



**Современный
Гуманитарный
Университет**

Дистанционное образование

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

ЮНИТА 2

**ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

МОСКВА 2001

Разработано Давыдовой С. Б.

Рекомендовано Министерством
общего и профессионального
образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для
студентов высших учебных заведений

КУРС: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Юнита 1. Теория моделирования. Модели микроэкономики.

Юнита 2. Прикладные модели экономических систем.

ЮНИТА 2

Рассматриваются вопросы построения и использования модели межотраслевого баланса, проблемы построения моделей сетевого планирования и управления, подходы к анализу и оптимизации сетевых графиков, основные понятия теории игр и особенности решения игровых задач в условиях неопределенности.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 5

(С) СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН	4
ЛИТЕРАТУРА	5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	8
1. Балансовые модели	8
1.1. Понятие о межотраслевом балансе	8
1.2. Межотраслевая балансовая модель и ее свойства	13
1.3. Задачи, решаемые с помощью балансовой модели	13
1.4. Решение системы балансовых уравнений в матричной форме	14
1.5. Экономический смысл элементов матрицы, коэффициентов полных косвенных внутрипроизводственных затрат, прямых и полных затрат труда и капиталовложений	16
2. Модели сетевого планирования и управления	18
2.1. Назначение и области применения сетевого планирования и управления	18
2.2. Сетевая модель и ее основные элементы	19
2.3. Порядок и правила построения сетевых графиков	20
2.4. Упорядочивание сетевого графика	26
2.5. Понятие о пути	32
2.6. Временные параметры сетевых графиков	33
3. Анализ и оптимизация сетевого графика	39
3.1. Коэффициент напряженности работы	39
3.2. Анализ и оптимизация календарных сетей	41
3.3. Оптимизация сетевого графика с целью сокращения длины критического пути	43
4. Элементы теории игр	44
4.1. Понятие об игровых моделях	44
4.2. Платежная матрица	48
4.3. Нижняя и верхняя цена игры	51
4.4. Решение игры в смешанных стратегиях	57
4.5. Методы решения простейших игровых задач	59
4.6. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования	64
5. Моделирование экономических ситуаций в терминах "игры с природой"	70
5.1. Особенности решения игровых задач в терминах "игры с природой"	70
5.2. Понятие риска	71
5.3. Формирование матрицы игры	72
5.4. Основные критерии выбора лучшей стратегии	72
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	76
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	81
ГЛОССАРИЙ*	

Примечание. Знаком (*) отмечены работы, на основе которых составлен тематический обзор.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Балансовые модели. Понятие о межотраслевом балансе. Межотраслевая балансовая модель и её свойства. Задачи, решаемые с помощью балансовой модели. Решение системы балансовых уравнений в матричной форме. Экономический смысл элементов матрицы, коэффициентов полных и косвенных внутрипроизводственных затрат, прямых и полных затрат труда и капиталовложений.

Модели сетевого планирования и управления. Назначение и области применения сетевого планирования и управления. Сетевая модель и её основные элементы. Порядок и правила построения сетевых графиков. Упорядочивание сетевого графика. Понятие о пути. Временные параметры сетевых графиков.

Анализ и оптимизация сетевого графика. Анализ и оптимизация календарных сетей. Коэффициент напряжённости работы. Оптимизация сетевого графика с целью сокращения длины критического пути.

Элементы теории игр. Понятие об игровых моделях. Платёжная матрица. Нижняя и верхняя цена игры. Решение игры в смешанных стратегиях. Методы решения простейших игровых задач. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.

Моделирование экономических ситуаций в терминах “игры с природой”. Особенности решения игровых задач в терминах “игры с природой”. Формирование матрицы игры. Понятие риска. Основные критерии выбора лучшей стратегии.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

*1. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталеv Е.Ю. Моделирование рисковvх ситуаций в экономике и бизнесе. М., 1999.

*2. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. М., 1998.

Дополнительная

*3. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. М., 1961.

*4. Зуховицкий С.И., Радчик И.А. Математические методы сетевого планирования. М., 1965.

*5. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М., 1979.

6. Колемаев В.А. Математическая экономика. М., 1998.

7. Макконел Р., Брю Л. Экономикс. М., 1992.

*8. Селигмен Б. Основные течения современной математической мысли. М., 1968.

9. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.Н. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб.пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. М., 1999.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умения	Алгоритмы
1	Определение коэффициентов прямых затрат a_{ij} .	1. Определение значений x_{ij} . 2. Определение объема производства отрасли x_j . 3. Определение коэффициентов прямых затрат по формуле: $a_{ij} = x_{ij}/x_j,$ где x_{ij} – количество продукции i -й отрасли, расходуемое в j -ой отрасли; x_j – объем производства j -й отрасли
2	Определение размеров производственного потребления y_i .	1. Определение значений x_{ij} . 2. Определение объема производства отрасли x_i . 3. Определение размеров производственного потребления y_i по формуле: $y_i = x_i - \sum_j x_{ij},$ где x_i – объем производства i -й отрасли; x_{ij} – количество продукции i -й отрасли, расходуемое в j -ой отрасли
3	Расчет полного резерва времени работы.	1. Определение срока $T_j^{(1)}$. 2. Определение срока $T_j^{(0)}$. 3. Определение времени t_{ij} . 4. Расчет полного резерва времени $R_p(ij)$ по формуле: $R_p(ij) = T_j^{(1)} - T_j^{(0)} - t_{ij},$ где $T_j^{(1)}$ – наиболее позднее время наступления события P_j , $T_j^{(0)}$ – наиболее раннее время наступления события P_j , t_{ij} – продолжительность работы ij .
4	Расчет длины пути $L(P_i, P_j)$ между событиями i и j по сетевому графику.	1. Определение работ, входящих в путь. 2. Определение продолжительности работ, входящих в путь. 3. Расчет длины пути по формуле: $L_{ij} = \sum t_{im,jk},$ $t_{im,jk}$ – продолжительности работ, входящих в путь; im, jk – события, последовательно входящие в путь.

5	Определение длины критического пути $L_{кр}$.	1. Определение перечня полных путей. 2. Определение продолжительностей работ. 3. Расчет длины полных путей. 4. Определение длины критического пути по формуле: $L_{кр.} = \max\{Lm(P_0, P_n)\},$ $Lm(P_0, P_n)$ – длина полного пути сети, m – число полных путей сети.
6	Определение нижней цены игры α по формуле: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ (a_{ij} – значения выигрыша при каждой паре стратегий)	1. Построение платежной матрицы a_{ij}. 2. Построение вектора α_i по формуле: $\alpha = \min_j a_{ij}$ 3. Определение нижней цены α по формуле: $\alpha = \max_i \alpha_i$
7	Определение верхней цены игры β по формуле: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ (a_{ij} – значения выигрыша при каждой паре стратегий)	1. Построение платежной матрицы a_{ij}. 2. Построение вектора β_j по формуле: $\beta = \max_i a_{ij}$ 3. Определение верхней цены β по формуле: $\beta = \min_j \beta_j$
8	Определение седловой точки игры v^* по формуле: $v^* = \alpha = \beta;$ α – нижняя цена игры, β – верхняя цена игры	1. Построение платежной матрицы a_{ij}. 2. Определение нижней цены α по формуле: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ (a_{ij} – значения выигрыша при каждой паре стратегий). 3. Определение верхней цены β по формуле: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ (a_{ij} – значения выигрыша при каждой паре стратегий). 4. Определение седловой точки игры v^* по формуле.
9	Определение частот p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной стратегии игрока A в игре 2×2 по формулам: $p_1 = (a_{22} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21});$ $p_2 = 1 - p_1$	1. Построение платежной матрицы a_{ij}. 2. Расчет p_1 по формуле. 3. Расчет p_2 по формуле.
10	Определение цены игры 2×2 при применении смешанных стратегий по формуле: $v = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$	1. Определение a_{11} и a_{21}. 2. Определение p_1 и p_2. 3. Расчет цены игры по формуле.

1. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

1.1. Понятие о межотраслевом балансе

Одно из важнейших понятий, используемых при моделировании производственно-технологических уровней экономических процессов, связано с описанием движения потоков продуктов и ресурсов между производственными единицами. Балансовые соотношения в экономике аналогичны закону сохранения энергии в физике. **Балансовый метод** – метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Для количественной оценки соотношения потребностей и ресурсов используются балансовые модели. **Балансовая модель** – система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. Приведем пример простейшей балансовой модели. Пусть имеются две производственные единицы, и продукт первой является сырьем для второй, а также может использоваться вне системы в количестве w . Для такой системы балансовое соотношение записывается в виде:

$$w + x_2 \leq y_1,$$

где x_2 – потребление сырья второй производственной единицей, y_1 – выпуск продукции первым подразделением.

В общем виде принцип построения балансовых соотношений можно сформулировать так: суммарное использование любого ресурса в системе не больше, чем его запасы плюс его производство плюс поставки извне.

Межотраслевой баланс характеризует систему балансовых соотношений между отраслями экономики.

Межотраслевой баланс представляет собой таблицу, характеризующую связи между отраслями экономической системы. Прежде чем составить такую таблицу, необходимо составить список отраслей, которые будут фигурировать в межотраслевом балансе. Число отраслей, включенное в межотраслевой баланс, обозначим через n . Межотраслевой баланс народного хозяйства состоит из четырех разделов (часто называемых квадрантами). Общий вид межотраслевого баланса приведен в таблице 1. В балансе присутствуют все выбранные нами отрасли материального производства. Каждой отрасли в балансе соответствуют, во-первых, отдельная строка в балансе, и, во-вторых, отдельный столбец. Так, i -й отрасли соответствуют i -я строка и i -й столбец

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

баланса. Матрица элементов, стоящих на пересечении n первых строк и n первых столбцов баланса, называется первым разделом (первым квадрантом) межотраслевого баланса. Это — важная часть межотраслевого баланса, поскольку именно в ней содержится информация о межотраслевых связях: на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит величина x_{ij} , показывающая производственные затраты j -й отраслью продукции i -й отрасли за год. Пусть, скажем, первая отрасль баланса — производство электроэнергии, вторая — угольная промышленность. Тогда величина x_{12} имеет смысл годовых затрат электроэнергии на производство угля. Таким образом, величины x_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$) характеризуют межотраслевые поставки сырья, материалов, топлива и энергии, обусловленные производственной деятельностью отраслей производства.

Таблица 1

Отрасли	1	2	...	n	Итого	Конечная продукция	Валовая продукция
1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	$\sum_j x_{1j}$	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	$\sum_j x_{2j}$	y_2	x_2
...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nn}	$\sum_j x_{nj}$	y_n	x_n
Итого	$\sum_i x_{i1}$	$\sum_i x_{i2}$	...	$\sum_i x_{in}$	$\sum_i \sum_j x_{ij}$	$\sum_i y_i$	$\sum_i x_i$
Чистая продукция	v_1	v_2	...	v_n	$\sum_j v_j$		
Всего	x_1	x_2	...	x_n	$\sum_j x_j$		

Рассмотрим i -ю строку. Величины $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ описывают поставки i -й отрасли другим отраслям народного хозяйства, т.е. распределение продукции i -й отрасли как средств производства для других отраслей. Если мы рассмотрим i -й столбец, то величины $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$ будут описывать потребление i -й отраслью сырья, материалов, топлива и энергии, полученных из других отраслей материального производства. Таким образом, первый раздел межотраслевого баланса дает общую картину производственных затрат и распределения продукции на производственные цели всех n отраслей материального производства. В этом состоит огромное преимущество межотраслевого баланса перед балансами отдельных продуктов.

Подчеркнем, что величины x_{ij} отражают стоимость средств производства, т.е. выражаются в рублях. Баланс такого рода принято

называть *стоимостным*. Поскольку все числа в первом квадранте измеряются в одних и тех же единицах, их можно просуммировать. Найдем сумму величин x_{ij} по i -й строке в пределах первого раздела межотраслевого баланса:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}.$$

Эта величина означает сумму всех поставок i -й отрасли другим отраслям материального производства, т. е. характеризует производственное потребление. Величины $\sum_{j=1}^n x_{ij}$ для всех отраслей образуют столбец, который заносится в межотраслевой баланс справа от матрицы межотраслевых потоков x_{ij} . Столбец величин $\sum_{j=1}^n x_{ij}$, где $i = 1, \dots, n$, также относят к первому разделу баланса.

Теперь рассмотрим j -й столбец и сумму величин x_{ij} по этому столбцу:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}.$$

Величина $\sum_{i=1}^n x_{ij}$ равна сумме производственных затрат j -й отрасли

за год. Строка величин $\sum_{i=1}^n x_{ij}$, где $j = 1, \dots, n$, заносится в межотраслевой баланс снизу от матрицы межотраслевых потоков и также считается частью первого раздела баланса.

Итак, первый раздел межотраслевого баланса состоит из $(n + 1)$ строк и $(n + 1)$ столбцов, причем в $(n + 1)$ -м столбце стоят суммы соответствующих строк, а в $(n + 1)$ -й строке – суммы соответствующих столбцов. На пересечении $(n + 1)$ -й строки и $(n + 1)$ -го столбца стоит величина

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

т. е. сумма n первых элементов $(n + 1)$ -го столбца. Легко заметить, что эта величина равна также сумме n первых элементов $(n + 1)$ -й строки.

Число $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$ равно сумме всех производственных затрат всех

отраслей (или, что то же самое, производственного потребления продукции всех отраслей). Это так называемый промежуточный продукт народного хозяйства.

Теперь перейдем к рассмотрению второго раздела, посвященного конечному продукту народного хозяйства. Справа от столбца производственного потребления продукции отраслей расположен столбец конечного потребления продукции отраслей, под которым понимаются личное и общественное потребление, не идущие на текущее производственное потребление. Сюда включаются накопление и возмещение выбытия основных фондов, прирост запасов, личное потребление населения, расходы на содержание государственного аппарата и оборону, затраты по обслуживанию населения (просвещение, здравоохранение и т. д.). Кроме того, в конечный продукт входит сальдо экспорта и импорта продукции. В нашей таблице конечное потребление продукции i -й отрасли обозначено через y_i . Кроме конечного потребления ко второму разделу баланса относят столбец суммарных (валовых) выпусков отраслей. Суммарный выпуск определяется для i -й отрасли как

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что этот последний, $(n + 3)$ -й столбец баланса определяется как сумма $(n + 1)$ -го и $(n + 2)$ -го столбцов. В $(n + 1)$ -й строке второго раздела стоят суммы

$$\sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i.$$

Первая сумма равна суммарному конечному продукту народного хозяйства, а вторая – суммарному валовому продукту.

Перейдем к рассмотрению третьего раздела межотраслевого баланса народного хозяйства. Третий раздел расположен под первым разделом и отражает стоимостную структуру валового продукта отраслей. В нашей таблице третий раздел состоит из двух строк. В первой из них стоят величины v_j ($j = 1, \dots, n$), каждая из которых означает условно-чистую продукцию отрасли, равную разнице между валовой продукцией

x_j отрасли и производственными затратами $\sum_{i=1}^n x_{ij}$, т.е.

$$v_j = x_j - \sum_{i=1}^n x_{ij}, j = 1, \dots, n.$$

Обычно в межотраслевых балансах народного хозяйства условно-чистая продукция каждой отрасли разделяется на амортизационные отчисления, идущие на возмещение выбытия основных фондов, и чистую продукцию отрасли, в которую включаются заработная плата, прибыль и т. д. В (n+1)-м столбце третьего раздела баланса стоят суммы строк.

Обратим внимание на то, что из разложения продукции отрасли на конечный и промежуточный продукты:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, i = 1, \dots, n,$$

и из разложения продукции отрасли на производственные затраты и условно-чистую продукцию:

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + v_j, j = 1, \dots, n,$$

следует соотношение

$$\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n x_{ij} + v_i),$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n v_j.$$

Суммарный конечный продукт народного хозяйства равен суммарной условно-чистой продукции. Таким образом, в третьем разделе также фигурирует конечный продукт, но если во втором разделе он разбивается на величины y_i , характеризующие структуру потребления конечного продукта, то в третьем разделе показывается, в каких отраслях экономики была произведена стоимость конечного продукта.

Четвертый раздел межотраслевого баланса не имеет непосредственного отношения к условиям производства и реализации продукции. Этот раздел характеризует перераспределительные отношения в народном хозяйстве, осуществляемые через финансово-кредитную систему.

Рассмотренный межотраслевой баланс – это еще не модель, а способ представления статистической информации об экономике страны. Он строится на основе агрегирования результатов деятельности отдельных предприятий.

Балансы межотраслевого типа могут строиться не только для народного хозяйства в целом, но и для отдельных экономических районов. Производственные связи между районами могут быть описаны в межрайонных балансах.

1.2. Межотраслевая балансовая модель и ее свойства

Распределение продукции каждой отрасли в межотраслевом балансе народного хозяйства описывается следующим соотношением:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Обычно межотраслевая модель строится на следующих предпосылках:

- 1) в каждой отрасли имеется единственная технология производства;
- 2) нормы производственных затрат не зависят от объема выпускаемой продукции;
- 3) не допускается замещение в производстве одних видов продукции другими.

При этих предположениях величина x_{ij} для всех i и j должна иметь следующий вид:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Величина a_{ij} называется *коэффициентом прямых затрат*.

Коэффициент прямых материальных затрат – количество затрат промежуточной продукции i -й отрасли, необходимое для производства единицы продукции в j -й отрасли, равно a_{ij} . Показывает, какое количество продукции i -й отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j -й отрасли.

Коэффициенты прямых затрат считаются постоянными величинами в межотраслевых моделях. Обратим внимание на то, что соотношение (2), по существу, определяет функцию затрат для отрасли. Это соотношение дает возможность по выпуску x_j продукции j -й отрасли на основе технологических коэффициентов a_{ij} определить затраты x_{ij} ($i = 1, \dots, n$) продукции других отраслей.

1.3. Задачи, решаемые с помощью балансовой модели

Рассмотрим примеры задач, решаемых с помощью балансовой модели. Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Чистая отрасль – это условное понятие – некоторая часть народного хозяйства, более или менее ценная.

Пусть x_{ij} – количество продукции i -ой отрасли, расходуемое в j -й отрасли, x_i – объем производства i -й отрасли, y_i – объем потребления

продукции i -й отрасли в непроизводственной сфере. При этом $y_i = x_i - \sum x_{ij}$. Матрица $X = (x_{ij})$, как мы уже знаем, содержит весьма много информации. Так, ее i -я строка характеризует использование продукции i -ой отрасли по всему народному хозяйству, а j -й столбец характеризует j -ю отрасль: что и в каких количествах она использует.

Перейдем к безразмерным величинам. Пусть $a_{ij} = x_{ij} / x_j$ – количество единиц продукции i -й отрасли, расходуемое на производство одной единицы продукции j -й отрасли. Числа a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат j -й отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Число же y_i / x_i есть доля продукции i -й отрасли, идущая на непроизводственное потребление. Рассмотрим пример. Пусть функционируют всего две отрасли. Использование продукции этих отраслей задано матрицей:

$$\begin{array}{cc|c} 30 & 50 & 100 \\ 80 & 80 & 200. \end{array}$$

Нужно составить матрицу A коэффициентов прямых затрат, найти размеры непроизводственного потребления.

