададҳои ҳақиқӣ, фақат барои аргументҳои мусбат муайян карда шудааст.

Акнун тарафи рости муодилаи матлубро дар асоси хосияти логарифм дар намуди $6=\log_2 2^6$ навишта, баъд дар асоси хосияти логарифм, муодиларо дар намуди зерин меорем:

$$\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=\log_2 2^6;$$

$$\log_2((x+14)\cdot(x+2))=\log_2 2^6.$$

Муодилаи охиронро потенсиронида, дорои $(x+14)\cdot(x+2)=2^6$ мешавем. Аз ин ҷо, $x^2+16x-36=0$ шуда, решаҳои он ба $x_1=-18$ ва $x_2=2$ баробар мешаванд.

Азбаски, аз решаҳои ёфташуда, $x_2=2$ ба фосилаи $(-2;\ +\infty)$ тааллуқ дошта, $x_1=-18$ ба фосилаи $(-2;\ +\infty)$ тааллуқ надорад, бинобар он, решаи $x_2=2$ ҳалли муодилаи логарифмӣ мешавад.

Ҷавоб: 2.

Мисоли 3. Муодилаи $\lg(x^2-3x-5)=\lg(7-2x)$- ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодилаи додашуда, дар асоси шарти теоремаи 1 ба системаи омехтаи

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x, \\ x^2-3x-5>0, \\ 7-2x>0 \end{cases} \quad \text{ё ки} \quad \begin{cases} x^2-3x-5=7-2x, \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад. Системаи омехтаро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 7-2x>0, \\ x^2-3x-5=7-2x; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x>-7, \\ x^2-x-12=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3{,}5, \\ (x+3)(x-4)=0. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $\begin{cases} x<3{,}5, \\ x=-3. \end{cases}$ ё ки $\begin{cases} x<3{,}5, \\ x=4 \end{cases}$ мешавад.

Решаи $x=4$ ба СҚР дохил намешавад. Бинобар он, фақат решаи $x=-3$ нобаробарии $x<3{,}5$ - ро қаноат мекунонад.

Ҷавоб: -3.

Мисоли 4. Муодилаи $x^{\lg x-1}=100$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Маҷмуи қиматҳои x, дар фосилаи $(0;\ +\infty)$ муайян аст.

Он гоҳ, ҳар ду тарафи муодилаи додашударо бо логарифми асосаш 10 логарифмиронида, ҳосил мекунем:

$$\lg x^{\lg x-1} = \lg 100;$$

$$(\lg x-1)\lg x = \lg 100;$$

$$(\lg x-1)\lg x = \lg 10^2;$$

$$(\lg x-1)\lg x = 2\lg 10;$$

$$(\lg x-1)\lg x = 2;$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0.$$

Дар баробарии охирон $\lg x = y$-ро ишорат карда, муодилаи квадратии $y^2 - y - 2 = 0$ - ро ҳосил мекунем, ки решаҳояш $y_1 = -1$ ва $y_2 = 2$ мебошанд. Решаҳои $y_1 = -1$ ва $y_2 = 2$ - ро ба $\lg x = y$ гузошта, қиматҳои x - ро меёбем:

1) Ҳангоми $y_1 = -1$: $\lg x_1 = -1$; $\lg x_1 = \lg 10^{-1}$;

$$x_1 = 10^{-1};\ x_1 = 0{,}1.$$

2) Ҳангоми $y_2 = 2$: $\lg x_2 = 2$; $\lg x_2 = \lg 10^2$;

$$\lg x_2 = \lg 100;\ x_2 = 100.$$

Азбаски, қиматҳои $x = 0{,}1$ ва $x = 100$ ба фосилаи $(0;\ +\infty)$ тааллуқ доранд, бинобар он, $x = 0{,}1$ ва $x = 100$ ҳалҳои муодилаи додашуда мебошанд.

Ҷавоб: 0,1; 100.

Мисоли 5. Муодилаи $\log_4(x+12)\log_x 2 = 1$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Муодила барои ҳамаи қиматҳои $x > 0$ ва $x \neq 1$ муайян аст. Барои ҳал намудани муодила, аввал онро ба асосҳои якхела меоварем. Бинобар ин, $\log_x 2$- ро ба логарифми асосаш 4 меорем.

$$\log_x 2 = \frac{\log_4 2}{\log_4 x} = \frac{\log_4 \sqrt{4}}{\log_4 x} = \frac{\frac{1}{2}\log_4 4}{\log_4 x} = \frac{1}{2\log_4 x} = \frac{1}{\log_4 x^2}.$$

Инак, муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$$\log_4(x+12)\cdot\frac{1}{\log_4 x^2} = 1.$$

Ду тарафи муодилаи ҳосилшударо ба $\log_4 x^2$ зарб зада, муодилаи

$$\log_4(x+12)=\log_4 x^2$$

-ро пайдо мекунем. Муодилаи охиронро потенсиронида ба $x+12=x^2$ доро мешавем. Аз ин ҷо, $x^2-x-12=0$ шуда, решаҳояш $x_1=-3$ ва $x_2=4$ мешавад. Аз сабаби он, ки x мусбат аст, фақат $x=4$ ҳалли муодилаи додашуда мешавад.

Ҷавоб: 4.

Мисоли 6. Муодилаи $\log_2^2 x-\log_{\sqrt{2}} x+2=0$-ро ҳал кунед.

Ҳал. СҚР: $x>0$. Дар ҷамъшавандаи дуюм ба асоси 2 гузашта, гузориши $\log_2 x=y$-ро истифода мекунем, он гоҳ

$$\log_{\sqrt{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt[3]{2}}=\frac{\log_2 x}{\frac{1}{3}\log_2 2}=3\log_2 x=3y$$

мешавад. Акнун муодилаи додашударо ба намуди $y^2-3y+2=0$ навишта мешавад. Решаҳои муодилаи квадратии ҳосилшуда ададҳои 1 ва 2 мебошанд. Муодилаҳои $\log_2 x=1$ ва $\log_2 x=2$-ро ҳал карда, меёбем:

$x_1=2^1=2$ ва $x_2=2^2=4$.

Ҷавоб: 2; 4.

Мисоли 7. Муодилаи $\log_{(x+4)}(x^2-1)=\log_{(x+4)}(5-x)$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Барои ҳал намудани муодила аз шарти теоремаи 2 истифода мебарем.

Муодила дар асоси теоремаи 2 ба системаҳои зерин баробаркувва мебошанд:

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ (x-1)(x+1)>0, \\ x<5, \\ x>-4, \\ x\neq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x>1, \\ x<-1, \\ x<5, \\ x\neq -3. \end{cases}$$

Пас, СКР $(-4;-3)\cup(-3;-1)\cup(1;5)$ мешавад. Решаҳои муодилаи квадратии $x^2+x-6=0$ ба $x_1=2$ ва $x_2=-3$ баробар мебошанд. Аз решаҳои ёфташуда, фақат қимати $x_1=2$ ҳалли муодила шуда метавонад, чунки, $x=2$ ҳамаи дигар нобаробариҳои дар системаи омехта бударо қаноат мекунонад.

Ҷавоб: 2 .

§3. Нобаробариҳои логарифмӣ

Ҳар гуна нобаробариҳои логарифмиро бо ёрии табдилдиҳиҳо ба намуди

$$\log_a f(x)>\log_a g(x),\ (0<a\neq 1)$$

овардан мумкин аст.

Ҳангоми ҳал намудани нобаробариҳои логарифмӣ ҳам аз хосиятҳои функсияи логарифмӣ истифода мебаранд. Дар ин ҷо ду теоремаро (бе исбот) меорем, ки истифодаи онҳо ҳангоми ҳалли нобаробариҳои логарифмӣ зарур аст.

Теореман 1 (бе исбот). *Агар* $a>1$ *бошад, он гоҳ, нобаробарии*

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)$$

ба системаи нобаробариҳои

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>g(x) \end{cases}$$

баробарқуввa мебошад.

Теореман 2 (бе исбот). *Агар* $0<a<1$ *бошад, он ҷоҳ, нобаробарии*

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)$$

ба системаи нобаробариҳои

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g(x) \end{cases}$$

баробарқуввa мебошад.

Мисоли 1. Нобаробарии $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-4x-14\right)\leq -1$-ро ҳал кунед.

Ҳ а л. Аз айният $-1=\log_{\frac{1}{2}} 2$ истифода бурда, нобаробариро дар намуди

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-4x-14\right)\le \log_{\frac{1}{2}} 2$$

менависем. Азбаски, асосҳои логарифм ададаи аз воҳид хурд аст, пас, дар асоси теореман 2 нобаробарии

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-4x-14\right)\le \log_{\frac{1}{2}} 2$$

ба системаи

$$\begin{cases} 2x^2-4x-14>0, \\ 2x^2-4x-14\ge 2 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад.

Аз сабаби он, ки система ба нобаробарии $2x^2-4x-14\ge 2$ баробаркувва мебошад, пас, аз нобаробарии $2x^2-4x-14\ge 2$ ҳосил мекунем:

$$2x^2-4x-14-2\ge 0;$$

$$x^2-2x-8\ge 0;$$

$$(x+2)(x-4)\ge 0.$$

Пас, қиматҳои $x\le -2$ ва $x\ge 4$ ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошанд. Аз ин ҷо, маҷмуи $(-\infty;\ -2]\cup[4;\ +\infty)$ ҳалли нобаробарии додашуда мебошад.

М и с о л и 2. Нобаробарии $x^{\lg x}>10^4$ -ро ҳал кунед.

Ҳ а л. Маҷмуи қиматҳои x, ба фосилаи $(0;\ +\infty)$ мутаалликӣ аст. Пас, нобаробарии додашударо бо логарифми асосаш 10 логарифмиронида ҳосил мекунем:

$$\lg x^{\lg x}>\lg 10^4;$$

$$\lg x\lg x>\lg 10^4;$$

$$\lg x\lg x>4\lg 10;$$

$$\lg^2 x>4;$$

$$\lg^2 x-2^2>0;$$

$$(\lg x-2)(\lg x+2)>0.$$

Нобаробарии охирон ба ду системаи нобаробариҳои зерин баробаркувва мебошад:

а) $\begin{cases}\lg x-2>0,\\ \lg x+2>0;\end{cases}\ \begin{cases}\lg x>2,\\ \lg x>-2;\end{cases}\ \begin{cases}x>10^2,\\ x>10^{-2}.\end{cases}$ Аз ин ҷо: $x>100$.

б) $\begin{cases}\lg x-2<0,\\ \lg x+2<0;\end{cases}\ \begin{cases}\lg x<2,\\ \lg x<-2;\end{cases}\ \begin{cases}x<10^2,\\ x<10^{-2}.\end{cases}$ Аз ин ҷо: $x<0{,}01$.

Азбаски, x мусбат аст, бинобар он фосилаи $(0;\ 0{,}01)\cup(100;\ +\infty)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(0;\ 0{,}01)\cup(100;\ +\infty)$.

Мисоли 3. Муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

1. $\lg\frac{x}{4}=-2$.

Ҳал. СҚР: $\frac{x}{4}>0$, ё ки $x>0$. $\frac{x}{4}=10^{-2}$; $\frac{x}{4}=\frac{1}{100}$; $x=\frac{1}{25}$.

Ҷавоб: 0,25.

2. $\lg(x^2-26)=1$.

Ҳал. СҚР: $(-\infty;-\sqrt{26})\cup(\sqrt{26};+\infty)$. $x^2-26=10$; $x^2=36$.

Аз ин ҷо $x_1=-6$; $x_2=6$.

Ҷавоб: $-6;\ 6$.

3. $\lg(x^2+1)=1$.

Ҳал. СҚР: $(-\infty;\ +\infty)$. $x^2+1=10$; $x^2=9$, ё ки $x_1=-3$ ва $x_2=3$.

Ҷавоб: $-3;\ 3$.

4. $\lg(676-x^2)=2$.

Ҳал. СҚР: $(-26;\ 26)$. $676-x^2=10^2$; $676-x^2=100$; $x^2=576$; $x_1=-24$; $x_2=24$.

Ҷавоб: $-24;\ 24$.

5. $\lg x=\lg 2{,}4+\lg 15$.

Ҳал. СҚР: $x>0$. 5. $\lg x=\lg(2{,}4\cdot 15)$; $x=2{,}4\cdot 15$ ё $x=36$.

Ҷавоб: 36.

6. $\lg(2x+10)=4\lg 2+\lg 3$.

Ҳал. СҚР: $2x+10>0$, ё ки $2x>-5$.

$\lg(2x+10)=\lg(2^4\cdot 3)$;

$2x+10=48;\ 2x=38;\ x=19.$

Ҷавоб: 19.

7. $\lg(5-x)=\frac{1}{3}\lg 27-1.$

Ҳал. СҚР: $5-x>0$, ё кн $x<5$. $\lg(5-x)=\lg 27^{\frac{1}{3}}-1;$

$\lg(5-x)=\lg\sqrt[3]{27}-1;\ \lg(5-x)=\lg 3-\lg 10;\ \lg(5-x)=\lg\frac{3}{10};$

$5-x=\frac{3}{10};\ 5-\frac{3}{10}=x;\ x=\frac{50-3}{10};\ x=\frac{47}{10}.$

Ҷавоб: 4,7.

8. $\lg x=\frac{1}{3}\lg 24+\frac{2}{3}\lg 6.$

Ҳал. СҚР: $x>0.$ $\lg x=\lg\left(\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{6^2}\right);\ x=\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{6^2};$

$x=\sqrt[3]{24\cdot 36}=\sqrt[3]{6\cdot 4\cdot 36}=6\sqrt[3]{4}.$

Ҷавоб: $6\sqrt[3]{4}$.

Мисоли 4. Нобаробариҳои зеринро ҳал мекунем:

1. $\lg(1-2x)<2.$

Ҳал. а) $\begin{cases}1-2x>0,\\1-2x<10^2;\end{cases}\ \begin{cases}-2x>-1,\\-2x<100-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x<0{,}5,\\-2x<99;\end{cases}\ \begin{cases}x<0{,}5,\\x>-49{,}5.\end{cases}$

Аз ин ҷо, фосилаи $(-49{,}5;\ 0{,}5)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(-49{,}5;\ 0{,}5)$.

2. $-\lg\frac{5x}{4}>1.$

Ҳал. $\begin{cases}\frac{5x}{4}>0,\\\lg\frac{5x}{4}<-1;\end{cases}\ \begin{cases}x>0,\\\frac{5x}{4}<10^{-1};\end{cases}\ \begin{cases}x>0,\\\frac{5x}{4}<\frac{1}{10};\end{cases}\ \begin{cases}x>0,\\x<\frac{2}{25}.\end{cases}$

Аз ин ҷо фосилаи $(0;\ 0{,}08)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Ҷавоб: $(0;\ 0{,}08)$.

3. $\lg(x-8)>0.$

Ҳал. $x-8>10^0;\quad x-8>1;\quad x>9.$ Пас, фосилаи $(9;+\infty)$ мачмуи ҳалҳои нобаробарӣ мебошад.

Чавоб: $(9;+\infty)$.

4. $\lg\frac{x+2}{5}<-1.$

Ҳал. $\begin{cases}\frac{x+2}{5}>0,\\ \lg\frac{x+2}{5}<-1\cdot\lg 10;\end{cases}\quad\begin{cases}x+2>0,\\ \lg\frac{x+2}{5}<\lg 10^{-1};\end{cases}$

$\begin{cases}x+2>0,\\ \frac{x+2}{5}<10^{-1};\end{cases}\quad\begin{cases}x+2>0,\\ \frac{x+2}{5}<\frac{1}{10};\end{cases}\quad\begin{cases}x+2>0,\\ x+2<0{,}5;\end{cases}\quad\begin{cases}x>-2,\\ x<-1{,}5.\end{cases}$

Аз ин чо, фосилаи $(-2;-1{,}5)$ мачмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Чавоб: $(-2;-1{,}5)$.

5. $-\lg(5-x)>2.$

Ҳал. $\begin{cases}5-x>0,\\ \lg(5-x)<-2;\end{cases}\quad\begin{cases}-x>-5,\\ \lg(5-x)<-2\cdot\lg 10;\end{cases}$

$\begin{cases}x<5,\\ \lg(5-x)<\lg 10^{-2};\end{cases}\quad\begin{cases}x<5,\\ 5-x<10^{-2};\end{cases}\quad\begin{cases}x<5,\\ 5-x<0{,}01;\end{cases}$

$\begin{cases}x<5,\\ -x<0{,}01-5;\end{cases}\quad\begin{cases}x<5,\\ -x<4{,}99;\end{cases}\quad\begin{cases}x<5,\\ x>4{,}99.\end{cases}$

Аз ин чо фосилаи $(4{,}99;\,5)$ мачмуи халҳои нобаробарии додашуда мебошад.

Чавоб: $(4{,}99;\,5)$.

6. $\lg(31-2x)-\lg 11>0.$

Ҳал. $\begin{cases}31-2x>0,\\ \lg(31-2x)>\lg 11;\end{cases}\quad\begin{cases}-2x>-31,\\ 31-2x>11;\end{cases}$

$\begin{cases}x<15{,}5,\\ -2x>11-31;\end{cases}\quad\begin{cases}x<15{,}5,\\ -2x>-20;\end{cases}\quad\begin{cases}x<15{,}5,\\ x<10.\end{cases}$

Аз ин ду нобаробарии охирон, нобаробарии $x<10$, яъне, фосилаи $(-\infty;\ 10)$ маҷмуи ҳалҳои нобаробарӣ шуда метавонад.

Ҷавоб: $(-\infty;\ 10)$.

7. $\log_{x+0,5}(3-x)>1$.

Ҳал. Нобаробарии додашуда, ба нобаробариҳои зерин баробаркувва мебошад:

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ x+0,5>1, \\ 3-x>x+0,5 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 3-x>0, \\ 0<x+0,5<1, \\ 3-x<x+0,5. \end{cases}$$

Нобаробарии якумро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ x+0,5>1, \\ 3-x>x+0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ x>0,5, \\ -2x>-2,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ x>0,5, \\ x<1,25 \end{cases}$$ ё ки $(0,5;\ 1,25)$.

Нобаробарии дуюмро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ 0<x+0,5<1, \\ 3-x<x+0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ x+0,5>0, \\ x+0,5<1, \\ -2x<-2,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ x>-0,5, \\ x<0,5, \\ x>2,5 \end{cases}$$ ё ки $x\in\varnothing$.

Ҷавоб: $(0,5;\ 1,25)$.

МАШҚҲО

1. Муодилаҳоро ҳал намоед:

а) $\log_{x-2}(x^2-6x+10)=1$;

б) $2\log_7\sqrt{x}=\log_7(9-2x)$;

в) $\lg(4,5-x)=\lg 4,5-\lg x$;

г) $\log_3^2 x=4-\log_3 x$;

г) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1$;

д) $x^{\log_3 x}=16$;

е) $x^{\log_3 x-2}=27$;

ё) $x^{(3-\lg x)}=900$.

2. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\lg x+\lg(x-1)<\lg 6$;

б) $\log_{0,3} x>\log_2(3-2x)$;

в) $\log_{0,3}(2,3-2x)<1$;

г) $\ln^2 x-2<\ln x$;

г) $\ln(3+2x-x^2+e^2)>2$.

БОБИ XII
МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

§1. ИФОДАҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

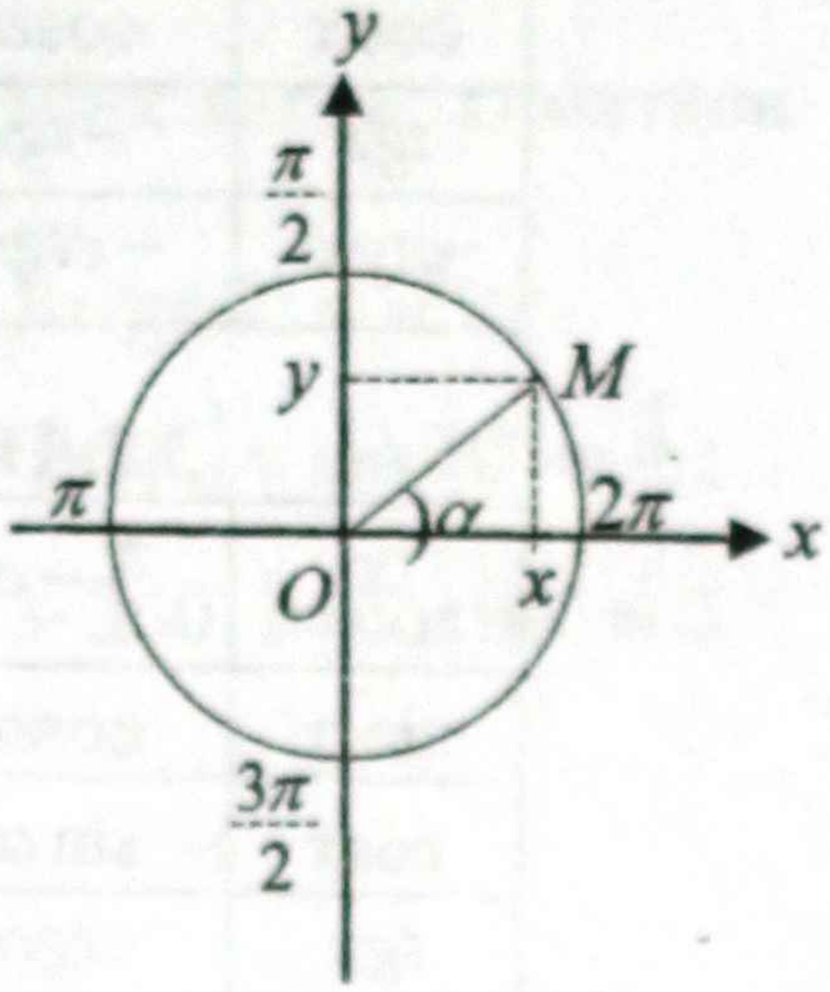
1. ТАЪРИФИ ФУНКСИЯҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0);$$

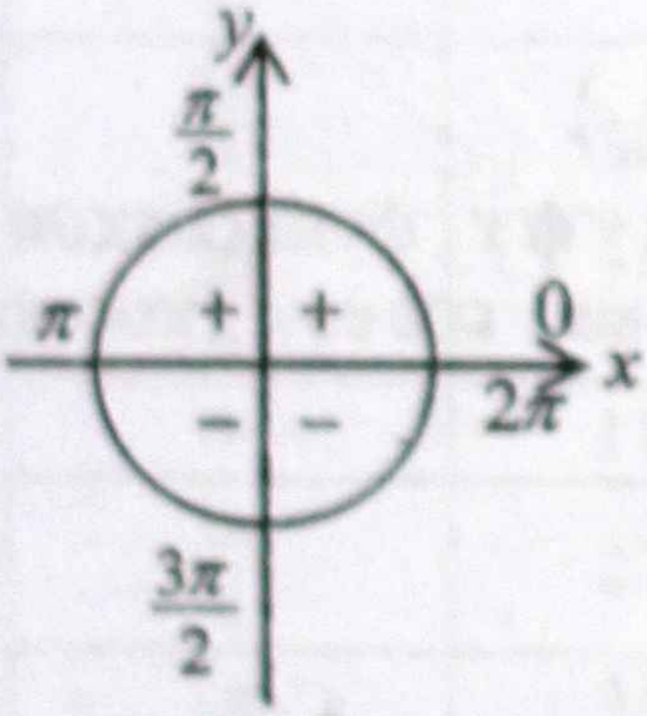
$$ctg\alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$



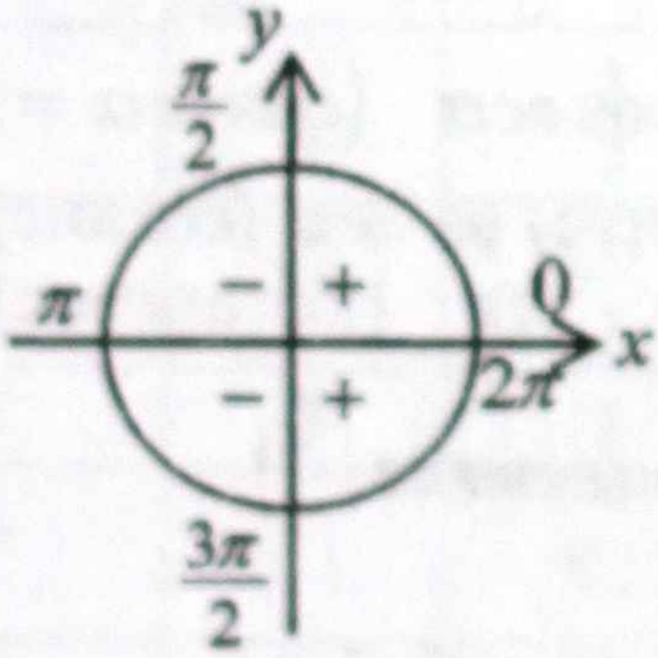
Расми 1

2. Аломатҳои функсияҳои тригонометрӣ:

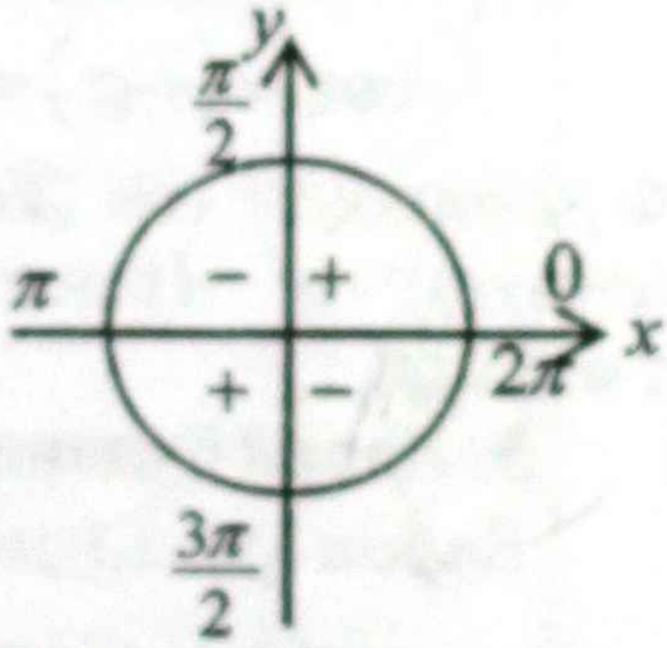
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	+	−	−	−
$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	−	−	+	+
$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$	−	+	−	−



$\sin\alpha, \cos ec\alpha$



$\cos\alpha, \sec\alpha$



$tg\alpha, ctg\alpha$

3. Формулахои мувофиковарӣ:

3.1. Номи функсия тағйирнопазир аст:

x	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$2\pi\pm\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos x$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tgx	$-tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$\pm tg\alpha$
$ctgx$	$-ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

3.2. Номи функсия тағйир меёбад:

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tgx	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
$ctgx$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$

Дар хақиқат:

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\sin 90^\circ\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos 90^\circ=$$
$$=1\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot 0=\cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ+\alpha)=\cos 90^\circ\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 90^\circ=$$
$$=0\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot 1=-\sin\alpha.$$

4. Чуфт ва токии функсияхои тригонометрӣ

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$tg(-\alpha)=-tg\alpha;\quad ctg(-\alpha)=-ctg\alpha;$$
$$\sec(-\alpha)=\sec\alpha\quad\left(\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\right);$$
$$\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha\quad\left(\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\right).$$

Функсияхои cos (косинус) ва sec (секанс) **ч у ф т**, функсияҳои sin (синус), *tg* (тангенс), *ctg* (котангенс) ва cosec (косеканс) **т о к** анд.

5. Даврӣ будани функсияхо

Барои ҳаман $n\in Z$:

$$\sin(\pm\alpha+2\pi n)=\pm(-1)^n\sin\alpha;$$
$$\cos(\pm\alpha+2\pi n)=(-1)^n\cos\alpha;$$

$$tg(\pm\alpha+\pi n)=\pm tg\alpha;$$
$$ctg(\pm\alpha+\pi n)=\pm ctg\alpha.$$

Мисоли 1. Қимати ифодаи $\sqrt{3}tg780^\circ-2\sin 750^\circ+\cos 1170^\circ$ - ро ёбед.

Ҳал. Формулаҳои мувофиқовариро татбиқ карда, қиматҳои функсияҳоро меёбем:

$$tg780^\circ=tg(60^\circ+720^\circ)=tg(60^\circ+4\cdot 180^\circ)=tg60^\circ=\sqrt{3};$$
$$\sin 750^\circ=\sin(30^\circ+720^\circ)=\sin(30^\circ+2\cdot 360^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$
$$\cos 1170^\circ=\cos(90^\circ+1080^\circ)=\cos(90^\circ+3\cdot 360^\circ)=\cos 90^\circ=0.$$

Пас, $\sqrt{3}tg780^\circ-2\sin 750^\circ+\cos 1170^\circ=$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-2\cdot\frac{1}{2}+0=3-1+0=2.$$

6. Қиматҳои функсияҳои тригонометрии баъзе кунҷҳо:

Радианҳо	Градусҳо	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0	0°	0	1	0	в/н
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	в/н	0
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
π	180°	0	-1	0	в/н
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	в/н	0
2π	360°	0	1	0	в/н

Эзоҳ: в/н - вуҷуд надорад.

Барои ёфтани қимати функсияҳое, ки дар ин ҷадвал нестанд, аз формулаҳои мувофиқоварӣ истифода бурдан лозим аст. **Масалан**:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ ё ки}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

7. Формулаҳои сумма ва фарқи аргумент

а) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha;$

б) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha;$

в) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$

г) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta;$

г) $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta};$

д) $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta};$

е) $ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha};$

ё) $ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}.$

Исботи баъзе айниятҳо:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}.$$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{1}{tg(\alpha+\beta)} = \frac{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{ctg\alpha \cdot ctg\beta}}{\frac{1}{ctg\alpha} + \frac{1}{ctg\beta}} = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha}.$$

8. Формулаҳои кунчи дучанда ва нисфи кунч

а) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$

б) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$

в) $tg\,2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha};$

г) $ctg\,2\alpha = \dfrac{1-ctg^2\alpha}{2ctg\alpha}.$

Исботи ин формулаҳо аз формулаҳои синус, косинус ва тангенси суммаи ду аргументҳо, ҳангоми $\beta = \alpha$ будан, бармеоянд.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$tg\,2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}.$$

г) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}};$

д) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}};$

е) $tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$

ё) $ctg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$

Исботи формулаҳо барои $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ ва $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ аз ду айниятҳои зерин, ҳангоми узв ба узв ҷамъ ва тарҳ кардан, бармеоянд:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1;$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha \Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

9. Формулахои табдилдихии сумма ва фарк ба хосили зарб

а) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$;

б) $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$;

в) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$;

г) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$.

Исботи яке аз ин формулаҳоро меорем. Аз формулаҳои

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

бармеояд, ки $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$ мебошад. Дар ин ҷо,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ \alpha-\beta=y\end{cases} \qquad (1)$$

ишора намуда, қиматҳои α ва β - ро меёбем:

$$2\alpha=x+y\Rightarrow\alpha=\frac{x+y}{2};$$

$$2\beta=x-y\Rightarrow\beta=\frac{x-y}{2}. \qquad (2)$$

Қиматҳои (1) ва (2) - ро ба формулаи охирон гузошта, суммаи синусҳоро ба ҳосили зарб табдил медиҳем:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

Аз формулаҳои

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

бармеояд, ки $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$ мебошад. Дар ин ҷо ҳам, аз ишоратҳои (1) ва (2) истифода бурда, баробарии охиронро дар ин намуд менависем:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

10. Формулаҳои табдилдиҳии ҳосили зарб ба сумма ва фарқ

а) $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$;

б) $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$;

в) $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$.

Мисол. Ҳисоб кунед: а) $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$; б) $tg75^\circ-tg15^\circ$.

Ҳал. а) $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}=$

$=2\sin\frac{60^\circ}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ}{2}=2\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $tg75^\circ-tg15^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}-\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=$

$=\frac{\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ}{\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ}=$

$=\frac{\sin(75^\circ-15^\circ)}{\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ}=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2\cos(90^\circ-15^\circ)\cdot\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{\sin(2\cdot 15^\circ)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$.

Ҷавоб: $2\sqrt{3}$.

Мисоли 3. Қимати касри $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$-ро ҳангоми $tg\alpha=\frac{2}{5}$ будан, ҳисоб кунед.

Ҳал. Сурат ва махраҷи касри додашударо ба $\cos\alpha$ $(\cos\alpha\neq 0)$ тақсим карда, ҳосил мекунем:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{tg\alpha-1}{tg\alpha+1}.$$

Анкун қимати $tg\alpha = \frac{2}{5}$- ро мегузорем:

$$\frac{tg\alpha - 1}{tg\alpha + 1} = \frac{\frac{2}{5} - 1}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{3}{7}.$$

Чавоб: $-\frac{3}{7}$.

Мисоли 4. Агар $tg\alpha = 2$ бошад, қимати $\frac{2\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ - ро ёбед.

Хал. $\frac{2\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{4\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{4tg\alpha}{2 - tg^2\alpha} =$

$$= \frac{4\cdot 2}{2 - 2^2} = \frac{8}{2-4} = \frac{8}{-2} = -4.$$

Чавоб: -4.

Мисоли 5. Агар $\sin\alpha + \cos\alpha = -0{,}7$ бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

Хал. Азбаски, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ ва $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha$ мебошад, пас аз

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$ бармеояд, ки

$(-0{,}7)^2 = 1 + \sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 0{,}49 - 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = -0{,}51$ мешавад.

Чавоб: $-0{,}51$.

§2. Муодилаҳои тригонометрӣ

1. Муодилаҳои содатарини тригонометрӣ

Муодилаи содатарини тригонометрӣ гуфта, муодилаи намуди $f(x) = a$ - ро, ки $f(x)$ яке аз функсияҳои содатарини тригонометрии $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ аст, меноманд.

А. Агар $\sin x = a$ $(-1 \le a \le 1)$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш бо формулаи

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z \qquad (1)$$

ифода мешавад.

Мисоли 1. Муодилаи $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Аз формулаи (1) меёбем:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$ **Ҷавоб:** $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Мисоли 2. Муодилаи $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. $3x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z;$

$$3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} n, n \in Z.$$

Ҷавоб: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} n, n \in Z.$

Мисоли 3. Муодилаи $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Ба монанди мисоли 1 рафтор намуда, ҳаллашро аз рӯи формулаи (1) муайян мекунем:

$$\frac{x}{4} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\frac{x}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$$

Ҷавоб: $(-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$

Мисоли 4. Муодилаи $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Ба монанди муодилаҳои дар боло муоина кардашуда рафтор намуда, маҷмуи ҳалҳои муодилаи додашударо муайян мекунем:

$$x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Чавоб: $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Б. Агар $\cos x=a\ (-1\le a\le 1)$ бошад, он гох, мачмуи халхояш бо формулаи

$$x=\pm\arccos a+2\pi n,n\in Z \qquad (2)$$

навишта мешавад.

Мисоли 5. Мачмуи халҳои муодилаҳои зеринро меорем:

1. $\cos x=\frac{1}{2}$.

Хал. $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,n\in Z;$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z,$$

2. $\cos\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Хал. $\frac{x}{3}=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$

$$\frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=\pm\frac{\pi}{2}+6\pi n,\ n\in Z.$$

3. $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$2x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$2x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,n\in Z.$$

4. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Халл. $2x+\frac{\pi}{2}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n, n\in Z;$

$$2x+\frac{\pi}{2}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$2x=\pm\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=\pm\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

В. Агар $tgx=a$ $(ctgx=a)$ бошад, он гох барои хар гуна кимати a $(\forall a)$ мачмуи халхояш бо формулахои

$$x=arctga+\pi n\ \ (x=arcctga+\pi n),\ n\in Z \qquad (3)$$

ифода карда мешавад.

Мисоли 6. Мачмуи халхои муодилахои зеринро меорем.

1. $tg3x=1.$

Халл. $3x=arctg1+\pi n,\ n\in Z;$

$$3x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z,$$

2. $tg\frac{x}{3}=\sqrt{3}.$

Халл. $\frac{x}{3}=arctg\sqrt{3}+\pi n,\ n\in Z;$

$$\frac{x}{3}=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=\pi+3\pi n,\ n\in Z.$$

3. $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}.$

Халл. $x-\frac{\pi}{4}=arctg\left(-\sqrt{3}\right)+\pi n,\ n\in Z;$

$$x-\frac{\pi}{4}=-arctg\sqrt{3}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z.$$

4. $tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ҳал. $4x + \frac{\pi}{3} = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,\ n \in Z;$

$$4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$4x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$4x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n, n \in Z.$$

Аз муодилаҳои содатарини дар боло муоина кардашуда бармеояд:

1. $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z.$
2. $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$
3. $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$
4. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$
5. $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z.$
6. $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$
7. $tgx = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z.$
8. $ctgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

2. Муодилаи тригонометрии гуногуни

Барои ҳал намудани муодилаҳои дилхоҳи тригонометрӣ аз табдилдиҳиҳо истифода бурда, муодила ба намуди яке аз муодилаҳои содатарини тригонометрӣ оварда мешаванд. Инчунин, муодиларо ба воситаи дохил намудани тағйирёбандаи нав (гузориш) ё ки бо тарзи ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан ҳам, ҳал мекунанд.

Яке аз тарзҳои умумии ҳал кардани муодилаҳои дилхоҳи тригонометрӣ, ин тарзи дохил намудани тағйирёбандаи нав мебошад. Онро дида мебароем.

Агар,

$$f(\sin x)=0,\ f(\cos x)=0,\ f(tgx)=0,\ f(ctgx)=0,$$

бошад, ки дар он чо, f - функсияи алгебравиро ифода мекунад, он гох, ин хел муодилахо бо ишораи $\sin x = z$, ки дар ин чо z - тағйирёбандаи нав мебошад, ҳал карда мешаванд. Бояд дар хотир дошт, ки дар халли ин гуна муодилаҳои тригонометрӣ интихоби функсия, ки бо он дигар функсияҳо ифода карда мешаванд, муҳим мебошад.

Мисоли 7. Муодилаи $3\sin x+\cos^2 x=2$-ро ҳал кунед.

Хал. Аз айнияти $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, ки дар он $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ аст, истифода бурда, муодиларо дар намуди менависем. Дар муодилаи квадратии ҳосилшуда $\sin x = y$ ишорат карда, муодилаи квадратии $y^2-3y+1=0$- ро пайдо мекунем, ки дорои решаҳои $y_1=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ ва $y_2=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ мебошад.

$$3\sin x+1-\sin^2 x=2;$$

$$3\sin x-\sin^2 x=1;$$

$$\sin^2 x-3\sin x+1=0$$

Азбаски, $|\sin x|\le 1$ аст, бинобар он муодилаи $\sin x = y$ барои кимати $y_2=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ хал надорад, чунки, $\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)>1$ аст, аммо барои кимати $y_1=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$ хал дорад.

$$\sin x=\frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

$$x=(-1)^n \arcsin\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

Инак,

$$x=(-1)^n \arcsin\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}+\pi n,\ n\in Z$$

мачмуи халхои муодилаи додашуда мешавад.

Мисоли 8. Муодилаи $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$-ро хал кунед.

Хал. Аз формулаи $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ истифода бурда, муодилаи додашударо хал мекунем:

$$2\cos^2 x+4\cos x=3\left(1-\cos^2 x\right);$$

$$5\cos^2 x+4\cos x=3;$$

$$5\cos^2 x+4\cos x-3=0.$$

Дар муодилаи квадратии хосилшуда $\cos x=z$ ишора карда, муодилаи квадратии $5z^2+4y-3=0$- ро пайдо мекунем, ки дорои решахои $z_1=-\dfrac{2+\sqrt{19}}{5}$ ва $z_2=\dfrac{-2+\sqrt{19}}{5}$ мебошад. Азбаски, $z_1=\left|-\dfrac{2+\sqrt{19}}{5}\right|>1$ мебошад, бинобар он факат кимати $z_2=\dfrac{-2+\sqrt{19}}{5}$-ро ба муодилаи $\cos x=z$ гузошта, решаашро меёбем:

$$\cos x=\frac{-2+\sqrt{19}}{5};$$

$$x=\pm\arccos\frac{-2+\sqrt{19}}{5}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Инак,

$$x=\pm\arccos\frac{-2+\sqrt{19}}{5}+2\pi n,\ n\in Z$$

мачмуи халхои муодилаи додашуда мебошад.

3. Муодилаи тригонометрии якчинса

Муодилахои тригонометрии якчинса гуфта, гурўхи муодилахои намуди $R(\sin x,\cos x)=0$ - ро меноманд.

Яке аз тарзхои умумии хал кардани муодилахои гурўхи $R(\sin x,\cos x)=0$ чунин аст: муодиларо ба муодилаи алгебравй нисбат ба tgx овардан мумкин аст. **Масалан**, муодилахои тригонометрии намуди

$$a\sin x+b\cos x=0;$$

$$a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x=0;$$

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x \cdot \cos x + c\sin x \cdot \cos^2 x + d\cos^3 x = 0$$

мисоли муодилаҳои тригонометрии якҷинса мебошанд.

Агар дар муодилаҳои ин гурӯҳ $a \neq 0$ бошад, он гоҳ ҳар яке аз ин муодилаҳоро мувофиқан ба $\cos x$, $\cos^2 x$ ва $\cos^3 x$ таксим карда муодилаҳои нисбат ба tgx алгебравиро ҳосил мекунем, ки онҳо чунин намуд доранд:

$$atgx + b = 0;$$

$$atg^2 x + btgx + c = 0;$$

$$atg^3 x + btg^2 x + ctgx + d = 0.$$

Дар ин маврид боид дар хотир дошт, ки ҳангоми $a \neq 0$ будан, ду тарафи муодиларо мувофиқан ба $\cos x$, $\cos^2 x$ ва $\cos^3 x$ тақсим намудан ба гум шудани решаҳо намеорад.

Мисоли 9. Муодилаи $\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x = 1$-ро ҳал кунед.

Ҳал. Азбаски $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ аст, пас, муодила намуди зеринро мегирад:

$$\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x = 1;$$

$$1 - \sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 1;$$

$$\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x = 0.$$

Ду тарафи муодилаи ҳосилшударо ба $\cos^2 x$ тақсим карда, муодилаи квадратии $tg^2 x - 3tgx = 0$ - ро ҳосил мекунем.

Аз муодилаи ҳосилшуда ҳамзарби умумии tgx-ро аз қафс бароварда, онро ба намуди зерин менависем:

$$tgx(tgx - 3) = 0.$$

Аз ин чо, $tgx = 0$ ё ки $tgx - 3 = 0$.

Акнун решаҳои муодилаи ҳосилшударо меёбем:

а) $tgx = 0$; $x = arctg0 + \pi n$; $x = \pi n$, $n \in Z$;

б) $tgx = 3$; $x = arctg3 + \pi n$, $n \in Z$.

IV. Муодилаҳои гурӯҳи $R(\sin x, \cos x) = 0$ - ро бо тарзҳои дигар ҳам ҳал кардан мумкин аст. Яке аз онҳо бо тарзи дохил кардани тағйирёбандаи нави (гузориш) $tg\frac{x}{2} = u$ ва аз айниятҳои зерин иборат аст:

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};\quad \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Тарзи дигар халли муодилаи $a\sin x+b\cos x=c$ ифодаи $a\sin x+b\cos x$- ро дар намуди $A\sin(x+\varphi)$ навиштан мебошад, ки дар он чо,

$$A=\sqrt{a^2+b^2};\ \sin x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \cos x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

аст.

Мисоли 10. Муодилаи $3\sin x+4\cos x=5$-ро хал кунед.

Хал. Тарзи якум. Муодиларо бо тарзи дохил намудани тагйирёбандаи нави $tg\frac{x}{2}=u$ $\left(\cos\frac{x}{2}\neq 0\right)$ хал мекунем. Азбаски,

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};\quad \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

мебошад, пас муодилаи додашуда хангоми $tg\frac{x}{2}=u$ будан, намуди зеринро мегирад:

$$3\cdot\frac{2u}{1+u^2}+4\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}=5$$

Муодиларо хал карда, кимати u - ро меёбем:

$$\frac{6u}{1+u^2}+\frac{4-4u^2}{1+u^2}=5;$$

$$6u+4-4u^2=5(1+u^2);$$

$$6u+4-4u^2-5-5u^2;$$

$$6u-9u^2-1=0$$

ё ки $9u^2-6u+1=0$ мешавад.

Аз ин чо, $(3u-1)^2=0$ шуда, $3u-1=0$, ё ки $u=\frac{1}{3}$ мешавад.

Кимати $u=\frac{1}{3}$-ро ба муодилаи $tg\frac{x}{2}=u$ гузошта, решахои муодилаи хосилшударо меёбем:

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3};\ \frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n;$$

$$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Тарзи дуюм. Азбаски, $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ аст, пас, ду тарафи муодиларо бо адади 5 тақсим карда муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=1.$$

Азбаски, $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$ аст, пас, чунин кимати кунчи φ мавчуд аст, ки $\frac{3}{5}=\sin\varphi$ ва $\frac{4}{5}=\cos\varphi$ мебошад. Бинобар он, ба чои $\frac{3}{5}$ ва $\frac{4}{5}$ мувофиқан $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$–ро гузошта, муодилаи

$\sin\varphi\cdot\sin x+\cos\varphi\cdot\cos x=1$, ё ки $\cos(x-\varphi)=1$–ро ҳосил мекунем.

Аз ин чо:

$$x-\varphi=\pm\arccos 1+2\pi n;$$

$$x-\varphi=2\pi n;$$

$$x=2\pi n+\varphi,\ n\in Z.$$

Аз сабаби он, ки $\frac{4}{5}=\cos\varphi$ ё ки $\varphi=\arccos\frac{4}{5}$ аст, бинобар он, ҳалли муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$$x=2\pi n+\arccos\frac{4}{5},\ n\in Z.$$

Мисоли 11. Муодилаи $\sin\frac{x}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{3}=\sqrt{3}$ -ро ҳал кунед.

Ҳал. Тарзи якум: Маълум аст, ки $\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}=tg\frac{\pi}{6}$ мебошад. Пас, муодиларо табдил дода, ҳосил мекунем:

$$tg\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}=1;$$

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{x}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$ ё $\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ва аз ин чо, $\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

Аз ин чо: $x_1 = \pi + 6\pi n;\ x_2 = 6\pi n,\ n \in Z$.

Тарзи дуюм. Муодилаи додашударо табил дода, ин тавр ҳал мекунем:

$$\sqrt{3}\left(1-\cos\frac{x}{3}\right)-\sin\frac{x}{3}=0;$$

$$\sqrt{3}\cdot 2\sin^2\frac{x}{6}-2\sin\frac{x}{6}\cdot\cos\frac{x}{6}=0;$$

$$2\sin\frac{x}{6}\left(\sqrt{3}\sin\frac{x}{6}-\cos\frac{x}{6}\right)=0.$$

Аз ин чо, 1) $\sin\frac{x}{6}=0$;

2) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{6}-\cos\frac{x}{6}=0$

мешавад.

Аз муодилаи якум меёбем: $x = 6\pi n,\ n \in Z$.

Аз муодилаи дуюм меёбем: $ctg\frac{x}{6}=\sqrt{3}$ ё $x=\pi+6\pi\kappa,\ \kappa\in Z$.

Ҷавоб: $6\pi n,\ \pi+6\pi\kappa,\ n,\kappa\in Z$.

§3. Нобаробариҳои тригонометрӣ

Дар ин параграф бори дигар намуд ва ҳалҳои содаторинии нобаробариҳои тригонометриро хотиррасон мекунем:

а) Агар $\sin x > a\ (|a|<1)$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш аз рӯи формулаи

$$x\in(\arcsin a+2\pi n;\ \pi-\arcsin a+2\pi n),\ n\in Z \qquad (1)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\sin x > -\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш дар асоси формулаи (1) ба намуди зерин навишта

$$x\in\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n;\ \pi+\arcsin\frac{1}{2}+2\pi n\right);$$

$$x\in\left(-\arcsin\frac{1}{2}+2\pi n;\ \pi+\arcsin\frac{1}{2}+2\pi n\right);$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+\frac{\pi}{6}+2\pi n\right);$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$$

мешавад.

2. Агар $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ бошад, он гоҳ, ба монанди мисоли 1 рафтор карда, ҳосил мекунем:

$$x \in \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n;\ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n \right);$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right);$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right),\ n \in Z .$$

б) Агар $\sin x < a$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалли он аз рӯи формулаи

$$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z \qquad (2)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\sin x < \frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш аз рӯи формулаи (2) дар намуди зерин навишта мешавад:

$$x \in \left(-\pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n;\ \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n \right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi \right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right),\ n \in Z.$$

2. Агар $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш дар асоси формулаи (2) ба

$$x \in \left(-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n;\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi n \right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\pi + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n;\ -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n \right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right),\ n \in Z.$$

баробар мебошад.

в) Агар $\cos x > a \ (|a<1|)$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш аз рӯи формулаи

$$x \in (-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z \qquad (3)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ бошад, он гоҳ ба монанди нобаробарии якум рафтор карда, аз рӯи формулаи (3) маҷмуи ҳалҳояшро менависем:

$$x \in \left(-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n;\ \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in Z;$$

мешавад.

Ҷавоб: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

2. Агар $\cos x > -\frac{1}{2}$ бошад, он гоҳ ба монанди нобаробарии якум рафтор карда, аз рӯи формулаи (3) маҷмуи ҳалҳояшро менависем:

$$x \in \left(-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n\right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;\ \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$$

Инак, маҷмуи ҳалҳои нобаробарии додашуда $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$ мебошад.

г) Агар $\cos x < a \ (|a<1|)$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш аз рӯи формулаи

$$x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z \qquad (4)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $\cos x < -1$ бошад, он гоҳ, ба монанди нобаробарии якум рафтор карда, аз рӯи формулаи (4) менависем:

$$x \in (\arccos(-1) + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos(-1) + 2\pi n),\ n \in Z;$$

$x\in(\arccos 1+2\pi n;\ 2\pi-\arccos 1+2\pi n),\ n\in Z$;

$x\in(0+2\pi n;\ 2\pi-0+2\pi n)$;

$x\in(2\pi n;\ 2\pi+2\pi n),\ n\in Z$.

Чавоб: $x\in(2\pi n;\ 2\pi+2\pi n),\ n\in Z$.

2. Агар $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ бошад, он гоҳ, ба монанди нобаробарии якум қимати x-ро аз рӯи формулаи (4) меёбем:

$$x\in\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ 2\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

Чавоб: $x\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$.

г) Агар $tgx>a$ бошад, он гоҳ, мачмуи халҳояш аз рӯи формулаи

$$x\in(arctga+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n),\ n\in Z \qquad (5)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $tgx>2$ бошад, он гоҳ мачмуи халҳояш дар асоси формулаи (5)

$$x\in(arctg2+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n),\ n\in Z$$

ёфта мешавад.

2. Агар $tgx>-\sqrt{3}$ бошад, он гоҳ, мачмуи халҳояш дар асоси формулаи (5) дар намуди зерин навишта мешавад:

$$x\in(arctg(-\sqrt{3})+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n),\ n\in Z;$$

$$x\in(-arctg\sqrt{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n),\ n\in Z;$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z.$$

Чавоб: $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$.

д) Агар $tgx < a$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш аз рӯи формулаи зерин

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ arctga + \pi n\right),\ n \in Z \qquad (6)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $tgx < \frac{1}{\sqrt{3}}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш дар асоси формулаи (6) ёфта мешавад, ки вай ба маҷмуи

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n\right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$$

баробар аст.

Ҷавоб: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$.

2. Агар $tgx < -1$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш дар асоси формулаи (6) ба маҷмуи

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ arctg(-1) + \pi n\right),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in Z$$

баробар аст.

Ҷавоб: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in Z$.

е) Агар $ctgx > a$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш аз рӯи формулаи

$$x \in (\pi n,\ arcctga + \pi n),\ n \in Z \qquad (7)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $ctgx > \sqrt{3}$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояшро аз рӯи формулаи (7) дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$x \in (\pi n,\ arcctg\sqrt{3} + \pi n),\ n \in Z;$$

$$x \in \left(\pi n,\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z.$$

Ҷавоб: $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$.

2. Агар $ctgx > -1$ бошад, он гоҳ, маҷмуи ҳалҳояш аз рӯи формулаи (7) ёфта мешавад, ки вай ба маҷмуи

$$x\in(\pi n;\ arcctg(-1)+\pi n),\ n\in Z;$$
$$x\in(\pi n;\ -arcctg1+\pi n),\ n\in Z;$$
$$x\in\left(\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ n\in Z$$

баробар аст. **Чавоб:** $x\in\left(\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ n\in Z$.

ё) Агар $ctgx<a$ бошад, он гох, мачмуи халхояш аз рўи формулаи зерин

$$x\in(arcctga+\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z \qquad (8)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

1. Агар $ctgx<-3$ бошад, он гох, мачмуи халхояш дар асоси формулаи (8) ёфта мешавад, ки вай намуди зеринро дорад:

$$x\in(arcctg(-3)+\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z;$$
$$x\in(-arcctg3+\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z;$$
$$x\in(-arcctg3+\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z.$$

Чавоб: $x\in(-arcctg3+\pi n;\ \pi+\pi n),\ n\in Z$.