Решение. $y_1 = 100 - (30 + 50) = 20$, $y_2 = 40$, далее находим коэффициенты прямых затрат: $a_{11} = 30/100$; $a_{12} = 50/200 = 0,25$; $a_{21} = 80/100 = 0,80$; $a_{22} = 80/200 = 0,40$.

1.4. Решение системы балансовых уравнений в матричной форме

Если соотношение (2) подставить в баланс продукции (1), то сразу получаем:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это соотношение удобно записывать в матричной форме:

$$x = Ax + y, \quad (3)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, A – матрица коэффициентов a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ (матрица прямых затрат). Соотношение (3) принято называть *балансом распределения продукции*. Оно является основным соотношением в межотраслевых моделях.

Матрица A также называется технологической матрицей. **Технологическая матрица** – таблица межотраслевого баланса, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении.

Один из методов подсчета коэффициентов прямых затрат – нормативный. В нем предполагается, что отрасли межотраслевого баланса имеют сложную структуру, т. е. состоят из отдельных производств, для которых уже разработаны нормативы затрат. Если заранее знать,

какую продукцию будут выпускать производства отрасли, то по нормативам затрат можно рассчитать среднеотраслевые коэффициенты прямых затрат.

Если коэффициенты прямых затрат подсчитаны, то соотношение (3) можно использовать для анализа и прогнозирования. Действительно, если задать конечный продукт в отраслевой структуре, то валовые выпуски отраслей согласно (3) определяются из соотношения:

$$(E - A)x = y,$$

где E – единичная матрица. Следовательно,

$$x = (E - A)^{-1}y, \quad (4)$$

где $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $(E - A)$. Таким образом, баланс продукции на основе коэффициентов прямых затрат дает возможность по конечному выпуску сразу определять выпуски продукции отраслями.

Необходимо выяснить, существует ли обратная матрица, используемая в формуле (4), а также не получим ли мы когда-нибудь отрицательные значения валовых выпусков отраслей? Прежде чем ответить на этот вопрос, установим некоторые свойства коэффициентов прямых затрат. Во-первых, они неотрицательны, т. е.

$$a_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Это утверждение сразу следует из неотрицательности величин x_{ij} и положительности валовых выпусков отраслей x_j . Во-вторых,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Это утверждение можно получить следующим образом. Из соотношения

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + v_j, j = 1, \dots, n$$

и требования

$$v_i > 0, j = 1, \dots, n,$$

т. е. положительности условно-чистой продукции во всех отраслях, следует неравенство:

$$x_j > \sum_{i=1}^n x_{ij}, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Требование положительности условно-чистой продукции является естественным, поскольку одной из составляющих условно-чистой продукции является заработная плата. Поэтому условие (7) обычно выполняется. Из соотношений (7) и (2) получаем:

$$x_j > \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j,$$

т. е. выполняется соотношение (6). В теории матриц доказывается, что при выполнении условий (5) и (6) матрица $B = (E - A)^{-1}$ существует и ее элементы b_{ij} неотрицательны.

Итак, получаем:

$$x = By. \quad (8)$$

1.5. Экономический смысл элементов матрицы, коэффициентов полных косвенных внутрипроизводственных затрат, прямых и полных затрат труда и капиталовложений

Матрица B носит название матрицы полных затрат, а ее коэффициенты b_{ij} – коэффициентов полных затрат. **Коэффициенты полных материальных затрат** – величины, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i -й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j -й отрасли. Обозначаются как b_{ij} .

Легко проверить, что

$$B = E + A + A^2 + A^3 + \dots \quad (9)$$

Действительно, если правую часть этого равенства мы умножим слева на $(E - A)$, то получим:

$$(E - A)(E + A + A^2 + A^3 + \dots) = E + A + A^2 + A^3 + \dots - A - A^2 - A^3 - \dots = E.$$

Таким образом,

$$E + A + A^2 + A^3 + \dots = (E - A)^{-1} = B.$$

Из соотношения (9) следует, что

$$b_{ij} \geq a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n),$$

т.е. что коэффициент полных затрат b_{ij} , описывающий потребность в выпуске продукции i -й отрасли в расчете на единицу конечной продукции j -й отрасли, не меньше коэффициента прямых затрат, рассчитанного на выпуск единицы валовой продукции j -й отрасли.

Итак, знание матрицы полных затрат B дает возможность на основе соотношения (8) по конечному продукту определять валовые выпуски отраслей, а затем по валовым выпускам отраслей и матрице прямых затрат строить плановый межотраслевой баланс по формуле (2). Такая математическая модель дает возможность проводить вариантыные расчеты межотраслевых балансов. Естественным образом возникает идея о том, чтобы выбрать наилучший межотраслевой баланс, т. е. решать оптимизационную задачу.

В реальной экономической системе валовые выпуски отраслей ограничены не только из-за ограничений по сырью, топливу и энергии, но и по другим причинам. Для правильной постановки задачи хотя бы главные из этих причин необходимо учесть. В производственной функ-

ции экономики ресурсами считаются основные фонды и трудовые ресурсы. В межотраслевой модели каждая отрасль описывается функцией затрат (2), в которой учитывается лишь производственное потребление промежуточного продукта. Попробуем включить эти ресурсы в описание отрасли. Для этого обычно используется производственная функция с постоянными пропорциями:

$$x_i \leq \min\{d_i^1 K_i, d_i^2 L_i\}, i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где K_i – количество основных фондов в i -й отрасли, d_i^1 – коэффициент фондоотдачи в i -й отрасли, L_i – число работающих в i -й отрасли, d_i^2 – производительность труда в i -й отрасли. Ограничения по основным фондам часто записывают в несколько измененной форме:

$$x_i \leq \xi_i, i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где $\xi_i = d_i^1 K_i$ – мощность i -й отрасли, т. е. максимальное количество продукции, которое отрасль может выпустить при имеющемся в наличии количестве основных фондов и постоянной фондоотдаче. Обычно в моделях балансового типа величина фондоотдачи считается заданной. Включение в модель соотношений (11) с фиксированными значениями x_i означает, что мы считаем мощности отраслей неизменными. Поскольку мощности отраслей могут изменяться в процессах износа фондов, строительства новых предприятий и передачи фондов из одной отрасли в другую, то надо объяснить, в каких случаях эти процессы могут не учитываться. Строительство новых фондов занимает срок порядка нескольких лет, так что процесс строительства можно не рассматривать в достаточно краткосрочных исследованиях. Величина износа фондов достаточно мала, так что в первом приближении ее можно считать не зависящей от выпуска продукции в отрасли или не рассматривать вообще. Процессы передачи мощностей из одной отрасли в другую встречаются только в исключительных ситуациях, поэтому их можно не рассматривать.

Теперь перейдем к описанию использования трудовых ресурсов. Если передача основных мощностей из отрасли в отрасль обычно не встречается, то переход рабочих с предприятий одной отрасли на предприятия другой отрасли наблюдается постоянно. Поэтому формулировать ограничения по трудовым ресурсам для каждой отрасли в отдельности вряд ли разумно. В самом простом варианте можно записать общее ограничение по трудовым ресурсам:

$$\sum_{i=1}^n L_i = R, \quad (12)$$

где R – общее число рабочих. Соотношение (12) подразумевает полную занятость рабочих. Соотношение (10) дает неравенство:

$$x_i \leq d_i^2 L_i.$$

Кроме ограничений по основным фондам и трудовым ресурсам, на возможный выпуск продукции многими отраслями (скажем,

нефтедобывающей) оказывает влияние ограниченность разведанных природных ископаемых, сельскохозяйственное производство ограничено площадью, пригодной для пахоты, и т. д. Сформулируем еще раз задачу выбора наилучшего плана валовых выпусков отраслей.

Итак, нам надо найти такие неотрицательные варианты конечного продукта y и валовых выпусков отраслей x , чтобы на них достигался максимум критерия

$$\begin{aligned} &U(c, y) \rightarrow \max \\ &\text{при выполнении условий} \\ &\quad x = Ax + y, \\ &\quad x \leq \xi, \\ &\quad (x, d_2) \leq R. \end{aligned}$$

Здесь $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $d_2 = \left(\frac{1}{d_1^2}, \dots, \frac{1}{d_n^2} \right)$; величины A, ξ, d_2, R, c заданы

заранее (c – отражает важность каждого продукта).

Сформулированная задача является задачей линейного программирования и может быть решена даже при больших размерах матрицы A .

Межотраслевые модели основываются на понятии межотраслевого баланса. Впервые межотраслевой баланс был разработан как составная часть баланса народного хозяйства СССР за 1923/1924 гг. Заслуга разработки модели баланса, названной “затраты – выпуск” принадлежит Василию Леонтьеву. **Модель Леонтьева** – экономико-математическая модель межотраслевого баланса. **В.В. Леонтьев** – американский ученый, награжденный Нобелевской премией за вклад в экономическую науку. В середине 30-х годов XX века разработал и применил теорию балансовых моделей. Таблица Леонтьева “затраты – выпуск” была первым шагом к практическому использованию теории общего равновесия. Эта таблица впервые была опубликована в работе “Структура американской экономики в 1919 – 1929 гг.” В настоящее время межотраслевые балансы регулярно разрабатываются в большинстве стран мира. Межотраслевой баланс производства и использования товаров и услуг является одним из важных разделов современной системы национальных счетов.

Межотраслевой баланс ежегодно разрабатывает и представляет в Минэкономики РФ Госкомстат России.

2. МОДЕЛИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Назначение и области применения сетевого планирования и управления

Сетевое планирование и управление (СПУ) – совокупность

расчетных методов, организационных и контрольных мероприятий по планированию и управлению комплексом работ, основанная на моделировании процесса с помощью сетевого графика. Системы СПУ предназначены для управления производственной деятельностью коллективов людей, имеющей своей целью достижение определенного конечного результата. “Объектом управления” в системах СПУ, как правило, является коллектив исполнителей, располагающий определенными ресурсами (людскими, материальными, финансовыми и др.) и выполняющий комплекс работ, призванный обеспечить достижение намеченного конечного результата. **Комплекс работ** – любая задача, для выполнения которой необходимо осуществить достаточно большое количество разнообразных работ.

Первая автоматизированная система сетевого планирования и управления (так называемая ПЕРТ) возникла в 1958 году в США и получила очень быстрое и широкое распространение и признание как за рубежом, так и в нашей стране. Современные системы СПУ, опираясь на вычислительную технику, позволяют создавать проекты, которые, наряду с эффективным использованием времени и других ресурсов, обеспечивают также возможность четкого оперативного руководства при реализации этих часто весьма сложных проектов. Автоматизация процесса управления состоит из двух этапов. На первом этапе – этапе планирования разработки, при помощи метода сетевого планирования выражают наглядно сложные соотношения между отдельными работами, заблаговременно выделяют напряженные участки работ и составляют оптимальный план-проект, минимизирующий разработку по времени, по стоимости или оптимизирующий ее по другим производственным показателям.

На втором этапе – этапе управления ходом разработки (реализацией проекта) – на основании поступающей информации и ее переработки происходит контроль за выполнением плана, составленного на первом этапе, и внесение в него необходимых корректив.

2.2. Сетевая модель и ее основные элементы

Сетевая модель – математическая модель, с помощью которой описывается комплекс работ. На основе сетевой модели осуществляется планирование процесса выполнения комплекса работ, оптимизация этого процесса по некоторому критерию, контроль и управление ходом этого процесса. Физическая сетевая модель реализуется либо в графическом виде, либо с помощью специальных технических устройств от сравнительно простых макетов до сложных электронных табло. Сетевая модель используется для расчета обоснованных планов-графиков выполнения работ и других параметров разработки; анализа возможных вариантов достижения заданного результата и выбора среди них оптимального по некоторому

критерию, например по времени или затратам, а также для прогнозирования эффективности предполагаемых решений и влияния на ход разработки возможных изменений технико-экономических показателей отдельных операций.

Сетевая модель является информационной динамической моделью, в которой весь комплекс работ разбивается на отдельные четко определенные работы. Модель отображает логическую взаимосвязь и взаимообусловленность всех работ, определяющую последовательность выполнения всего комплекса. Сетевая модель изображается, как правило, в виде ориентированного графа, состоящего из стрелок и кружков, называемого сетевым графиком.

2.3. Порядок и правила построения сетевых графиков

Сетевой график – графическое изображение сетевой модели.

Графом будем называть множество точек (вершин) $\{P_0, \dots, P_n\}$ и множество ориентированных дуг $\{(P_i, P_j)\}$, соединяющих некоторые пары этих точек; при этом дуга (P_i, P_j) имеет начало в P_i и конец в P_j . На схеме дугу (P_i, P_j) обозначают в виде направленного отрезка.

Граф называется *симметрическим*, если вместе с данной дугой (P_i, P_j) он содержит и симметричную дугу (P_j, P_i) и *антисимметрическим*, если ему может принадлежать лишь одна из пары симметричных дуг (P_i, P_j) и (P_j, P_i) . В дальнейшем рассматриваются лишь антисимметрические графы.

Дуги, берущие начало в точке P_i , назовем *выходящими* из P_i , а дуги, конец которых в P_i – *входящими* в P_i .

Граф, в котором существует лишь одна точка P_0 , не имеющая входящих дуг, и лишь одна точка P_m , не имеющая исходящих дуг, и каждой дуге которого приписано некоторое число, мы назовем *сетью* (рис. 1).

Последовательность дуг $(P_{j_1}, P_{j_2}), (P_{j_2}, P_{j_3}) \dots (P_{j_{k-1}}, P_{j_k})(P_{j_k}, P_{j_{k+1}})$, в которой конец каждой предыдущей совпадает с началом последующей, назовем *путем* $(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_{k+1}})$ из P_{j_1} в $P_{j_{k+1}}$. Числа, приписанные дугам, будем часто называть их *длинами*; *длиной пути* будем называть сумму длин последовательности его дуг.

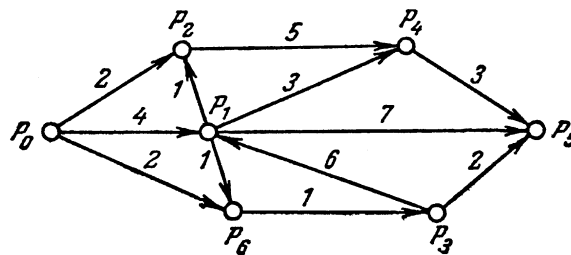


Рис. 1. Пример сетевого графика

Сетевой график (стрелочная диаграмма, сетевая модель, логическая сеть) – наглядное изображение проекта в виде графа, отображающее технологическую взаимосвязь между работами. Начальная информация о проекте должна содержать перечень всех работ, последовательность их выполнения и продолжительность каждой работы.

Так, например, информация о некотором проекте может быть задана табл. 2.

Таблица 2

Работа	Каким работам предшествует	Продолжительность	Работа	Каким работам предшествует	Продолжительность
1	2,3	2	6	8	6
2	8	3	7	-	4
3	6,7	4	8	-	2
4	6,7	5	9	-	7
5	9	4			

Ориентированные дуги графа – сетевого графика – обычно интерпретируют работы.

Работа – один из главных элементов сетевой модели. Означает протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов, или ожидание, или зависимость (фиктивная работа). **Ожидание** – протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда (твердение бетона, сушка поверхности после покраски и т.д.). **Зависимость (фиктивная работа)** – логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Вершины графа, соединенные дугами называют событиями. Одно и то же событие – вершина может служить началом одних и концом других дуг – работ. **Событие** – момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта.

Событие выражает готовый результат: все работы, входящие в событие, окончены. Оно также выражает логическую связь между работами, заключающуюся в том, что работы, входящие в данное событие, непосредственно предшествуют работам, выходящим из него; ни одна выходящая из данного события работа не может начинаться до окончания всех работ, входящих в это событие. Если работа не имеет предшествующей, то она выходит из события, являющегося *началом* проекта, т.е. из события, не имеющего входящих дуг. Работы, которые не предшествуют никаким другим, входят в событие, являющееся *концом* проекта, т.е. в событие, не имеющее выходящих дуг. Любое другое событие имеет входящие и выходящие дуги.

В приведенном примере проекта работы 1, 4, 5 не имеют предшествующих, поэтому в сетевом графике дуги, соответствующие этим

работам, будут выходить из события – начала проекта. Работы же 7, 8, 9 не предшествуют никаким другим работам проекта, и поэтому дуги, соответствующие этим работам, будут входить в событие – конец проекта. Событие, являющееся концом работы 1, одновременно служит началом работ 2 и 3 и т. д. Сетевой график этого проекта изображен на рис. 2 (номера работ проставлены на дугах в кружках).

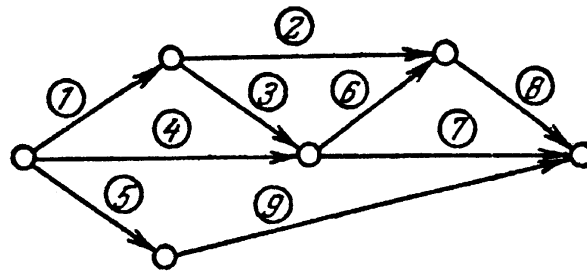


Рис. 2. Сетевой график с обозначением номеров работ

События будем обозначать, как и вершины графа, прописными буквами $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_n$, где P_0 – начало проекта, а некоторое P_m – его конец. Работы же будем обозначать, как и дуги графа, через (P_i, P_j) , где P_i – событие начала работы, а P_j – событие конца работы. Продолжительность t_{ij} работы (P_i, P_j) будем проставлять на дуге, изображающей эту работу. На рис. 3 приведен сетевой график проекта, заданного табл. 2, с обозначенными событиями и проставленными продолжительностями работ.

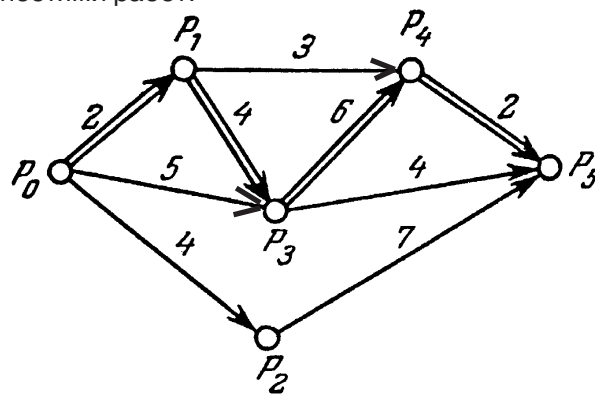


Рис. 3. Сетевой график с обозначением событий и продолжительностями работ

Для определения продолжительности отдельной работы (P_i, P_j) обыч-

но на основе опыта дают ее верхнюю и нижнюю оценки, так называемые пессимистическое b_{ij} и оптимистическое a_{ij} времена выполнения этой работы. Пессимистическое время – максимальная продолжительность выполнения данной работы, когда учитываются все даже самые маловероятные причины срывов, а оптимистическое – минимальная продолжительность выполнения данной работы при самых благоприятных условиях. Планируемую продолжительность работы в этом случае вычисляют по формуле:

$$t_{ij} = \frac{3a_{ij} + 2b_{ij}}{5},$$

которая следует из вероятностных соображений.

Если же, кроме указанных верхней и нижней оценок, известно наиболее вероятное время m_{ij} выполнения данной работы, то планируемую продолжительность работы вычисляют по формуле:

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}.$$

Отметим, наконец, что в сетевом графике невозможны циклы, т. е. пути, начальная и конечная точки которых совпадают. Это следует из того, что каждая работа, входящая в событие, предшествует работе, из него выходящей.