2. Агар $ctgx<-\frac{1}{\sqrt{3}}$ бошад, он гох, мачмуи халхояш дар асоси формулаи (8) ёфта мешавад.

$$x\in\left(arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi n;\ \pi+\pi n\right),\ n\in Z;$$
$$x\in\left(-arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n;\ \pi+\pi n\right),\ n\in Z;$$
$$x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi+\pi n\right),\ n\in Z.$$

Чавоб: $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi+\pi n\right),\ n\in Z$.

Мисоли 1. Нобаробарии $2\sin^2 x-7\sin x+3>0$-ро хал кунед.

Хал. Нобаробарирo бо тарзи дохил кардани тагйирёбандаи нав хал мекунем. Инак, $\sin x=y$ ишора карда, нобаробарии $2y^2-7y+3>0$- ро хосил мекунем. Дар ин чо, $2y^2-7y+3>0$, ё ки $(2y-1)(y-3)>0$ аст. Нобаробарии $(2y-1)(y-3)>0$- ро хал мекунем. Нобаробарии охирон ба системахои

$$\begin{cases} 2y-1>0, \\ y-3>0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 2y-1<0, \\ y-3<0 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад. Системахоро хал мекунем:

$$\begin{cases} 2y-1>0, \\ y-3>0; \end{cases} \begin{cases} 2y>1, \\ y>3; \end{cases} \begin{cases} y>\frac{1}{2}, \\ y>3. \end{cases}$$ Аз ин чо: $y>3$.

$$\begin{cases} 2y-1<0, \\ y-3<0; \end{cases} \begin{cases} 2y<1, \\ y<3; \end{cases} \begin{cases} y<\frac{1}{2}, \\ y<3. \end{cases}$$ Аз ин чо: $y<\frac{1}{2}$.

Киматхои ёфташударо ба $\sin x = y$ гузошта, нобаробариxои зеринро хосил мекунем:

$$y=\sin x<\frac{1}{2} \text{ ва } y=\sin x>3.$$

а) Нобаробарии $\sin x>3$ хал надорад, чунки, дар ин чо $a=3>1$ мебошад.

б) Нобаробарии $\sin x<\frac{1}{2}$ хал дорад, чунки, $a=\frac{1}{2}<1$ буда, мачмуи халxояш аз рӯи формулаи (2) ёфта мешавад.

Инак, мачмуи халxои нобаробарии додашуда

$$x\in\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$$

мебошад.

Ба ғайр аз ин нобаробариxо дар ин чо мо намуд ва халxои содатарин нобаробариxои тригонометрие, ки функсияи чаппаи тригонометриро доранд, меорем:

Намудxои нобаробарӣ:	Халли нобаробариxо:
1. $\arcsin x>a \quad (\lvert a\rvert<\frac{\pi}{2})$	$x\in(\sin a;\ 1]$.
2. $\arcsin x<a \quad (\lvert a\rvert\le\frac{\pi}{2})$	$x\in[-1;\ \sin a)$.
3. $\arccos x>a \quad (\lvert a\rvert<\pi)$	$x\in[-1;\ \cos a)$.
4. $\arccos x<a \quad (\lvert a\rvert\le\pi)$	$x\in[\cos a;\ -1]$.
5. $arctgx>a \quad (\lvert a\rvert<\frac{\pi}{2})$	$x\in(tga;\ +\infty)$.

6 $arctgx < a \ \left(|a| \le \frac{\pi}{2}\right)$ $x \in (-\infty;\ tga)$.

7. $arcctgx > a \ (0 < a < \pi)$ $x \in (-\infty;\ ctga)$.

8. $arcctgx < a \ (0 < a < \pi)$ $x \in (ctga;\ +\infty)$.

Мисоли 2. Нобаробарии $arctg^2x - 5arctgx + 6 > 0$-ро хал кунед.

Хал. Дар нобаробарӣ додашуда $arctgx = y$ ишора карда, нобаробарии $y^2 - 5y + 6 > 0$- ро ҳосил мекунем. Тарафи чапи нобаробариро ба ҳамзарбҳо ҷудо карда ҳосил мекунем:

$$y^2 - 2y - 3y + 6 > 0;$$
$$y(y-2) - 3(y-2) > 0;$$
$$(y-2)(y-3) > 0.$$

Нобаробарии охирон ба системаҳои нобаробариҳои

$$\begin{cases} y-2>0, \\ y-3>0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} y-2<0, \\ y-3<0 \end{cases}$$

баробаркувва мебошад. Системаи нобаробариҳои ҳосилшударо ҳал карда, ҳалли нобаробарии $(y-2)(y-3) > 0$- ро меёбем.

1) $\begin{cases} y-2>0, \\ y-3>0; \end{cases} \begin{cases} y>2, \\ y>3. \end{cases}$

Аз ин чо, $y > 3$ мешавад.

2) $\begin{cases} y-2<0, \\ y-3<0; \end{cases} \begin{cases} y<2, \\ y<3. \end{cases}$

Аз ин чо, $y < 2$ мешавад.

Киматҳои $y < 2$ ва $y > 3$ - ро ба $arctgx = y$ гузошта, нобаробариҳои $arctgx < 2$ ва $arctgx > 3$- ро ҳосил мекунем.

Мачмуи халҳои нобаробариҳои $arctgx < 2$ ва $arctgx > 3$ мувофикан аз рӯи формулаҳои дар боло овардашуда ёфта мешаванд. Яъне, халли ин нобаробариҳо мувофикан ба

$$x \in (-\infty;\ tg2) \quad \text{ва} \quad x \in (tg3;\ +\infty)$$

баробар хастанд. Инак, мачмуи халҳои нобаробарии додашуда чунинанд:

$$x \in (-\infty;\ tg2) \text{ ва } x \in (tg3;\ +\infty).$$

МАШҚҲО

1. Қимати ифодахоро ёбед:

а) $\sqrt{3}tg480^\circ - \cos 1200^\circ$;

в) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$;

б) $\sin 72^\circ \cdot \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \cdot \sin 42^\circ$.

2. Қимати $\cos 2\alpha - 3tg\alpha$ хангоми, $\sin\alpha = 0{,}8$ $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$ будан, ёбед.

3. $\sin 2\alpha$ -ро хангоми $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}4$ будан, хисоб кунед.

4. Қимати $\cos(\alpha - \beta)$, хангоми $\sin\alpha = 0{,}6$ ва $\sin\beta = -0{,}28$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ва $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ будан, ёбед.

5. Муодилаҳоро ҳал кунед:

а) $2\sin(2x-1) = 1$; б) $3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

в) $\cos x^2 = -1$; г) $\sin(3x-1) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

6. Муодилаҳоро бо тарзи гузориш ҳал кунед:

а) $\cos^2 x - 3\cos x = 4$; б) $tg3x + 3ctgx = 4$;

в) $3\sin^2 3x + 7\cos 3x = 3$; г) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

7. Муодилаҳои тригонометрии якҷинсаро ҳал кунед:

а) $2\sin 3x + 3\cos 3x = 0$;

б) $\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 15\cos^2 x = 0$.

8. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $ctgx > -3$; в) $tgx > 2$; г) $\sin(x-1) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Нобаробариҳои тригонометриро ҳал кунед:

а) $\arccos x > \frac{\pi}{6}$; б) $arctgx > -\frac{\pi}{3}$;

в) $arcctgx > 2$;

г) $arctg^2 x - 4arctgx + 3 > 0$;

г) $\log_2(arctgx) > 1$.

БОБИ XIII
ПРОГРЕССИЯХО

§1. Мафхуми пайдарпаии адади

Бигузор $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ ададхои хакикӣ бошанд. Агар ба хар як адади натуралии n ягона адади хакикии a_n мувофикан гузошта шуда бошад,

$$1 \to a_1;\ 2 \to a_2;\ 3 \to a_3;\ \ldots;\ n \to a_n \qquad (1)$$

он гох мегӯянд, ки пайдарпаии ададии

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots \qquad (2)$$

дода шудааст. Дар ин чо $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ - ро узвхои пайдарпаии (2) ва a_n - ро узви n-уми пайдарпаии (ё ки узви умумии) (2) меноманд. Агар пайдарпаии ададӣ дар намуди узви умумиаш (a_n) дода шавад, он гох мегӯянд, ки пайдарпай бо формула дода шудааст. Яъне, $a_n = f(n),\ n \in N$ ки дар ин чо n - раками тартиби узвхоро ифода мекунад.

Таъриф. *Функсияе, ки мачмуи ададхои натуралӣ - N ё мачмуи n - адади натуралии аввалин сохаи муайянаш мебошад, пайдарпай номида шуда, бо $f(n)$ ишора карда мешавад:*

$$a_n = f(n),\ n \in N \qquad (3)$$

Дар ин чо, $f(n)$ функсия буда, сохаи муайяниаш мачмуи N ва сохаи киматхояш мачмуи $\{a_n\}$ мебошад. **Масалан**, функсияи зерин

$$f(n) = \begin{cases} n, & n = 2k, \\ \frac{1}{n}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad (k \in N)$$

пайдарпаии зеринро медихад:

$$1;\ 2;\ \tfrac{1}{3};\ 4;\ \tfrac{1}{5};\ 6;\ \ldots\ldots;\ 2k;\ \tfrac{1}{2k-1};\ \ldots$$

Пайдарпаихо афзуншаванда ↗ ва камшаванда ↘ шуда метавонанд:

Пайдарпаии $\{a_n\}$ афзуншаванда номида мешавад, агар хар як узваш (аз узви дуюм сар карда) аз узви пешояндаш калон бошад:

$$a_n < a_{n+1},\quad n < n+1,\quad n \in N \qquad (4)$$

Масалан, пайдарпаии $\{a_n\}$, $n\in N$ пайдарпаии афзунишаванда мебошад, чунки,

$$\{a_n\}: 1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots; n; \ldots; \ldots \text{аст.}$$

Пайдарпаии $\{a_n\}$ камшаванда номида мешавад, агар хар як узви пайдарпай (аз узви дуюм сар карда) аз узви пешояндаш хурд бошад:

$$a_n > a_{n+1}, \quad n > n+1, \quad n\in N \tag{5}$$

Масалан, пайдарпаии $\{a_n\}=\frac{1}{n}$, $n\in N$ пайдарпаии камшаванда мебошад, зеро,

$$\{a_n\}: 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots; \ldots \text{ аст.}$$

Пайдарпаии $\{a_n\}$- и дар мачмуи N муайян буда, пайдарпаии беохир мебошад. **Масалан**,

$$\{a_n\}=n;\ \{a_n\}=\frac{1}{n},\ n\in N$$

мисоли пайдарпаихои беохир шуда метавонад.

Пайдрпаии $\{a_n\}$ охирнок номида мешавад, агар мачмуи N, мачмуи охирнок бошад. **Масалан,** пайдарпаии $\{a_n\}=n,\ n<N=7$ охирнок аст, чунки, он аз ададхои 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 иборат мебошад.

§2. Прогрессияи арифметикй

Бигузор $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ - ададхои хакикй бошанд.

Таъриф. *Прогрессияи арифметикй гуфта, пайдарпаии ададиеро меноманд, ки хар як узви пасояндаш аз пешояндаш дар натичаи чамъ намудани адади доимй, ки фарки прогрессия номида мешавад, хосил шудааст.*

Прогрессияи арифметикиро бо рамзи + ишорат карда, онро дар намуди зерин менависанд:

$$+\ a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

Дар ин чо, $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$- ро узвхои прогрессияи арифметикй, a_n- ро узви умумии прогрессияи арифметикй ва

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = \ldots = d$$

-ро фарқи прогрессия меноманд. Пас, мувофиқи таърифи прогрессияи арифметикӣ ҳосил мекунем:

a_1;

$a_2 = a_1 + d$;

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$;

$a_4 = a_3 + d = a_2 + d + d = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d$;

.....

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d$.

Аз ин ҷо,

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in N \qquad (2)$$

формулаи узви n-уми прогрессияи арифметикии (1) номида мешавад.

Бо формулаи (2) дилхоҳ узви прогрессияи арифметикиро ёфтан мумкин аст.

Суммаи n узви аввалаи прогрессияи арифметикии (1) аз рӯи формулаи

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \; n \in N \qquad (3)$$

ёфта мешавад. Агар дар формулаи (3) ба ҷои узви a_n кимати ҳаш - $a_n = a_1 + (n-1)d$ - ро гузорем, он гоҳ формулаи (3) намуди зеринро мегирад:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \; n \in N. \qquad (4)$$

Акнун халли масъалахоро доир ба прогрессияи арифметикӣ меорем.

Масъалаи 1. Агар фарқи прогрессияи арифметикӣ ба -4 баробар бошад, узви 18-уми прогрессияи зеринро ёбед:

$$+ 18; 14; 10; 6; \ldots$$

Ҳал. Аз формулаи (2) истифода бурда, ҳангоми $a_1 = 18$ ва $d = -4$ будан, ҳосил мекунем:

$$a_{18} = a_1 + 17d \Rightarrow a_{18} = 18 + 17 \cdot (-4) \Rightarrow a_{18} = -50.$$

Ҷавоб: -50.

Масъалаи 2. Узви 12-уми прогрессияи арифметикии зеринро ёбед.

$$\div\ 5;\ 2;-1;\ -4;\ \ldots$$

Ҳал. Дар ин маврид, аввал фарқи прогрессия, яъне, d -ро муайян мекунем ва баъд узви номаълуми прогрессияро меёбем.

а) Фарқи прогрессия, яъне, d -ро меёбем:

$$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 2 - 5 \Rightarrow d = -3;$$

б) Аз рӯи формулаи (7), узви a_{12} -уми прогрессияро меёбем:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{12} = 5 + 11 \cdot (-3) \Rightarrow a_{12} = -28.$$

Инак, узви 12-уми прогрессияи додашуда ба -28 баробар будааст.

Масъалаи 3. Суммаи 65-то узви аввалаи прогрессияи арифметикии зеринро ҳисоб кунед:

$$\div\ 4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ \ldots$$

Ҳал. Дар ин ҷо ҳам, барои суммаи 12-то узви аввалаи прогрессияро ёфтан, аввал бояд фарқи прогрессия, яъне, d -ро ва ҳам узви 65-уми прогрессияро муайян менамоем.

а) Фарқи прогрессия, яъне d -ро меёбем:

$$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 8 - 4 \Rightarrow d = 4.$$

б) Аз рӯи формулаи (2) истифода бурда, узви a_{65} -уми прогрессияро меёбем:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{65} = 4 + 64 \cdot 4 \Rightarrow a_{65} = 260.$$

в) Суммаи 65-то узви аввалаи прогрессияро бо ёрии формулаи (3), яъне, бо формулаи

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

ҳисоб мекунем.

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{65}}{2} \cdot 65;\ S_{65} = \frac{4 + 260}{2} \cdot 65 = \frac{52}{2} \cdot 65 = 262 \cdot 65 = 17030.$$

Инак, суммаи 65-то узви аввалаи прогрессияи арифметикӣ ба 312 баробар мебошад.

Ҷавоб: $S_{65} = 17030.$

Масъалаи 4. Суммаи узвҳои 2-ум ва 5-уми прогрессияи арифметикӣ ба адади 14 баробар буда, суммаи узвҳои 3-юм ва 7-ум ба адади 8 баробар аст. Прогрессияи арифметикиро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 14, \\ a_3 + a_7 = 8. \end{cases}$$

Аз формулаи (2) истифода бурда хосил мекунем:

$$a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_1 + 2d;\ a_5 = a_1 + 4d;\ a_7 = a_1 + 6d.$$

Акнун киматҳои ёфташударо ба система гузошта, хосил мекунем:

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 14, \\ a_1 + 2d + a_1 + 6d = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ 2a_1 + 8d = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ -2a_1 - 8d = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ -3d = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 14, \\ d = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 5\cdot(-2) = 14, \\ d = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -2. \end{cases}$$

Аз ин чо,

$$a_1 = 12;$$

$$a_2 = a_1 + d = 12 + (-2) = 10;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d = 12 + 2\cdot(-2) = 12 - 4 = 8;$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 12 + 3\cdot(-2) = 12 - 6 = 6;$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 12 + 4\cdot(-2) = 12 - 8 = 4;$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 12 + 5\cdot(-2) = 12 - 10 = 2;$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 12 + 6\cdot(-2) = 12 - 12 = 0;$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 12 + 7\cdot(-2) = 12 - 14 = -2;$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 12 + 8\cdot(-2) = 12 - 16 = -4;$$

Акнун прогрессияи арифметикии маълуморо навишта метавонем:

$$+\ 12;\ 10;\ 8;\ 6;\ 4;\ 2;\ 0;\ -2;\ -4;\ldots$$

Санчиш: $\begin{cases} a_2 + a_5 = 14, \\ a_3 + a_7 = 8; \end{cases} \begin{cases} 10 + 4 = 14, \\ 8 + 0 = 8; \end{cases} \begin{cases} 14 = 14, \\ 8 = 8. \end{cases}$

Чавоб: + 12; 10; 8; 6; 4; 2; 0; −2; −4;...

Масъалаи 5. Сумман се адад, ки прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад ба 16 баробар мебошад. Ҳосили зарби ададҳои якум ба дуюм ба $12\frac{4}{9}$ баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

Ҳал. Мувофиқи шарти масъала $\div$ a_1, a_2, a_3 дода шудааст, ки дар ин ҷо, $a_1+a_2+a_3=16$ ва $a_1\cdot a_2=12\frac{4}{9}$ мебошад. Пас, дар асоси формулаи (2) $a_1=a_1;\ a_2=a_1+d;\ a_3=a_1+2d$ мешаванд. Он гоҳ,

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=16, \\ a_1\cdot a_2=12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=16, \\ a_1\cdot(a_1+d)=12\frac{4}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1+3d=16, \\ a_1\cdot(a_1+d)=12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=\frac{16-3d}{3}, \\ \frac{16-3d}{3}\cdot\left(\frac{16-3d}{3}+d\right)=12\frac{4}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=\frac{16-3d}{3}, \\ \frac{16-3d}{3}\cdot\frac{16}{3}=12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=\frac{16-3d}{3}, \\ \frac{16}{9}(16-3d)=12\frac{4}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=\frac{16-3d}{3}, \\ 16-3d=7; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=\frac{7}{3}, \\ -3d=7-16; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=\frac{7}{3}, \\ d=3. \end{cases}$$

Ҳамин тариқ, $a_1=\frac{7}{3}$, $a_2=\frac{7}{3}+3=\frac{16}{3}$ ва $a_3=\frac{7}{3}+2\cdot 3=\frac{25}{3}$ мешавад.

Санҷиш: $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=16, \\ a_1\cdot a_2=12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7}{3}+\frac{16}{3}+\frac{25}{3}=16, \\ \frac{7}{3}\cdot\frac{16}{3}=12\frac{4}{9}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{48}{3}=16, \\ \frac{112}{9}=12\frac{4}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} 16=16, \\ 12\frac{4}{9}=12\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Ҷавоб: $\frac{7}{3};\ \frac{16}{3};\ \frac{25}{3}$.

§3. Прогрессияи геометрӣ

Таъриф. *Пайдарпаии ададие, ки ҳар як узви пасояндаашро аз пешояндааш дар натиҷаи ба ягон адади доимӣ зарб намудан ҳосил мешавад, прогрессияи геометрӣ номида мешавад. Зарбкунандаи умумӣ боиад, махраҷи прогрессия номида мешавад.*

Масалан, пайдарпаиҳои

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; .....

27; 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; ... ...

12; −6; 3; $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{8}$; $\frac{3}{16}$; ... ...

мисолҳои прогрессияи геометрӣ шуда метавонанд. Махраҷи прогрессияи геометрӣ бо q ва худи прогрессияи геометрӣ бо рамзи $+$ ишора карда мешавад. Агар пайдарпаии $\{b_n\}$ прогрессияи геометрӣ бошад, он гоҳ, мувофиқи таърифи 2

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\ldots=\frac{b_{n+1}}{b_n}=\ldots$$

аллаи доимӣ буда (он бо q ишора карда мешавад), махраҷи прогрессияи геометрӣ аст. Ҳамин тариқ, прогрессияи геометрӣ $\{b_n\}$ аз рӯи шартҳои зерин муайян карда мешавад:

а) $b_1=b$, ки $b\neq 0$ мебошад;

б) $b_{n+1}=b_n\cdot q\left(q\neq 0\ \forall n\geq 1\right)$

Масалан, ҳангоми $b_1=2$ ва $q=\frac{1}{3}$ будан, прогрессияи геометрии

$$2;\ 2\cdot\frac{1}{3};\ 2\cdot\frac{1}{9};\ 2\cdot\frac{1}{27};\ 2\cdot\frac{1}{81};\ \ldots$$

-ро ҳосил мекунем.

Агар пайдарпаии $\{b_n\}$- прогрессияи геометрӣ бошад, он гоҳ, мувофиқи таърифи 2 ҳосил мекунем:

$b_1\neq 0$;

$b_2=b_1\cdot q$;

$b_3=b_1\cdot q\cdot q=b_1\cdot q^2$;

$b_4=b_3\cdot q=b_1\cdot q^2\cdot q=b_1\cdot q^3$;

.....

$b_{n-1}\overset{a}{=}b_{n-2}\cdot q=b_1\cdot q^{n-2}\cdot q=b_1\cdot q^{n-1}$.

Аз ин чо маълум мешавад, ки барои $\forall n,\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0$ формулаи

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ n \in N \qquad (1)$$

дуруст мебошад. Формулаи (1)- ро формулаи узви n-уми прогрессияи геометрӣ меноманд.

Прогрессияи геометрӣ дорои чунин хосиятҳо аст:

1. Квадрати узви дилхоҳи прогрессияи геометрӣ, аз узви дуюмаш сар карда, ба хосили зарби узвҳои пешояндааш ва пасояндааш баробар мебошад. Яъне,

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}\ (n \geq 1) \qquad (2)$$

2. Бигузор барои ҳар гуна се узвҳои ҳамсояи ягон пайдарпаии $\{a_n\}$ баробарии (2) ичро шавад, он гоҳ,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}},\quad n \geq 1 \qquad (3)$$

мебошад.

Яъне, агар нисбати ҳар гуна узви пайдарпаии $\{b_n\}$ ба узви пешояндааш фақат ва фақат ба як адад баробар шавад, пас, пайдарпаии $\{b_n\}$ - прогрессияи геометрӣ номида мешавад.

3. Агар узвҳои прогрессияи геометрӣ мусбат бошанд, он гоҳ, баробарии (2) – ро дар намуди

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}},\ n \geq 1 \qquad (4)$$

навиштан мумкин аст.

Агар $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n, \ldots$ узвҳои прогрессияи геометрӣ ва q - махраҷи прогрессияи геометрии $\{b_n\}$ бошанд, он гоҳ сумман n узви аввалаи прогрессияи геометрӣ аз рӯи формулаи

$$S_n = \frac{b_n \cdot q^n - b_1}{q-1} \text{ ё ки } S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1},\ q \neq 1 \qquad (5)$$

ёфта мешавад. Дар мавриди $q = 1$ ва $b_1 = b \neq 0$ будан, сумман n-то узви аввалаи прогрессия ба $S = nb$ баробар аст.

Агар,

$$b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ b_1q^3;\ b_1q^4;\ \ldots;\ b_1q^{n-1};\ \ldots \qquad (6)$$

прогрессияи геометрии дилхоҳ бошад, он гоҳ ҳангоми $|q| < 1$ будан, вай прогрессияи геометрии беохир камшавандаи номида

мешавад.

Суммаи n-то узви прогрессияи геометрии (6) бо формулаи

$$S_n = \frac{b_1}{1-q},\ |q|<1,\ b_1 \neq 0 \qquad (7)$$

ёфта мешавад.

Акнун халли якчанд масъалаҳоро дониста ба прогрессияи геометрӣ меорем.

Масъалаи 1. Узви 8-ум ва суммаи 8-то узви аввалаи прогрессияи геометрии зеринро ёбед:

$$+\ 1;\ 3;\ 9;\ 27;\ \ldots\ldots$$

Ҳал. Дар прогрессияи додашуда $b_1 = 1$ ва $q = 3$ мебошад. Бинобар он, мувофиқи формулаҳои

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ ва } S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$$

навишта метавонем:

а) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b_8 = b_1 \cdot q^7 \Rightarrow b_8 = 1 \cdot 3^7 \Rightarrow b_8 = 3^7$;

б) $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} \Rightarrow S_8 = \frac{b_8 \cdot q - b_1}{q-1} \Rightarrow S_8 = \frac{3^7 \cdot 3 - 1}{3-1} \Rightarrow S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} = 3280.$

Инак, узви 8-уми прогрессия ба 3^7 ва суммаи 8-то узви прогрессия ба 3280 баробар мебошад.

Ҷавоб: 3280.

Масъалаи 2. Агар $b_1 = 36$ ва $b_7 = \frac{4}{81}$ бошад, махраҷ ва суммаи 7 узви аввалаи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад.

Ҳал. Аз рӯи формулаи (1) ва (5) ҳангоми $n = 7$ будан, ҳосил мекунем:

а) $b_7 = b_1 \cdot q = 36 \cdot q^6;\ \frac{4}{81} = 36 \cdot q^6;\ 6q^3 = \pm\frac{2}{9};$

$$q^3 = \pm\frac{1}{27} \text{ ё ки } q = \pm\frac{1}{3}.$$

Пас, $q_1 = \frac{1}{3}$ ва $q_2 = -\frac{1}{3}$ мешавад.

б) Ҳангоми $b_1 = 36$ ва $q_1 = \frac{1}{3}$:

$$S_7=\frac{b_7\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{81\cdot\frac{1}{3}-36}{\frac{1}{3}-1}=\frac{36-\frac{4}{81}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{(36\cdot 81\cdot 3-4)\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 81}=\frac{18\cdot 81\cdot 3-2}{81}=\frac{4372}{81}.$$

в) Ҳангоми $b_1=36$ ва $q_1=-\frac{1}{3}$:

$$S_7=\frac{b_7\cdot q-b_1}{q-1}=\frac{81\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-36}{\frac{1}{3}-1}=\frac{36+\frac{4}{81}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{(36\cdot 81\cdot 3+4)\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 81}=\frac{18\cdot 81\cdot 3+2}{81}=\frac{4376}{81}.$$

Инак, махраҷи прогрессияи геометрӣ ҳангоми $q=\frac{1}{3}$ ва $b_1=36$ ба $S_7=\frac{4372}{81}$ ва ҳангоми $q=-\frac{1}{3}$ ва $b_1=36$ сумман 7 узви аввалаи прогрессия ба $S_7=\frac{4376}{81}$ баробар будааст.

Масъалаи 3. Агар махраҷаш $q=3$ ва сумман 7 узви аввалаи прогрессия ба $S_7=2186$ баробар бошад, узвҳои якум ва ҳафтуми прогрессияи геометриро ёбед.

Ҳал. Дар асоси формулаи (5) навишта метавонем:

$$2186=\frac{3\cdot b_7-b_1}{3-1};$$

$$2186=\frac{1}{2}(3b_7-b_1);$$

$$4372=3b_7-b_1.$$

Аз формулаи узви n-уми прогрессия $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ истифода бурда, пайдо мекунем: $b_7=b_1\cdot 3^6$. Акнун кимати b_7-ро ба баробарии $3b_7-b_1=4372$ гузошта, кимати b_1-ро меёбем.

$$3b_1\cdot 3^6-b_1=4372;\ 3^7\cdot b_1-b_1=4372;$$

$$b_1(3^7-1)=4372;$$

$$b_1=\frac{4372}{3^7-1}=\frac{4372}{2187-1}=\frac{4372}{2186}=2.$$

Пас, $b_1=2$ аст. Акнун кимати b_7 -ро хисоб мекунем:

$$b_7=2\cdot 3^6=2\cdot 729=1458.$$

Хамин тарик, $b_1=2$ ва $b_7=1458$ аст.

Чавоб: $b_1=2$ ва $b_7=1458$.

Масъалаи 4. Агар $a_1=3;\ q=2$ ва $S_n=189$ бошад, шумораи узвхои прогрессияи геометриро ёбед.

Хал. Агар ба формулаи сумман узви n - уми прогрессияи геометрй

$$S_n=\frac{b_n\cdot q-b_1}{q-1},\ q\neq 1$$

кимати $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ - ро гузорем, он гох,

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1},\ q\neq 1$$

хосил мешавад. Дар формулаи хосилшуда киматхои $S_n=189,\ b_1=3$ ва $q=2$ - ро гузошта пайдо мекунем:

$$189=\frac{3\cdot(2^n-1)}{2-1};\quad 189=\frac{3\cdot(2^n-1)}{1};$$

$$189=3(2^n-1)$$

$$63=2^n-1;\quad 2^n=64;\quad 2^n=2^6.$$

Аз ин чо, $n=6$ мешавад.

Чавоб: $n=6$.

МАШКХО

1. Узви хафтум ва фарки прогрессияи арифметикии зеринро ёбед:

$$+\quad 4;\ 6,\ 8,\ 10;\ \ldots$$

2. Сумман 14 узви аввалаи прогрессияи арифметикии зеринро ёбед:

$$+\quad 2;\ 4;\ 6,\ 8,\ 10;\ \ldots$$

3. Узви ҳаштум ва сумман 8 узви аввалаи прогрессияи арифметикии ÷ 12; 10, 8, 6; … ёфта шавад.

4. Сумман узвҳои 3-юм ва 6-уми прогрессияи арифметикӣ ба 3 баробар буда, сумман квадратҳояшон бошад, ба 45 баробар аст. Прогрессияи арифметикиро ёбед.

5. Махраҷи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар $a_1 = 1$, $n = 3$ ва $S_3 = 157$ бошад.

6. Сумман ҳаман ададҳои натуралии дуракамаро ёбед.

7. Исбот карда шавад, ки пайдарпаии дар намуди $b_n = 1{,}5 \cdot 2^n$ додашуда, прогрессияи геометрӣ мебошад.

8. Сумман 3-то узви аввалаи прогрессияи геометрӣ ба 21 баробар буда, сумман квадратҳояшон ба 189 баробар аст. Махраҷ ва узви якуми прогрессияро ёбед.

9. Сумман ҳаман ададҳои натуралии аз 200 калон набударо ёбед.

10. Сумман ҳаман ададҳои натуралии ба 3 каратии аз 120 калон набударо ёбед.

11. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 + a_5 = -2$ ва $a_2 + a_6 = 2$ мебошад. S_{10}-ро ёбед.

12. Узви якуми прогрессияи арифметикиро ёбед, агар $S_{15} = 240$ ва $d = 2$ бошад.

13. Сумман се адад ба 111 баробар буда, прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд. Адади дуюм аз якум 5 маротиба калон аст. Адади якумро ёбед.

14. Сумман се адад, ки прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд ба 87 баробар аст. Адади сеюм аз сумман ду адади дигар ба 5 воҳид хурд аст. Адади якумро ёбед.

15. Суммаи панҷ узви аввалинии прогрессияи геометриро ёбед, агар, $q = 2$ ва $b_2 + b_4 = 30$ бошад.

16. Сумман се узви аввалинии прогрессияи геометрӣ ба 28, сумман се узви оянда бошад ба 3,5 баробар аст. Узви дуюмро ёбед.

17. Узви панҷуми прогрессияи геометрии афзуншавандаро ёбед, агар узви дуюми он 16 ва сумман се узви аввалинаш ба 56 баробар бошад.

БОБИ XIV
НАЗАРИЯИ ХУДУДХО

§1. Худуди функсия

Хонандагон аз барномаи курси математикаи мактабй доир ба пайдарпаихои беохир маълумот доранд. Ғайр аз ин, дар мавзухои дар боло муоина кардашуда доир ба пайдарпаихо ва функсия маълумоти умумй гирифтанд. Бинобар ин, дар ин ҷо бори дигар мафхуми функсия ва пайдарпаихоро хотиррасон карда, мафхуми худуди функсия ва пайдарпаихоро дида мебароем.

Фарз мекунем, ки функсияи дилхохи $y = f(x)$-и дорои сохаи муайянии $D(f)$ ва сохаи тагйирёбиаш $E(f)$ дода шуда бошад.

Агар тагйирёбандаи x аз сохаи $D(f)$ киматхои

$$x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots \qquad n \in N \qquad (1)$$

- ро кабул кунад, он гох, (1) пайдарпаии ададхоро ташкил мекунад.

Пайдарпаии (1)- ро дар намуди мачмуи ададхои $\{x_n\}$ ифода кардан мумкин аст.

Таърифи 1. *Адади a худуди пайдарпаии $\{x_n\}$ номида мешавад, агар барои $\forall \varepsilon > 0$-и хурд, чунин рақами N ($N = N(\varepsilon)$ аз ε вобаста) мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи $n > N$ нобаробарии*

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (2)$$

иҷро гардад.

Ба a баробар будани худуди пайдарпаии $\{x_n\}$- ро дар холати $n > N$ ($\text{ё ки } n \to \infty$) ин тавр менависанд:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (3)$$

Мисоли 1. Исбот кунед, ки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+3}{n} = 4$ аст.

Ҳал. Барои исбот аз нобаробарии (2) истифода бурда, менависем:

$$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|\frac{3}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{3}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{3}{\varepsilon}.$$

Пас, ҳудуди пайдарпаии додашуда аз рақами $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$ сар карда, ба адади 4 баробар мешудааст. **Масалан**, дар ҳолати $\varepsilon=0{,}1$ будан, $N=30$ ва дар ҳолати $\varepsilon=0{,}01$ будан, $N=300$ ва ғайраҳо шуда метавонад.

Бигузор x соҳаи муайянии функсия ва a нуқтаи ҳудудии мачмуи додашуда бошад.

Таърифи 2. *Адади b ҳудуди функсияи $f(x)$ дар ҳолати $x\to a$ $(x\neq a)$ номида мешавад, агар барои $\forall\varepsilon<0$-и хурд ва ҳамаи $x\neq a$-и ба a кифоя наздик нобаробарии*

$$|f(x)-b|<\varepsilon \qquad (4)$$

ичро гардад. Дар ин ҷо, нобаробарии (4) барои ҳамаи он қиматҳои x, ки бароямон функсияи $f(x)$ маъно дорад, ҷой дорад.

Ин таърифро дар намуди ҳудудиаш мухтасар ин тавр менависанд:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \qquad (5)$$

ё ки $f(x)\to b$ ҳангоми $x\to a$.

Таърифи 3. *Тасдиқоти*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \qquad (6)$$

ба нобаробарии $|f(x)-b|<\varepsilon$ дар ҳолати $|x|<0$ будан эквивалент мебошад, ки дар ин ҷо, $\Delta=\Delta(\varepsilon)$ аз ε вобаста аст.

Лекин боид дар хотир дошт, ки $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ на барои ҳама гуна функсияи $y=f(x)$ вуҷуд дорад. **Масалан**, ҳангоми $x\to\frac{\pi}{2}$ қимати функсияи $y=tgx$ номаҳдуд меафзояд (дар ҳолати $x<\frac{\pi}{2}$ будан), ё номаҳдуд кам мешавад (ҳангоми $x>\frac{\pi}{2}$ будан). Бинобар ин, барои ин функсия ҳеҷ адади b - ро нишон додан мумкин нест, ки қимати функсия ба он майл кунад.

Дар оянда хангоми дида баромадани худуди функсияхо, мо доимо фарз мекунем, ки худуд вучуд дорад.

§2. Теоремахои асосии худуди функсияхо

Дар ин чо факат аз таърифи худуди функсия истифода бурда, якчанд теоремахои асосии худуди функсияхоро дар нукта меорем. Теоремахое, ки бе исбот оварда мешаванд дар хисоби худудхо ахамияти калон доштта, хисоби онхоро осон мекунанд.

Фарз мекунем, ки худуди функсияхои $f(x)$ ва $g(x)$ дар нуктаи $a\,(x \to a)$ мавчуд бошанд. Яъне,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ ва}$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = B,\ B \neq 0$$

бошанд.

Теорема 1. *Худуди бузургии доимй ба худи бузургии доимй баробар аст:*

$$\lim_{x \to a} c = c \quad (\text{с – доимй}) \qquad (1)$$

Теорема 2. *Худуди сумма (фарки) функсияхо ба сумма (фарки) худудхои хамин функсияхо баробар мебошад:*

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x). \qquad (2)$$

Теорема 3. *Худуди хосили зарби функсияхо ба хосили зарби худудхои ин функсияхо баробар аст:*

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x). \qquad (3)$$

Теорема 4. *Худуди нисбати ду функсияхо ба нисбати худудхои ин функсияхо баробар аст, агар худуди махсумандаба ноль баробар набошад:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)},\ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0. \qquad (4)$$

Теорема 5. *Зарбкунандаи доимиро аз сатхи шиорати худуд баровардан мумкин аст:*

$$\lim_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \lim_{x \to a} f(x). \qquad (5)$$

Теорема 6. *Агар худуди функсияи $f(x)$ дар нуктаи a мавчуд бошад, он гох худуди дарачаи нисбати он дар нуктаи a ба хамон хел дарачаи нисбати худуди функсия баробар мебошад, яъне*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n,\ n\in N. \qquad (6)$$

Ба ғайр аз теоремаҳои номбаркардашуда, ҳангоми ҳисоби ҳудуди функсияҳои тригонометрӣ дар нукта аз ҳудудҳои зерин (ҳудуди шоёни диққат) истифода кардан иконпазир мебошад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1. \qquad (7)$$

Умуман ҳангоми ҳисоб кардани ҳудуди функсияҳо, таъриф ва теоремаҳои асосии ҳудуди функсияҳо, ҷудокунии сеузваи квадратӣ ба зарбкунандаҳои хаттӣ, гурӯҳбандӣ, формулаҳои зарби мухтасар, формула ва ифодаҳои тригонометриро донистан ва дар хотир нигоҳ доштан лозим аст.

Натиҷаи ҳисоби ҳар гуна функсияи дорои ҳудуд буда, дар намуди адади ҳақиқӣ (a) ва беохир $(\pm\infty)$ ёфта мешавад. Якчанд мисолҳо доир ба ёфтани ҳудуди функсияҳои хосро дида мебароем.

Мисол. Ҳудуди функсияҳои зеринро ҳисоб мекунем:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x^2+3x-5\right)$.

Ҳал. Дар асоси теоремаҳои 1, 2, 5 ва 6 ҳудуди функсияро ҳисоб мекунем.

$$\lim_{x\to 1}\left(4x^2+3x-5\right)=\lim_{x\to 1}4x^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}5=$$

$$=4\lim_{x\to 1}x^2+3\lim_{x\to 1}x-5=4\cdot 1^2+3\cdot 1-5=4+3-5=2.$$

Ҷавоб: 2.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5}{3-2x}$.

Ҳал. Азбаски,

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+5\right)=3\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}5=3\cdot 1^2+5=3+5=8$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)=\lim\limits_{x\to 1}3-2\lim\limits_{x\to 1}x=3-2\cdot 1=3-2=1$

аст, пас дар асоси теореман 4 ҳосил мекунем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+5}{3-2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+5\right)}{\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)}=\frac{8}{1}=8.$$

Ҷавоб: 8.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Х а л. Дар аввал сеузвои квадратии дар сурати каср бударо ба зарбкунандахои хатгй чудо мекунем. Барои ин муодилаи квадратии $x^2-5x+6=0$- ро хал карда, сеузвои квадратиро дар намуди зерин менависем:

$$x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)$$

Он гох, худуди додашударо ба намуди зерин навишта, онро хисоб мекунем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=2-3=-1.$$

Чавоб: -1.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-x-15}{x^2-4x+3}$.

Х а л. Дар аввал ба монанди мисоли 3 рафтор карда, сеузвахои дар сурат ва дар махраци каср бударо ба зарбкунандахои хатгй чудо карда менависем:

$$2x^2-x-15=(x-3)\cdot(2x+5)$$

ва $$x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x-3).$$

Акнун худуди додашударо хисоб мекунем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-x-15}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+5)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+5)}{(x-1)}=$$

$$=\frac{2\cdot 3+5}{3-1}=\frac{11}{2}=5{,}5.$$

Чавоб: 5,5.

5. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$.

Х а л. Сурат ва махраци касрро ба хамроҳшудаи махраҷ $\sqrt{x+3}+3$ зарб зада, мувофики формулаи $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ хосил мекунем:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+3\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{(x+3)-9} = \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)\cdot\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x-6} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\left(\sqrt{x+3}+3\right) = \sqrt{6+3}+3 = 3+3 = 6.$$

Ҷавоб: 6.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Ҳал. Азбаски, $1-\cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ аст, пас

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2\cdot \frac{x}{2}}\right)^2 = 2\cdot \frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

мешавад.

Аз формулаи (7) ва ҳам аз теореми 5 истифода бурда, менависем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Ҷавоб: 0,5.

Ба гайр аз ҳудуди функсия дар нуқтаи a, дар бисёр маврид дар ин нуқта ҳудуди якгарафаи функсия $f(x)$ - ро муоина мекунанд. Барои он ки ҳудуди якгарафаро фаҳмем, мо бояд таърифи ҳудуди функсия (таърифи 3) - ро ба таври дар курси анализи математикӣ ниҳоядодашуда баён кунем, вай чунин аст:

Таъриф. *Адади A ҳудуди функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a номида мешавад, агар барои $\forall \varepsilon > 0$-и дилхоҳ $\delta > 0$ ёфт шавад, ки ($\delta = \delta(\varepsilon)$ аз ε вобаста аст), ки барои ҳамаи $x \neq a$ - и нобаробарии $|x-a| < \delta$ - ро қаноаткунонда нобаробарии*

$$|f(x)A|<\varepsilon$$

иҷро шавад. Лар ин ҷо нобаробарии

$$|x-a|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x-a<\delta \Rightarrow a-\delta<x<a+\delta$$

дар атрофи нуқтаи a -ро мефаҳмонад.

Ҳудуди яктарафаи функсияи $f(x)$- ро муоина кардан ин ёфтани ҳудуди рост ва ҳудуди чапи функсия мебошад.

Бинобар он, ҳангоми муоина кардани ҳудуди рости функсия дар таърифи додашуда шарти $x \neq a$- ро бо шарти $x > a$ (мувофикан $x < a$) иваз мекунанд. Ҳамин тариқ,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) \text{ ва } \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) \qquad (8)$$

меншавад.

Барои он ки ҳудуди функсияи $f(x)$ дар нуқтаи a мавҷуд бошад, зарур ва кифоя аст, ки баробарии

$$f(a-0) = f(a+0) \qquad (9)$$

иҷро шавад.

§3. Бефосилагии функсияҳо дар нуқта

Аҳамияти мафҳуми дар параграфҳои оянда муоинашаванда аз мафҳуми бефосилагии функсия вобаста аст, бинобар, он дар ин ҷо мафҳуми бефосилагии функсияҳоро дар нуқтаи додашуда дида мебароем. Ҳангоми ҳисоби ҳудуди функсияҳои параграфи 2 маълум шуд, ки ҳудуди функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0 \in X$, яъне $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ба қиматии функсия дар худи нуқтаи $x = x_0$ баробар шуда истодааст.

Таърифи 1. *Функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ бефосила номида мешавад, агар:*

а) *функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ муайян бошад;*

б) *баробарии $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ иҷро шавад.*

Мисол. Барои функсияи $f(x) = 3x + 4$ ҳангоми $x = x_0$ будан,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}(3x+4) = 3\lim_{x \to x_0} x + \lim_{x \to x_0} 4 = 3 \cdot x_0 + 4 = 3x_0 + 4$$

мешавад. Пас, функсияи $f(x) = 3x + 4$ дар нуқтаи $x = x_0$ бефосила аст.

§4. Бефосилагии функсияҳо бо маънои афзоишаш

Бигузор x ягон қимати тағйирёбандаи мустақил (аргумент) аз соҳаи муайянии функсияи $y=f(x)$ бошад. Дар баробари x қимати дигари ин тағйирёбандаи мустақил, x_1 - ро муоина мекунем.

Таърифи 2. *Фарқи x_1-x - ро афзоиши тағйирёбандаи мустақил (аргумент) дар нуқтаи x меноманд ва бо Δx ишорат менамоянд.*

Ҳамин тариқ, $\Delta x=x_1-x$ ва аз ин ҷо,

$$x_1=x+\Delta x \qquad (1)$$

мешавад.

Дар ин ҷо, x - ро қимати ибтидоӣ ва $x+\Delta x$ -ро қимати нави тағйирёбандаи мустақил (аргумент) меноманд.

Бигузор функсияи $y=f(x)$ дар соҳаи муайяниаш X дода шуда бошад. Агар ба аргументи функсия x афзоиши Δx - ро диҳем, он гоҳ, y афзоиши мувофиқи Δy - ро мегирад. Ҳамин тариқ, агар $y=f(x)$ бошад, он гоҳ, $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ мешавад. Аз ин ҷо, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ мешавад.

Таърифи 3. *Фарқи байни қимати нави функсия $f(x+\Delta x)$ ва қимати аввалаи он $f(x)$-ро афзоиши функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x меноманд ва бо Δy $(\Delta f(x))$ ишорат менамоянд (Расми 1).*

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x) \qquad (2)$$

Мисоли 1. Афзоиши аргумент (Δx) ва афзоиши функсия (Δy) дар нуқтаи x ҳангоми $x=1{,}5;\ x=3{,}5$ ва $y=x^2+5x+6$ будан, ёфта шавад.

Ҳал. Мувофиқи таърифи афзоиши аргумент ва афзоиши функсия сохиб мешавем:

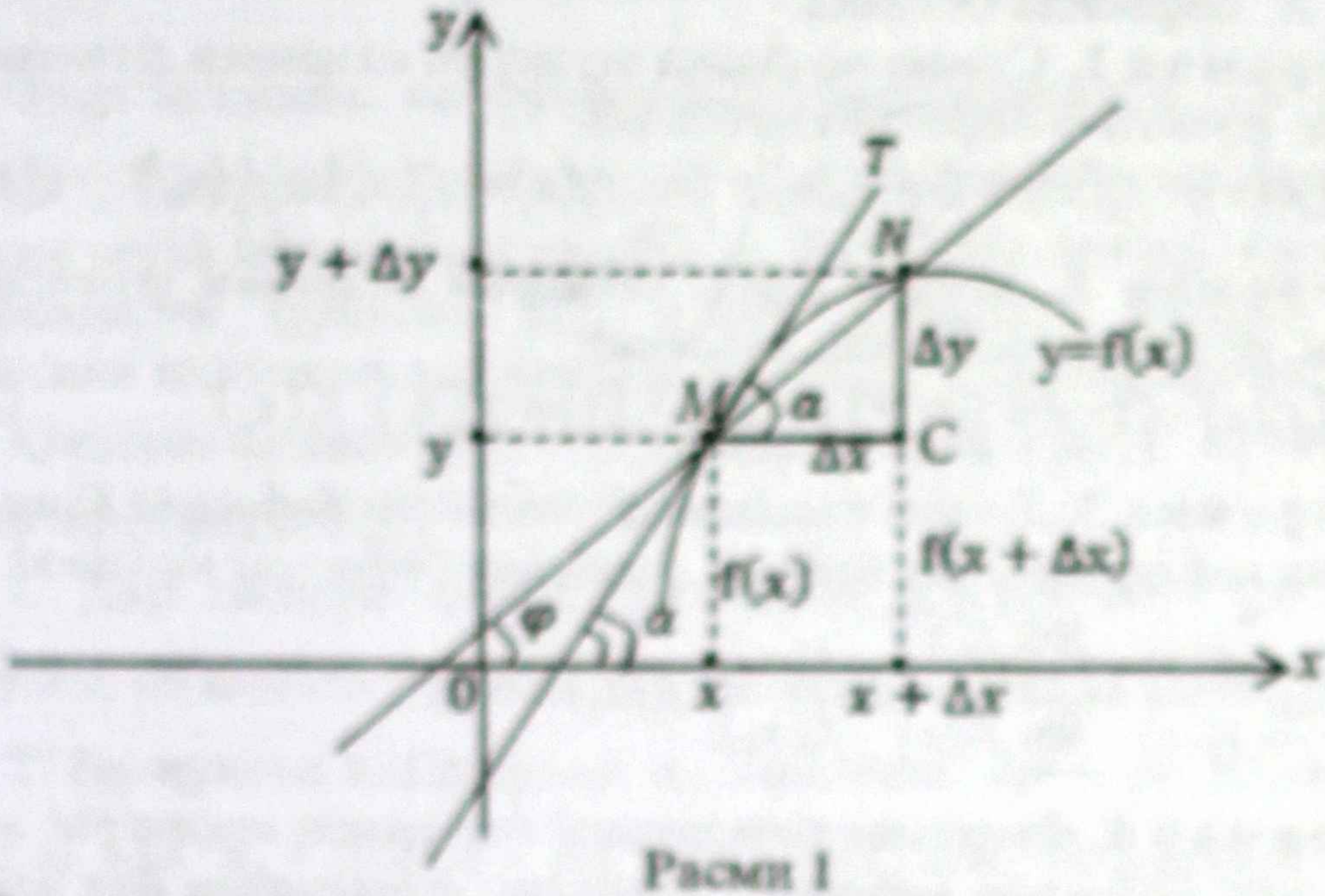
а) $\Delta x=x_1-x;\ \Delta x=3{,}5-1{,}5=2$.

Яъне, $\Delta x=2$.

б) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

$\Delta y=(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+6-(x^2+5x+6)$;

$$\Delta y = (3{,}5)^2 + 5\cdot 3{,}5 + 6 - \left((1{,}5)^2 + 5\cdot 1{,}5 + 6\right)$$
$$\Delta y = 35{,}75 - 15{,}75 = 20.$$



Расми 1

Таърифи 4. *Функсия дар нуқтаи додашудаи бефосила номида мешавад, агар дар ин нуқта ба афзоиши беохир хурди аргумент* (Δx) *афзоиши беохир хурди функсия* (Δy) *мувофиқ ояд.* Ҳамин тариқ,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) = 0 \qquad (3)$$

мешавад.

Мисоли 3. Исбот кунед, ки функсияи $y = 3x^2 + 4$ дар ҳамаи мақсуми R бефосила аст.

Ҳал. *Қадами* 1. $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 4$;

Қадами 2. $\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 4 - \left(3x^2 + 4\right) =$

$$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 4 - 3x^2 - 4 =$$
$$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 3\Delta x(2x + \Delta x)$$

Қадами 3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3\Delta x(2x + \Delta x)) = 3\cdot 0(2x + 0) = 0$.

Пас, функсияи $y = 3x^2 + 4$ мувофиқи таърифи 4 дар тамоми мақсуми R бефосила мебошад.

§5. Теоремахо дар бораи функсияхои бефосила

Бигузор функсияҳои $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ дар ягон нуктаи x_0-и мачмуи X бефосила бошанд.

Теореман 1. *Сумма ва фарқи шумораи охирноки функсияҳои бефосила, функсияи бефосила мебошад.*

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\pm f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm\lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_1(x_0)\pm f_2(x_0). \quad (1)$$

Теореман 2. *Хосили зарби шумораи охирноки функсияҳои бефосила, функсияи бефосила мебошад.*

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_1(x_0)\cdot f_2(x_0). \quad (2)$$

Теореман 3. *Хосили тақсими функсияҳои бефосила (ҳангоми махраҷаш нобаробарӣ нол будан), функсияи бефосила мебошад.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}=\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)},\ f_2(x_0)\neq 0. \quad (3)$$

Теорман 4. *Функсияи ратсионалӣ дар ҳамаи нуқтаҳое, ки он муайян аст, бефосила мебошад. Масалан, функсияҳои дар намуди бисёраъзогӣ додашуда, мисоли функсияҳои ратсионалӣ буда, онҳо дар ҳамаи мачмуи R бефосила мебошанд.*

МАШҚҲО

Ҳудуди функсияҳои зеринро ҳисоб кунед:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-2x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-4x-21}{2x-14}$.
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.
5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to -2}\left(7+3x+x^2\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{11x-x^2}{x^3+3x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 5x}{x}$.
9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,8x}{3x}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 12x}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 18x}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\cos x}-\sqrt{5}}{2x^2}$.

БОБИ XV
ХОСИЛА ВА ТАДҚИҚИ ФУНКСИЯ

§1. Хосила ва таърифи он

Фарз мекунем, ки функсияи муоинашавандаи $y = f(x)$ дар маҷмуи $X = (a; b)$ (маҷмуи $X = (a; b)$ интервали охирнок ва беохир шуда метавонад) муайян ва бефосила бошад. Аз мафҳуми бефосилагии функсия дар нукта истифода бурда, хосилаи функсияи дилхоҳро дар нуктаи додашуда дида мебароем.

Хосилаи функсияи $y = f(x)$ дар нуктаи $x_0 \in X$ аз рӯи схеман зерин ёфта мешавад:

1. Дар маҷмуи додашуда нуктаи $x = x_0 \in X$ - ро интихоб мекунем, ки қимати функсия дар он ба $y_0 = f(x_0)$ баробар аст.