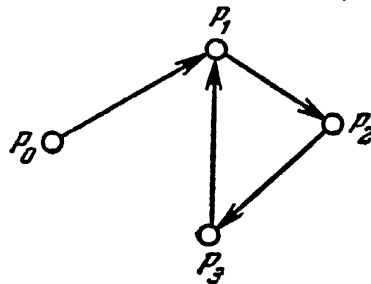


Рис. 4. Граф с циклом

На рис. 4 изображен граф с циклом, образованным работами (P_1, P_2) , (P_2, P_3) и (P_3, P_1) . В сетевом графике, как уже отмечалось, такая ситуация невозможна, так как для выполнения работы (P_3, P_1) необходимо выполнение работы (P_2, P_3) , для чего в свою очередь необходимо выполнение работы (P_1, P_2) . Но для начала работы (P_1, P_2) должны быть выполнены работы (P_0, P_1) и (P_3, P_1) , так что (P_3, P_1) не может начаться до окончания (P_1, P_2) , а (P_1, P_2) – до окончания (P_3, P_1) , что несовместимо.

Порядок и правила построения сетевых графиков.

Если $k > 1$ работ выходят из одного и того же события P_i и входят в одно и то же событие P_j (рис. 5, а), то для того чтобы их различать, то

есть чтобы каждую пару событий соединяла не более чем одна работа, вводим $k - 1$ дополнительных событий $P_{i_1}, \dots, P_{i_{k-1}}$, которые соединяем с P_j фиктивными работами нулевой продолжительности, изображаемыми пунктиром (рис. 5, б).

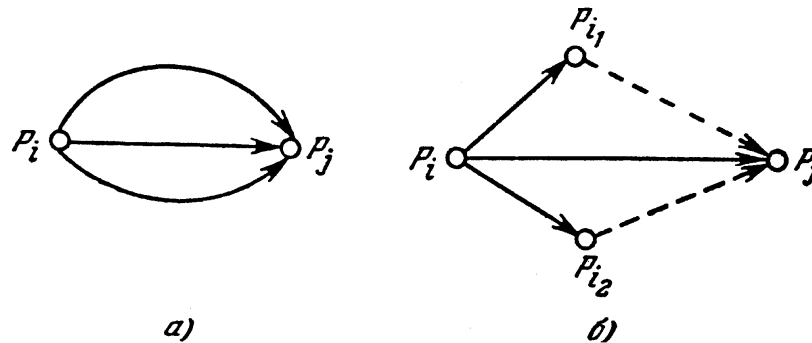


Рис. 5. Преобразование графа для замкнутого контура

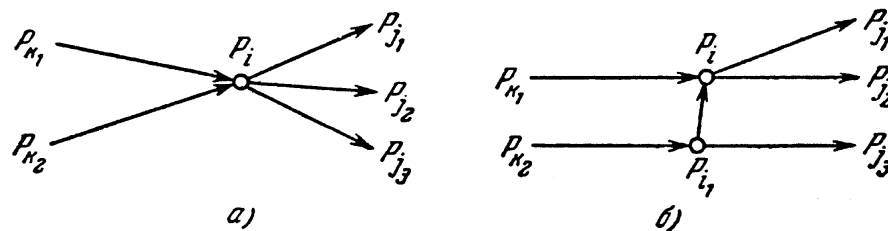


Рис. 6. Преобразование графа для открытого контура

Если в событие P_i входит более чем одна работа, например (P_{k_1}, P_i) и (P_{k_2}, P_i) , и из него выходит более чем одна работа, например (P_i, P_{j_1}) , (P_i, P_{j_2}) , (P_i, P_{j_3}) (рис. 6, а), но для выполнения некоторых исходящих работ, например (P_{k_1}, P_i) , то введением дополнительных событий и фиктивных работ нулевой продолжительности строим сетевой график так, как указано на рис. 6, б.

Если некоторое событие P_k при $k \neq m$ ($k \neq 0$) не имеет исходящих (входящих) дуг, т. е. нет работ, выполнение которых возможно лишь после наступления события P_k (нет работ, лишь после выполнения которых наступит P_k), то P_k (P_0) следует соединить фиктивной работой нулевой

продолжительности с P_m (P_k) (рис. 7).

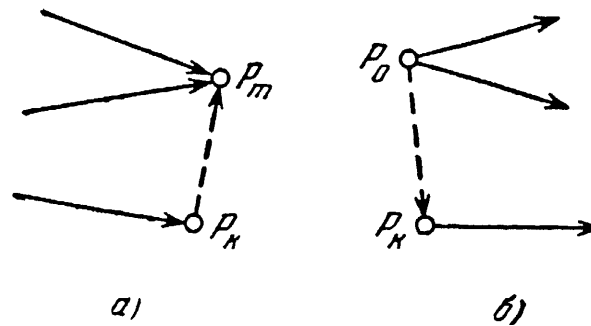


Рис. 7. Графы с фиктивной работой

Все работы в сетевом графике должны быть *простыми* в том смысле, что только выполнение всей работы может повлечь за собой начало выполнения следующих. Если же, например, работа (P_i, P_k) может наступить после выполнения работы (P_i, P_{i_1}) (рис. 8,а), являющейся частью работы (P_i, P_j) , а работа (P_j, P_{k_2}) – после выполнения (P_i, P_{i_1}) , являющейся также частью работы (P_i, P_j) , то введением дополнительных событий P_{i_1} и P_{i_2} разбиваем сложную работу (P_i, P_j) на простые работы (P_i, P_{i_1}) , (P_{i_1}, P_{i_2}) и (P_{i_2}, P_j) (рис. 8. б).

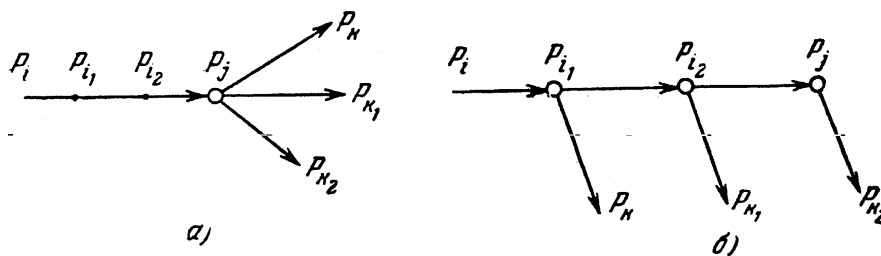


Рис. 8. Преобразование сложной работы в простые

Наконец, если внутри сети можно выделить некоторую подсеть, планирование которой может быть произведено независимо от всей сети, то можно составить укрупненную сеть, заменив эту подсеть одной работой, продолжительность которой равна критическому, т.е. минимально необходимому времени подсети, за которое могут быть

выполнены все работы. Этим замечанием пользуются при планировании больших сетей, которые обычно удается разбить на несколько подсетей и планировать по частям. На рис. 9 подсеть с началом P_i и концом P_j заменена работой (P_i, P_j) .

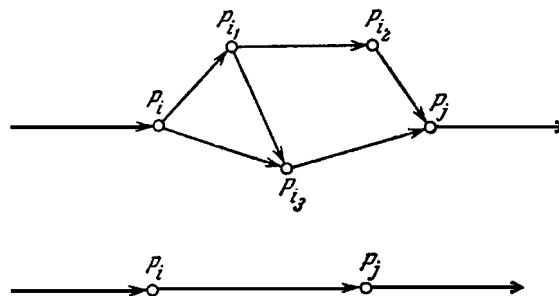


Рис. 9. Замена подсети на одну работу

2.4. Упорядочивание сетевого графика

Пусть уже построен сетевой график проекта. Приведем алгоритмы, позволяющие перенумеровать события (вершины) так, чтобы для любой работы (P_i, P_j) выполнялось неравенство $i < j$, что во многих задачах представляет существенное удобство.

Рассмотрим сначала частный случай, когда каждая пара событий P_i и P_j соединена либо дугой (P_i, P_j) , либо дугой (P_j, P_i) , так что каждое событие P_i соединено точно n дугами со всеми остальными; из этих дуг часть выходит из P_i , а часть входит в P_i .

Каждому событию присвоим номер, равный числу дуг, входящих в это событие. Тогда, например, событие P_0 , в которое не входит ни одна дуга, получит номер 0, а событие P_m , из которого не выходит ни одна дуга, получит номер n .

Легко убедиться в однозначности такой нумерации. Действительно, допустим противное, и пусть в P_i и P_j входит одно и то же число k дуг. Так как P_i и P_j соединены между собой, например, дугой (P_i, P_j) , то в P_j , кроме дуги (P_i, P_j) , входит еще $k - 1$ дуг. Рассмотрим теперь все k дуг $(P_{i_1}, P_j), \dots, (P_{i_k}, P_j)$, входящие в P_j . Событие P_j соединено дугами с каждым из событий $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$. Среди этих дуг найдется хотя бы одна, пусть (P_j, P_{i_v}) , выходящая из P_j , так как в противном случае получили бы, что в P_j входит больше чем k дуг (дуги $(P_{i_1}, P_j), \dots, (P_{i_k}, P_j)$ и (P_j, P_{i_v})). Остается

лишь заметить, что дуги (P_{i_v}, P_j) , (P_i, P_j) и (P_j, P_{i_v}) образуют цикл вопреки предположению об отсутствии циклов в сети.

Из однозначности нумерации следует, что среди наших $n + 1$ событий существует одно, содержащее точно одну входящую дугу, одно, содержащее точно две входящие дуги и т. д., одно, содержащее точно n входящих дуг, так что события получают сквозную нумерацию $0, 1, \dots, (n)$.

Эту же нумерацию можно получить следующим образом (метод вычеркивания дуг). Начинаем просмотр сети с события P_0 , которому присваиваем номер 0. Вычеркиваем все дуги, выходящие из P_0 , и единственному событию, лишенному входящих дуг, присваиваем номер 1. Вычеркиваем затем все дуги, выходящие из P_1 , и единственному событию, лишенному входящих дуг, присваиваем номер 2 и т. д.

Убедимся, что этим алгоритмом каждому событию присваивается номер, равный числу дуг, входящих в это событие.

Действительно, после нулевого шага, вычеркнув все n выходящих из P_0 дуг, мы в каждом из оставшихся n событий вычеркнули этим по одной входящей дуге и получили одно событие P_1 без входящих дуг, так что этому событию присвоен номер 1, равный числу входящих в него дуг. После первого шага, вычеркнув все $n - 1$ дуг, выходящих из P_1 , мы в каждом из оставшихся $n - 1$ событий вычеркнули уже по две входящие дуги и получили одно событие P_2 без входящих дуг, так что этому событию присвоен номер 2, равный числу входящих в него дуг, и т. д.

Нетрудно показать, что номер каждого события равен максимальному числу дуг пути, соединяющего это событие с P_0 .

Рассмотренный частный случай редко встречается на практике. Наиболее общей является ситуация, когда каждое событие соединено лишь с некоторыми из остальных, т. е. сеть не сильно разветвлена (рис. 10).

В этом случае, если вычеркнуть все дуги, выходящие из события P_0 , которому присваиваем ранг 0, может случиться, что несколько событий окажутся без входящих дуг (на рис. 10 таковы события P_1 и P_6). Будем называть эти события событиями первого ранга. Максимальное число дуг пути, соединяющего P_0 с любым из них, равно единице.

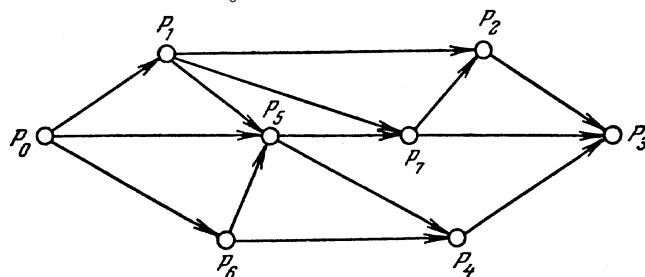


Рис. 10. Исходная сеть

Вычеркнув все дуги, выходящие из событий первого ранга, получим ряд событий без входящих дуг, которые назовем событиями второго ранга. Каждое событие второго ранга обязательно соединено с P_0 посредством некоторого события первого ранга, т.е. путем, состоящим из двух дуг. Хотя некоторые события второго ранга могут быть, кроме того, соединены с P_0 непосредственно, т.е. путем, состоящим из одной дуги, но *максимальное* число дуг пути из P_0 в любое событие второго ранга всегда равно двум, и это характеризует события второго ранга.

Вообще, если максимальное число дуг пути, соединяющего данное событие с P_0 , равно ℓ , то это – событие 1-го ранга.

Таким образом, все события сети *единственным образом* распределяются по рангам.

Нумерацию событий произведем так. Единственному событию P_0 нулевого ранга присвоим номер 0. Событиям первого ранга присвоим в произвольном порядке номера 1, 2, ..., k_1 событиям второго ранга присвоим номера $k_1 + 1$, ..., $k_1 + k_2$ и т.д. Так как события одного ранга между собой не соединены, а события меньшего ранга имеют меньший индекс, то в пронумерованной сети для любой дуги (P_i, P_j) всегда $i < j$.

Поясним изложенный способ нумерации событий на примере рис. 10. Событие P_0 – нулевого ранга. Вычеркнем выходящие из него дуги (P_0, P_1) , (P_0, P_5) , (P_0, P_6) . События P_1 и P_6 останутся без входящих дуг. Это – события 1-го ранга. Вычеркнув дуги (P_1, P_2) , (P_1, P_7) , (P_1, P_5) , (P_6, P_4) и (P_6, P_5) , получим одно событие P_5 без входящих дуг; оно – событие 2-го ранга. Аналогично P_4 и P_7 – события 3-го ранга, P_2 – событие 4-го ранга, наконец, P_3 – событие 5-го ранга. Наша сеть упорядочена по рангам. События внутри данного ранга равноценны в том смысле, что им можно присваивать номера в любом порядке. В рассматриваемом примере события P_1 и P_6 относятся к первому рангу. Порядковые номера, которые им нужно присвоить, 1 и 2 (так как P_0 имеет номер 0). Присвоим событию P_1 номер 1, а P_6 – номер 2. Следующее событие P_5 – второго ранга. Его порядковый номер 3. События P_4 и P_7 получают соответственно номера 4 и 5, P_2 – номер 6, и, наконец, событие P_3 получит номер 7. Пронумерованная сеть изображена на рис. 11.

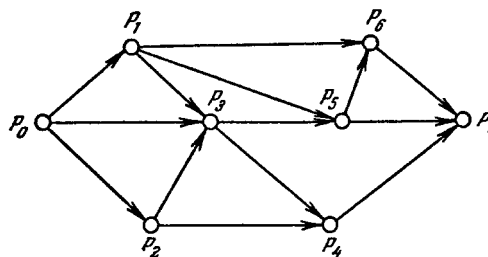


Рис. 11. Упорядоченная сеть

При больших сетях удобно пользоваться следующим алгоритмом Форда, являющимся основным алгоритмом решения не только задачи нумерации событий, но и некоторых других задач.

Предварительный шаг. Каждой вершине P_j ставят в соответствие число $\lambda_j^{(0)} = 0$, а каждой дуге (P_i, P_j) ставят в соответствие число $y_{ij} = 1$ (которое не меняется на протяжении всего алгоритма).

Общий (q-й) шаг. Просматривают все вершины сети в каком-нибудь порядке, например, $P_0, P_1, \dots, P_n$, и заменяют числа $\lambda_j^{(q-1)}$, вычисленные на предыдущем шаге, на новые числа $\lambda_j^{(q)} \geq \lambda_j^{(q-1)}$ по формуле:

$$\lambda_j^{(q)} = \max \{ \lambda_i^{(p)} + y_{ij} \} \quad (j = 1, \dots, n; \lambda_0^{(q)} = 0), \quad (1.1)$$

где p равно q или $q - 1$ в зависимости от того, просматривалась ли уже на q -м шаге вершина P или еще не просматривалась. На каждом шаге можно рассматривать все вершины в произвольном порядке.

Повторяют общий шаг до тех пор, пока на очередном q -м шаге останутся без изменения все $\lambda_j^{(q-1)}$. Тогда числа

$$\Gamma_j = \lambda_j^{(q)} = \lambda_j^{(q-1)} \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

являются рангами соответствующих вершин сети.

Чтобы убедиться в этом, достаточно выяснить смысл чисел $\lambda_j^{(q)}$, получаемых на q -м шаге приведенного алгоритма. Оказывается, $\lambda_j^{(q)}$ равно максимальному числу дуг цепочки, входящей в P_j , обнаруженной на q -м шаге.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь вершину $P_j (j \neq 0)$. На q -м шаге мы для нее получим:

$$\lambda_j^{(q)} = \max \{ \lambda_{i_1}^{(p)} + y_{ij} \} = \lambda_{i_1}^{(p)} + y_{ij} = \lambda_{i_1}^{(p)} + 1,$$

где из всех вершин P_{i_1} , соединенных с P_j одной дугой, входящей в P_j , выбрана та вершина P_{i_1} , для которой соответствующее число $\lambda_{i_1}^{(p)}$ оказалось наибольшим; при этом p равно q , если на q -м шаге вершина P_{i_1} уже просматривалась, и $p = q - 1$, если еще не просматривалась, т.е.

$$\lambda_{i_1}^{(p)} = \lambda_{i_1}^{(q)} \text{ или } \lambda_{i_1}^{(p)} = \lambda_{i_1}^{(q-1)}.$$

Аналогично при $\lambda_{i_1}^{(p)} \neq 0$ найдем, что либо

$$\lambda_{i_1}^{(p)} = \lambda_{i_1}^{(q)} = \max\{\lambda_i^{(r)} + y_{ii_1}\},$$

где r равно q или $q - 1$, либо

$$\lambda_{i_1}^{(p)} = \lambda_{i_1}^{(q-1)} = \max\{\lambda_i^{(s)} + y_{ii_1}\} = \lambda_{i_2}^{(s)} + y_{i_2 i_1},$$

где s равно $q - 1$ или $q - 2$. Подставляя в $\lambda_j^{(q)}$, получим

$$\lambda_j^{(q)} = \lambda_{i_2}^{(t)} + y_{i_2 i_1} + y_{i_1 j},$$

где t равно q или $q - 1$, или $q - 2$.

Этот процесс выделения цепочки дуг (P_1, P_j) , (P_2, P_{j_1}) , ... можно продолжить до тех пор, пока не получим:

$$\lambda_j^{(q)} = \lambda_{i_k}^{(v)} + y_{i_k i_{k-2}} + \dots + y_{i_1 j},$$

где $\lambda_{i_k}^{(v)} = 0$. Но $\lambda_{i_k}^{(v)}$ может равняться нулю только в следующих двух случаях: либо при $i_k = 0$, и тогда $\lambda_j^{(q)}$ - число дуг цепочки, соединяющей P_0 с P_j , либо при $v = 0$, и тогда $\lambda_j^{(q)}$ - число дуг цепочки, соединяющей P_k с P_j .

Таким образом, $\lambda_j^{(q)}$ равно числу дуг цепочки, входящей в P_j . Максимальность же этого числа дуг следует из выбора вершин $P_1, P_2, \dots, P_k$ (по формуле (1.1)).