2. Ба нуктаи кайдшудаи x_0 афзоиши Δx - ро илова карда, нуктаи нав $x_0 + \Delta x \in X$ - ро хосил мекунем, ки қимати функсия дар он ба $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ баробар аст: $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

3. Аз қимати нави функсия $f(x_0 + \Delta x)$, қимати аввалаи он $f(x_0)$ - ро кам карда, афзоиши функсия $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - ро пайдо мекунем.

4. Афзоиши функсия $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - ро ба афзоиши аргумент $\Delta x \neq 0$ тақсим карда, баробарии зеринро хосил мекунем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0). \qquad (1)$$

5. Аз ду тарафи баробарии (1) дар асоси ба нол майл кардани Δx $(\Delta x \to 0)$ ҳудуд мегирем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Таъриф 1. *Агар ҳудуди нисбати афзоиши функсия Δy дар нуқтаи x_0 бар афзоиши аргумент Δx, дар асоси $\Delta x \to 0$ ҳуқуқ доштта бошад, он гоҳ ин ҳудудро хосилаи функсияи $f(x)$ дар нуқтаи $x = x_0$ меноманд.*

Аз ишорахои зерин y' ва $f'(x_0)$ истифода бурда, менависем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\quad\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'\right)\qquad(3)$$

(Дар ин чо $f'(x_0)$ - адади маълум мебошад).

Хосилаи функсияро дар китобхои дарсй, дастурхо ва воситахои таълимй бо рамзхои зерин ишоратхо мекунанд.

1. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ ё ки $f'(x_0)$ (Лагранж); (4)

2. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ ё ки $\frac{df(x_0)}{dx}$ (Лейбниц); (5)

3. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=dy$ ё ки $Df(x_0)$ (Коши); (6)

4. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\dot{y}$ (Ньютон) (7)

Таърифи 2. *Функсияе, ки дар ягон нуқтаи соҳаи муайянй ҳосила дорад, дар ҳамин нуқта дифференсиронидашаванда номида мешавад.*

Аз мафхуми ҳудуд аз рост ва ҳудуд аз чапи функсия истифода бурда, ҳосила аз рост ва ҳосила аз чапи функсияро дар нукта дида мебароем.

Дар асноси ба нол майл кардан ва мусбат будани Δx, ҳудуди

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)\qquad(8)$$

- ро ҳосилаи рост меноманд ва дар асноси ба нол майл кардан ва манфй будани Δx, ҳудуди

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)\qquad(9)$$

- ро ҳосилаи чапи функсия дар нуқтаи x_0 меноманд.

Агар,

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)\qquad(10)$$

бошад, он гоҳ функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила мебошад, яъне,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

меншавад.

Амали ёфтани хосилаи функсияро дифференсирони функсия меноманд.

Мисоли 1. Исбот кунед, ки агар $y = x^2 + 4x + 5$ бошад, $y' = 2x + 4$ аст.

Ҳал. Хосилаи функсияро дар асоси схемаи дар §1 нишондодашуда меёбем:

Қадами 1. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 5$;

Қадами 2. $\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 5 - (x^2 + 4x + 5) =$

$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x + 5 - x^2 - 4x - 5 =$

$= 2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2$;

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 4 + \Delta x$;

Қадами 4. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 4 + \Delta x)$

Мувофики таърифи 1 ва ёфтани хосила мо навишта металбонем:

$y' = 2x + 4$.

Инак, исбот карда шуд, ки $y' = \left(x^2 + 4x + 5\right) = 2x + 4$ аст.

§2. Маънои геометрии хосила

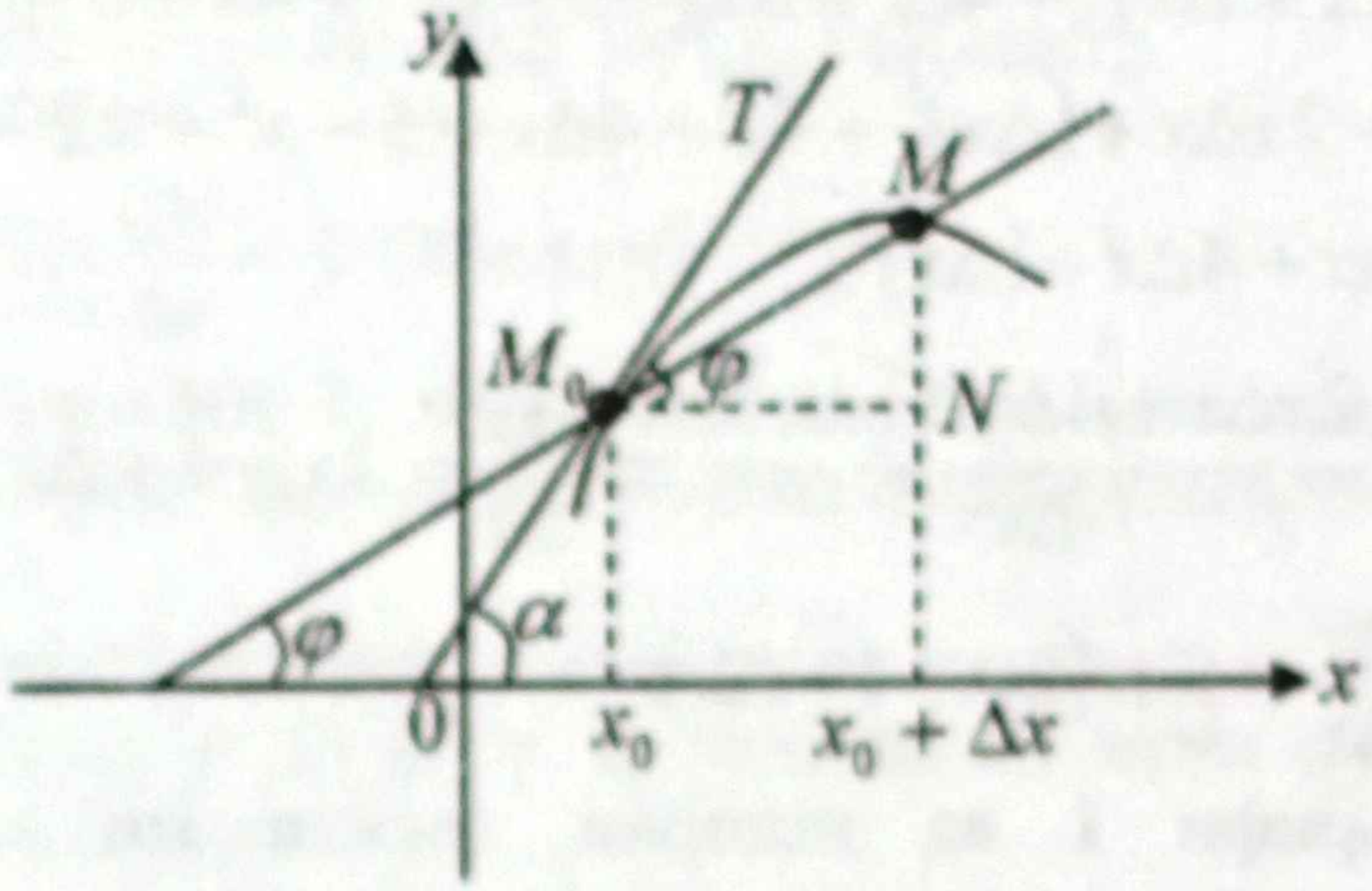
Фарз мекунем, ки хати каҷи l графики ягон функсияи бефосилаи $y = f(x)$ дар ягон фосилаи X - и сохаи муайянаш бошад. Дар хати каҷ нуктаи дилхоҳи бекаракати $M(x, y)$ - ро мегирем. Агар ба абсиссаи нуктаи бекаракат x афзоиши Δx - ро илова кунем, он гоҳ ординатаи ин нуқта y мувофиқан афзоиши Δy - ро мегирад ва дар натиҷа нуктаи нави N - ро хосил мекунем, ки абсиссааш $x + \Delta x$ ва ординатааш $y + \Delta y$ мебошад: $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Нуқтаи N нуқтаи ҳаракаткунанда мебошад. Нуқтаҳои M ва N - ро пайваста, хати буранда MN - ро ҳосил мекунем.

Агар нуқтаи $N \to M$ ҳаракат кунад, он гоҳ хати буранда MN дар гирди нуқтаи беҳаракати M чарх зада, вазъиятҳои гуногунро қабул мекунад. Дар ин маврид лаҳзае мешавад, ки хати рости буранда MN вазъияти MT - хати рости расанда ба нуқтаи M - ро қабул мекунад.

Бинобар он, вазъияти ҳудудии хати бурандаро хати расанда ва хати MT - ро расанда ба хати қачи l дар нуқтаи M меноманд.

Вақте ки буранда MN бо самти мусбати тири Ox кунчи φ - ро ташкил медиҳад, расандаи MT бо самти мусбати тири Ox кунчи тез ё кундро ташкил медиҳад (Расми 1).



Расми 1

Аз ΔMNC бармеояд, ки $\angle CMN = \varphi$ мебошад. Агар коэффисиенти кунчии бурандаи MN - ро бо k_1 ишорат кунем, он гоҳ аз ΔMNC

$$k_1 = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

мешавад.

Агар $N \to M$, он гоҳ, $\Delta x \to 0$ ва хати рости бурандаи MN ба мавқеи ҳудудии худ – ба хати рости расандаи MT дар нуқтаи M майл мекунад. Дар ин ҳолат, ҳангоми $\Delta x \to 0$ будан кунчи байни буранда ва тири Ox (кунчи φ) ба кунчи байни расанда ва тири Ox (кунчи α) майл мекунад: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$ (расандаи MT ба

тири Ox перпендикуляр нест). Бинобар ин, дар асоси бефосилагии функсияи тригонометрии tgx навишта метавонем:

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0} tg\varphi = tg\alpha .$$

Дар ин чо, $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ мебошад.

Пас, $tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$ мебошад.

Хамин тарик, хосилаи функсияи $f(x)$ дар нуктаи x ба тангенси кунчи моили расанда ба хати каҷи муъофик дар нуктаи абсиссааш x баробар аст:

$$f'(x) = tg\alpha . \qquad (2)$$

Аз ҳама, $tg\alpha$ - коэффитсиенти кунчии расандаи MT мебошад, пас баробарии (12) - ро ба таври зерин маънидод кардан мумкин аст:

Коэффитсиенти кунчии расанда ба графики функсия, ки дар нуқтаи x гуногунида мудаваст, ба қимати ҳосилаи он дар ҳамон нуқта баробар мебошад.

§3. Маъноҳои механикии ҳосила

Ҳаракати ростхатаи мунтазам – ҳаракати содатарини ҷисм мебошад. Ҳаракати ростхаттаи мунтазам ҳаракатест, ки ҷисм самти худро тағйир надода, дар фосилаҳои баробари вақт масофаи баробарро тай мекунад. Аз курси физикаи мактабӣ маълум аст: *роҳе, ки ҷисм дар воҳиди вақт ҳангоми ҳаракати ростхаттаи мунтазам тай мекунад, ба суръати ин ҳаракат баробар аст.*

Аммо дар амалия ба ғайр аз ҳаракати мунтазам боз ҳаракати ғайримунтазам каст, ки бисёртар коридор мешавем. Масалан, дар ҳаракати ғайримунтазам, дар фосилаҳои гуногуну аз ҷиҳати бузургӣ баробари вақт масофаи гуногуни муъофик мепаймояд, бинобар он аксар вақт ҳаракати ғайримунтазам дар фосилаи муайяни вақт бо суръати миёна ифода карда мешавад. Ҳаракат, ки маълум аст, масофа S аз вақт t вобаста мебошад, яъне, $S = f(t)$. Инро қонуни ҳаракат ҳам меноманд. Аз ин ҷо,

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t) \text{ ё ки } \Delta s = f(t + \Delta t) - f(t) \qquad (1)$$

мешавад.

Агар дар лаҳзаи вақти t ҷисми ҳаракаткунанда масофаи ба S баробарро тай карда бошад, он гоҳ дар лаҳзаи вақти $t+\Delta t$ масофаи ба $S+\Delta s$ баробарро тай мекунад. Пас, $\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$ масофаи дар фосилаи вақти Δt тайкардашударо муайян мекунад.

Азбаски суръат бузургии тағйирёбанда мебошад, бинобар он нисбати масофаи тайкардашуда Δs бар муддати вақти сарфшуда Δt фақат суръати миёнаро муайян мекунад, пас,

$$\vartheta_м = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (2)$$

мешавад.

Агар аз суръати миёна $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, дар мавриди $\Delta t \to 0$ будан ҳудуд гирем, дар натиҷа суръати лаҳзагии ҷисми ҳаракаткунандаро дар лаҳзаи вақти t пайдо мекунем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \vartheta_л = f'(t). \qquad (3)$$

Инак, суръати лаҳзавии ҷисми ҳаракаткунанда дар ягон лаҳзаи вақти t ба ҳосилаи функсияи масофаро ифодакунанда баробар аст.

§4. Бевосита ҳисобкунии ҳосила

Агар функсияи $y = f(x)$ дар маҷмуи $D(f)$ муайян буда, дар ҳамин маҷмуъ ҳосила дошта бошад, он гоҳ бевосита ҳисобкунии ҳосилаи функсия аз рӯи схеман дар §1 овардашуда гузаронида мешавад.

Инак, барои маълумоти пурра доштан бори дигар схеман ёфтани ҳосиларо барои функсияи дилхоҳ меорем:

1. $y = f(x_0)$, $x \in D(f)$;
2. $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$;
3. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, $(\Delta x \neq 0)$;
5. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
6. Дар асоси таъриф

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',\ \text{ёки}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

мешавад.

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияҳои зеринро бо роҳи бевосита *ҳисобкунӣ ёбед:*

а) $y=x^2$.

Ҳ а л. *Қадами* 1. $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$;

Қадами 2. $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=$

$=2x\Delta x+(\Delta x)^2$;

Қадами 3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$;

Қадами 4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$;

Қадами 5. **Ниҳоят,** $y'=(x^2)'=2x$.

б) $y=\sqrt{x}$.

Ҳ а л. *Қадами* 1. $y=\sqrt{x},\ x\geq 0$;

Қадами 2. $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$;

Қадами 3. $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$;

Қадами 4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\dfrac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$

$=\dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$;

Қадами 5. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

Қадами 6. **Ниҳоят,** $y'=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *меёбем.*

в) $y=\dfrac{1}{x},\ x\neq 0$.

Ҳ а л. *Қадами* 1. $y+\Delta y=\dfrac{1}{x+\Delta x}$;

Қадами 2. $\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x^2+x\Delta x}$;

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2+x\Delta x}$;

Қадами 4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x^2+x\Delta x} = -\frac{1}{x^2}$;

Қадами 5. **Инак,** $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ **мешавад.**

г) $y = \frac{x+4}{5}$.

Ҳ а л. *Қадами 1.* $y+\Delta y = \frac{(x+\Delta x)+4}{5}$;

Қадами 2. $\Delta y = \frac{(x+\Delta x)+4}{5} - \frac{x+4}{5} = \frac{x+\Delta x+4-x-4}{5} = \frac{\Delta x}{5}$;

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$;

Қадами 4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$;

Қадами 5. **Инак,** $y' = \left(\frac{x+4}{5}\right)' = \frac{1}{5}$.

г) $y = \frac{x^2}{2} + 12x - 3$.

Ҳ а л. *Қадами 1.* $y+\Delta y = \frac{(x+\Delta x)^2}{2} + 12(x+\Delta x) - 3$;

Қадами 2. $\Delta y = \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2}{2} + 12x + 12\Delta x - 3 - \frac{x^2}{2} - 12x + 3 =$

$$= \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2}{2} + 12\Delta x - \frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2} + 12\Delta x - \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2} + 12\Delta x = \Delta x\left(x + 12 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Қадами 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left(x+12+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = x+12+\frac{\Delta x}{2}$;

Қадами 4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(x+12+\frac{\Delta x}{2}\right) = x+12$;

Қадами 5. Аз ин ҷо, $y' = \left(\frac{x^2}{2}+12x-3\right)' = x+12$ меншавад.

§5. Ҳосилаи функсияҳои элементарӣ

1. **Функсияи дарочагӣ** $\left(y=x^n,\ n\neq 1\right)$. Ҳосилаи функсияи дарочагӣ аз рӯи формулаи

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1} \qquad (1)$$

ёфта мешавад. **Масалан:**

а) $\left(x^5\right)' = 5x^4$; б) $\left(x^{-7}\right)' = -7x^{-8}$;

в) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; г) $\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

2. **Функсияи нишондиҳандагӣ** $\left(y=a^x,\ 0<a\neq 1\right)$. Ҳосилаи функсияи нишондиҳандагӣ аз рӯи формулаи

$$\left(a^x\right)' = a^x\ln a\ \ (0<a\neq 1) \qquad (2)$$

ёфта мешавад.

Дар ҳолати $a=e$ будан, аз рӯи формулаи (2) ҳосил мекунем:

$$\left(e^x\right)' = e^x,\ \ (\ln e = 1) \qquad (3)$$

Масалан. а) $\left(5^x\right)' = 5^x\ln 5$, б) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]' = \left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{3}$.

3. **Функсияи логарифмӣ** $\left(y=\log_a x\right)$. Ҳосилаи функсияи логарифмӣ аз рӯи формулаи

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e,\ (0<a\neq 1) \qquad (4)$$

ёфта мешавад.

Дар ҳолати $a=e$ будан, ҳосилаи $y=\ln x$ аз рӯи формулаи (4)

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x},\ x > 0,\ \log_e e = 1 \qquad (5)$$

ёфта мешавад.

Масалан. а) $\left(\log_5 x\right)' = \frac{1}{x}\log_5 e$; б) $\left(\lg x\right)' = \frac{1}{x}\lg e$.

4. **Функсияи тригонометрӣ**. Хосилаи функсияи тригонометрӣ аз рӯи формулаҳои

$$\left(\sin x\right)' = \cos x; \quad \left(\cos x\right)' = -\sin x;$$

$$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x;$$

$$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x \qquad (6)$$

ёфта мешавад.

§6. Хосилаи функсияҳои мураккаб

Фарз мекунем, ки функсияи $y = f(u)$, ки $u = \varphi(x)$ аст, дода шуда бошад. Функсияи мураккаби аз функсияҳои $f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ тартиб ёфта, намуди зеринро дорад:

$$y = f(\varphi(x)) = F(x) \qquad (1)$$

(дар ин ҷо, $F(x)$ - функсияи мураккаб).

Агар функсияи $\varphi(x)$ дар нуқтаи x_0 ва функсияи $f(u)$ дар нуқтаи $u_0 = \varphi(x_0)$ ҳосила доштта бошанд, он гоҳ, функсияи мураккаби $f(\varphi(x))$ дар нуқтаи x_0 дорои ҳосила буда, ҳосилаш аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад.

$$\left(f(\varphi(x))\right)' = f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0) \qquad (2)$$

Масалан, дар мавриди $F(x) = f(ax+b)$ будан, ҳосилаи функсияи $f(ax+b)$ - ро дар асоси формулаи (2)

$$\left(f(ax+b)\right)' = af'(ax+b) \qquad (3)$$

ёфта мешавад.

Дар ин ҷо, адади a ҳосилаи функсияи $(ax+b)$ аст:

$$(ax+b)' = (ax)' + b' = a.$$

Мисол 1. $\left((3x+4)^{10}\right)' = 10(3x+4)^9 \cdot (3x+4)' =$

$= 10(3x+4)^9 \cdot 3 = 30 \cdot (3x+4)^9.$

Мисол 2. $\left(\frac{5}{(4x+4)^5}\right)' = \left(5 \cdot (4x+4)^{-5}\right)' =$

$= 5 \cdot (-4) \cdot (4x+4)^{-5} \cdot (4x+4)' =$

$= -20 \cdot 4 \cdot (4x+4)^{-5} = -80 \cdot (4x+4)^{-5}.$

Мисол 3. $\left(\sqrt{x^3+5}\right)' = \left((x^3+5)^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \frac{1}{2}(x^3+5)^{\frac{1}{2}-1}(x^3+5)' =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^3+5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^3+5}}.$

Мисол 4. $(\sin 4x)' = \cos 4x \cdot (4x)' = 4\cos 4x.$

Мисол 5. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)\right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$

Мисол 6. $(\ln x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}.$

Мисол 7. $\left(e^{4x+5}\right)' = e^{4x+5} \cdot (4x+5)' = 4e^{4x+5}.$

Мисол 8. $\left(2^{\sin x}\right)' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot (\sin x)' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x =$

$= \cos x \cdot 2^{\sin x} \cdot \ln 2.$

§7. Комплекс ва формулалари ҳисобларни соддалаштириш

Бирор функциялар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ дар нуқтаи x-ни ягона муайянишои дорои ҳосилаҳои $u'(x)$ ва $v'(x)$ $(v(x) \neq 0)$ бошанд. Он гоҳ ҳосилаҳои комплекс ва формулаҳои умумии ёфтани ҳосилаҳоро, ки ба шумоён маълуми аст, исбот кардан мумкин:

1. $C' = 0$, (C - доимии ададӣ);

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 3. $(uv)' = u' \cdot v + uv'$;

4. $(C\cdot u)' = C\cdot u'$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\cdot v'}{v^2}$;

6. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$

7. $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'_x$;

8. $(\sqrt{u})' = \frac{u'_x}{2\sqrt{u}}$;

9. $(a^u)' = a^u \ln a\cdot u'_x$;

10. $(e^u)' = e^u\cdot u'_x$;

11. $(\log_a u)' = \frac{u'_x}{u\ln a}$;

12. $(\ln u)' = \frac{u'_x}{u}$;

13. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'_x$;

14. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'_x$;

15. $(tgu)' = \frac{u'_x}{\cos^2 u}$;

16. $(ctgu)' = -\frac{u'_x}{\sin^2 u}$;

17. $(\arcsin u)' = \frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$;

18. $(\arccos u)' = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$;

19. $(arctgu)' = \frac{u'_x}{1+u^2}$;

20. $(arcctgu)' = -\frac{u'_x}{1+u^2}$.

Мисол. Хосилаи функсияхои зеринро хисоб мекунем:

1. $y = \sin 2x + \cos 4x$.

Хал. Формулахои $(\sin u)' = \cos u\cdot u'_x$ ва $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'_x$ - ро татбик карда, хосилаи функсияи додашударо меёбем:

$$y' = (\sin 2x + \cos 4x)' = (\sin 2x)' + (\cos 4x)' =$$
$$= \cos 2x\cdot(2x)' - \sin 4x\cdot(4x)' =$$
$$= 2\cos 2x - 4\sin 2x = 2(\cos 2x - 2\sin 4x)$$

Чавоб: $y' = 2(\cos 2x - 2\sin 4x)$

2. $y = e^{2x} \cdot \cos 2x$.

Ҳ ә л. Формулаҳои $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ва $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ - ро истифода бурда, ҳосилаи функсияи мятлубро меёбем:

$$y' = (e^{2x} \cdot \cos 2x)' = (e^{2x})' \cdot \cos 2x + e^{2x} \cdot (\cos 2x)' =$$
$$= e^{2x} \cdot (2x) \cdot \cos 2x + e^{2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x) =$$
$$= 2e^{2x} \cdot \cos 2x - 2e^{2x} \sin 2x =$$
$$= 2e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)$$

Ҷавоб: $y' = 2e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)$

3. $y = \sqrt[3]{4x^3 + 5}$.

Ҳ ә л. Формулаҳои $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, ва $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $n > m$ - ро татбиқ карда, ҳосилаи функсияи додашударо меёбем:

$$y' = \left(\sqrt[3]{4x^3 + 5}\right)' = \left((4x^3 + 5)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(4x^3 + 5)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (4x^3 + 5)' =$$
$$= \frac{1}{3}(4x^3 + 5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4 \cdot 2x = \frac{8}{3}x(4x^3 + 5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x + 5)^2}}.$$

Ҷавоб: $y' = \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x + 5)^2}}$.

4. $y = (2x^3 + 5)^{10}$.

Ҳ ә л. Аз формулаи $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, истифода бурда, ҳосилаи функсияи мятлубро меёбем:

$$y' = \left((2x^3 + 5)^{10}\right)' = 10(2x^3 + 5)^9 \cdot (2x^3 + 5)' =$$
$$= 10 \cdot 6x^2 \cdot (2x^3 + 5)^9 = 60x^2 \cdot (2x^3 + 5)^9.$$

Ҷавоб: $y' = 60x^2 \cdot (2x^3 + 5)^9$.

5. $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

Ҳал. Аз формулаи $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-u\cdot v'}{v^2}$, $v\neq 0$ истифода бурда, ҳосилаи функсияи додашударо меёбем:

$$y'=\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)'=\frac{\left(x^2+4\right)'\cdot\left(x^2-4\right)-\left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2-4\right)'}{\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot\left(x^2-4\right)-2x\cdot\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2-4-x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=-\frac{16x}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Ҷавоб: $y'=-\dfrac{16x}{\left(x^2-4\right)^2}$.

6. $y=\dfrac{5}{3x+4}$.

Ҳал. Аз формулаҳои $\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{Cv'}{v^2}$ ва $C'=0$ истифода бурда, ҳосилаи функсияи маълуброро меёбем:

$$y'=\left(\frac{5}{3x+4}\right)'=\frac{-5\cdot\left(3x+4\right)'}{\left(3x+4\right)^2}=\frac{-15}{\left(3x+4\right)^2}=-\frac{15}{\left(3x+4\right)^2}.$$

Ҷавоб: $y'=-\dfrac{15}{\left(3x+4\right)^2}$.

7. $y=7^{2x+3}+e^{\sin x}$.

Ҳал. Формулаҳои $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'_x$ ва $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'_x$- ро татбиқ карда, ҳосилаи функсияи маълуброро меёбем:

$$y'=\left(7^{2x+3}+e^{\sin x}\right)'=\left(7^{2x+3}\right)'+\left(e^{\sin x}\right)'=$$

$$=7^{2x+3}\ln 7\cdot\left(2x+3\right)'+e^{\sin x}\cdot\left(\sin x\right)'=$$

$$=2\cdot 7^{2x+3}\ln 7+e^{\sin x}\cdot\cos x.$$

Ҷавоб: $y'=2\cdot 7^{2x+3}\ln 7+e^{\sin x}\cdot\cos x$.

8. $y=2x-tg2x$.

Ҳ е л. Формулалари $(u-v)' = u' - v'$, $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ ва $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ ро татбиқ карда, ҳосилаи функсияи $y = 2x - \operatorname{tg} 2x$ - ро меёбем:

$$y' = (2x - \operatorname{tg} 2x)' = (2x)' - (\operatorname{tg} 2x)' = 2 - \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} =$$

$$= 2 - \frac{2}{\cos^2 2x} = 2\left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right) = \frac{2(\cos^2 2x - 1)}{\cos^2 2x} =$$

$$= -\frac{2\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = -\operatorname{tg}^2 2x.$$

Ҷавоб: $y' = -\operatorname{tg}^2 2x$.

9. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

Ҳ е л. Аз формулаҳои $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ва $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ истифода бурда, ҳосилаи функсияи мазкурро меёбем:

$$y' = (\arcsin \sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-x}} = \frac{\frac{x'}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Ҷавоб: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

10. $y = \log_2(4x+5) + \ln(4x+5)$.

Ҳ е л. Аз формулаҳои $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ва $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ истифода бурда, ҳосилаи функсияи додашударо меёбем:

$$y' = (\log_2(4x+5) + \ln(4x+5))' = \frac{(4x+5)'}{(4x+5)\ln 2} + \frac{(4x+5)'}{4x+5} =$$

$$= \frac{4}{(4x+5)\ln 2} + \frac{4}{4x+5} = \frac{4}{4x+5}\left(\frac{1}{\ln 2}+1\right) =$$

$$= \frac{4}{4x+5} \cdot \frac{1+\ln 2}{\ln 2} == \frac{4}{4x+5} \cdot \frac{\ln e + \ln 2}{\ln 2} = \frac{4 \cdot \ln 2e}{(4x+5)\ln 2}.$$

Чавоб: $y' = \frac{4 \cdot \ln 2e}{(4x+5)\ln 2}$.

§8. Формула барои хисобкунихои такриби

Фарз мекунем, ки функсияи муоинашавандаи $y = f(x)$ дар ягон мачмуи X (мачмуи охирнок ё беохир) муайян ва бефосила бошад. Он гох, аз рўи таърифи хосилаи функсияи $f(x)$ дар нуктаи x_0, ки дар §1 дода шудааст,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

мешавад.

Хангоми ба кадри кифоя хурд будани Δx, аз мафхуми афзоиши функсия ва хосилаи функсия дар нукта истифода бурда, меёбем:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow \Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Аз ин чо,

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (1)$$

мешавад. Формулаи асосй барои хисобкунихои такрибии функсияхо формулаи (1) мебошад.

Масалан, барои функсияи дилхохи намуди $f(x) = \sqrt[n]{x}$, хангоми $x > 0$, $x \neq 0$ будан, формулаи хисобкунии такрибии зерин вучуд дорад:

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

Мисоли 1. Ифодаи $\sqrt[3]{1,1}$ - ро такрибй хисоб мекунем.

Хал. Тарзи якум. Дар формулаи хисобкунии такрибии (1)

$f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,1$; $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

-ро гузошта хосил мекунем:

$$\sqrt[3]{1,1} = \sqrt[3]{1+0,1} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot 0,1 = 1 + \frac{0,1}{3} = 1,033.$$

Таърин дуюм. *Дар навбати хавал мисоли додишударо дар намуди жрин меъянсем:*

$$\sqrt[3]{1,1} = \sqrt[3]{1+0,1}.$$

Аз ин ҷо фаҳмост, ки $x_0 = 1$ ва $\Delta x = 0,1$ мебошад. Он гоҳ формулаи (2) – ро татбиқ карда, қиматҳои $\sqrt[3]{1,1}$ -ро тахминӣ меҳисобем:

$$\sqrt[3]{1,1} = \sqrt[3]{1+0,1} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{\sqrt[3]{1}}{3 \cdot 1} \cdot 0,1 = 1 + \frac{0,1}{3} = 1,033.$$

§9. Шарти афзуншавии (камшавии) функсия

Фаҳмо мекунем, ки дар фосилаи (a,b) функсияи муайян ва бефосилаи $f(x)$ дода шуда бошад. Барои муайян кардани фосилаҳои афзуншавии (камшавии) функсия аз косилаи функсияи нигоҳдоштаи истифода мебарем. Дар ин ҷо шарти кофии афзуншавии (камшавии) функсияро дар намуди теорема (бе исбот) меорем.

Теорема. *Агар функсияи $f(x)$ дар ҳар як нуқтаи фосилаи (a,b) ҳосилаи мусбат (манфӣ) дошта бошад, он гоҳ функсияи $f(x)$ дар ин фосила афзуншаванда (камшаванда) мешавад.*

Агар дар функсия фосилаи афзуншавиянда (камшавиянда) дода шуда бошад, он гоҳ аввал содда муайянии функсия ва баъд ҳосилаи функсияро меёбанд.

Агар дар фосилаи додашуда $f'(x) > 0$ бошад, пас дар асоси шарти теорема функсия дар ин фосила афзуншаванда мебошад.

Агар дар фосилаи додашуда $f'(x) < 0$ бошад, пас дар асоси шарти теорема функсия дар ин фосила камшаванда мешавад.

Ҳамин тариқ, нобаробарихои $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) дар ҳамон як фосилаи афзуншавии (камшавии) функсияро муайян мекунанд.

Мисол. Фосилаҳои афзуншавии (камшавии) функсияи $f(x) = x^3 - 27x$ -ро меёбем.

Х а л. Соҳаи муайянии функсия $D(f)=R=(-\infty, +\infty)$ мебошад. Ҳосилаи функсияро ёфта, баъд ба нол баробар карда, ҳалҳояшро меёбем:

$$f'(x)=(x^3-27x)'=3x^2-27.$$

Ҳангоми $f(x)=0$: $3x^2-27=0$; $x^2=9$; $x_1=-3$; $x_2=3$.

Инак, $f'(x)$ ҳангоми $x=-3$ ва $x=3$ будан ба нол баробар мешавад. Пас, нуқтаҳои $x=-3$ ва $x=3$ соҳаи муайянии функсияро ба се фосилаи $(-\infty;-3)$, $(-3;3)$ ва $(3;+\infty)$ чудо мекунад.

Мувофики шарти теорема $f'(x)=3x^2-27$ дар фосилаҳои $(-\infty;-3)$ ва $(3;+\infty)$ мусбат ва дар фосилаи $(-3;3)$ манфй мебошад (Расми 2).

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−10	↗
		max		min	

Расми 2

Азбаски, функсияи $f(x)=x^3-27x$ дар нуқтаҳои $x=-3$ ва $x=3$ бефосила мебошад, пас, функсия дар фосилаҳои $(-\infty;-3)$ ва $(3;+\infty)$ афзуншаванда ва дар фосилаи $(-3;3)$ камшаванда мешавад.

§10. Нуқтаҳои критикй ва экстримуми функсия

Фарз мекунем, ки функсияи $y=f(x)$ дар маҷмуи $X=(a;b)$ муайян ва бефосила бошад. Ҳалҳои муодилаи $f'(x)=0$ нуқтаҳои критикии (*ё нуқтаи нолй*) функсия номида мешаванд. **Масалан**, агар x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи $f'(x)=0$ бошанд, он гоҳ, x_1 ва x_2 барои функсияи $f(x)$ нуқтаҳои критикй мешаванд.

Максимум ва минимуми функсия аз рӯи аломати $f'(x)$ дар атрофи нуқтаҳои критикӣ муайян карда мешавад.

Агар, $x_0 \in X = (a; b)$ яке аз нуқтаҳои критикии функсияи $f(x)$ бошад, пас, x_0 мачмуи $X = (a; b)$- ро ба мачмуҳои $(a; x_0)$ ва $(x_0; b)$ чудо мекунад.

Т е о р е м а и 1 (бе исбот). *Агар функсияи* $y = f(x)$ *дар нуқтаи* $x = x_0$ *бефосила буда, дар фосилаи* $(a; x_0)$ $f'(x) > 0$ *ва дар фосилаи* $(x_0; b)$ $f'(x) < 0$ *бошад, он гоҳ нуқтаи* $x = x_0$ *нуқтаи максимуми функсия мебошад.*

Дар ин ҳолат қимати x_0- ро ба функсияи $y = f(x)$ гузошта, қимати максимуми функсияро меёбем:

$$f_{\max} = f(x_0).$$

Т е о р е м а и 2 (бе исбот). *Агар функсияи* $y = f(x)$ *дар нуқтаи* $x = x_0$ *бефосила буда, дар фосилаи* $(a; x_0)$ $f'(x) < 0$ *ва дар фосилаи* $(x_0; b)$ $f'(x) > 0$ *бошад, он гоҳ нуқтаи* $x = x_0$ *нуқтаи минимуми функсия мебошад.*

Дар ин ҳолат қимати x_0 - ро ба функсияи $y = f(x)$ гузошта, қимати минимуми функсияро меёбем:

$$f_{\min} = f(x_0).$$

М и с о л. Нуқтаҳо ва қимати экстремуми функсияи $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ - ро меёбем.

Ҳ а л. 1. Соҳаи муайяниаш $D(f) = R = (-\infty; +\infty)$ аст, чунки, $f(x)$ бисёрузва мебошад.

2. $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' - (3x)' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 = x - 3;$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

3. Функсияи муоинашаванда якто нуқтаи критикӣ дорад: $x = 3$.

4. Нуқтаи $x = 3$ соҳаи муайянии функсияро ба фосилаҳои $(-\infty; 3)$ ва $(3; +\infty)$ чудо мекунад.

Азбаски дар фосилаи $(-\infty; 3)$ - $f'(x)=x-3<0$ ва дар фосилаи $(3; +\infty)$ - $f'(x)=x-3>0$ мебошад, бинобар он дар асоси теореман 2 нуқтаи $x=3$ нуқтаи минимуми функсия мебошад.

Агар қимати функсияро ёфтан лозим бошад, он гоҳ қимати $x=3$-ро ба функсия гузошта, қимати минимуми функсияро меёбем:

$$f_{\min}=\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)_{x=3}=\frac{1}{2}\cdot 3^2-3\cdot 3=\frac{9}{2}-9=-4{,}5.$$

§11. Тадқиқи функсия ва графики он

Аз курси математикаи мактабӣ аниқтараш аз синфи 8 маълумотҳоро доир ба сохтани графикҳо ба хотир меорем. Графики функсия аз рӯи нуқтаҳо сохта мешавад. Графики сохташуда на ҳама вақт нуқтаҳоро дарбар мегирад, чунки дар вақти сохтани графики функсия нуқтаҳои экремумро партофтан ё ки нодурust тасвир кардан мумкин аст. Барои он ки графики функсия саҳеҳ ва ҳаман нуқтаҳоро дарбар гирад, бояд сохтани графикро аз тадқиқи функсия сар кард.

Фарз мекунем, ки $f(x)$ дар маҷмуи $X=(a; b)$ муайян бошад. Маҷмуи $X=(a; b)$ - фосилаҳои охирнок ва беохир шуданаш мумкин аст.

Агар функсияи $f(x)$ дар маҷмуи $X=(a; b)$ бефосила бошад, он гоҳ функсия аз рӯи схеман зерин тадқиқ карда шуда, графикаш сохта мешавад:

1. Соҳаи муайянӣ ва қиматҳои функсия;
2. Ҷуфт, тоқ ва даврӣ будани функсия;
3. Нуқтаҳои буриши грфики функсия бо тирҳои координатаҳо;
4. Фосилаҳои доимияти аломат;
5. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсия.
6. Нуқтаҳои экстремум ва қиматҳои функсия дар ин нуқтаҳо.

Пас аз он дар асоси қиматҳои ёфташуда графики онро месозанд. Ҳангоми сохтани графики функсия дар бисёр мавридҳо ёфтани нуқтаи буриши графики функсия бо тирҳои координат лозим ва фоидаовар мебошад.

Мисол. Функсияи $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$ - ро тадқиқ карда, графики онро месозем.

Ҳ а л. Функсияи додашударо бо истифодабарии ҳосила тадқиқ мекунем:

1. $D(f)=R$ аст, чунки функсияи додашуда бисёрузва аст.
2. Функсияи додашуда на ҷуфт асту на тоқ.
3. Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-4x=x^2-4x.$$

4. Барои муайян кардани нуқтаҳои критикӣ, ҳосилаи ёфташударо ба нол баробар карда, решаҳои онро меёбем:

$$f'(x)=0;$$

$$x^2-4x=0;\ \ x(x-4)=0\,.$$

Аз ин ҷо, $x_1=0$ ё ки $x_2=4$ мешавад.

Аз ин ҷо бармеояд, ки функсияи муоинашаванда дуто нуқтаи критикии 0 ва 4 дорад.

5. Қимати функсияро дар нуқтаҳои критикӣ ҳисоб мекунем:

$$f(0)=0;\ \ f(4)=-10\frac{2}{3}.$$

6. Барои ёфтани фосилаи афзуншавии (камшавӣ) функсия нобаробариҳои $f'(x)>0$ ва $f'(x)<0$ - ро ҳал кардан лозим меояд:

а) Нобаробарии $x(x-4)>0$- ро ҳал мекунем:

$$1)\ \begin{cases} x>0, \\ x-4>0; \end{cases}\qquad \begin{cases} x>0, \\ x>4. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x>4$ мешавад.

$$2)\ \begin{cases} x<0, \\ x-4<0; \end{cases}\qquad \begin{cases} x<0, \\ x<4. \end{cases}$$

Аз ин ҷо, $x<0$ мешавад.

Ҳалли нобаробариҳо $x>4$ ва $x<0$ мефаҳмонад, ки функсия дар фосилаҳои $(4;+\infty)$ ва $(-\infty;\ 0)$ афзуншаванда аст.

б) Нобаробарии $x(x-4)<0$- ро ҳал карда пайдо мекунем:

$$\begin{cases} x>0, \\ x-4<0; \end{cases}\qquad \begin{cases} x>0, \\ x<4. \end{cases} \qquad (1)$$

Аз ин ҷо, $x>0$ ва $x<4$ мешавад.

Инак, халли системаи нобаробариҳо ба фосилаи $(0;\ 4)$ тааллук доштааст. Системаи нобаробарихои (1) хамчоя нест. Бинобар он, функсия дар фосилаи $(0;\ 4)$ камшаванда мебошад.

6. Барои ёфтани нуктаҳои минимум ва максимуми функсия чадвали зеринро тартиб медиҳем:

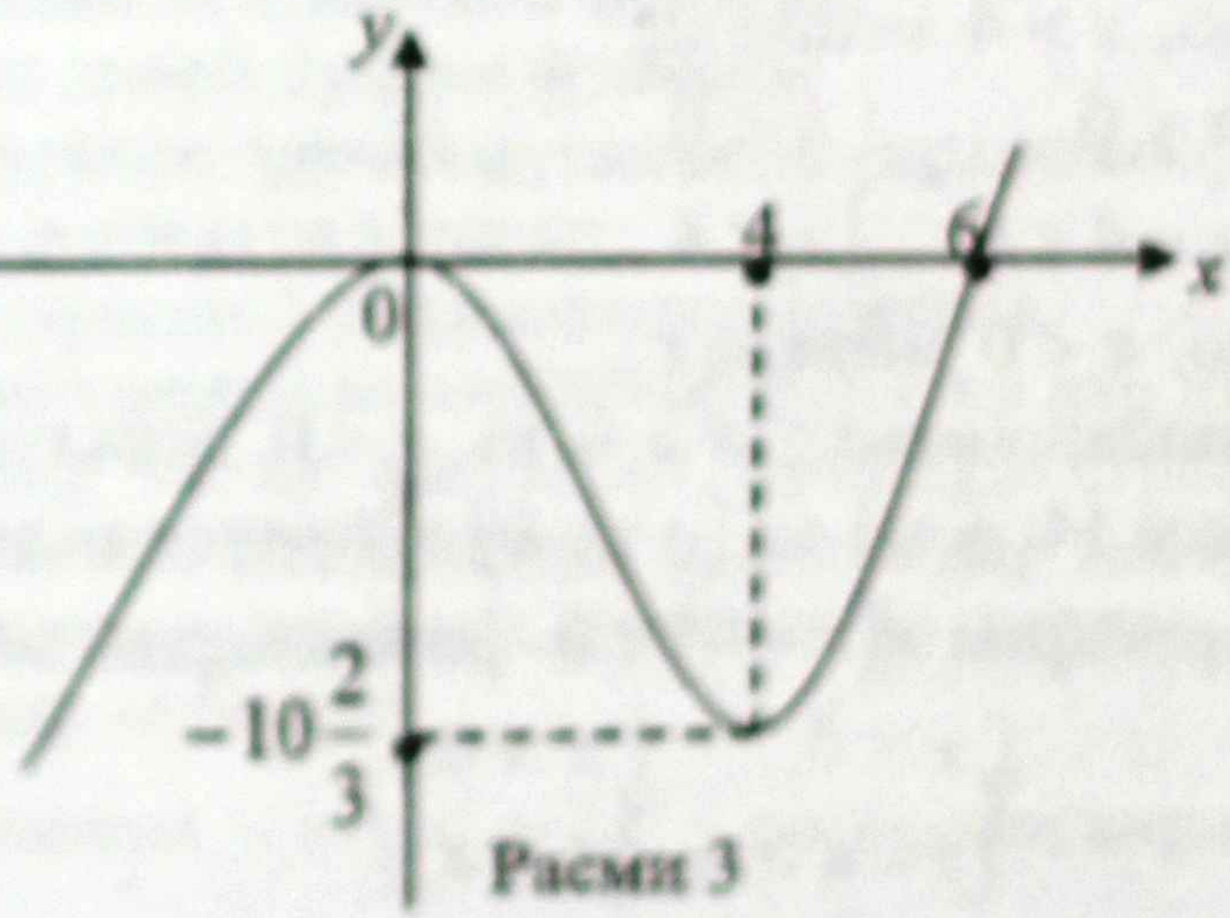
x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 4)$	4	$(4;\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		0		$-10\frac{2}{3}$	
		max		min	

7. Барои ёфтани координатаҳои нуктаи буриши графики функсия бо тирҳои координатаҳо, системаи муодилаҳои зеринро ҳал мекунем:

$$\begin{cases} y = x^2\left(\frac{1}{3}x - 2\right), \\ y = 0. \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} y = x^2\left(\frac{1}{3}x - 2\right) \\ x = 0. \end{cases}$$

Халҳои система координатаҳои нуктаи буришро муайян мекунад. Инак, графики функсияи додашуда, тирҳои координатро дар нуктаи $A(6;0)$ мебурад ва дар нуктаи $O(0;0)$ тири абсисса ба графики функсия расанда аст.

8. Дар охир натиҷаҳои тадқиқотро ба ҳисоб гирифта, графики функсияи мазкурро месозем (Расми 3).



Расми 3

§12. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия

Ҳангоми ичрои корҳои амалӣ масъалаҳое вомехӯранд, ки ҳалли онҳо аз ёфтани қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳо вобаста мебошад. Дар курси анализи математикӣ [20, сах.176] теоремаи дуюми Вейерштрасс тасдиқ мекунад, ки функсияи дар порчаи $[a; b]$ муайян ва бефосилаи $y = f(x)$ дар ин порча соҳиби сарҳади аниқи болоӣ ва поёнӣ мебошад, яъне, дар порчаи $[a; b]$ чунин нуқтаҳои $x = x_0$ ва $x = x_1$ мавҷуданд, ки дар онҳо қиматҳои функсия $f(x_0)$ ва $f(x_1)$ дар байни ҳамаи қиматҳои функсияи $f(x)$ мувофиқан калонтарин ва хурдтарин мебошад.

Агар функсияи $f(x)$ дар ягон соҳаи $X = (a; b)$ муайян ва бефосила бошад, он гоҳ барои ёфтани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия дар ин соҳа аввал нуқтаҳои критикии функсияро меёбанд ва баъд қимати функсияро дар охирҳои порча ҳисоб мекунанд. Пас, аз ин ҷо барои муайян кардани қимати калонтарин ва хурдтарини функсия аз ин ададҳои ёфташуда, калонтарин ва хурдтаринашро интихоб кардан зарур аст.

Мисол. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ - ро дар порчаи $[-4; 4]$ меёбем.

Ҳал. Аввал нуқтаҳои критикии функсияро меёбем:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 - 9x + 35\right)' = 3x^2 - 6x - 9;$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = 4 + 12 \Rightarrow D = 16 > 0;$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1; \; x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Инак, функсия дуто нуқтаи критикии -1 ва 3 доштааст. Дар ин ҷо, $-1 \in [-4; 4]$ ва $3 \in [-4; 4]$ мебошад.

1. Қиматҳои функсияро дар нуқтаҳои критикии $x = -1$ ва $x = 3$ ва ҳам дар охирҳои порчаи $[-4; 4]$ ҳисоб мекунем:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 35 = -1 - 3 + 9 + 35 = 40;$$

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 35 = 27 - 27 - 27 + 35 = 8;$$

$$f(-4) = (-4)^3 - 3 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) + 35 = -64 - 48 + 36 + 35 = -41;$$

$f(4)=4^3-3\cdot 4^2-9\cdot 4+35=64-48-36+35=15.$

Инак, киматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро мухтасар дар намуди зерин менависем:

$$\max_{[-4;4]} f(x)=f(-1)=40;\ \min_{[-4;4]} f(x)=f(-4)=-41.$$

МАШҚҲО

1. Агар $f(x)=\sqrt{5-2x}$ бошад, $f'(-2)$-ро ҳисоб кунед.
2. Ҳосилаи функсияҳои зеринро ёбед:

а) $y=(2x-3)^{12}$; б) $y=\sqrt{4x^2-1}$;

в) $y=\ln(x^2+5x+6)$; г) $y=\sqrt[3]{9x^2-16}$;

г) $y=\cos^2 2x-\cos 4x$; д) $y=x^2\cdot e^{3x}$.

3. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияҳои зеринро муайян кунед:

а) $f(x)=x^2-2x+5$; б) $f(x)=5x^2-3x+1$; в) $f(x)=\frac{2}{x}$.

4. Нуқтаҳои критикии функсияҳои зеринро муайян кунед:

а) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^4$;

б) $f(x)=4x^2-6x$.

5. Киматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияҳоро дар фосилаҳои додашуда ёбед:

а) $y(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$;

б) $y(x)=x^3+3x$, $x\in[0;2]$;

в) $y(x)=x^4-2x^2+3$, $x\in[-4;3]$;

г) $y(x)=1+\cos x$, $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$;

г) $y(x)=2\sin x-1$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$

6. Функсияҳои зеринро таҳқиқ карда, графикашро созед:

а) $f(x)=x^2-5x+4$; б) $f(x)=x^2-6x+9$;

в) $f(x)=2x^2-3x-2$; г) $f(x)=x^2+x+1$.

БОБИ XVI
ИНТЕГРАЛ ВА ТАТБИҚИ ОН

§1. Мафҳуми функсияи ибтидоӣ

Ҳисобкунии дифференсиалӣ дар математика масаълаҳои аз рӯи функсияи дилхоҳи маълум $y=f(x)$, ёфтани ҳосила ва дифференсиали он мебошад. Ин дар физика ба аз рӯи қонуни ҳаракат $S=f(t)$ муайян кардани суръат ва шитоби ҷисми ҳаракаткунанда баробарқувва мебошад. **Масалан**, татбиқи дифференсиал дар механикаро ба хотир биёред. Дар курси мактабии физика гуфта шудааст: агар дар лаҳзаи вақти $t=0$ суръати ҷисм ба 0 баробар бошад, яъне, $V(0)=0$ дар ҳолати афтиши озоди ҷисм дар лаҳзаи вақти t масофаи $s(t)=\frac{gt^2}{2}$ - ро тай мекунад. Ин қонуни ҳаракатро дифференсиронида суръати ҷисми ҳаракаткунандаро ҳосил мекунем:

$$s'(t)=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=gt=\vartheta(t).$$

Вале, дар илм ва техника масъалаҳое ҳастанд, ки гузориши онҳо ба гузориши масъалаҳои дар боло муоинашаванда чаппа мебошад. *Яке аз ин гузориши масъалаҳо, аз рӯи ҳосили функцияи* $s(t)$ $(s'(t)=\vartheta(t))$, *ёфтани худи* $s(t)$ *мебошад.*

Барои ҳал кардани чунин масъалаҳо аз амали интегронӣ, ки ба амали дифференсиронӣ чаппа аст, истифода мебаранд. Бинобар он, бори дигар мухтасар бо мафҳуми функсияҳои ибтидоӣ (интеграли номуайян) шинос мешавем.

Таъриф. *Агар барои* $\forall x$ *- и фосилаи додашуда*

$$F'(x)=f(x) \qquad (1)$$

бошад, он гоҳ функсияи $F(x)$ *барои функсияи* $f(x)$ *функсияи ибтидоӣ номида мешавад.*

Мисоли 1. Функцияи $F(x)=\frac{x^4}{4}+x$ дар фосилаи $(-\infty;+\infty)$ барои функсияи $f(x)=x^3+1$ функсияи ибтидоӣ мебошад, чунки барои ҳамаи $x\in(-\infty;+\infty)$

$$F(x)=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'+x'=$$

$$=\frac{4x^3}{4}+1=x^3+1=f(x)$$

мешавад.

Мисоли 2. Функсияи $F(x)=\frac{5}{x}$ дар фосилаи $(-\infty;+\infty)$ барои функсияи $f(x)=-\frac{5}{x^2}$ функсияи ибтидоӣ шуда наметавонад, чунки дар нуқтаи 0 баробарии $F'(x)=f(x)$ ичро намегардад.

§2. Хосияти асосӣ ва се қисмати ёфтани функсияҳои ибтидоӣ

Агар дар ягон фосилаи додашуда $F'(x)=0$ бошад, он гоҳ функсияи $F(x)$ дар ин фосила доимӣ мебошад.

Агар функсияи $F_1(x)$ ва $F_2(x)$ дар фосилаи додашуда барои функсияи $f(x)$ функсияҳои ибтидоӣ бошанд, он гоҳ фарқи онҳо бузургии доимӣ мебошад:

$$F_2(x)-F_1(x)=C,\ (C\text{ - доимӣ}).$$

Маънои геометрии чунин баробариро ба таври зерин баён кардан мумкин аст. Графикҳои ду функсияҳои ибтидоии дилхоҳи функсияи $f(x)$ аз ҳамдигар дар натиҷаи қад-қади тири Oy ба C - воҳид параллел кӯчонидан ҳосил мешавад.

Агар функсияи $F(x)$ дар фосилаи додашуда барои функсияи $f(x)$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ бошад, он гоҳ ифодаи $F(x)+C$ - ро, ки C доимии дилхоҳ аст, намуди умумии функсияҳои ибтидоӣ барои функсияи $f(x)$ меноманд.

Масалан, функсияи $F(x)=x^3+C$ дар фосилаи $(-\infty;+\infty)$ намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)=3x^2$ мебошад.

Аз мафҳуми функсияи ибтидоӣ истифода бурда, се қоидаи ёфтани функсияҳои ибтидоиро меорем:

1. *Агар* $F(x)$ *функсияи ибтидоии* $f(x)$ *ва* $G(x)$ *функсияи ибтидоии* $g(x)$ *бошад, он гоҳ,* $F(x)+G(x)$ *барои функсияи* $f(x)+g(x)$, *функсияи ибтидоӣ мебошад:*

$$(F(x)+G(x))' = (F(x))' + (G(x))' = f(x)+g(x).$$

Агар $F(x)$ *функсияи ибтидоии* $f(x)$ *ва* k *доимӣ бошад, он гоҳ,* $kF(x)$ *барои функсияи* $kf(x)$ *функсияи ибтидоӣ мебошад:*

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

Агар $F(x)$ *функсияи ибтидоии функсияи* $f(x)$ *ва* k, b *- доимиҳо бошанд, он гоҳ,* $\frac{1}{k}F(kx+b)$ $(k \neq 0)$ *барои функсияи* $f(kx+b)$, *функсияи ибтидоӣ мебошад:*

$$\left(\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot (kx+b)' = \frac{1}{k}\cdot k\cdot F'(kx+b) = f(kx+b).$$

Хулоса, дар асоси мафҳуми функсияи ибтидоӣ ва хосиятҳои он гуфта метавонем: *ифодаи* $F(x)+C$ *-ро, ки намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи* $f(x)$ *мебошад, интеграли номуайян аз функсияи* $f(x)$ *меноманд ва бо рамзи* $\int$ *ишорат карда,* менависанд:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \text{ (}C\text{ - доимии дилхоҳ).} \qquad (2)$$

§3. Ҷадвали интегралҳои асосӣ

1. $\int dx = x+C.$
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+C, (m \neq -1).$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, (0 < a \neq 1).$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (|x| < a)$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctgx + C \ (a \neq 0)$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \ (a \neq 0)$

14. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C, \ (a \neq b)$

Дуруст ё нодуруст будани хар яке аз ин формулахоро бевосита дар асоси дифференсиронидан санчидан мумкин аст.

МАШҚХО

Интегралҳои зеринро ҳисоб кунед:

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5\int x^0 dx = 5 \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} = 5 \cdot \frac{x}{1} = 5x + C;$

2. $\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C;$

3. $\int 2 \cdot 9^x dx = 2\int 9^x dx = 2 \cdot \frac{9^x}{\ln 9} + C = 2 \cdot \frac{9^x}{2\ln 3} + C = \frac{9^x}{\ln 3} + C;$

4. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C;$

5. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C;$ ($k \neq 0$, k - доимии дилхох);

6. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C;$ ($k \neq 0$, k - доимии дилхох);

7. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C;$

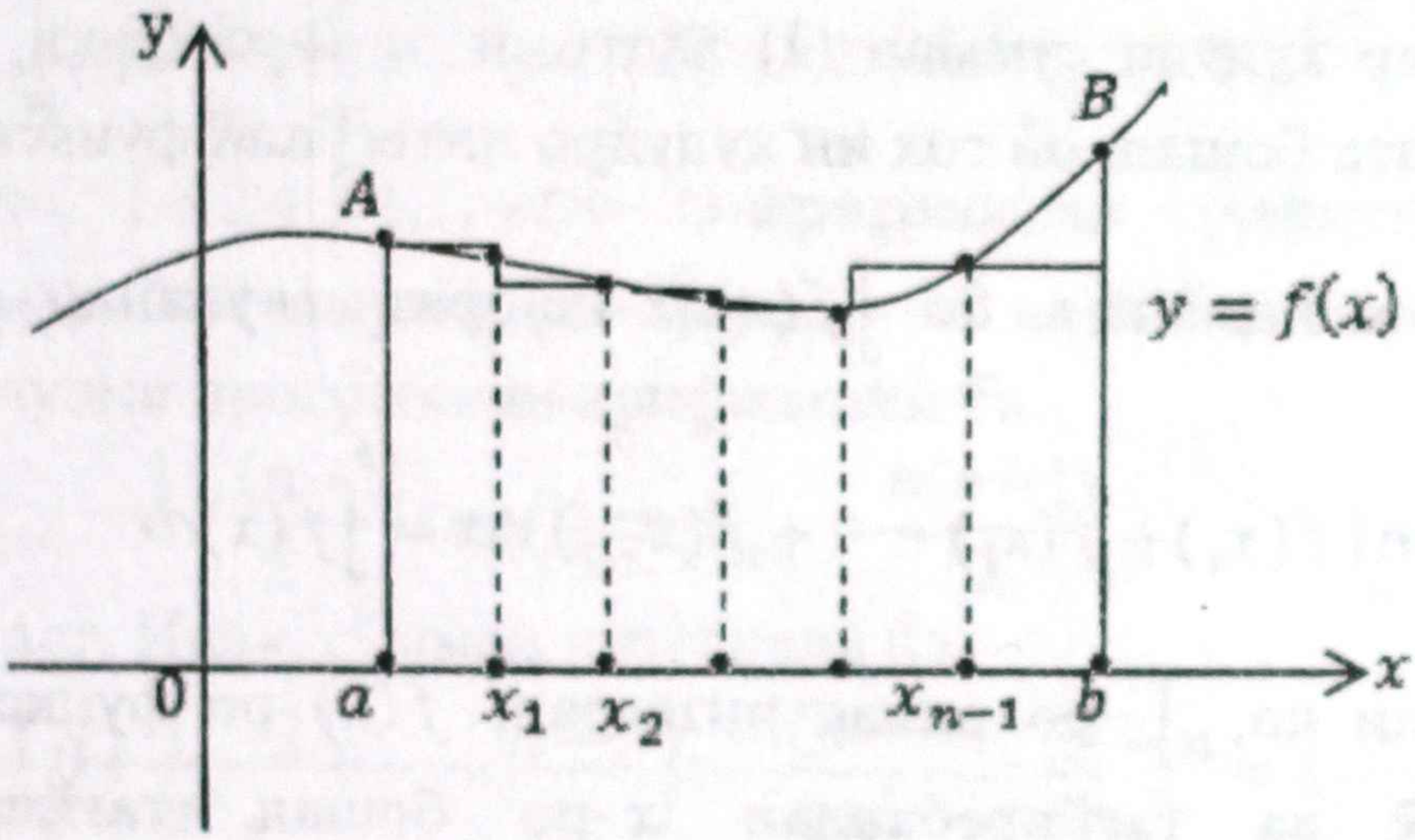
8. $\int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} + C;$

9. $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C.$

§4. Мафҳуми интеграли муайян

Фарз мекунем, ки функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a;\ b]$ бефосила ва ғайриманфӣ бошад. Шакле, ки бо графики ин функсия, порчаи $[a;\ b]$- и тири Ox ва хатҳои $x=a$ ва $x=b$ маҳдуд шудааст, трапетсияи каҷхатта номида мешавад.

Барои ёфтани масоҳати трапетсияи каҷхатта аз мафҳуми функсияҳои ибтидоӣ истифода мебаранд, чунки формулаҳои дар курси мактабии математика доир ба масоҳатҳо додашуда мувофиқ намеоянд. Дар ин ҷо яке аз роҳҳои ҳисоб кардани масоҳати трапетсияи каҷхаттаро меорем (Расми 1).



Расми 1

а) Порчаи $[a;\ b]$- ро ба воситаи нуқтаҳои $x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_{n-1}$ ба n порчаи дарозияашон якхела ҷудо мекунем:

$$x_0=a;\ x_n=b;\ x_1-x_0=\Delta x_0;\ x_2-x_1=\Delta x_1;\ \ldots;\ x_n-x_{n-1}=\Delta x_{n-1}.$$

Азбаски дарозии порчаҳо якхелаанд, онро дар намуди зерин ифода кардан мумкин аст:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}\ \ (k=1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n-1;\ n).$$

б) Дар ҳар як порчаи $[x_{k-1};\ x_k]\ \ (k=1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ (n-1);\ n)$ росткунҷаи баландияаш ба $f(x_{k-1})$ баробарро сохта, масоҳати росткунҷаҳоро ҳисоб мекунем.

в) Масоҳати росткунҷаҳоро дар асоси формулаи $S=a\cdot b$-и курси мактабӣ навиштан мумкин аст. Масоҳати суммаи ҳамаи росткунҷаҳо ин тавр навишта мешавад:

$$f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

ё ки

$$(f(x_0) + f(x_1) + \cdots\cdots + f(x_{n-1}). \qquad (2)$$

Сумман (2)-ро сумман интегралй барои функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a;\ b]$ меноманд.

Аз бефосилагии функсияи $f(x)$ маълум аст, ки ҳангоми зиёд шудани n дарозии порчаҳо Δx хурд мешавад, яъне ҳангоми якҷоягшавии росткунҷаҳо масоҳати ҳаман росткунҷаҳо ба масоҳати трапетсияи каҷхаттаи додашуда "қариб мувофиқ меояд".

г) Агар ҳудуди сумман (2) ҳангоми $n \to \infty$ (ё ки $\Delta x \to 0$) вуҷуд дошта бошад, он гоҳ ин ҳудудро интеграли функсияи $f(x)$ аз a то b меноманд ва бо $\int_a^b f(x)dx$ ишорат мекунанд:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right)\Delta x = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (3)$$

Дар ин ҷо, $\int$ – ро рамзи интеграл, $f(x)$ -ро функсияи зери интегралй ва тағйирёбандаи x -ро бошад, тағйирёбандаи интегроний меномад. Агар дар порчаи $[a;\ b]$ $f(x) \geq 0$ бошад, он гоҳ, масоҳати трапетсияи каҷхаттаи $aABb$ -ро бо S ифода карда, аз рӯи формулаи

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

меёбем. Инак, формулаи (4) маънои геометрии интеграли муайянро медиҳад.

Мисол. Интеграли $\int_0^1 x dx$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Интеграли додашуда бо роҳи сохтани суммаи интегралй ҳисоб мекунем: дар интеграли додашуда функсияи $f(x) = x$ дар порчаи $[0;\ 1]$ бефосила аст. Бинобар он, порчаи $[0;\ 1]$ -ро ба асосгирии нуқтаҳои $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = 1$ ба

n порчаи дарозиашон якхела $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ тақсим мекунем. Дар натича нуқтаҳои тақсимотӣ $x_0=0;\quad x_1=1;\quad x_2=\frac{2}{n};$ $x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$ ҳосил мешавад. Қимати функсияи $f(x)=x$ - ро дар ин нуқтаҳо меёбем:

$$f(0)=0;\quad f(1)=1;\quad f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n};\quad f\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n};\quad \ldots\quad f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}.$$

Қиматҳои ёфташударо ба формулаи (2) гузошта, суммаи интегралиро тартиб медиҳем:

$$\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n^2}$$

дар ин ҷо, $1+2+3+\ldots+(n-1)$-прогрессияи арифметикӣ буда, узви якумаш ба 1 ва узви $(n-1)$-умаш ба $n-1$ баробар мебошад. Суммаи чунин прогрессияи арифметикӣ ба

$$S_{n-1}=\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)\Rightarrow S_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}$$

баробар аст. Инак, суммаи интегралӣ ба

$$\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

баробар аст. Дар ҳолати $n\to\infty$ ба ҳудуд гузашта, дар асоси формулаи (3) қимати интегралро меёбем:

$$\int_0^1 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Инак, қимати интеграли додашуда, ба адади $\frac{1}{2}$ баробар мебошад:

$$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

§5. Алоқаи байни интеграл ва функсияи ибтидоӣ

Агар функсияи $F(x)$ дар порчаи $[a;\ b]$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ бошад, он гоҳ,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

аст. Формулаи (1)-ро формулаи Ньютон – Лейбнитс меноманд. Дар амалия бошад, бисёртар аз навишти

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

истифода бурда мешавад. Дар интеграли додашуда, ададхои a ва b худудхои поёнй ва болой, порчаи $[a;\ b]$-ро бошад, фосилаи интегроний меноманд.

Дар ин чо ҳангоми $b = a$ будан,

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (3)$$

мешавад.

Инчунин, барои ҳаргуна a ва b баробарии

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (4)$$

чой дорад.

Масъалаи 1. Интегралхои зеринро хисоб мекунем:

1. $\int_2^3 (x^2 + 4)dx$.

Хал. $\int_2^3 (x^2 + 4)dx = \int_2^3 x^2 dx + 4\int_2^3 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 + 4x\Big|_2^3 =$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) + (4\cdot 3 - 4\cdot 2) = \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right) + (12 - 8) =$$

$$= \frac{19}{3} + 4 = 6\frac{1}{3} + 4 = 10\frac{1}{3}. \qquad \textbf{Чавоб:}\ 10\frac{1}{3}.$$

2. $\int_1^2 \frac{x+4}{5}dx$.

Хал. $\int_1^2 \frac{x+4}{5}dx = \frac{1}{5}\int_1^2 (x+4)dx = \frac{1}{5}\int_1^2 xdx + \frac{1}{5}\cdot 4\int_1^2 dx =$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{4}{5}x\Big|_1^2 = \frac{x^2}{10}\Big|_1^2 + \frac{4}{5}x\Big|_1^2 = \left(\frac{4}{10}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{5}\right)=$$

$$= \frac{3}{10}+\frac{4}{5} = \frac{3+8}{10} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}.$$ **Чавоб:** $1\frac{1}{10}$.

3. $\int_0^1 x^8\,dx.$

Хал. $\int_0^1 x^8\,dx = \frac{x^{8+1}}{8+1}\Big|_0^1 = \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9}-\frac{0}{9} = \frac{1}{9}.$

Чавоб: $\frac{1}{9}$.

4. $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$.

Хал. $\int_1^2 \frac{dx}{x+3} = \int_1^2 \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln(x+3)\Big|_1^2 =$

$$= \ln(2+3)-\ln(1+3) = \ln 5 - \ln 4 = \ln\frac{5}{4}.$$

Чавоб: $\ln\frac{5}{4}$.

5. $\int 6\sin^2\frac{x}{2}dx.$

Хал. Азбаски, $6\sin^2\frac{x}{2} = 6\cdot\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{2} = 3(1-\cos x)$ аст, бинобар ин

$$\int 6\sin^2\frac{x}{2}dx = \int 3(1-\cos x)dx = 3\left(\int dx - \int \cos x dx\right) = 3(x-\sin x)+C$$

мешавад.

Чавоб: $3(x-\sin x)+C.$

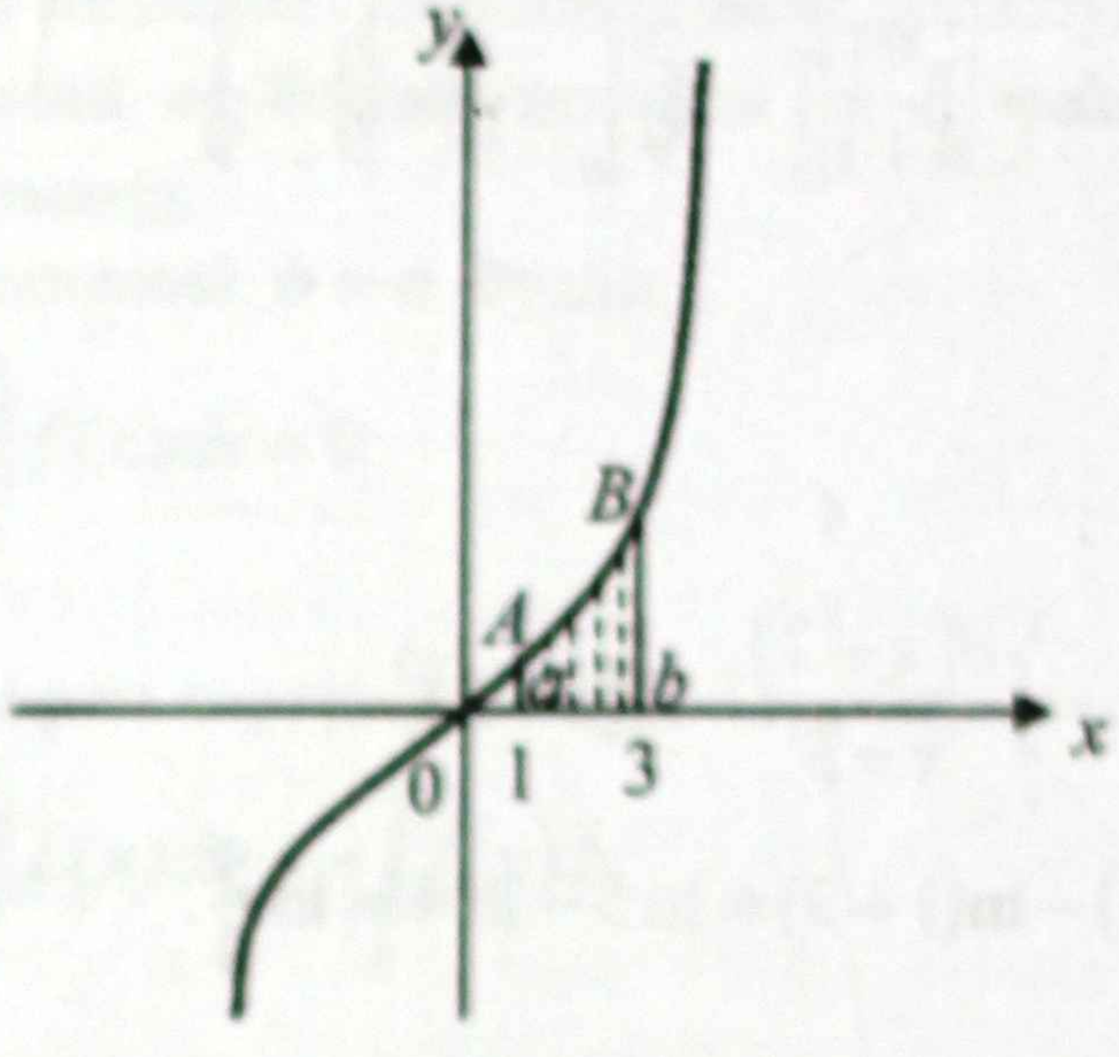
Масъалаи 2. Масоҳати фигурае, ки бо хатҳои $y=x^3$, $x=1$, $x=3$, $y=0$ маҳдуд аст, ёбед.

Хал. а) Аввал хатҳои додашударо месозем. Аз расм намоён аст, ки масоҳати матлуб $S=S_{aABb}$ мебошад. Фигураи ҳосилшуда трапетсияи каҷхатта мебошад (Расми 2).

б) Барои ҳисоб кардани масоҳат аз формулаи (1) истифода мебарем. Масоҳати матлубро бо формулаи (1) ҳангоми $f(x)=x^3$, $a=1$ ва $b=3$ будан, ҳисоб мекунем:

$$S=\int_1^3 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{80}{4}=20.$$

Инак, масоҳати фигураи матлуб ба 20 воҳиди квадратӣ баробар аст.



Расми 2

МАШҚҲО

Интегралҳои функсияҳои зеринро ёбед:

1. $\int_{-1}^{1}(x^4+1)dx$;
2. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;
3. $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$;
4. $\int_1^2(2x+1)^2dx$;
5. $\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx$;
6. $\int_1^2\left(x^6+\frac{x^4}{x^4}-x^2\right)dx$;
7. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}tg^2x dx$;
8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;
9. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$;
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;
11. $\int\frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$.

Рамз, аломатҳо ва ишоратҳои истифодашуда

+ - ҷамъ
· - зарб (нуқта)
: - тақсим (дунуқта)
— - хатчаи каср
≠ - нобаробарӣ
≅ - конгруэнтӣ
> - калон
≥ - калон ё баробар
(- қавси хурди кушода
[- қавси квадратии кушода
{ - қавси фигуравии кушода
% - рамзи протсент
Δ - рамзи секунҷа
∥ - аломати параллел
∪ - аломати камон
∽ - аломати монандии шаклҳо
→ - аломати тирча дар болои сатр (барои ишораи вектор истифода мешавад)
| - аломати тирчаи амудӣ (вертикалӣ)
$\sqrt[3]{}$ - аломати решаи кубӣ
∞ - аломати беохир (беинтиҳо)
∀ - аломати ҳаргуна, дилхоҳ, ихтиёрӣ
∃̄ - аломати вуҷуд надорад

– - тарҳ
× - зарб (зарби чилликӣ)
/ - тақсим (хатчаи моил)
= - баробарӣ
≈ - баробарии тахминӣ
≡ - айният
< - хурд
≤ - хурд ё баробар
) - қавси хурди пӯшида
] - қавси квадратии пӯшида
} - қавси фигуравии пӯшида
∠ - рамзи кунҷ
⊥ - аломати перпендикуляр
∦ - аломати нопаралел
∧ - аломати бузургии кунҷ (дар болои сатр ҷойгир карда мешавад)
→ - аломати мувофиқ
⟶ - аломати тирчаи уфукӣ (горизонталӣ)
$\sqrt{}$ - аломати решаи квадратӣ
$\sqrt[n]{}$ – аломати решаи дарачаи n-ум
∅ - аломати маҷмуи холӣ
∃ - аломати вуҷуд дорад
∈ - аломати ба маҷмуи додашуда тааллуқ доштани элемент

$\in$ - аломати инкор намудани ба мачмуи додашуда тааллук доштани элемент

$\subset$ - аломати дохил намудани як мачмуъ ба мачмуи дигари додашуда

$\not\subset$ - аломати инкори дохил намудани як мачмуи додашуда ба дигараш

$\cup$ - аломати якчошавии мачмуъхо

$\cap$ - аломати буришии мачмуъхо

$\Rightarrow$ - аломати хулоса мебароял

$\Leftrightarrow$ - аломати баробаркувва

\ – аломати пурракунии мачмуъ

$\overline{}$ - аломати инкор

$\{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}$ - аломати мачмуъ аз элементхои a_1, a_2, a_3, …, a_n.

$(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n)$ - аломати мачмуи тартибдодашуда аз элементхои a_1, a_2, a_3, …, a_n

! - аломати факториал

$\sum$ - аломати сумма

$\prod$ - аломати хосили зарб

° - аломати градус

′ - аломати дакика

″ - аломати сония

$\log_a$ - аломати логарифм аз рўи асоси a

lg - аломати логарифми дахй

ln - аломати логарифми натурали

lim - аломати лимит

$\int$ – аломати интегрални номуайян

$\int_a^b$ – аломати интеграли муайян

“...” - аломати нохунак

• - аломати ситорача

, - аломати вергул

; - аломати нукта вергул

: - аломати баён

! – аломати хитоб

? – аломати савол

· - аломати нуқта

↗ - афзоянда.

↘ - камшаванда.

$65:2=32$(1 бақия) тақсими бақиянок

$65=32\cdot 2+1$- (1 бақия) тақсими бақиянок

$a\in A$ - a ба A тааллуқ дорад

$A\subset B$ - A тахтмаҷмуи B аст

$n\in N$ - n ба маҷмуи N тааллуқ дорад

$n\notin N$ - n ба маҷмуи N тааллуқ надорад

$A\in \Phi$ - нуқтаи A дар фигураи Φ мехобад

$A\cup B$ - ҳамҷоягии маҷмуъҳо

N - маҷмуи ҳамаи ададҳои натуралӣ: 1; 2; 3;…

Z - маҷмуи ададҳои бутун: $0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots$

$Z_{\circ}$ - маҷмуи ҳамаи ададҳои бутуни ғайри-манфӣ: 0; 1; 2; 3;…

Z_{-} - маҷмуи ҳамаи ададҳои бутуни манфӣ: $-1;-2;-3;\ldots$

Q - маҷмуи ҳамаи ададҳои ратсионалӣ

$Q_{\circ}$ - маҷмуи ҳамаи ададҳои ратсионалӣ ғайриманфӣ

Q_{+} - маҷмуи ҳамаи ададҳои ратсионалии мусбат

Q_{-} - маҷмуи ҳамаи ададҳои ратсионалии манфӣ

R - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ

$R_{\circ}$ - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқии ғайриманфӣ

R_{+} - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқии мусбат

R_{-} - маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқии манфӣ

$N, n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ - касри дахӣ бо қисми бутуни N

$N, n_1 n_2 n_3 \ldots n_k (n_k +_1 \ldots n_k + p)$ - касри дахӣ бо даври $n_k +_1 \ldots n_k + p$

$\left.\begin{matrix}|x| \\ \mathrm{mod} x\end{matrix}\right\}$ - модул аз адади x

$[x]$- қисми бутуни адади x

$\{x\}$ - қисми касрии адади ҳақиқии x (m,n) ё ки ХКУ - ҳурдтарин каратии умумӣ аз ададҳои m ва n

(m,n) ё ки КТУ - калонтарин тақсимкунандаи умумӣ аз ададҳои m ва n

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ - пайдарпаии ададӣ аз n адад

(a_n) - пайдарпаии беохир

$n!$ - ифодаи ҳосили зарби ададҳои 1· 2· 3· …· n

$n!!$ - ифодаи ҳосили зарби ададҳои ҷуфти 2· 4· 6· …· $(2k)$ ё тоқи 1· 3· 5· …· $(2k-1)$

(a_n) - пайдарпаии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

P_n - ҷойивазкунӣ аз n элемент

A_n^m - ҷойгиркунӣ аз n элемент m -тогӣ

C_n^m - комбинатсия аз n элемент m -тогӣ

$\overline{ab}$ - навиштани адади дурақама (a, b - рақамҳо мувофиқи разряднҳо)

$\overline{abc}$ - навиштани адади серақама (a, b, c - рақамҳо мувофиқи разряднҳо)

$\overline{ab,(mnkp)}$ - навиштани касри даврӣ ва ғайра

$A \cap B$ - буриши ду маҷмуъ

$\forall a \in A$ - барои ҳама ғуна a аз A

$\Rightarrow$ - аз ин ҷо бармеояд (хулоса мебарояд)

$\Leftrightarrow$ - баробаркувва (эквивалент)

$\Leftrightarrow$ - эквивалент

$\bar{a}$ - ифодаи вектор

d – ифодаи кунҷи рост

$|\bar{a}|$ - бузургии мутлақи вектори $\bar{a}$

$\overrightarrow{AB}$ - вектори AB, A нуқтаи A -ро ба нуқтаи B интиқол мекунад

$|\overrightarrow{AB}|$ - дарозии вектори $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AA}$, $\bar{0}$ - вектори нолӣ

$\overrightarrow{x_a}$ - абсиссаи вектори a

$\overrightarrow{y_\alpha}$ - ординатаи вектори a

$\vec{a}$ - вектор бо координатаҳои x, y ва z

$[a;b]$ - порча, фосилаи маҳдуди (порчаи бастаи) ибтидоаш a ва интиҳояш b, $a<b$

$(a;b)$ - интервал, порчаи кушоди (фосилаи) ибтидоаш a ва интиҳояш b, $a<b$.