На следующем $(q + 1)$ -м шаге либо будет обнаружена более длинная цепочка, либо будет удлинена данная (при $i_k \neq 0$), либо $\lambda_j^{(q+1)}$ окажется равным $\lambda_j^{(q)}$. Однако последнее еще не является признаком равенства $\lambda_j^{(q+1)} = \lambda_j^{(q)} = l_j^*$, так как другие $\lambda_k^{(q+1)}$ ($k \neq j$) могли измениться по сравнению с $\lambda_k^{(q)}$, следовательно, возможно в дальнейшем удлинение какой-нибудь из цепочек, входящих в P_j . Алгоритм закончен лишь тогда, когда $\lambda_j^{(q+1)} = \lambda_j^{(q)}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, т. е. когда для каждой вершины P_j нельзя удлинить ни одну из цепочек, входящих в эту вершину (так как все они начинаются в P_0).

После распределения вершин по рангам их нумерация производится так, как в предыдущем методе вычеркивания дуг.

Проиллюстрируем применение алгоритма на рассмотренном выше примере (рис. 10).

Предварительный шаг. Полагаем

$$\lambda_0^{(0)} = \lambda_i^{(0)} = \dots = \lambda_j^{(0)} = 0; \quad y_{ij} = 1 \quad (\text{для всех } (P_i, P_j)).$$

Первый шаг. Просматриваем вершины сети, например, в порядке $P_0, P_1, \dots, P_7$. В вершину P_1 входит лишь одна дуга (P_0, P_1) , поэтому

$$\lambda_1^{(1)} = l_0 + y_{01} = 1.$$

В вершину P_2 входят две дуги (P_1, P_2) и (P_7, P_2) , поэтому

$$\lambda_2^{(1)} = \max \{ \lambda_1^{(1)} + y_{12}, \lambda_7^{(0)} + y_{72} \} = \max \{ 2, 1 \} = 2.$$

Аналогично

$$\lambda_3^{(1)} = \max \{ \lambda_2^{(1)} + y_{23}, \lambda_7^{(0)} + y_{73}, \lambda_4^{(0)} + y_{43} \} = \max \{ 3, 1, 1 \} = 3,$$

$$\lambda_4^{(1)} = \max \{ \lambda_5^{(0)} + y_{54}, \lambda_6^{(0)} + y_{64} \} = \max \{ 1, 1 \} = 1,$$

$$\lambda_5^{(1)} = \max \{ \lambda_1^{(1)} + y_{15}, \lambda_0 + y_{05}, \lambda_6^{(0)} + y_{65} \} = \max \{ 2, 1, 1 \} = 2,$$

$$\lambda_6^{(1)} = l_0 + y_{06} = 1,$$

$$\lambda_7^{(1)} = \max \{ \lambda_1^{(1)} + y_{17}, \lambda_5^{(1)} + y_{57} \} = \max \{ 2, 3 \} = 3.$$

Второй шаг. Производим просмотр, например, с конца сети. Получим

$$\lambda_7^{(2)} = \lambda_7^{(1)} = 3, \quad \lambda_6^{(2)} = \lambda_6^{(1)} = 1,$$

$$\lambda_5^{(2)} = \max \{ \lambda_1^{(1)} + y_{15}, l_0 + y_{05}, \lambda_6^{(2)} + y_{65} \} = 2,$$

$$\lambda_4^{(2)} = \max \{ \lambda_5^{(2)} + y_{54}, \lambda_6^{(2)} + y_{64} \} = 3,$$

$$\lambda_3^{(2)} = \max \{ \lambda_2^{(1)} + y_{23}, \lambda_7^{(2)} + y_{73}, \lambda_4^{(2)} + y_{43} \} = 4,$$

$$\lambda_2^{(2)} = \max \{ \lambda_1^{(1)} + y_{12}, \lambda_7^{(2)} + y_{72} \} = 4,$$

$$\lambda_1^{(2)} = l_0 + y_{01} = 1.$$

После *третьего шага*, в котором просмотр производился с начала сети, получаются следующие значения для l_j :

$$\lambda_1^{(3)} = 1, \quad \lambda_2^{(3)} = 4, \quad \lambda_3^{(3)} = 5, \quad \lambda_4^{(3)} = 3,$$

$$\lambda_5^{(3)} = 2, \quad \lambda_6^{(3)} = 1, \quad \lambda_7^{(3)} = 3.$$

Наконец, на четвертом шаге не меняется ни одно $\lambda_j^{(3)}$, т. е.

$$\lambda_j^{(4)} = \lambda_j^{(3)} = l_j^* \quad (j = 0, 1, \dots, 7).$$

Таким образом, получаем следующее распределение вершин сети по рангам:

P_0 - вершина нулевого ранга,

P_1, P_6 – вершины первого ранга,
 P_5 – вершина второго ранга,
 P_4, P_7 – вершины третьего ранга,
 P_2 – вершина четвертого ранга,
 P_3 – вершина пятого ранга.

Затем всем вершинам присваиваем номера так, как это сделано выше.

Будем под *пронумерованной сетью* понимать сеть, вершины которой пронумерованы так, что для любой дуги (P_i, P_j) имеет место $i < j$.

2.5. Понятие о пути

Понятие пути уже встречалось нам при рассмотрении правил составления сетевого графика.

Путь – любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Следует различать пути трех видов:

1) **полный путь** – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим;

2) путь от начального события до данного события сети называется путем, предшествующим этому событию, а путь, соединяющий это событие с завершающим событием сети, – путем, следующим за данным событием;

3) путь, соединяющий какие-либо два события i и j , из которых ни одно не является ни исходным, ни завершающим, называется путем между событиями i и j .

Если известна продолжительность каждой работы t_{ij} , то для каждого пути может быть вычислена его длина (продолжительность) $t(L)$. Длина каждого пути равна сумме продолжительностей составляющих его работ. Дадим формализованную постановку расчета длины пути. Пусть весь комплекс работ уже изображен в виде пронумерованного сетевого графика, и пусть для каждой работы (P_i, P_j) задана продолжительность $t_{ij} \geq 0$ ее выполнения, которую будем считать длиной этой работы (дуги). Тогда под длиной пути $(P_i, P_{j_1}), (P_{j_1}, P_{j_2}), \dots, (P_{j_k}, P_j)$ из P_i в P_j будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь, т.е. число $t_{ij_1} + t_{ij_2} + \dots + t_{ijkj}$.

Счет времени будем вести от наступления начального события P_0 , т.е. время T_0 наступления события P_0 будем считать равным нулю. Временем T_j наступления (свершения) любого события P_j будем считать время окончания всех работ, входящих в P_j . *Минимальное (т.е. наиболее раннее) время возможного наступления события P_j равно максимальной длине пути из P_0 в P_j .* Оно же, следовательно, является наиболее ранним временем начала всех работ, выходящих из P_j . Обозначим это время через $T_j^{(0)}$.

Критическим временем проекта назовем минимальное время $T_n^{(0)}$

наступления последнего события P_n . Другими словами, *критическое время* – это минимальное количество времени, необходимое для выполнения всего комплекса работ.

Критический путь – наиболее продолжительный путь в сетевом графике. Причем критическим путем называют любой путь из P_0 в P_n , имеющий максимальную длину.

Алгоритм вычисления минимальных времен и критического времени. Для вычисления минимальных времен наступления событий будем пользоваться основным алгоритмом, рассмотренным ранее для определения рангов вершин сети.

Предварительный шаг. Каждому событию P_j приписываем число $\lambda_j = 0$; однако, в отличие от предыдущего, каждой работе (P_i, P_j) ставим теперь в соответствие не число $y_{ij} = 1$, а число t_{ij} – продолжительность выполнения этой работы.

Общий шаг. Просматриваем всю пронумерованную сеть последовательно от P_0 до P_n , вычисляем новые значения чисел λ_j по формуле:

$$\lambda_j = \max\{\lambda_i + t_{ij}\} \quad (j = 1, \dots, n) \quad \lambda_0 = \lambda_0 = 0 \quad (1.3)$$

и записываем около каждого вычисленного λ_j номера $i_1, i_2, \dots, i_v$ тех событий P_{i_k} для которых в формуле (1.4) был достигнут максимум. Эти пометки будут затем использованы при отыскании критического пути.

Убедимся, что в рассматриваемом случае *пронумерованной* сети второй шаг не изменит ни одного из чисел $\lambda_j = \lambda_j^{(1)}$, полученных после первого шага.

Действительно, так как сеть просматривается в порядке $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots, P_j, \dots, P_n$, то число λ_j вычисляется лишь после того, как определены все числа λ_i , участвующие в вычислении λ_j ($i < j$). Далее, поскольку числа t_{ij} одни и те же на всех шагах, то, как видно из (1.4), число $\lambda_j^{(2)}$ может оказаться больше числа $\lambda_j^{(1)}$ лишь тогда, когда $\lambda_i^{(2)} > \lambda_i^{(1)}$ при некотором $i < j$. Но $\lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(1)} = 0$, следовательно, $\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)}$. Но тогда $\lambda_2^{(2)} = \lambda_2^{(1)}$, и т.д.

Каждое из чисел λ_j ($j = 1, \dots, n$), полученное после *единственного* шага, определяет максимальную продолжительность пути из P_0 в P_j и, по определению, равно минимальному времени $T_j^{(0)}$ наступления события P_j . Наконец, число $\lambda_n = T_n^{(0)}$ дает *критическое время* проекта.

2.6. Временные параметры сетевых графиков

Для сетевых графиков справедливо следующее утверждение: из всех путей, соединяющих P_0 и P_n , критическим, т.е. имеющим

максимальную длину $T_n^{(0)}$, является только тот путь, для всех дуг (P_i, P_j) которого выполнено условие:

$$T_j^{(0)} - T_i^{(0)} - t_{ij} = 0.$$

Свободным резервом времени работы (P_i, P_j) называется разность: $T_j^{(0)} - T_i^{(0)} - t_{ij}$. Для любой работы, входящей в критическую последовательность, свободный резерв времени равен нулю, а для работ, не лежащих на критическом пути, –

$$T_j^{(0)} - T_i^{(0)} - t_{ij} \geq 0.$$

Вводится также временные параметры – максимальные времена наступления событий. Максимальное или наиболее позднее время $T_j^{(1)}$ наступления события P_j означает, что окончание в момент $T_j^{(1)}$ всех работ, входящих в P_j , не помешает окончанию всего комплекса работ за время T_n ; т.е. $T_j^{(1)}$ – наиболее позднее время окончания всех работ, входящих в P_j , $T_j^{(1)}$ равно разности между T_n и максимальной длиной пути из P_j в P_n .

Существуют условия принадлежности события и работы критическому пути. Для того чтобы событие P_j принадлежало критическому пути, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$T_j^{(1)} = T_j^{(0)}.$$

Работа (P_i, P_j) входит в некоторый критический путь тогда и только тогда, когда

$$T_j^{(1)} - T_i^{(0)} - t_{ij} = 0.$$

Величина $T_j^{(1)} - T_j^{(0)} - t_{ij}$ называется полным резервом времени работы (P_i, P_j) $Rn(ij)$.

Полный резерв – это максимальное количество времени, которым мы располагаем для увеличения продолжительности выполнения работы (P_i, P_j) (если, конечно, это допустимо характером работы) без увеличения времени T_n выполнения проекта.

Полный резерв означает также максимальное количество времени, на которое можно опоздать с началом работы (P_i, P_j) , по сравнению с наиболее ранним возможным временем ее начала $T_i^{(0)}$, не увеличивая

при этом времени T_n выполнения проекта.

Кроме того, полный резерв работы есть разность между временем выполнения проекта и максимальной длиной пути, проходящего через эту работу.

Полный резерв у критических работ равен нулю. Некритические работы обладают ненулевым полным резервом.

Увеличение продолжительности некритической работы за счет использования всего ее полного резерва обязательно влечет появление нового критического пути, в состав которого войдет эта работа.

Опоздание начала некритической работы (P_i, P_j) по сравнению с $T_i^{(0)}$ на всю величину ее полного резерва повлечет за собой необходимость начинать все работы, выходящие из события P_j , в наиболее позднее допустимое время $T_j^{(1)}$ наступления этого события.

Свободный резерв времени $T_j^{(0)} - T_i^{(0)} - t_{ij}$ работы (P_i, P_j) , определенный выше, – это максимально допустимое увеличение продолжительности этой работы (или запаздывание ее начала по сравнению с наиболее ранним возможным временем ее начала $T_i^{(0)}$), не нарушающее возможности начинать все работы (P_j, P_i) , выходящие из P_j , в наиболее раннее допустимое время $T_j^{(0)}$.

Увеличение продолжительности работы (P_j, P_i) на часть ее свободного резерва $T_j^{(0)} - T_i^{(0)} - t_{ij}$ может уменьшить полный резерв $T_i^{(1)} - T_k^{(0)} - t_{ki}$ работ (P_k, P_i) , входящих в событие P_i (конечно, если $T_i^{(0)} \neq T_i^{(1)}$), и не влияет на резервы работ, выходящих из события P_j .

Ясно, что для работ, оканчивающихся в событиях, лежащих на критическом пути, полный резерв совпадает со свободным.

Наконец, кроме полного и свободного резервов времен работы (P_i, P_j) , вводится еще понятие ее *независимого резерва времени*, который определяется по формуле:

$$\max\{0, T_j^{(0)} - T_i^{(1)} - t_{ij}\}. \quad (1.4)$$

Смысл независимого резерва заключается в том, что он означает максимально допустимое количество времени для увеличения продолжительности работы (P_i, P_j) или запаздывания ее начала при условии, что все работы (P_k, P_i) , входящие в событие P_i , заканчиваются в наиболее позднее допустимое время $T_i^{(1)}$, а все работы (P_j, P_i) , выходящие из P_j , начинаются в наиболее раннее допустимое время $T_j^{(0)}$.

Таким образом, использование на работе (P_i, P_j) ее независимого резерва совершенно не влияет на резервы других работ.

Ясно, что для каждой работы, выходящей из события, лежащего на критическом пути, независимый резерв времени совпадает со свободным.

Сетевой график хотя и дает четкое представление о порядке следования работ, все же недостаточно нагляден для определения тех работ, которые должны выполняться в каждый данный момент времени. Поэтому, в случае небольшого проекта, после составления пронумерованного сетевого графика рекомендуется составлять так называемую линейную диаграмму проекта. **Линейная диаграмма** – сетевой график, в котором каждая работа изображается параллельным оси времени отрезком, длина которого равна продолжительности этой работы. Фиктивная работа изображается точкой.

На горизонтальной оси наносится равномерная шкала времени t . Каждая работа изображается отрезком или полоской, параллельной оси времени, длиной, равной продолжительности этой работы (фиктивная работа нулевой продолжительности изображается точкой). События P_i и P_j – начало и конец работы (P_i, P_j) – ставят соответственно в начале и в конце полоски. Полоски, располагают одну над другой, снизу вверх, в порядке возрастания индекса j (окончания работы (P_i, P_j)), а для работ, входящих в одно и то же P_j – в порядке возрастания индекса i (начала работы). Момент наступления события P_0 считают началом проекта и полагают его равным нулю, т. е. полоски (P_0, P_j) откладывают от вертикали $t = 0$. Полоску (P_i, P_j) откладывают так, чтобы ее начало P_i лежало на одной вертикали с самым правым концом всех полосок-работ (P_k, P_i) , заканчивающихся в P_i .

Таким образом, начало полоски (P_i, P_j) соответствует минимальному времени $T_i^{(0)}$ наступления события P_i .

На рис. 14 приведена линейная диаграмма сети рис. 13.

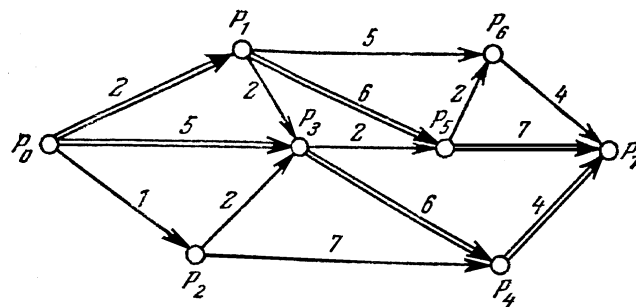


Рис. 13. Пример сетевого графика

Определим по линейной диаграмме критическое время, критические пути, а также резервы времени всех работ.

Критическое время проекта равно координате по оси времени самого правого конца всех полосок линейной диаграммы. В нашем случае критическое время $T_1^{(0)}$ равно 15.

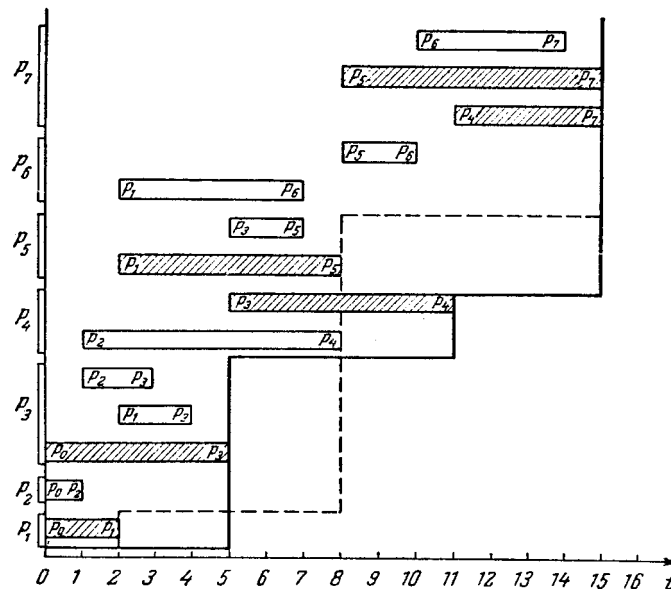


Рис. 14. Линейная диаграмма сети

Критический путь можно найти по диаграмме следующим образом. Рассматриваем полоски-работы с последним событием (P_7) в правом конце, заканчивающиеся в критическое время, т. е. полоски, правый конец которых расположен на вертикали критического времени (на рис. 14 – это работы (P_5, P_7) и (P_4, P_7)).

Затем из полосок-работ, конечные события которых совпадают с начальными событиями (P_5 и P_4) рассмотренных полосок, выбираем те, у которых правые концы расположены на одной вертикали с левыми концами рассмотренных полосок (на рис. 14 – это работы (P_1, P_5) и (P_3, P_4)). Продолжаем так выделять полоски, пока не придем к полоскам, начинающимся в P_0 (на рис. 14 – к полоскам (P_0, P_1) и (P_0, P_3)). Выделенные полоски-работы образуют совокупность всех критических работ (на рис. 14 заштрихованы) и позволяют обнаружить все критические пути.

На рис. 14 получилось два критических пути:

(P_0, P_1, P_5, P_7) и (P_0, P_3, P_4, P_7),

которые выделены двумя ломаными.

Свободный резерв времени $T_j^{(0)} - T_i^{(1)} - t_{ij}$ работы (P_i, P_j) на линейной диаграмме, очевидно, определяется как наибольшая длина отрезка, на который можно сдвинуть вправо полосу (P_i, P_j) , не сдвигая ни одной из полосок (P_j, P_i) , т. е. не изменяя начала $T_j^{(0)}$ работ (P_j, P_i) , выходящих из события P_j .

На рис. 14 свободный резерв, например, работы (P_1, P_0) равен 3, так как полосу (P_1, P_0) можно сдвинуть вправо на 3, не сдвигая полоски (P_6, P_7) . Работа же (P_5, P_6) не имеет свободного резерва, так как любой сдвиг вправо полоски (P_5, P_6) возможен лишь при таком же сдвиге полоски (P_6, P_7) .