$(a;b]$, $[a;b)$ - ниминтервал, фосилаҳои нимкушодаи ибтидоашон a ва интиҳояшон b, $a<b$

$(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ - нури кушод

$[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$ - нур

$(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$ - фосилаҳои беохир, нурҳои хати рости ададӣ

$(-\infty;+\infty)$ - фосилаи беохир, хати рости ададӣ

$(-\infty;a]$, $[a;+\infty)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;a)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $[a;b]$ ва $(a;b)$ - фосилаҳои ададӣ

$56<x<86$ - нобаробарии дукарата

$(-\infty;b)\cap(a;+\infty)$ - буриши ду нури кушод

$(-\infty;b]\cap[a;+\infty)$ - буриши ду нур

$(-\infty;-a)\cup(a;+\infty)$ - якҷояшавии интервалҳо

$(-\infty;-a]\cup[a;+\infty)$ - якҷошавии нурҳо

$85^\circ 6' 3''$ - 85 градусу 6 дақиқаю 3 сония

$\sin\alpha$ - синуси α

$\cos\alpha$ - косинуси α

$tg\alpha$ - тангенси α

$ctg\alpha$ - котангенси α

$\sec\alpha$ - секанси α

$\operatorname{cosec}\alpha$ - косеканси α

$\arcsin\alpha$ - арксинуси адади α

$\arccos\alpha$ - арккосинуси адади α

$arctg\alpha$ - арктангенси адади α

$arcctg\alpha$ - арккотангенси адади α

$arc\sec\alpha$ - арксеканси адади α

$\operatorname{arccosec}\alpha$ - арккосеканси адади α

$\sin x$ - кимати функсияи синус дар нуктаи x

$\log_a P$ - логарифми адади P аз рӯи асоси a

$\lg P$ - логарифми адади P аз рӯи асоси 10

$\ln P$ - логарифми адади P аз рӯи асоси e

Адади $e = 2{,}718281828..$

Адади $\pi = 3{,}141592653..$

Адади M (модули гузариш) $= 0{,}434294481..$

det - муайянкунанда

sign - функсияи сигнум

Const - доимӣ

$\sqrt{a}$ - решаи квадратии арифметикӣ аз адади a

$\sqrt[3]{a}$ - решаи кубӣ аз адади a

$\sqrt[n]{a}$ - решаи дарачаи n аз адади a

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ - вектори ҳамсамти $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ - векторҳои муқобилсамти $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$

$(\hat{a}, b)$ - кунҷи байни векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$

$\bar{a}^2$ - квадрати скалярӣ (ҳосили зарби скалярӣ)

$\bar{a} \cdot \bar{b}$ - ҳосили зарби скалярии векторҳои a ва b

$\bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}]$ - ҳосили зарби вектории ду вектори $\bar{a}$ ва $\bar{b}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \equiv (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ - ҳосили зарби омехтаи векторҳои $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$\bar{i}, \bar{j}$ - векторҳои базисии системаи координата-ҳои росткунҷаи декартӣ дар ҳамвориӣ

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - векторҳои базисии системаи координатаҳои росткунҷаи декартӣ дар фазо ($\bar{e}$ ки орта)

$(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$ - базиси росткунча

E - инъикоси айниятии ҳамвориӣ ба худаш

S_a - симметрияи фазоӣ нисбат ба ҳамвории a

S_l - симметрияи тирии фазоӣ (ҳамвориӣ) бо тири симметрии l

S_p -симметрияи тираш p

Z_o - симметрияи марказаш O

(ABC) - ҳамворие, ки аз нуқтаҳои A, B ва C мегузарад

S_{ABC} - масоҳати секунча

V - ҳаҷм

(AB) - хати росте, ки аз нуқтаҳои А ва В мегузарад

$[AB)$ - нури AB

$[AB]$ - порчаи рост бо охирҳои A ва B

$|AB|$ - дарозии порчаи AB

$(a; b)$ - ҷуфти тартибнок

$(a; b; c)$ - сегонаи тартибнок

ΔABC - секунҷаи ABC

$\angle A$ - кунҷи A

$\angle ABC$ - кунҷи ABC

$\angle(\alpha, \beta)$ - кунҷи байни ҳамвориҳои α ва β

$\angle(a, \alpha)$ - кунҷи байни хати рости a ва ҳамвории α

$\angle \alpha a \beta$ -кунҷи дурӯяи байни ҳамвориҳои α ва β бо теғаи a

$\hat{ABC}$ - бузургии кунҷи $\angle ABC$

$\hat{B}$ - бузургии кунҷи B

$\cup ABC, \cup AB$ - камони ABC, камони AB

$\overset{\cup}{ABC}$ - бузургии кунҷи камони $\cup ABC$

$\overset{\cup}{AB}$ - бузургии кунҷи камони $\cup AB$

$\cup ACB$ - камон бо охирҳои A ва B

(O, R) - доираи марказаш O ва радиусаш R

$[p, A)$ - нимҳамвории худудаш p, ки нуқтаи A -ро дарбар мегирад

$f(\ ), F(\ )$ - функсияи яктағйирёбанда ё ки якчандтағйирёбандадор

Δx - делта аз икс, афзоиши тағйирёбандаи x (афзоиши аргумент)

Δf - афзоиши функсия

$\Delta f(x_0)$- афзоиши функсия дар нуктаи x_0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=b$ - адади b ҳудуди функсияи $f(x)$ аст

$f'(x)$ - ҳосилаи тартиби якуми функсияи $f(x)$

$f^{n}(x)$ - ҳосилаи тартиби n-уми функсияи $f(x)$

$f'(x_0)$-ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар нуктаи x_0

max - максимум

min - минимум

$\max\limits_{[a;b]} f(x)$ - қимати калонтарини $f(x)$ дар порчаи $[a;\ b]$

$\min\limits_{[a;b]} f(x)$ - қимати хурдтарини $f(x)$ дар порчаи $[a;\ b]$

$\int\limits_a^b f(x)dx$ - интеграли $f(x)$ аз ҳудуди a то b.

$O(0;0)$ - ибтидои координата

Ox - тири абсцисса

Oy - тири ордината

Oz - тири аппликата

z ва $\bar{z}$ - аддҳои комплексии ҳамроҳшуда ($z=a+bi;\ \bar{z}=a-bi$)

$|z|$ - модули адади комплекс

$Arg\ z$ - аргументи адади комплекс

i - воҳиди мавҳум

$f(x)$ - қимати функсияи f дар нуктаи x

$D(f)$ - соҳаи муайянии функсияи f

$E(f)$ - соҳаи қиматҳои функсияи f

E - табдилоти айният

f^{-1} - табдилоти баръакс

СҚР - Соҳаи қиматҳои раво

СҚФ - Соҳаи қиматҳои функсия

ЧАВОБХО

Боби I. 1. $29\frac{7}{12}$; **2.** $36\frac{25}{72}$; **3.** 144; **4.** $2\frac{44}{83}$; **5.** $7\frac{9}{11}$. **6.** 20. **7.** 1. **8.** 0,5. **9.** 5. **Боби II. 1.** а) 1. б) $\frac{1}{6}$. **2.** а) 11. б) 36. 3. а) б) . **4.** 1. **5.** 4. **6.** 4. **7. а)** 2,25. **б)** 5. **Боби III.§1. 1. а)** 2^{14}. **б)** -64. **в)** 18. **2.** $\frac{1}{16\cdot 5^k}$. **§2. 1.** $\frac{41}{36}$. **2.** $a^{-2}b^{-5}$. **3.** 0,48. **§3. 1.** $\sqrt{ab}$. **2.** $\sqrt{x}$. **3.** 0. **4.** $12\sqrt{3}$. **5.** $-2\sqrt{3}$. **§5. 1. а)** $\frac{1}{6}$. б) $\frac{15}{29}$. **2.** -1. **3.** $4{,}5\sqrt{13}$. **4.** $\frac{144}{161}$. **§6. 1.** $\frac{1}{8}$. **2. а)** $6\sqrt{6}$; **б)** $-22{,}5$; **в)** 652. **3.** 5. **4.** а) -1. б) $x^{\frac{1}{4}}-5$. **5.** 6. **Боби IV. §7. 1. а)** $-\frac{3}{4}$. **б)** $\frac{2a+b}{2}$. **в)** 1. **г)** $x-y$. **г)** 1. **д)** $2(a+b-c)$. **2.** 4. **3.** 101. **6. а)** 2. **б)** 2. **в)** 1. **г)** 1. **Боби V. 1. а)** 1. **б)** $\varnothing$. **в)** 2; 3. **г)** 1. **3. а)** $\pm\sqrt{5\pm 2\sqrt{6}}$. **б)** ± 2. **в)** $\pm 1;\pm\sqrt{2}$. **5. а)** -4; 2; 3;9. **б)** -3. **в)** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **г)** 4. **г)** ± 3. **д)** ± 2. **е)** $\varnothing$. **ё)** 1. **ж)** -1; 2. **з)** 0,5;2. **Боби VI. §4. 1. а)** $(1;1)$. **б)** $(1;2)$. **в)** $(7;4)$. **г)** $(2;3)$. **2. а)** $(0;2)$. **б)** $(3;4)$. **в)** $(1;-1)$. **г)** $(6;8)$. **г)** $\left(3;\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3};3\right)$. **д)** $(1;1;0)$. **Боби VII. 1. а)** $\left(-\infty;-\frac{7}{8}\right]$. **б)** $\left(-\infty;\frac{2}{13}\right)$. **в)** $(-\infty;-3{,}1)$. **г)** $(9;+\infty)$. **г)** $(-\infty;3{,}5)$. **2. а)** $(3;+\infty)$. **б)** $[-11;3]$. **в)** $(-\infty;-3)$ **г)** $\varnothing$. **г)** $(2;+\infty)$. **3.** а) x - адади дилхох. **б)** $\varnothing$. **в)** x - адади дилхох. **г)** $2\le x\le 3$. **Боби VIII. 1. а)** $x\le 4$. **б)** $(-\infty;1]\cup(6;+\infty)$. **в)** $[0;\ 4]$. **г)** $x=2$. **г)** $[0;\ 1]$. **Боби IX. I. 1.** 5. **2.** 1. **3.** 4. **4.** -1. **5.** -2; 1. **6.** 7. **7.** 2. **8.** 2. **9.** -4; 2. **10.** -6; 2. **11. 1. 12.** 3. **II. 1.** $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. **2.** $(-\infty;0)\cup(7;+\infty)$. **3.** $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ **4.** $(-\infty;0)\cup(4{,}5;+\infty)$. **5.** $\left(-\infty;-\frac{7}{9}\right)$. **6.** $\left[\frac{2\sqrt{21}}{3};+\infty\right)$ **7.** $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$. **8.** $-\frac{1}{3}<x\le-\frac{1}{4}$. **Боби X. 1. а)** 20. **б)** 3. **в)** 3. **г)** 2. **г)** 1. **д)** 1. **е)** 1. **ё)** 2. **ж)** 1. **з)** 1. **и)** 1. **й)** 0. **к)** 0,25. **к)** 0,5. **л)** 2. **м)** 0. **н)** 1. **2. а)** $(-0{,}75;\ +\infty)$. **б)** $\left(-\infty;\ -\frac{5}{36}\right)$. **в)** $(-\infty;\ -2)$. **г)** $(0;\ +\infty)$. **г)** $[-1;\ 4]$. **д)** $(3;+\infty)$. **Боби**

XI. 1. а) 4. **б)** 3. **в)** 1,5; 3. **г)** $\frac{1}{81}$; 3. **г)** 6. **д)** 0,25. **е)** $\frac{1}{3}$; 27. **ё)** 30; 100. **2.** **а)** $(1;\ 3)$. **б)** $(0;\ 0,5)\cup(1;\ 1,5)$. **в)** $(-\infty;\ 1)$. **г)** $\left(e^{-1};\ e^{2}\right)$ **г)** $(-1;\ 3)$. **Боби**

XII. 1. а) -2,5. **б)** 0,5. **в)** 0. **2.** 3,72. **3.** 0,84. **4.** -0,96. **5. а)** $\frac{1}{2}+(-1)^{n}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$. **б)** $-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{3}+\ +2\pi n, n\in Z$. **в)** $\pm\sqrt{\pi+2\pi n},\ n\in Z$. **г)** $\varnothing$. **6. а)** $\pi+2\pi n, n\in Z$. **б)** $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n;$ $\frac{1}{3}arctg3+\frac{\pi}{3}n, n\in Z$. **в)** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n, n\in Z$. **г)** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$ **7. а)** $-\frac{1}{3}arctg\frac{3}{2}+\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$. **б)** $-arctg5+\pi n,\ arctg3+\pi n, n\in Z$. **8. а)** $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right), n\in Z$. **б)** $x\in(\pi n;\ arcctg(-3)+\pi n), n\in Z$. **в)** $x\in\left(arctg2+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$. **г)** $x\in\left(1-\frac{2}{3}\pi+2\pi n;\ 1-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$. **9. а)** $x\in\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **б)** $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$. **в)** $x\in(-\infty;\ ctg2)$. **г)** $x\in(-\infty;\ tg1)$. **г)** $(tg2;+\infty)$. **Боби XIII. 1.** $d=2;\ a_1=16$. **2.** $S_{14}=210$. **3.** $d=-2;\ a_8=-2,\ S_8=40$. **4. а)** + −9; −6, −3, 0; … **б)** + 12; 9, 6, 3; … **5.** $q_1=-13;\ q_2=12$. **6.** $S=4905$. **7.** $q=2;\ b_1=3$. **8.** $b_1=3;\ q=3;$ **ё** $b_1=12;\ q=\frac{1}{2}$. **9.** 20100. **10.** 2460. **11.** 40. **12.** 2. **13.** 7,4. **14.** 17. **15.** 93. **16.** 8. **17.** 128. **Боби XIV. 1.** -1,5. **2.** 6. **3.** 5. **4.** 4. **5.** 3. **6.** 5. **7.** $\frac{3}{14}$. **8.** 5. **9.** $\sin 2\alpha$. **10.** $\frac{8}{3}$. **11.** $\frac{4}{9}$. **12.** 1,5. **13.** $\frac{2}{9}$. **14.** $-0,8\cdot\sqrt{5}$. **Боби XV. 3.** **а)** $(-\infty;\ 1)\downarrow;\ (1;+\infty)\uparrow$. **б)** $(-\infty;\ 0,3)\downarrow;(0,3;+\infty)\uparrow$. **в)** $(-\infty;\ 0)\uparrow$ **ва** $(0;+\infty)\downarrow$. **4. а)** $x=-1$ **ва** $x=1$ **нуқтаи** max, $x=0$ **нуқтаи** min. **б)** $x=\frac{3}{4}$ **нуқтаи** min. **5. а)** 2,5; −2,5. **б)** 14; 0. **в)** 227; 2. **г)** 1,5; 1. **г)** 0; −1. **Боби XVI. 1.** 2,4. **2.** 3. **3.** 1. **4.** $16\frac{1}{3}$. **5.** −24. **6.** $2\frac{5}{6}$. **7.** $\frac{1}{12}\sin 6x$. **8.** $tgx-ctgx+C$. **9.** $e^{x}-\frac{1}{x}+C$. **10.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{7}x+C$. **11.** $\frac{2}{3}\left(3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}\right)+C$.

АДАБИЁТ

1. Баранов И.А., Богатыров Г.И., Боковнев О.А. Математика для подготовительных курсов техникумов. –М.: 1988.
2. Бачурин В.А. Задачи по элементарной математике и началам математического анализа. –М.: Физматлит, 2005. -712 с.
3. Башмаков М.И. Математика: Эксперимент. Учеб. Пособие для СПТУ. –М.: Высш. шк., 1987. -463 с.
4. Гончаров В.Л. Начальная алгебра. –М.: 1960. -452 с.
5. Гусак Г.М., Капуцкая Д.А. Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие. Под ред. А.А. Гусака. –Мн.: Выш. шк. 1989. -495 с.
6. Егоров В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие: Под ред. В.И. Сканави. –6-е изд. -М.: «ОНИКС 21 века», 2004. -608 с.
7. Калнин Р.А. Алгебра ва функцияҳои элементарӣ. –Д.: Ирфон, 1971.
8. Киреенко С.Г., Гриншпон И.Э. Элементы теории множеств. – Томск, 2003. – 42 с.
9. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М. ва г. Алгебра ва ибтидои анализ: Васоити таълим барои синфҳои 9 ва 10-уми мактаби миёна. Зери назари А.Н. Колмогоров. –Д.: Маориф, 1987. 284 с.
10. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра ва функсияҳои элементарӣ. Қисми 2. -Душанбе, 1975. – 292 с.
11. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. Пособие для техникумов. –М.: Высш. шк., 1991. -480 с.
12. Макарычев Ю.Н., Миндюк И.Г., Муравин К.С.. Алгебра китоби дарсӣ барои синфи 6-7. Душанбе: Маориф, 1982.
13. Маҳкамов М., Осимӣ Қ.У. Рохнамои математика. -Душанбе: Аржанг. 2014. -336 с.
14. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. –М.: Высш. шк., 1987. -416 с.
15. Райхмист Р.Б. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы (с решениями и ответами): Учеб. пособие. –М.: Московский Лицей, 2007. -304 с.
16. Рӯзметов Э., Хаимов Б.Н. Курси мухтасари анализи математикӣ. Қисми 1. –Душанбе: Маориф, 1977. 424 с.
17. Сборник задач по математике. Для подготовительных курсов. Составители: Сигитов Р.В., Шершнев В. Г. –М.: Менеджер, 2007. -160 с.
18. Симонов А.Я., Бакаев С.И. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.
19. Тулинов Б.А. Арифметика. –Душанбе: Ирфон, 1969.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Издание седьмое, стереотипное. Том I. –М.: Наука, 1969. 608 с.
21. Хинчин А.Я. Краткий курс математического анализа, -М.: 1957.

МУНДАРИҶА

Пешгуфтор 3
Арифметика. Боби I. Аддҳои бутун ва касрӣ ... 4
§1. Фанни арифметика 4
§2. Маҷмуъ. Амалҳо бо маҷмуҳо 4
2.1. Маҷмуъ ва элементҳои он 4
2.2. Тарзҳои дода шудани маҷмуъ 6
2.3. Таҳтмаҷмуҳо 8
2.4. Буриши маҷмуҳо 11
2.5. Якҷояшавии маҷмуҳо 12
2.6. Фарқи маҷмуҳо 13
2.7. Маҷмуҳои аддӣ 15
2.8. Алгебраи маҷмуҳо 16
2.9. Формулаи дохилкунӣ ва хориҷкуниҳо 17
§3. Аддҳои бутун ва амалҳо бо онҳо 19
I. Аддҳои натуралӣ 20
II. Аддҳои бутун 21
III. Қонунҳои ҷамъ ва зарб 22
IV. Хосиятҳои асосӣ 24
V. Тақсими бақияток 26
VI. Амалҳо бо аддҳои бутун 26
§4. Аддҳои сода ва таркибӣ 30
§5. Тақсимкунандаи умумӣ ва каратноки 32
§6. Аломатҳои тақсимшавӣ ба 2, 5, 10, 3 ва 9 32
§7. Касрҳои одӣ 33
§8. Амалҳои арифметикӣ бо касрҳои одӣ 36
§9. Касрҳои даҳӣ 41
§10. Муқоисаи касрҳо. Аз касри даҳӣ ба касри одӣ гузаштан 42
§11. Амалҳо бо касрҳои даҳӣ 43
Боби II. Аддҳои ҳақиқӣ 49
§1. Аддҳои ратсионалӣ 49
§2. Аддҳои ирратсионалӣ 50
§3. Мафҳуми аддҳои ҳақиқӣ 50
§4. Қимати мутлақи адад 52
§5. Ҳисобкунии тақрибии арифметикӣ 54
§6. Ҳисобкуниҳои тақрибӣ 56
§7. Процент 60
§8. Танносуб ва хосиятҳои он 64

Алгебра. Боби III. Дарача ва реша..... 69
§1. Дарачаи нишондиҳандааш натуралӣ..... 69
§2. Дарачаи нишондиҳандааш бутун..... 72
§3. Решаи квадратӣ ва хосиятҳои он..... 73
§4. Решабарорӣ ҳамчун амали баръакси бадарачабардорӣ..... 76
§5. Решаи дарачаи *n* ва хосиятҳои он..... 78
§6. Дарачаи нишондиҳандааш ратсионалӣ..... 80
Боби IV. Адад ва табдилдиҳиҳои алгебравӣ..... 83
§1. Ифодахои ададӣ ва алгебравӣ..... 83
1.1. Ифодаҳои ададӣ..... 83
1.2. Ифодаҳои алгебравӣ..... 83
§2. Якузва ва амалҳо бо он..... 84
§3. Бисёрузва ва амалҳо бо он..... 88
§4. Формулаҳои зарби мухтасар..... 91
§5. Касрҳои алгебравӣ..... 94
§6. Амалҳо бо касрҳои алгебравӣ..... 97
§7. Ифодаҳои ирратсионалӣ..... 101
Боби V. Муодилаҳо..... 106
§1. Мафҳуми муодила ва ҳалҳои он..... 106
§2. Муодилаи хаттӣ..... 107
§3. Муодилаи квадратӣ..... 112
I. Муодилаи квадратии нопурра..... 112
II. Муодилаи квадратии пурра..... 117
III. Муодилаи квадратии ислоҳкардашуда..... 120
IV. Теоремаи Виет..... 120
§4. Ба зарбкунандаҳо ҷудо намудани сеузваи квадратӣ..... 124
§5. Муодилаи биквадратӣ..... 128
Боби VI. Системаи муодилаҳо..... 132
§1. Муодилаи хаттии дутағйирёбандадор..... 132
§2. Мафҳуми системаи муодилаҳо ва ҳалҳои он..... 133
§4. Тарзҳои гуногуни ҳалкунии системаи муодилаҳо..... 134
Боби VII. Нобаробариҳо..... 145
§1. Нобаробариҳои ададӣ ва хосиятҳои он..... 145
§2. Нобаробариҳои хаттӣ ва ҳалҳои он..... 147
§3. Системаи нобаробариҳои

якгагйирёбандадор..... 149
§4. Нобаробарихои квадратии якгагйирёбандадор..... 152
§5. Халли нобаробарихо. Методи интервалхо..... 156
Боби VIII. Функсия..... 163
§1. Бузургихои доимй ва тагйирёбанда..... 163
§2. Мафхуми функсия..... 163
§3. Тарзи дода шудани функсия..... 164
§4. Сохаи муайянй ва сохаи тагйирёбии функсия..... 166
§5. Хосиятхои функсия..... 169
§6. Функсияхои чаппа..... 173
§7. Классификатсияи функсияхо..... 176
§8. Функсияи хаттй..... 177
§9. Функсияи дарачагй..... 178
§10. Функсияи $f(x)=ax^2+bx+c$ 181
§11. Функсияи нишондихандагй ва хосиятхои он..... 182
§12. Функсияи логарифмй ва хосиятхои он..... 184
§13. Мафхуми ченак ва функсияхои тригонометрй..... 187
§14. Хосиятхои функсияхои тригонометрй..... 188
§15. Функсияхои тригонометрии чаппа..... 191
Боби IX. Муодила ва нобаробарихои ирратсионалй..... 195
§1. Муодилаи ирратсионалй 195
§2. Халли нобаробарихои ирратсионалй..... 203
Боби X. Муодила ва нобаробарихои нишондихандагй..... 207
§1. Хосиятхои асосии функсияи нишондихандагй 207
§2. Муодилаи нишондихандагй..... 207
§3. Нобаробарии нишондихандагй..... 213
Боби XI. Муодила ва нобаробарихои логарифмй..... 219
§1. Логарифмгиронидан ва потенсиронидан..... 219
§2. Муодилахои логарифмй..... 224
§3. Нобаробарихои логарифмй..... 229
Боби XII. Муодила ва нобаробарихои тригонометрй 235

§1. Ифодаҳои тригонометрӣ 235
§2. Муодилаҳои тригонометрӣ..... 242
§3. Нобаробариҳои тригонометрӣ..... 251
Боби XIII. Прогрессияҳо..... 261
§1. Мафҳуми пайдарпаии ададӣ..... 261
§2. Прогрессияи арифметикӣ..... 262
§3. Прогрессияи геометрӣ..... 267
Боби XIV. Назарияи ҳудудҳо..... 273
§1. Ҳудуди функсия..... 273
§2. Теоремаҳои асосии ҳудуди функсияҳо..... 275
§3. Бефосилагии функсияҳо дар нуқта..... 279
§4. Бефосилагии функсияҳо
бо маънои афзоишаш..... 280
§5. Теоремаҳо дар бораи функсияҳои бефосила..... 282
Боби XV. Ҳосила ва тадқиқи функсия..... 283
§1. Ҳосила ва таърифи он..... 283
§2. Маънои геометрии ҳосила..... 285
§3. Маънои механикии ҳосила..... 287
§4. Бевосита ҳисобкунии ҳосила..... 288
§5. Ҳосилаи функсияҳои элементарӣ..... 291
§6. Ҳосилаи функсияҳои мураккаб..... 292
§7. Қоида ва формулаҳои ҳисобкунии ҳосилаҳо.... 293
§8. Формула барои ҳисобкуниҳои тақрибӣ..... 298
§9. Шарти афзуншавии (камшавӣ) функсия..... 299
§10. Нуқтаҳои критикӣ ва экстримуми функсия..... 300
§11. Тадқиқи функсия ва графики он..... 302
§12. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини
функсия..... 304
Боби XVI. Интеграл ва татбиқи он..... 307
§1. Мафҳуми функсияи ибтидоӣ..... 307
§2. Хосияти асосӣ ва се қоидаи ёфтани функсияҳои
ибтидоӣ..... 308
§3. Ҷадвали интегралҳои асосӣ 309
§4. Мафҳуми интеграли муайян..... 311
§5. Алоқаи байни интеграл ва функсияи
ибтидоӣ..... 313
Рамз, аломатҳо ва ишоратҳои истифодашуда... 317
Ҷавобҳо..... 325
Адабиёт..... 327

Маҳкамов Мамадҷон, Камолиддинов Ҷамолиддин, Бойматов Комилҷон, Раззоқов Абдураззоқ Ашурович, Каримов Тоир Худойназарович. Математика. Дастури таълимӣ барои муассисаҳои таҳсилоти миёнаи касбӣ. - Душанбе: "Маориф", 2016. -332 с.

Ба чопхона 02.09.2016 с. супорида шуд. Ба чопаш 07.09.2016 с. имзо шуд. Андозаи 60x84 1/16. Чузъи чопӣ 20,75. Адади нашр 300. Супориши 64. Нархаш шартномавӣ.

Китоб дар чопхонаи нашриёти «РТСУ» ба табъ расидааст. 734025, ш. Душанбе

0001825134