Для отыскания полных резервов времени покажем сначала, как определить по линейной диаграмме максимальные времена $T_j^{(1)}$ наступления событий P_j .

Для этого сдвигаем вправо до вертикали критического пути полоски-работы, правым концом которых служит последнее событие (на рис. 15 это показано пунктиром для полоски-работы (P_6, P_7)). Спускаясь затем сверху вниз, сдвигаем одну за другой все полоски вправо на максимально допустимые отрезки (может быть нулевой длины), т. е. так, чтобы правые концы P_j сдвигаемых полосок попали на одну вертикаль с самым левым концом P_j уже сдвинутых полосок. Этот самый левый конец P_j ранее сдвинутых полосок определяет (по шкале времени) максимальное время $T_j^{(1)}$ наступления события P_j . На рис. 15 сдвинутые работы (P_6, P_7) , (P_5, P_6) , (P_1, P_6) , (P_3, P_5) , (P_2, P_4) , (P_2, P_3) , (P_1, P_3) , (P_0, P_2) показаны пунктиром.

Объясним сдвиг, например, полоски-работы (P_0, P_2) . Из двух ранее сдвинутых полосок (P_2, P_3) и (P_2, P_4) левее оказалось начало полоски (P_2, P_3) . Вертикаль $t = 3$ этого начала определяет конец сдвигаемой полоски (P_0, P_2) , а также максимальное время $T_2^{(1)} = 3$ наступления события P_2 .

Теперь по полученной после сдвигов линейной диаграмме *полный резерв времени* $T_j^{(0)} - T_i^{(1)} - t_{ij}$ работы (P_i, P_j) определяется как величина ее сдвига, т. е. как длина отрезка от старого положения P_j (до сдвига) до нового положения P_j (после сдвига).

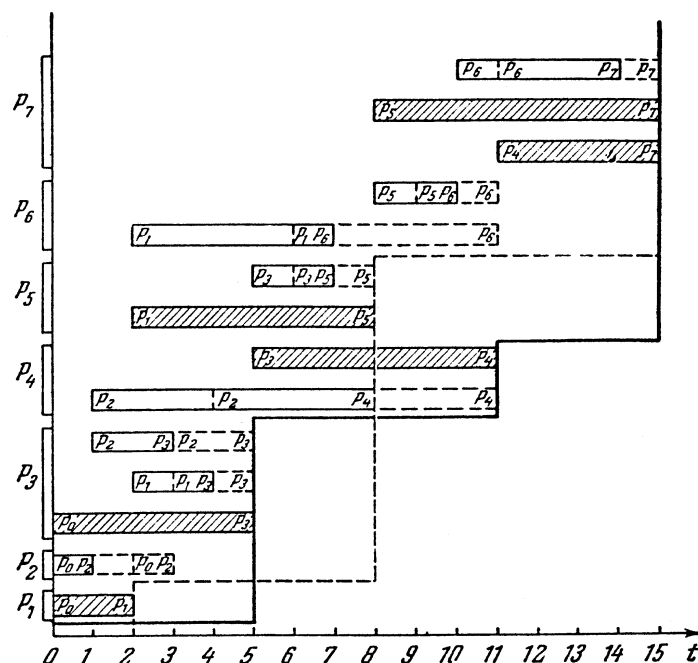


Рис. 15. Анализ сетевого графика с помощью линейной диаграммы

Например, полные резервы работ (P_1 , P_6) и (P_3 , P_5) равны соответственно 4 и 1; последний совпадает со свободным резервом работы (P_3 , P_5).

Если какую-нибудь из работ удлинить на величину ее полного резерва, то она станет критической и будет принадлежать по крайней мере одному новому критическому пути.

3. АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

3.1. Коэффициент напряженности работы

Резервы времени используются в системах СПУ для оптимизации плана, контроля за его выполнением и для прогнозирования хода работ с учетом фактического их состояния и предполагаемых изменений. Величина полного резерва времени, будучи сама по себе важным параметром сети, все же не может достаточно полно характеризовать напряженность сроков выполнения работ.

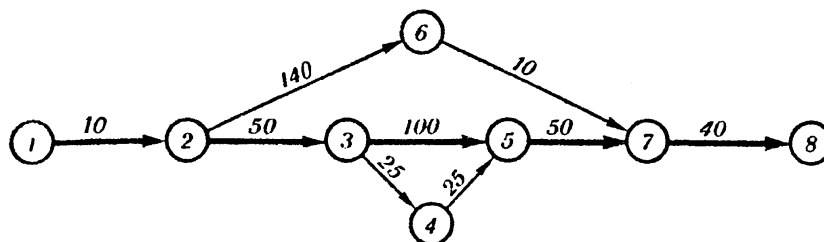


Рис. 16. Сетевой график с определением очередности событий и длительности работ

Так, например, в сети, изображенной на рис. 16, работы (2, 6) и (6, 7), лежащие на пути L_1 (1, 2, 6, 7, 8), и работы (3, 4) и (4, 5), лежащие на пути L_2 (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8), имеют одинаковый полный резерв времени, работы (2, 6) и (6, 7) значительно напряженнее, так как имеющийся у них резерв времени распределяется на гораздо большей базе, чем у работ (3, 4) и (4, 5).

Для характеристики степени напряженности сроков выполнения работ может служить величина коэффициента напряженности работ $K_n(i, j)$.

Коэффициент напряженности работы – отношение продолжительности несовпадающих отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь.

Обозначив через $t'_{кр}(L)$ продолжительность отрезка критического пути, совпадающего с путем $L(i, j)_{max}$, получим:

$$K_n(i, j) = \frac{t(L)_{max} - t'_{кр}(L)}{t_{кр} - t'_{кр}(L)}$$

или

$$K_n(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}(L)}, \text{ где}$$

R_n – полный резерв времени.

Величина коэффициента напряженности помогает при установлении плановых сроков выполнения работ оценить, насколько свободно можно располагать имеющимися у них резервами времени, а исполнителям работ дает представление о степени срочности работ или очередности их выполнения (например, при многотемности, когда выполняемые исполнителем работы принадлежат разным сетям), если это не определяется технологическими связями работ.

В примере (рис. 16) коэффициент напряженности у работ (2, 6) и

(6, 7) пути L_1 равен 0,75, а у работ (3, 4) и (4, 5) пути L_2 – всего 0,5. Это свидетельствует о том, что, несмотря на равенство полных резервов времени, сроки выполнения работ пути L_1 значительно более жесткие.

Вводятся понятия критической, подкритической и резервной зоны. **Критическая зона** – такие работы, для которых коэффициент напряженности превышает 0,8. **Подкритическая зона** – такие работы, в которых коэффициент напряженности находится в диапазоне от 0,6 до 0,8. **Резервная зона** – такие работы, в которых коэффициент напряженности не превышает 0,6. Таким образом, работы (2, 6) и (6, 7) лежат в подкритической зоне, а работы (3,4) и (4,5) – в резервной.

3.2. Анализ и оптимизация календарных сетей

Оптимизация сетевого графика – процесс улучшения организации выполнения комплекса работ, с учетом срока его выполнения. Проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов. Задачи оптимизации сетевого графика возникают также при стремлении минимизировать стоимость всего комплекса работ (всего проекта) за счет увеличения продолжительности выполнения некоторых работ при заданном времени осуществления проекта.

К оптимизационным относятся также задачи минимизации времени выполнения проекта при заданной его стоимости. **Комплексная оптимизация** – нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от конкретных целей, ставящихся при его реализации.

Обычно предполагается, что прямые затраты c_{ij} на выполнение каждой работы (P_i, P_j) убывают с возрастанием продолжительности t_{ij} ее выполнения.

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу минимизации стоимости проекта при фиксированной его продолжительности.

Задача построения оптимального безрезервного плана.

Пусть для данного проекта с заданными продолжительностями $t_{ij} = d_{ij}$ выполнения работ (P_i, P_j) вычислены минимальные и максимальные времена $T_j^{(0)}$ и $T_j^{(1)}$ наступления событий P_j , и определены критические и не критические работы. Пусть, кроме того, зависимость стоимости c_{ij} прямых затрат на выполнение каждой работы (P_i, P_j) от ее продолжительности t_{ij} задается формулой:

$$c_{ij} = -a_{ij} t_{ij} + b_{ij} \quad (a_{ij} \geq 0, b_{ij} > 0) \text{ (линейный вариант)}$$

или

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{t_{ij}} \quad (a_{ij} > 0) \text{ (выпуклый вариант).}$$

Как мы знаем, лишь для некритических работ существуют резервы времени. Предполагается, что по характеру некритической работы допустимо увеличение продолжительности ее выполнения за счет использования этого резерва времени, что, конечно, уменьшает ее стоимость.

Возникает задача: *при найденном критическом времени использовать резервы для некритических работ так, чтобы получить оптимальный план, т. е. план, минимизирующий стоимость всего комплекса работ.*

Для математической формулировки задачи выясним предварительно некоторые особенности оптимального плана.

В оптимальном плане продолжительность каждой работы должна достигать наибольшего возможного значения, т.е. каждая работа должна стать критической. Поэтому, считая неизвестными времена T_j наступления событий P_j ($j = 0, 1, \dots, n$), заключаем, что в оптимальном плане продолжительность t_{ij} каждой работы (P_i, P_j) должна быть равной разности $T_j - T_i$.

Так как мы рассматриваем задачу отыскания оптимального плана при *заранее найденном* критическом времени и критических путях, то времена наступления событий, лежащих на известных нам критических путях, фиксированы. Следовательно, мы имеем право также считать фиксированными и продолжительности работ (P_i, P_j) , оба конца P_i и P_j которых лежат на критических путях.

Множество событий P_j , лежащих на критических путях, обозначим через K (очевидно, $P_0 \in K, P_n \in K$), а множество работ (P_i, P_j) , у которых по крайней мере один конец не принадлежит множеству K (не лежит ни на одном критическом пути), обозначим через R .

Теперь приведенная выше задача может быть сформулирована так: *найти минимум функции*

$$z = \sum_{(P_i, P_j) \in R} \{ -a_{ij}(T_j - T_i) + b_{ij} \}$$

($a_{ij} \geq 0, b_{ij} > 0$) (линейный вариант)
или функции

$$z = \sum_{(P_i, P_j) \in R} \frac{a_{ij}}{T_j - T_i} \quad (a_{ij} > 0) \text{ (выпуклый вариант)}$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} T_j - T_i &\geq d_{ij} && \text{для всех работ } (P_i, P_j) \in R, \\ T_j &= T_j^{(0)} = T_j^{(1)} && \text{для всех событий } P_j \in K. \end{aligned} \right\}$$

d_{ij} – жесткое ограничение продолжительности работы (предполагается,

что все d_{ij} строго положительны).

Предполагается, что при заданных продолжительностях d_{ij} выполнения работ (P_i, P_j) вычислено критическое время $T_{кр}$ проекта и найдены все критические пути. Поэтому в рассматриваемой задаче оптимальный план является минимальным по стоимости лишь среди всех планов, выполняемых за время $T_{кр}$, т. е. выполняемых за минимально допустимое для этого проекта время. Очевидно, минимальная стоимость проекта снизится, если удлинить время T его выполнения, так как тогда возможно увеличение продолжительности *любой* работы. Другими словами, если время T выполнения проекта больше, чем $T_{кр}$, то оптимальный план ищется во множестве планов, более широком, чем в рассмотренной выше задаче (когда $T = T_{кр}$), и стоимость оптимального плана будет меньше, чем при $T = T_{кр}$.

3.3 Оптимизация сетевого графика с целью сокращения длины критического пути

Понятие продолжительности критического пути имеет чрезвычайно важное значение в системах СПУ.

Очевидно, что длина критического пути определяет общую продолжительность работ по объекту в целом. Следовательно, чтобы сократить сроки создания нового объекта, необходимо прежде всего принять меры, позволяющие сократить сроки выполнения работ, находящихся на критическом пути. Поэтому понятие критического пути в системах СПУ используется для оптимизации плана по конечному сроку создания нового объекта. Одной из главных задач как на стадии составления исходного плана, так и на протяжении всей стадии оперативного управления разработкой является изыскание методов сокращения продолжительности работ, попавших на критический путь, особо тщательный контроль за соблюдением установленных сроков выполнения именно этих работ и принятие оперативных мер по предотвращению их срыва.

В реальных задачах, решаемых с помощью методов сетевого моделирования, кроме ограниченности по времени, приходится сталкиваться с ограниченностью ресурсов, таких, например, как рабочая сила, оборудование и т.п. Тогда возникает задача такого распределения этих ресурсов, которое минимизировало бы время выполнения проекта.

Задача заключается в оптимальном распределении ресурсов по работам, т.е. в таком размещении работ, которое при заданных ограниченных ресурсах обеспечивало бы выполнение проекта в минимальные сроки.

Математическая формулировка этой задачи выглядит так.

Найти минимум функции

$$Z = Tn$$

при ограничениях:

$$\left. \begin{aligned} T_j - T_i - t_{ij} &\geq 0 \text{ для всех } (P_i, P_j) \\ 0 \leq d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij} &\text{ для всех } (P_i, P_j) \end{aligned} \right\}$$

$$T_0 = 0$$

(d_{ij} – ограничение продолжительности работы снизу, D_{ij} – ограничения продолжительности работы сверху).

$$\sum_{(P_i, P_j)} (-a_{ij}t_{ij} + b_{ij}) \leq C \quad \text{– линейный вариант}$$

или

$$\sum \frac{a_{ij}}{t_{ij}} \leq C \quad \text{– выпуклый вариант,}$$

где C – стоимость ресурсов.

Задача для линейного варианта – задача линейного программирования, задача для выпуклой функции – задача выпуклого программирования.

Если положить $t_{ij} = D_{ij}$ и найти соответствующую стоимость проекта C_m , то при $C < C_m$ задача, очевидно, неразрешима. Если же положить $T_n = m$ (где m – жесткое ограничение для критического времени) и найти соответствующую минимальную стоимость C_m проекта, то при $C \geq C_m$ $\bar{z} = m = T_n$ будет минимальным временем.

Линейный и выпуклый кусочно-линейный вариант этой задачи может быть решен алгоритмом Келли.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

4.1. Понятие об игровых моделях

При решении ряда практических задач (в области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, где налицо две (или более) враждующие стороны, преследующие противоположные цели, причем результат каждого мероприятия одной из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации будем называть “конфликтными ситуациями”.

Конфликтная ситуация – ситуация, в которой две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от действий партнера.

Можно привести многочисленные примеры конфликтных ситуаций из различных областей практики. Любая ситуация, возникающая в ходе

военных действий, принадлежит к конфликтным ситуациям: каждая из борющихся сторон принимает все доступные ей меры для того, чтобы воспрепятствовать противнику достигнуть успеха. К конфликтным принадлежат и ситуации, возникающие при выборе системы вооружения, способов его боевого применения и, вообще, при планировании военных операций: каждое из решений в этой области должно приниматься в расчете на наименее выгодные для нас действия противника. Ряд ситуаций в области экономики (особенно при наличии свободной конкуренции) принадлежит к конфликтным ситуациям; в роли борющихся сторон выступают торговые фирмы, промышленные предприятия и т. д.

Необходимость анализировать подобные ситуации вызвала к жизни специальный математический аппарат. Теория игр по существу представляет собой не что иное, как математическую теорию конфликтных ситуаций. Цель теории – выработка рекомендаций по рациональному образу действий каждого из противников в ходе конфликтной ситуации.

Каждая непосредственно взятая из практики конфликтная ситуация очень сложна, и анализ ее затруднен наличием многочисленных приводящих факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации, необходимо отвлечься от второстепенных, приводящих факторов и построить упрощенную, формализованную модель ситуации. Такую модель мы будем называть “игрой”.

Игра – математическая модель конфликтной ситуации.

От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным *правилам*. Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтных ситуаций, которые являются *играми* в буквальном смысле слова. Примерами могут служить шахматы, шашки, карточные игры и т.д. Все эти игры носят характер соревнования, протекающего по известным правилам и заканчивающегося “победой” (выигрышем) того или иного игрока.

Такие формально регламентированные, искусственно организованные игры представляют собой наиболее подходящий материал для иллюстрации и усвоения основных понятий теории игр. Терминология, заимствованная из практики таких игр, применяется и при анализе других конфликтных ситуаций: стороны, участвующие в них, условно именуются “игроками”, а результат столкновения – “выигрышем” одной из сторон.

Выигрыш (платеж) – исход конфликта.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более противников; в первом случае игра называется “парной”, во втором – “множественной”. Участники множественной игры могут в ее ходе образовывать коалиции – постоянные или временные. При наличии двух постоянных коалиций множественная игра обращается в парную. Наибольшее практическое значение имеют парные игры.

Будем рассматривать парную игру, в которой участвуют два игрока

А и В с противоположными интересами. Под “игрой” будем понимать мероприятие, состоящее из ряда действий сторон А и В. Чтобы игра могла быть подвергнута математическому анализу, должны быть точно сформулированы *правила игры*... Под “правилами игры” разумеется система условий, регламентирующая возможные варианты действий обеих сторон, объем информации каждой стороны о поведении другой, последовательность чередования “ходов” (отдельных решений, принятых в процессе игры), а также *результат* или *исход* игры, к которому приводит данная совокупность ходов. Этот результат (выигрыш или проигрыш) не всегда имеет количественное выражение, но обычно можно, установив некоторую шкалу измерения, выразить его определенным числом. Например, в шахматной игре выигрышу можно условно приписать значение +1, проигрышу -1, ничьей 0.

Игра с нулевой суммой – парная игра, в которой выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого.

Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если один игрок выигрывает то, что проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей обеих сторон равна нулю. В игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны.

Так как в игре с нулевой суммой выигрыш одного из игроков равен выигрышу другого с противоположным знаком, то, очевидно, при анализе такой игры можно рассматривать выигрыш только одного из игроков. Пусть это будет, например, игрок А. В дальнейшем мы для удобства стороне А будем условно именовать “мы”, а сторону В – “противник”.

При этом сторона А (“мы”) будет всегда рассматриваться как “выигрывающая”, а сторона В (“противник”) как “проигрывающая”. Это формальное условие, очевидно, не означает какого-либо реального преимущества для первого игрока; легко видеть, что оно заменяется противоположным, если знак выигрыша изменить на обратный.

Развитие игры во времени мы будем представлять состоящим из ряда последовательных этапов или “ходов”. *Ходом* в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры вариантов. Ходы делятся на *личные* и *случайные*.

“*Личным ходом*” называется сознательный выбор одним из игроков одного из возможных в данной ситуации ходов и его осуществление.

Пример личного хода – любой из ходов в шахматной игре. Выполняя очередной ход, игрок делает сознательный выбор одного из вариантов, возможных при данном расположении фигур на доске.

Набор возможных вариантов при каждом личном ходе регламентирован правилами игры и зависит от всей совокупности предшествующих ходов обеих сторон.

“*Случайным ходом*” называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, игральной кости, тасовка и сдача карт и т. д.). Например, сдача первой карты одному из игроков в

преферанс есть случайный ход с 32 равновозможными вариантами. Чтобы игра была математически определенной, правила игры должны указывать для каждого случайного хода *распределение вероятностей* возможных исходов. Некоторые игры могут состоять только из случайных ходов (так называемые чисто азартные игры) или только из личных ходов (шахматы, шашки). Большинство карточных игр принадлежит к играм смешанного типа, т. е. содержит как случайные, так и личные ходы.

Игры классифицируются не только по характеру ходов (личные, случайные), но и по характеру, и по объему информации, доступной каждому игроку относительно действий другого. Особый класс игр составляют так называемые “игры с полной информацией”. *Игрой с полной информацией* называется игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает результаты всех предыдущих ходов, как личных, так и случайных. Примерами игр с полной информацией могут служить шахматы, шашки, а также известная игра “крестики и нолики”.

Большинство игр, имеющих практическое значение, не принадлежит к классу игр с полной информацией, так как неизвестность по поводу действий противника обычно является существенным элементом конфликтных ситуаций.

Одним из основных понятий теории игр является понятие “стратегия”.

Стратегия игрока – совокупность правил, определяющих выбор его действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Понятие стратегии следует пояснить подробнее.

Обычно решение (выбор) при каждом личном ходе принимается игроком в ходе самой игры в зависимости от сложившейся конкретной ситуации. Однако теоретически дело не изменится, если мы представим себе, что все эти решения принимаются игроком *заранее*. Для этого игрок должен был бы заблаговременно составить перечень всех возможных в ходе игры ситуаций и предусмотреть свое решение для каждой из них. В принципе (если не практически) это возможно для любой игры. Если такая система решений будет принята, это будет означать, что игрок выбрал определенную *стратегию*.

Игрок, выбравший стратегию, может теперь не участвовать в игре лично, а заменить свое участие списком правил, которые за него будет применять какое-либо незаинтересованное лицо (судья). Стратегия может быть также задана машине-автомату в виде определенной программы. Именно так в настоящее время играют в шахматы электронные счетные машины.

Чтобы понятие “стратегии” имело смысл, необходимо наличие в игре личных ходов; в играх, состоящих из одних случайных ходов, стратегии отсутствуют.

Цель теории игр – определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

4.2. Платежная матрица

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на “конечные” и “бесконечные”.

Конечной называется игра, в которой у каждого игрока имеется только конечное число стратегий.

Конечная игра, в которой игрок А имеет m стратегий, а игрок В – n стратегий, называется игрой $m \times n$.

Рассмотрим игру $m \times n$ двух игроков А и В (“мы” и “противник”).

Будем обозначать наши стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$; стратегии противника – $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Пусть каждая сторона выбрала определенную стратегию; для нас это будет A_i для противника B_j .

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегий A_i, B_j однозначно определяет исход игры – наш выигрыш. Обозначим его α_{ij} .

Если игра содержит, кроме личных, случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий A_i, B_j есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае естественной оценкой ожидаемого выигрыша является его *среднее значение* (математическое ожидание). Мы будем обозначать одним и тем же знаком α_{ij} как сам выигрыш (в игре без случайных ходов), так и его среднее значение (в игре со случайными ходами).

Пусть нам известны значения α_{ij} выигрыша (или среднего выигрыша) при каждой паре стратегий. Значения α_{ij} можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют нашим стратегиям (A_i), а столбцы – стратегиям противника (B_j). Такая таблица называется *платежной матрицей* или *просто матрицей игры*.

Матрица игры (платежная матрица) – таблица, в которой заданы стратегии игроков и платежи.

Матрица игры $m \times n$ имеет вид:

A \ B	B			
	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	α_{11}	α_{12}	$\dots$	α_{1n}
A_2	α_{21}	α_{22}	$\dots$	α_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	α_{m1}	α_{m2}	$\dots$	α_{mn}

Сокращенно мы будем обозначать матрицу игры $\|\alpha_{ij}\|$.

Рассмотрим несколько элементарных примеров игр.

Пример 1. Два игрока А и В, не глядя друг на друга, кладут на стол по монете вверх гербом или вверх цифрой, по своему усмотрению. Если игроки выбрали одинаковые стороны (у обоих герб или у обоих цифра),

то игрок А забирает обе монеты; иначе их забирает игрок В. Требуется проанализировать игру и составить ее матрицу.

Решение. Игра состоит только из двух ходов: наш ход и ход противника, оба личные. Игра не принадлежит к играм с полной информацией, так как в момент хода выполняющий его игрок не знает, что сделал другой.

Так как у каждого из игроков имеется только один личный ход, то стратегия игрока представляет собой выбор при этом единственном личном ходе.

У нас две стратегии: A_1 – выбирать герб и A_2 – выбирать цифру; у противника такие же две стратегии: B_1 – герб и B_2 – цифра. Таким образом, данная игра есть игра 2×2 . Будем считать выигрыш монеты за +1. Матрица игры приведена ниже:

A \ B	B_1 (г)	B_2 (ц)
A_1 (г)	1	-1
A_2 (ц)	-1	1

На примере этой игры, как она ни элементарна, можно уяснить себе некоторые существенные идеи теории игр.

Предположим сначала, что данная игра выполняется только один раз. Тогда, очевидно, бессмысленно говорить о каких-либо “стратегиях” игроков более разумных, чем другие. Каждый из игроков с одинаковым основанием может принять любое решение. Однако при повторении игры положение меняется.

Действительно, допустим, что мы (игрок А) выбрали себе какую-то стратегию (скажем, A_1) и придерживаемся ее. Тогда уже по результатам первых нескольких ходов противник догадается о нашей стратегии и будет на нее отвечать наименее выгодным для нас образом, т. е. выбирать цифру. Нам явно невыгодно всегда применять какую-то одну стратегию; чтобы не оказаться в проигрыше, мы должны иногда выбирать герб, иногда – цифру. Однако, если мы будем чередовать гербы и цифры в какой-то определенной последовательности (например, через один), противник тоже может догадаться об этом и ответить на эту стратегию наилучшим для нас образом. Очевидно, надежным способом, гарантирующим, что противник не будет знать нашей стратегии, будет такая организация выбора при каждом ходе, когда мы его сами наперед не знаем (это можно обеспечить, например, подбрасыванием монеты). Таким образом, мы путем интуитивных рассуждений подходим к одному из существенных понятий теории игр – к понятию “смешанной стратегии”, т. е. такой, когда “чистые” стратегии – в данном случае A_1 и A_2 – чередуются случайно с определенными частотами. В данном примере из соображений симметрии заранее ясно, что стратегии A_1 и A_2 должны

чередоваться с одинаковой частотой; в более сложных играх решение может быть далеко не тривиальным.

Пример 2. Игроки А и В одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одно из трех чисел: 1, 2 или 3.

Если сумма написанных чисел четная, то В платит А эту сумму в рублях; если она нечетная, то, наоборот, А платит В эту сумму. Требуется проанализировать игру и составить ее матрицу.

Решение. Игра состоит из двух ходов; оба – личные. У нас (А) три стратегии: A_1 – писать 1; A_2 – писать 2; A_3 – писать 3. У противника (В) – те же три стратегии. Игра представляет собой игру 3×3 с матрицей, приведенной ниже:

A \ B	B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Очевидно, как и в предыдущем случае, на любую выбранную нами стратегию противник может ответить наихудшим для нас образом. Действительно, если мы выберем, например, стратегию A_1 , противник будет всегда отвечать на нее стратегией B_2 ; на стратегию A_2 – стратегией B_3 ; на стратегию A_3 – стратегией B_2 . Таким образом, любой выбор определенной стратегии неизбежно приведет нас к проигрышу.

Пример 3. В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: A_1, A_2, A_3 ; у противника – три вида самолетов: B_1, B_2, B_3 . Наша задача – поразить самолет; задача противника – сохранить его непораженным. При применении вооружения A_1 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются соответственно с вероятностями 0,9, 0,4 и 0,2; при вооружении A_2 – с вероятностями 0,3, 0,6 и 0,8; при вооружении A_3 – с вероятностями 0,5, 0,7 и 0,2. Требуется сформулировать ситуацию в терминах теории игр.

Решение. Ситуация может рассматриваться как игра 3×3 с двумя личными ходами и одним случайным. Наш личный ход – выбор типа вооружения; личный ход противника – выбор самолета для участия в бою. Случайный ход – применение вооружения; этот ход может закончиться поражением или непоражением самолета. Наш выигрыш равен единице, если самолет поражен, и равен нулю в противном случае. Нашими стратегиями являются три варианта вооружения; стратегиями противника – три варианта самолетов. Среднее значение выигрыша при каждой заданной паре стратегий есть не что иное, как вероятность поражения данного самолета данным оружием. Матрица игры приведена ниже:

A \ B	B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0,9	0,4	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8
A_3	0,5	0,7	0,2

Оптимальной стратегией игрока в теории игр называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же самое, минимально возможный средний проигрыш). При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что противник является по меньшей мере таким же разумным, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

В теории игр все рекомендации вырабатывают, исходя именно из этих принципов; следовательно, в ней не учитываются элементы риска, неизбежно присутствующие в каждой реальной стратегии, а также возможные просчеты и ошибки каждого из игроков.

Теория игр, как и всякая математическая модель сложного явления, имеет свои ограничения. Важнейшим из них является то, что выигрыш искусственно сводится к одному-единственному числу. В большинстве практических конфликтных ситуаций при выработке разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько численных параметров-критериев успешности мероприятия. Стратегия, являющаяся оптимальной по одному критерию, необязательно будет оптимальной по другим. Однако, сознавая эти ограничения и не придерживаясь слепо рекомендаций, получаемых игровыми методами, можно все же разумно использовать математический аппарат теории игр для выработки если не в точности “оптимальной”, то, во всяком случае, “приемлемой” стратегии.

4.3. Нижняя и верхняя цена игры

Рассмотрим игру $m \times n$ со следующей матрицей:

A \ B	B			
	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Будем обозначать буквой i номер нашей стратегии; буквой j – номер стратегии противника.

Поставим себе задачу: определить свою оптимальную стратегию. Проанализируем последовательно каждую из наших стратегий, начиная с A_i . Выбирая стратегию A_i , мы всегда должны рассчитывать на то, что противник ответит на нее той из стратегий B_j , для которой наш выигрыш α_{ij} минимален. Определим это значение выигрыша, т. е. минимальное из чисел α_{ij} в i -ой строке. Обозначим его α_i :

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Здесь знаком $\min$ (минимум по j) обозначено минимальное из значений данного параметра при всех возможных j .

Выпишем числа a_i рядом с матрицей справа в виде добавочного столбца:

A \ B	B ₁	B ₂	...	B _n	α_i
A ₁	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1n}	α_1
A ₂	a ₂₁	a ₂₂	...	a _{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A _m	a _{m1}	a _{m2}	...	a _{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_m	

Выбирая какую-либо стратегию A_i, мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы не выиграем больше чем α_i . Естественно, что, действуя наиболее осторожно и рассчитывая на наиболее разумного противника (т.е. избегая всякого риска), мы должны остановиться на той стратегии A_i, для которой число α_i является максимальным. Обозначим это максимальное значение α :

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

или, принимая во внимание формулу (4.1),

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}.$$

Величина, α называется *нижней ценой игры*; иначе – *максиминным выигрышем* или просто *максиминном*.

Число α лежит в определенной строчке матрицы; та стратегия игрока A, которая соответствует этой строчке, называется *максиминной стратегией*.

Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника *гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньший α* . Поэтому величина α и называется “нижней ценой игры”. **Нижняя цена игры (максимин)** – гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B. Это – тот гарантированный минимум, который мы можем себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной (“перестраховочной”) стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за противника B. Так как противник заинтересован в том, чтобы обратить наш выигрыш в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы мы выпишем максимальные значения α_{ij} по каждому столбцу:

$$\beta_j = \max_i \alpha_{ij}$$

и найдем минимальное из β_j :

$$\beta = \min_j \beta_j$$

или

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}.$$

Величина β называется *верхней ценой игры*, иначе – “минимаксом”. Соответствующая минимаксному выигрышу стратегия противника называется его “минимаксной стратегией”.

Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, противник гарантирует себе следующее: что бы мы ни предприняли против него, *он во всяком случае проиграет сумму не большую чем β* .

Верхняя цена игры (минимакс) – гарантированный проигрыш игрока В.

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), в теории игр и ее приложениях часто называют “принципом мини-макса”. Наиболее осторожные максиминную и минимаксную стратегии игроков иногда обозначают общим термином “минимаксные стратегии”.

Принцип минимакса – основной принцип теории игр, диктующий игрокам выбор наиболее “осторожных” стратегий.

Определим нижнюю и верхнюю цену игры и минимаксные стратегии для примеров 1, 2 и 3.

Пример 1. Дана игра с матрицей, приведенной ниже.

Так как величины α_i и β_j постоянны и равны соответственно - 1 и + 1, нижняя и верхняя цена игры также равны -1 и +1:

$$\alpha = -1; \beta = +1.$$

A \ B	B	B ₁	B ₂	α_i
	A ₁			-1
	A ₂			-1
	β_j	1	1	

Любая стратегия игрока А является его максиминной, а любая стратегия игрока В – его минимаксной стратегией. Вывод тривиален: придерживаясь любой из своих стратегий, игрок А может гарантировать, что он проиграет не более 1; то же может гарантировать и игрок В.

Пример 2. В примере 2 дана игра с матрицей:

A \ B	B	B ₁	B ₂	B ₃	α_i
	A ₁	2	-3	4	-3
	A ₂	-3	4	-5	-5
	A ₃	4	-5	6	-5
	β_j	4	4	6	

Нижняя цена игры $\alpha = -3$; верхняя цена игры $\beta = 4$. Наша максиминная стратегия есть A_1 ; применяя ее систематически, мы можем твердо рассчитывать выиграть не менее - 3 (проиграть не более 3). Минимаксная стратегия противника есть любая из стратегий B_1 и B_2 , применяя их систематически, он, во всяком случае, может гарантировать, что проиграет не более 4. Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем стратегию A_2), противник может нас "наказать" за это, применив стратегию B_3 и сведя наш выигрыш к - 5; равным образом и отступление противника от своей минимаксной стратегии может увеличить его проигрыш до 6.

Пример 3. В примере 3 дана игра с матрицей:

A \ B	B				α_i
	B_1	B_2	B_3		
A_1	0,9	0,4	0,2		0,2
A_2	0,3	0,6	0,8		0,3
A_3	0,5	0,7	0,2		0,2
β_j	0,9	0,7	0,8		

Нижняя цена игры $\alpha = 0,3$; верхняя цена игры $\beta = 0,7$. Наша наиболее осторожная (максиминная) стратегия есть A_2 ; пользуясь вооружением A_2 , мы гарантируем, что будем поражать самолет в среднем не менее чем в 0,3 всех случаев. Наиболее осторожной (минимаксной) стратегией противника является B_2 ; применяя этот самолет, противник может быть уверен, что он будет поражаться не более чем в 0,7 всех случаев.

На последнем примере удобно продемонстрировать одно важное свойство минимаксных стратегий – их неустойчивость. Пусть мы применяем свою наиболее осторожную (максиминную) стратегию A_2 , а противник – свою наиболее осторожную (минимаксную) стратегию B_2 . До тех пор пока оба противника придерживаются этих стратегий, средний выигрыш равен 0,6; он больше нижней, но меньше верхней цены игры. Теперь допустим, что противнику стало известно, что мы применяем стратегию A_2 , он немедленно ответит на нее стратегией B_1 и сведет выигрыш к 0,3. В свою очередь, на стратегию B_1 у нас есть хороший ответ: стратегия A_1 , дающая нам выигрыш 0,9 и т. д.

Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Однако существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$$\alpha = \beta.$$

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение

называется *чистой ценой игры* (иногда просто *ценой игры*); мы его будем обозначать буквой v .

Цена игры – средний выигрыш стороны А (проигрыш стороны В) при многократном повторении игры. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению.

Пример 4. Пусть игра 4×4 задана матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A_3	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β_j	0,8	0,6	0,8	0,9	

Найдем нижнюю цену игры:

$$\alpha = 0,6.$$

Найдем верхнюю цену игры:

$$\beta = 0,6.$$

Они оказались одинаковыми, следовательно, у игры есть чистая цена, равная $\alpha = \beta = v = 0,6$.

Элемент 0,6, выделенный в платежной матрице, является одновременно *минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце*. В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют *седловой точкой*; по аналогии этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется *седловой точкой матрицы*, а про игру говорят, что она *имеет седловую точку*.

Седловая точка – платеж, который одновременно является наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Пара чистых стратегий, которым соответствует седловая точка, дают оптимальное решение игры.

Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий (в данном примере A_3 и B_2). Эти стратегии называются *оптимальными*, а их совокупность – *решением игры*.

Решение игры обладает следующим замечательным свойством. Если один из игроков (например, А) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (В) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то *для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным*; такое отклонение игрока В может в лучшем случае оставить выигрыш неизменным, а в худшем случае – увеличить его.

Наоборот, если В придерживается своей оптимальной стратегии, а А отклоняется от своей, то это ни в коем случае не может быть выгодным для А.

Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.

Мы видим, что в случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной “устойчивостью”: если одна сторона придерживается своей минимаксной стратегии, то для другой может быть только невыгодным отклоняться от своей. Заметим, что в этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы “положением равновесия”: любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.

Итак, для каждой игры с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих сторон, отличающуюся следующими свойствами.

1. Если обе стороны придерживаются своих оптимальных стратегий, то средний выигрыш равен чистой цене игры p , одновременно являющейся ее нижней и верхней ценой.

2. Если одна из сторон придерживается своей оптимальной стратегии, а другая отклоняется от своей, то от этого отклоняющаяся сторона может только потерять и ни в коем случае не может увеличить свой выигрыш.

Класс игр, имеющих седловую точку, представляет большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

В теории игр доказывается, что, в частности, каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, и, следовательно, каждая такая игра имеет решение, т. е. существует пара оптимальных стратегий той и другой стороны, дающая средний выигрыш, равный цене игры. Если игра с полной информацией состоит только из личных ходов, то при применении каждой стороной своей оптимальной стратегии она должна всегда кончаться вполне определенным исходом, а именно, выигрышем, в точности равным цене игры.

В качестве примера игры с полной информацией приведем известную игру с укладыванием монет на круглый стол. Два игрока поочередно кладут одинаковые монеты на круглый стол, выбирая каждый раз произвольное положение центра монеты; взаимное накрывание монет не допускается. Выигрывает тот из игроков, кто положит последнюю монету (когда места для других уже не останется). Очевидно, что исход этой игры всегда предрешен, и существует вполне определенная стратегия, обеспечивающая достоверный выигрыш тому из игроков, который кладет монету первым. А именно, он должен первый раз положить монету в центр стола, а далее на каждый ход противника отвечать симметричным ходом. При этом второй игрок может вести себя

как угодно, не изменяя predetermined результата игры. Поэтому данная игра имеет смысл только для игроков, не знающих оптимальной стратегии. Аналогично дело обстоит с шахматами и другими играми с полной информацией; любая из таких игр обладает седловой точкой и решением, указывающим каждому из игроков его оптимальную стратегию; решение шахматной игры не найдено только потому, что число комбинаций возможных ходов в шахматах слишком велико, чтобы можно было построить платежную матрицу и найти в ней седловую точку.

4.4. Решение игры в смешанных стратегиях

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цена игры различны. Если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α . Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α , если применять не одну-единственную “чистую” стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются *смешанными стратегиями*.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами, а данная – с частотой 1.

Оказывается, что применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, т. е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.

Высказанное утверждение составляет содержание так называемой *основной теоремы теории игр*. Эта теорема была впервые доказана фон Нейманом в 1928 г. Приведем ее формулировку.

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение (возможно, в области смешанных стратегий).

Выигрыш, получаемый в результате решения, называется ценой игры. Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену. Очевидно, что цена игры v всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β :

$$\alpha \leq v \leq \beta.$$

Действительно, α есть максимальный гарантированный выигрыш, который мы можем себе обеспечить, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии включают в себя в качестве частного случая и все чистые, то, допуская, кроме чистых, еще и смешанные стратегии, мы, во всяком случае, не ухудшаем своих возможностей; следовательно,

$$v \geq \alpha.$$

Аналогично, рассматривая возможности противника, покажем, что

$$v \leq \beta,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Если, например, наша смешанная стратегия состоит в применении стратегий A_1, A_2, A_3 с частотами p_1, p_2, p_3 , причем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, будем обозначать эту стратегию:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично смешанную стратегию противника будем обозначать:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

где q_1, q_2, q_3 – частоты, в которых смешиваются стратегии B_1, B_2, B_3 ; $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Предположим, что нами найдено решение игры, состоящее из двух оптимальных смешанных стратегий S_A^*, S_B^* . В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Будем называть стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока, его “полезными” стратегиями.

Оказывается, что решение игры обладает еще одним замечательным свойством: *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии S_A^* (S_B^*), то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v , независимо от того, что делает другой игрок, если он только не выходит за пределы своих “полезных” стратегий.* Он, например, может пользоваться любой из своих “полезных” стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

4.5. Методы решения простейших игровых задач

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то нахождение решения есть вообще довольно трудная задача, особенно при больших m и n .

Иногда эту задачу удастся упростить, если предварительно уменьшить число стратегий путем вычеркивания некоторых излишних.

Излишние стратегии бывают: а) дублирующие и б) заведомо невыгодные. Рассмотрим, например, игру с матрицей:

A \ B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	1	2	4	3
A ₂	0	2	3	2
A ₃	1	2	4	3
A ₄	4	3	1	0

Нетрудно убедиться, что стратегия A_3 в точности повторяет (“дублирует”) стратегию A_1 , поэтому любую из этих двух стратегий можно вычеркнуть.

Далее, сравнивая почленно строки A_1 и A_2 , видим, что каждый элемент строки A_2 меньше (или равен) соответствующего элемента строки A_1 . Очевидно, что мы никогда не должны пользоваться стратегией A_2 ; она является заведомо невыгодной. Вычеркивая A_3 и A_2 , приводим матрицу к более простому виду:

A \ B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	1	2	4	3
A ₄	4	3	1	0

Далее замечаем, что для противника стратегия B_3 заведомо невыгодна; вычеркивая ее, приводим матрицу к окончательному виду. Таким образом, игра 4×4 вычеркиванием дублирующих и заведомо невыгодных стратегий сведена к игре 2×3:

A \ B	B ₁	B ₂	B ₄
A ₁	1	2	3
A ₄	4	3	0

Процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий всегда должна предшествовать решению игры.

Наиболее простыми случаями конечных игр, которые всегда можно решить элементарными способами, являются игры 2×2 и 2×m.

Рассмотрим игру 2×2 с матрицей:

A \ B	B ₁	B ₂
A ₁	a_{11}	a_{12}
A ₂	a_{21}	a_{22}

Здесь могут встретиться два случая:

1) игра имеет седловую точку; 2) игра не имеет седловой точки. В первом случае решение очевидно: это пара стратегий, пересекающихся в седловой точке. Заметим кстати, что в игре 2×2 наличие седловой точки всегда соответствует существованию заведомо невыгодных стратегий, которые должны быть вычеркнуты при предварительном анализе.

Пусть седловой точки нет и, следовательно, нижняя цена игры не равна верхней: $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальную смешанную стратегию игрока A:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Она отличается тем свойством, что, каковы бы ни были действия противника (если только он не выходит за пределы своих “полезных” стратегий), выигрыш будет равен цене игры v . В игре 2×2 обе стратегии противника являются “полезными”, иначе игра имела бы решение в области чистых стратегий (седловую точку). Значит, если мы

придерживаемся своей оптимальной стратегии $S^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, то противник может пользоваться любой из своих чистых стратегий B_1, B_2 , не изменяя среднего выигрыша v . Отсюда имеем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} p_1 + \alpha_{21} p_2 &= v \\ \alpha_{12} p_1 + \alpha_{22} p_2 &= v \end{aligned} \right\},$$

из которых, принимая во внимание, что $p_1 + p_2 = 1$, получим:

$$a_{11} p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12} p_1 + a_{22}(1 - p_1),$$

$$p_1 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}}.$$

Цену игры v найдем, подставляя значения p_1, p_2 в любое из уравнений системы.

Если цена игры известна, то для определения оптимальной стратегии противника $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ достаточно одного уравнения, например:

$$a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = v,$$

откуда, учитывая, что $q_1 + q_2 = 1$, имеем:

$$q_1 = \frac{v - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \alpha_{12}}, q_2 = 1 - q_1.$$

Поясним это на примере.

Пример 1. Найдем решение игры 2×2, рассмотренной в примере с матрицей:

A \ B	B ₁	B ₂
	A ₁	A ₂
A ₁	1	-1
A ₂	-1	1

Игра не имеет седловой точки ($a = -1$; $b = +1$), и, следовательно, решение должно лежать в области смешанных стратегий:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}; S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Нужно найти p_1 , p_2 , q_1 и q_2 .

Для p_1 имеем уравнение:

$$1 \cdot p_1 + (-1) \cdot (1 - p_1) = (-1) \cdot p_1 + 1 \cdot (1 - p_1),$$

откуда:

$$p_1 = \frac{1}{2}; p_2 = \frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем:

$$q_1 = \frac{1}{2}; q_2 = \frac{1}{2}; n = 0.$$

Следовательно, оптимальная стратегия для каждого из игроков состоит в том, чтобы случайным образом чередовать обе свои чистые стратегии, пользуясь одинаково часто каждой из них; при этом средний выигрыш будет равен нулю.

Полученный вывод был ясен заранее. В следующем примере мы рассмотрим более сложную игру, решение которой не является столь очевидным. Пример представляет собой элементарный образец игр, известных под названием игр с “обманом” или “введением в заблуждение”. На практике в конфликтных ситуациях часто применяются разные способы введения противника в заблуждение (дезинформация, расстановка ложных целей и т.д.). Пример, несмотря на свою простоту, довольно поучителен.

Пример 2. Игра состоит в следующем. Имеются две карты: туз и двойка. Игрок А наугад вынимает одну из них; В не видит, какую карту он вынул. Если А вынул туза, он заявляет: “у меня туз”, и требует у противника

1 рубль. Если А вынул двойку, то он может либо (A_1) сказать “у меня туз” и потребовать у противника 1 рубль, либо (A_2) признать, что у него двойка, и уплатить противнику 1 рубль.

Противник, если ему добровольно платят 1 рубль, может только принять его. Если же у него потребуют 1 рубль, то он может либо (B_1) поверить игроку А, что у него туз, и отдать ему 1 рубль, либо (B_2) потребовать проверки с тем, чтобы убедиться, верно ли утверждение А. Если в результате проверки окажется, что у А действительно туз, В должен уплатить А 2 рубля. Если же окажется, что А обманывает и у него двойка, игрок А уплачивает игроку В 2 рубля.

Требуется проанализировать игру и найти оптимальную стратегию каждого из игроков.

Решение. Игра имеет сравнительно сложную структуру; она состоит из одного обязательного случайного хода – выбора игроком А одной из двух карт – и двух личных ходов, которые, однако, необязательно осуществляются. Действительно, если А вынул туза, то он не делает никакого личного хода: ему предоставлена только одна возможность – потребовать 1 рубль, что он и делает. В этом случае личный ход – верить или не верить (т. е. платить или не платить 1 рубль.) – передается игроку В. Если А в результате первого случайного хода получил двойку, то ему предоставляется личный ход: уплатить 1 рубль или попытаться обмануть противника и потребовать 1 рубль (короче: “не обманывать” или “обманывать”). Если А выбирает первое, то В остается только принять 1 рубль; если А выбрал второе, то игроку В предоставляется личный ход: верить или не верить А (т. е. уплатить А 1 рубль или требовать проверки).

Стратегии каждого из игроков представляют собой правила, указывающие, как поступить игроку, когда ему предоставляется личный ход.

Очевидно, у А только две стратегии:

A_1 – обманывать, A_2 – не обманывать.

У В – тоже две стратегии:

B_1 – верить, B_2 – не верить.

Построим матрицу игры. Для этого вычислим средний выигрыш при каждой комбинации стратегий.

1. $A_1 B_1$ (А обманывает, В верит).

Если А получил туза (вероятность этого $\frac{1}{2}$), то ему не предоставляется личного хода; он требует 1 рубль, и игрок В верит ему; выигрыш А в рублях равен 1.

Если А получил двойку (вероятность этого тоже $\frac{1}{2}$), он согласно своей стратегии обманывает и требует 1 рубль; В ему верит и уплачивает;

выигрыш А также равен 1. Средний выигрыш:

$$a_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

2. **A₁ B₂** (А обманывает, В не верит).

Если А получил туза, у него нет личного хода; он требует 1 рубль; В согласно своей стратегии не верит и в результате проверки уплачивает 2 рубля (выигрыш А равен +2).

Если А получил двойку, он согласно своей стратегии требует 1 рубль; В согласно своей стратегии не верит; в результате А уплачивает 2 рубля (выигрыш А равен -2). Средний выигрыш равен:

$$a_{12} = \frac{1}{2} \cdot (+2) + \frac{1}{2} \cdot (-2) = 0.$$

3. **A₂ B₁** (А не обманывает, В верит).

Если А вынул туза, он требует 1 рубль; В согласно своей стратегии уплачивает; выигрыш А равен +1. Если А вынул двойку, он согласно своей стратегии платит 1 рубль; В остается только принять (выигрыш А равен -1). Средний выигрыш равен:

$$a_{21} = \frac{1}{2} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0.$$

4. **A₂ B₂** (А не обманывает, В не верит).

Если А вынул туза, он требует 1 рубль; В проверяет и в результате проверки уплачивает 2 рубля (выигрыш равен +2).

Если А вынул двойку, он уплачивает 1 рубль; В остается только принять (выигрыш равен -1).

Средний выигрыш равен:

$$a_{22} = \frac{1}{2} \cdot (+2) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}.$$

Строим матрицу игры (см. ниже). Матрица не имеет седловой точки.

Нижняя цена игры $\alpha = 0$, верхняя цена игры $\beta = \frac{1}{2}$. Найдем решение игры в области смешанных стратегий.

A \ B	B ₁ (верить)	B ₂ (не верить)
	A ₁ (о.а.м.)	A ₂ (не о.а.м.)
A ₁ (о.а.м.)	1	0
A ₂ (не о.а.м.)	0	$\frac{1}{2}$

Применяя формулу для p_1 , получим:

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}; p_2 = \frac{2}{3}, S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

т. е. игрок А должен в одной трети всех случаев пользоваться своей первой стратегией (обманывать), а в двух третях – второй (не обманывать). При этом он будет выигрывать в среднем цену игры

$$v = \frac{1}{3}.$$

Значение $v = \frac{1}{3}$ свидетельствует о том, что в данных условиях игра выгодна для А и невыгодна для В. Пользуясь своей оптимальной стратегией, А всегда может себе обеспечить положительный средний выигрыш.

Заметим, что, если бы А пользовался своей наиболее осторожной (максиминной) стратегией (в данном случае обе стратегии A_1 и A_2 являются максиминными), он имел бы средний выигрыш, равный нулю. Таким образом, применение смешанной стратегии дает А возможность реализовать свое преимущество над В, возникающее при данных правилах игры.

Определим оптимальную стратегию В. Имеем:

$$q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot 0 = \frac{1}{3}; q_1 = \frac{1}{3}; q_2 = \frac{2}{3}.$$

4.6. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Дадим общую постановку задачи о нахождении решения игры $m \times n$. Пусть дана игра $m \times n$ с m стратегиями $A_1, A_2, \dots, A_m$ игрока А и n стратегиями $B_1, B_2, \dots, B_n$ игрока В и задана платежная матрица $\|a_{ij}\|$.

Требуется найти решение игры, т. е. две оптимальные смешанные стратегии игроков А и В:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}; S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

где $p_1 + \dots + p_m = 1$; $q_1 + \dots + q_n = 1$ (некоторые из чисел p_i и q_j могут быть равными нулю).

Наша оптимальная стратегия S_A^* должна обеспечивать нам выигрыш, не меньший v , при любом поведении противника, и выигрыш,

Таким образом, задача нахождения решения игры сводится к следующей математической задаче: *определить неотрицательные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, удовлетворяющие условиям (2) так, чтобы, их сумма*

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m$$

была минимальной.

Обычно при решении задач, связанных с нахождением экстремальных значений (максимумов и минимумов), функцию дифференцируют и приравнивают производные нулю. Но такой прием в данном случае бесполезен, так как функция Φ , которую нужно обратить в минимум, линейна, и ее производные по всем аргументам равны единице, т.е. нигде не обращаются в нуль. Следовательно, максимум функции достигается где-то на границе области изменения аргументов, которая определяется требованием неотрицательности аргументов и условиями (2). Прием нахождения экстремальных значений при помощи дифференцирования непригоден и в тех случаях, когда для решения игры определяется максимум нижней (или минимум верхней) границы выигрыша, как мы, например, делали при решении игр $2 \times n$. Действительно, нижняя граница составлена из участков прямых линий, и максимум достигается не в точке, где производная равна нулю (такой точки вообще нет), а на границе интервала или в точке пересечения прямолинейных участков.

Для решения подобных задач, довольно часто встречающихся на практике, в математике разработан специальный аппарат *линейного программирования*.

Задача линейного программирования ставится следующим образом.

Дана система линейных уравнений:

[illegible]

Требуется найти неотрицательные значения величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, удовлетворяющие условиям (4) и вместе с тем обращающие в минимум заданную однородную линейную функцию величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ (линейную форму):

$$\Phi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_m \xi_m.$$

Легко убедиться, что поставленная выше задача теории игр является частным случаем задачи линейного программирования при

С первого взгляда может показаться, что условия (2) не эквивалентны условиям (4), так как вместо знаков равенства они содержат знаки неравенства. Однако от знаков неравенства легко избавиться, вводя новые фиктивные неотрицательные переменные $z_1, z_2, \dots, z_n$ и записывая условия (2) в виде:

[illegible]

Линейная форма Φ , которую нужно обратить в минимум, равна

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m.$$

Аппарат линейного программирования позволяет путем сравнительно небольшого числа последовательных проб подобрать величины $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m$, удовлетворяющие поставленным требованиям. Для большей ясности рассмотрим применение этого аппарата прямо на материале решения конкретных игр.

Пример 1. Требуется найти решение игры 3×3 , с матрицей:

A \ B	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	2	-3	4
A ₂	-3	4	-5
A ₃	4	-5	6

Чтобы сделать все a_{ij} неотрицательными, прибавим ко всем элементам матрицы $L = 5$. Получим матрицу:

B \ A	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	7	2	9
A ₂	2	9	0
A ₃	9	0	11

При этом цена игры увеличится на 5, а решение не изменится.

Определим оптимальную стратегию S_A^* . Условия (2) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 7\xi_1 + 2\xi_2 + 9\xi_3 &\geq 1, \\ 2\xi_1 + 9\xi_2 &\geq 1, \\ 9\xi_1 + 11\xi_3 &\geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $\xi_1 = \frac{p_1}{v}$; $\xi_2 = \frac{p_2}{v}$; $\xi_3 = \frac{p_3}{v}$.

Чтобы избавиться от знаков неравенства, введем фиктивные переменные z_1, z_2, z_3 ; условия (6) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} 7\xi_1 + 2\xi_2 + 9\xi_3 - z_1 &= 1, \\ 2\xi_1 + 9\xi_2 - z_2 &= 1, \\ 9\xi_1 + 11\xi_3 - z_3 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Линейная форма Φ имеет вид:

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

и должна быть сделана как можно меньше.

Если все три стратегии В являются “полезными”, то все три фиктивные переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3 обратятся в нуль (т.е. выигрыш, равный цене игры v , будет достигаться при каждой стратегии B_j). Но мы пока не имеем оснований утверждать, что все три стратегии являются “полезными”. Чтобы проверить это, попытаемся выразить форму Φ через фиктивные переменные z_1, z_2, z_3 и посмотрим, добьемся ли мы, полагая их равными нулю, минимума формы. Для этого разрешим уравнения (7) относительно переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 (т. е. выразим ξ_1, ξ_2, ξ_3 через фиктивные переменные z_1, z_2, z_3):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{20} - \frac{99}{80} z_1 + \frac{11}{40} z_2 + \frac{81}{80} z_3, \\ \xi_2 &= \frac{1}{10} - \frac{11}{40} z_1 + \frac{1}{20} z_2 - \frac{9}{40} z_3, \\ \xi_3 &= \frac{1}{20} - \frac{81}{80} z_1 - \frac{9}{40} z_2 - \frac{59}{80} z_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Складывая x_1, x_2 и x_3 , получим:

$$\Phi = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} z_1 + \frac{1}{10} z_2 + \frac{1}{20} z_3. \quad (9)$$

В выражении (9) коэффициенты при всех z положительны; значит, любое увеличение z_1, z_2, z_3 сверх нуля может привести только к увеличению формы Φ , а мы хотим, чтобы она была минимальна. Следовательно, значениями z_1, z_2, z_3 , обращающими форму (9) в минимум, являются:

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Подставляя их в формулу (9), находим минимальное значение формы Φ :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{5},$$

откуда цена игры:

$$v = 5.$$

Подставляя нулевые значения z_1, z_2, z_3 в формулы (8), находим:

$$\xi_1 = \frac{1}{20}; \xi_2 = \frac{1}{10}; \xi_3 = \frac{1}{20},$$

или, умножая их на v ,

$$p_1 = \frac{1}{4}; p_2 = \frac{1}{2}; p_3 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, оптимальная стратегия А найдена:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

т. е. мы должны в одной четверти всех случаев писать цифру 1, в половине случаев 2 и в остальной четверти случаев 3.

Зная цену игры $v = 5$, можно уже известными способами найти оптимальную стратегию противника:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Для этого воспользуемся нашими любимыми двумя “полезными” стратегиями (например, A_2 и A_3) и напишем уравнения:

$$\begin{aligned} 2q_1 + 9q_2 &= 5; \\ 9q_1 + 11(1 - q_2 - q_1) &= 5, \end{aligned}$$

откуда $q_1 = q_3 = \frac{1}{4}; q_2 = \frac{1}{2}$. Оптимальная стратегия противника будет такой же, как наша:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Теперь вернемся к первоначальной (не преобразованной) игре.

Для этого нужно только от цены игры $v = 5$ отнять величину $L = 5$, прибавленную к элементам матрицы. Получим цену исходной игры: $v_0 = 0$. Следовательно, оптимальные стратегии обеих сторон обеспечивают средний выигрыш, равный нулю; игра в одинаковой мере выгодна или невыгодна для обеих сторон.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИТУАЦИЙ В ТЕРМИНАХ “ИГРЫ С ПРИРОДОЙ”

5.1. Особенности решения игровых задач в терминах “игры с природой”

В предыдущей главе рассматривались игровые модели, в которых в качестве оппонента выступал противник, принимающий решения и выбирающий стратегии по определенным правилам. В экономической практике нередко приходится принимать решения, выбирать стратегии не имея информации о возможном сопернике в условиях неопределенности и риска. Для описания таких ситуаций разрабатывается математический аппарат игр с “природой”. **“Природа” в теории игр** – объективная действительность, некая незаинтересованная сторона, “поведение” которой неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам.

Формально изучение игр с “природой”, так же как и стратегических, должно начинаться с построения платежной матрицы, что является, по существу, наиболее трудоемким этапом подготовки принятия решения. Ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и приведут к неверному итоговому результату.

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные “ходы” партнер по игре. Поэтому термин “природа” характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых “игроком” 2 действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

На примере игры с природой рассмотрим проблему заготовки угля на зиму.

Необходимо закупить уголь для обогрева дома. Количество хранимого угля ограничено, и в течение холодного периода должно быть полностью израсходовано. Предполагается, что неизрасходованный зимой уголь летом пропадает. Покупать уголь можно

в любое время, однако летом он дешевле, чем зимой. Неопределенность состоит в том, что неизвестно, какой будет зима: суровой, тогда придется докупать уголь, или мягкой, тогда часть угля может остаться неиспользованной. Очевидно, что у природы нет злого умысла и она ничего против человека “не имеет”. С другой стороны, долгосрочные прогнозы, составляемые метеорологическими службами, неточны и поэтому могут использоваться в практической деятельности только как ориентировочные при принятии решений.

Решение. Матрица игры с природой аналогична матрице стратегической игры: $A = \|\alpha_{ij}\|$, где α_{ij} – выигрыш игрока 1 при реализации его чистой стратегии i и чистой стратегии j игрока 2 ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$).

На первый взгляд отсутствие обдуманного противодействия упрощает игроку задачу выбора решения. Однако, хотя лицу, принимающему решение (ЛПР) никто не мешает, ему труднее обосновать свой выбор, поскольку в этом случае гарантированный результат не известен.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности, точнее от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т.е. имеет ли место ситуация риска или неопределенности. Ниже будут описаны методы, применяемые в обоих случаях.

5.2. Понятие риска

Рассмотрим организацию и аналитическое представление игры с природой. Пусть игрок 1 имеет m возможных стратегий: $A_1, A_2, \dots, A_m$, а у природы имеется n возможных состояний (стратегий): $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, тогда условия игры с природой задаются матрицей A выигрышей игрока 1:

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|cccc} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ \hline A_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ A_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right).$$

Платит, естественно, не природа, а некая третья сторона (или совокупность сторон, влияющих на принятие решений игроком 1 и объединенных в понятие “природа”).

Возможен и другой способ задания матрицы игры с природой: не в виде матрицы выигрышей, а в виде так называемой матрицы рисков

$R = \|r_{ij}\|_{m,n}$ или матрицы упущенных возможностей. Величина риска – это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды. Матрица R может быть построена непосредственно из условий задачи или на основе матрицы выигрышей A .

Риск игрока – разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал состояние “природы”, и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя ту или иную стратегию. **Матрица рисков** – таблица, в которой заданы стратегии игрока, состояния “природы” и риски при всех возможных сочетаниях стратегий и состояний “природы”.

5.3. Формирование матрицы игры

Зная состояние природы (стратегию) Π_j , игрок выбирает ту стратегию, при которой его выигрыш максимальный, т.е. $r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij}$, где $\beta_j = \max \alpha_{ij}$ при заданном j . Например, для матрицы выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ A_1 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ A_2 & 3 & 8 & 4 & 3 \\ A_3 & 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\beta_1 = 4, \beta_2 = 8, \beta_3 = 6, \beta_4 = 9.$$

Согласно введенным определениям r_{ij} и β_j получаем матрицу рисков:

$$R = \begin{pmatrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ A_1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ A_2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ A_3 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Независимо от вида матрицы игры требуется выбрать такую стратегию игрока (чистую или смешанную, если последняя имеет смысл), которая была бы наиболее выгодной по сравнению с другими. Необходимо отметить, что в игре с природой понятие смешанной стратегии игрока не всегда правомерно, поскольку его действия могут быть альтернативными, т.е. выбор одной из стратегий отвергает все другие стратегии (например, выбор альтернативных проектов).

5.4. Основные критерии выбора лучшей стратегии

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состояний среды (природы), называют “безнадежной” или “дурной”.

В таких случаях для определения наилучших решений используются следующие критерии: максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Применение каждого из перечисленных критериев проиллюстрируем на примере матрицы выигрышей (1) или связанной с ней матрицы рисков (2).

Критерий максимакса. С его помощью определяется стратегия, максимизирующая максимальные выигрыши для каждого состояния природы. Это критерий крайнего оптимизма. Наилучшим признается решение, при котором достигается максимальный выигрыш, равный

$$M = \max \max \alpha_{ij}.$$

Нетрудно увидеть, что для матрицы А наилучшим решением будет A_1 , при котором достигается максимальный выигрыш – 9.

Следует отметить, что ситуации, требующие применения такого критерия, в экономике в общем нередки, и пользуются им не только безоглядные оптимисты, но и игроки, поставленные в безвыходное положение, когда они вынуждены руководствоваться принципом “или пан, или пропад”.

Максиминный критерий Вальда. С позиций данного критерия природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий противник типа тех, которые противодействуют в стратегических играх. Выбирается решение, для которого достигается значение $W = \max \min \alpha_{ij}$.

Для платежной матрицы А (1) нетрудно рассчитать:

- для первой стратегии ($i = 1$) $\min \alpha_{ij} = 1$;
- для второй стратегии ($i = 2$) $\min \alpha_{ij} = 3$;
- для третьей стратегии ($j = 3$) $\min \alpha_{ij} = 2$.

Тогда $W = \max \min \alpha_{ij} = 3$, что соответствует второй стратегии A_2 игрока 1.

В соответствии с критерием Вальда, из всех самых неудачных результатов выбирается лучший ($W = 3$).

Максиминный критерий Вальда – оптимальная стратегия игрока, при которой минимальный выигрыш максимален, т.е. стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыш, не меньший, чем нижняя цена игры.

Это перестраховочная позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай. Такая стратегия приемлема, например, когда игрок не столь заинтересован в крупной удаче, но хочет себя застраховать от неожиданных проигрышей. Выбор такой стратегии определяется отношением игрока к риску.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Выбор стратегии аналогичен выбору стратегии по принципу Вальда с тем отличием, что игрок руководствуется не матрицей выигрышей А (1), а матрицей рисков R (2):

$$S = \min \max r_{ij}.$$

Для матрицы R (2) нетрудно рассчитать:

- для первой стратегии ($i = 1$) $\max g_{ij} = 4$;
- для второй стратегии ($i = 2$) $\max g_{ij} = 6$;
- для третьей стратегии ($i = 3$) $\max g_{ij} = 7$.

Минимально возможный из самых крупных рисков, равный 4, достигается при использовании первой стратегии A_1 .

Критерий минимаксного риска Сэвиджа – рекомендация выбора той стратегии, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации.

Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица. Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица – рекомендация при выборе решения в условиях неопределенности не руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом. Крайние оценки учитываются с коэффициентом, выбираемым между нулем и единицей.

Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Согласно этому критерию стратегия в матрице A выбирается в соответствии со значением:

$$H_A = \max \{ p \min \alpha_{ij} + (1 - p) \max \alpha_{ij} \},$$

где p – коэффициент пессимизма ($0 \leq p \leq 1$).

При $p = 0$ критерий Гурвица совпадает с максимаксным критерием, а при $p = 1$ – с критерием Вальда. Покажем процедуру применения данного критерия для матрицы A (1) при $p = 0,5$:

- для первой стратегии
($i = 1$) $0,5 (\min \alpha_{ij} + \max \alpha_{ij}) = 0,5(1 + 9) = 5$;
- для второй стратегии
($i = 2$) $0,5 (\min \alpha_{ij} + \max \alpha_{ij}) = 0,5(3 + 8) = 5,5$;
- для третьей стратегии
($i = 3$) $0,5 (\min \alpha_{ij} + \max \alpha_{ij}) = 0,5(2 + 6) = 4$.

Тогда $H_A = \max \{ 0,5 (\min \alpha_{ij} + \max \alpha_{ij}) \} = 5,5$, т. е. оптимальной является вторая стратегия A_2 .

Применительно к матрице рисков R критерий пессимизма-оптимизма Гурвица имеет вид:

$$H_A = \min \{ p \max r_{ij} + (1 - p) \min r_{ij} \}.$$

При $p = 0$ выбор стратегии игрока 1 осуществляется по условию наименьшего из всех возможных рисков ($\min r_{ij}$); при $p = 1$ – по критерию минимаксного риска Сэвиджа.

В случае, когда по принятому критерию рекомендуется к использованию несколько стратегий, выбор между ними может делаться по дополнительному критерию, например в расчет могут приниматься средние квадратичные отклонения от средних выигрышей при каждой стратегии. Еще раз подчеркнем, что здесь стандартного подхода нет. Выбор может зависеть от склонности к риску ЛПР.

В заключение приведем результаты применения рассмотренных выше критериев на примере следующей матрицы выигрышей:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ \hline A_1 & 20 & 30 & 15 & 15 \\ A_2 & 75 & 20 & 35 & 20 \\ A_3 & 25 & 80 & 25 & 25 \\ A_4 & 85 & 5 & 45 & 5 \end{array} \right).$$

Для игрока 1 лучшими являются стратегии:

- по критерию Вальда – A_3 ,
- по критерию Сэвиджа – A_2 и A_3 ,
- по критерию Гурвица (при $p = 0,6$) – A_3 ,
- по критерию максимакса – A_4 .

Поскольку стратегия A_3 фигурирует в качестве оптимальной по трем критериям выбора из четырех испытанных, степень ее надежности можно признать достаточно высокой для того, чтобы рекомендовать эту стратегию к практическому применению.

Таким образом, в случае отсутствия информации о вероятностях состояний среды теория не дает однозначных и математически строгих рекомендаций по выбору критериев принятия решений. Это объясняется в большей мере не слабостью теории, а неопределенностью самой ситуации. Единственный разумный выход в подобных случаях – попытаться получить дополнительную информацию, например, путем проведения исследований или экспериментов. При отсутствии дополнительной информации принимаемые решения теоретически недостаточно обоснованы и в значительной мере субъективны. Хотя применение математических методов в играх с природой не дает абсолютно достоверного результата и последний в определенной степени является субъективным (вследствие произвольности выбора критерия принятия решения), оно тем не менее создает некоторое упорядочение имеющихся в распоряжении ЛПР данных: задается множество состояний природы, альтернативные решения, выигрыши и потери при различных сочетаниях состояния “среда – решение”. Такое упорядочение представлений о проблеме само по себе способствует повышению качества принимаемых решений.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

2. Составьте матрицу промежуточного потребления межотраслевого баланса для системы из четырех отраслей, если известно, что продукция первой отрасли используется для:

- производства продукции во второй отрасли в количестве – 20 и для производства продукции в четвертой отрасли – 35;
- продукция второй отрасли используется в первой отрасли – 40, в самой второй отрасли – 10, в третьей отрасли – 15;
- продукция третьей отрасли используется во второй отрасли – 12 и в четвертой отрасли – 25;
- продукция четвертой отрасли используется для производственных целей только в третьей отрасли – 52.

3. Впишите недостающие элементы в матрицу межотраслевого баланса:

Отрасли	1	2	3	Итого	Конечная продукция	Валовая продукция
1	0	35	0	35	35	70
2	10	0	45		5	
3	25	0	0	25		50
Итого	35				65	
Чистая продукция	35		5			
Всего		60	50			

4. Постройте сетевой график проекта по следующим данным:

Работа	Каким работам предшествует
1	3
2	4
3	4
4	5
5	-

5. Рассчитайте планируемую продолжительность работы t_{ij} , если оптимистическая оценка длительности работы составляет 3 часа, а пессимистическая оценка – 5 часов.

6. Установите соответствие между понятиями и их определениями.

Понятия	Определения
1. Работа	1) момент, завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта
2. Ожидание	2) один из главных элементов сетевой модели, означающий протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов, или ожидание, или зависимость (фиктивная работа)
3. Зависимость	3) протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда
4. Путь	4) логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени
5. Событие	5) любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим
6. Полный путь	6) любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы
7. Предшествующий путь	7) наиболее продолжительный путь в сетевом графике
8. Следующий путь	8) путь от начального события до данного события сети
9. Критический путь	9) путь, соединяющий данное событие с завершающим событием сети

8. Установите соответствие между названием зоны и значением коэффициента напряженности.

Название зоны	Значение коэффициента напряженности
1) критическая	1) не более 0,6
2) подкритическая	2) от 0,6 до 0,8
3) резервная	3) более 0,8

9. Постройте платежную матрицу детской игры камень - ножницы - бумага. Условие игры: двое играющих одновременно называют один из трех предметов: камень, ножницы или бумагу. Выигрывает (получает одно очко) тот, кто назовет преодолевающий предмет. Камень преодолевает ножницы (тупит), ножницы преодолевают бумагу (режут), бумага преодолевает камень (оборачивает). Если оба играющих называют один и тот же предмет, то объявляется ничья.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1.Пример выполнения упражнения на умение №1

Задание

Пусть в некоей фантастической стране существуют только две отрасли: производство компьютеров и производство роботов. Определите коэффициенты прямых затрат для этих отраслей, если в год в местной валюте производство компьютеров для изготовления компьютеров составляет 100, производство компьютеров для производства роботов – 300, общее производство компьютеров 1000; производство роботов для производства компьютеров – 600, производство роботов для изготовления роботов – 800, общее производство роботов – 2500.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определение значений x_{ij}	По условию задачи: $x_{11} = 100$, $x_{12} = 300$ $x_{21} = 600$, $x_{22} = 800$
2	Определение объема производства отрасли x_j	По условию задачи: $x_1 = 1000$ $x_2 = 2500$
3	Определение коэффициентов прямых затрат по формуле: $a_{ij} = x_{ij}/x_j$.	$a_{11} = 100/1000 = 0,1$ $a_{12} = 300/2500 = 0,12$ $a_{21} = 600/1000 = 0,6$ $a_{22} = 800/2500 = 0,32$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 1.1

Пусть составлена матрица затраты – выпуск для двух отраслей. Матрица имеет вид:

		валовый продукт
20200	1500	40000
150	300	5000

Определите коэффициенты прямых затрат.

Задание 1.2

Матрица межотраслевых связей для трех отраслей имеет вид:

320	240	520
13	28	46
120	80	130

Валовый выпуск продукции по отраслям соответственно равен: 1500, 1000, 1800.

Определите коэффициенты прямых затрат.

Задание 1.3

Матрица межотраслевых связей для трех отраслей имеет вид:

400	160	30
500	140	25
200	210	40

Валовый выпуск по отраслям соответственно равен: 2000, 560, 100.
Определите коэффициенты прямых затрат.

Задание 1.4

Пусть имеются две отрасли. Использование продукции этих отраслей в производстве задано матрицей:

$$\begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 25 \end{pmatrix}$$

Валовые выпуски соответственно – 500 и 400.
Каковы коэффициенты прямых затрат?

2. Пример выполнения упражнения на умение №2

Задание

Пусть производственное использование продукции двух отраслей задано матрицей:

$$\begin{pmatrix} 120 & 350 \\ 140 & 280 \end{pmatrix}$$

Валовое производство первой отрасли – 3000, а второй – 1500.
Определите размеры непроизводственного потребления.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определение значений x_{ij}	По условию задачи: $x_{11} = 120, x_{12} = 350$ $x_{21} = 140, x_{22} = 280$
2	Определение объема производства отрасли x_j	По условию задачи: $x_1 = 3000$ $x_2 = 1500$
3	Определение размеров непроизводственного потребления по формуле: $y_i = x_i - \sum_j x_{ij}$	$y_1 = 3000 - (120 + 350) = 2530$ $y_2 = 1500 - (140 + 280) = 1080$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 2.1

Пусть производственное использование продукции двух отраслей задано матрицей:

25	340
64	20

Валовое производство первой отрасли – 900, а второй – 600.
Определите размеры непроизводственного потребления.

Задание 2.2

В системе из двух отраслей продукция первой отрасли используется: для производства продукции первой отрасли в размере 400 у.е., для производства продукции второй отрасли – 500 у.е., остальное идет на экспорт и личное потребление; продукция второй отрасли: для производства продукции первой отрасли – 700 у.е., для производства продукции второй отрасли – 200 у.е., остальная продукция в процессе производства не участвует. Определите размеры непроизводственного потребления, если валовой продукт первой отрасли составляет 1200 у.е., а второй – 1500 у.е.

Задание 2.3

Представим себе экономику, состоящую из трех отраслей: машиностроения, легкой и пищевой промышленности. Промежуточное потребление продукции машиностроения в самом машиностроении – 170, в легкой промышленности – 100, в пищевой – 50. Промежуточное потребление продукции легкой промышленности: в машиностроении – 30, в легкой – 10, в пищевой – не используется. Промежуточное потребление продукции пищевой промышленности в рассматриваемом примере отсутствует. Валовая продукция машиностроения – 400, легкой промышленности – 70, пищевой – 40. Определите размеры конечного использования.

Задание 2.4

Задана матрица использования промежуточного продукта в экономике, состоящей из трех отраслей:

340	0	250
125	45	320
0	25	125

Валовые выпуски соответственно равны: 1200, 1400, 170.

Найдите размеры непроизводственного потребления.

3. Пример выполнения упражнения на умение №3

Задание

Из сборочного цеха не позднее 10 мая должна выйти машина, изготовленная по специальному заказу. Анализ сетевого графика показал, что все необходимые для сборки детали могут быть доставлены в цех не ранее 3 мая. Определите полный резерв сборки, если продолжительность сборки 5 дней.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определение срока $T_j^{(1)}$	По условию задачи: $T_j^{(1)} = 10$ (мая)
2	Определение срока $T_j^{(0)}$	По условию задачи: $T_j^{(0)} = 3$ (мая)
3	Определение времени t_{ij}	По условию задачи: $t_{ij} = 5$ (дн.)
4	Расчет полного резерва времени $Rn(ij)$ по формуле: $Rn(ij) = T_j^{(1)} - T_j^{(0)} - t_{ij}$	$Rn(ij) = (10 - 3) - 5 = 2$ (дн.)

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 3.1

Отгрузка товара начнется при получении всех платежных документов. Доставка товара со склада, включая отгрузку, занимает 4 часа. Самый ранний срок получения платежных документов – 10 часов утра. Каков полный резерв времени доставки, если покупатель должен получить товар до 18 часов того же дня?

Задание 3.2

Выдача комплексных обедов может быть начата только после того, как все блюда готовы. Повара успевают приготовить все блюда самое раннее к 12 часам. В 15 часов столовая должна быть закрыта. На обслуживание всех желающих пообедать уходит 2 часа. Определите полный резерв времени выдачи обедов.

Задание 3.3

Для того чтобы не нарушался график доставки корреспонденции, отдел сортировки писем должен заканчивать свою работу в 16 часов. Каков полный резерв времени сортировки, если вся сортировка занимает 2 часа, а прием писем в отдел сортировки прекращается в 13 часов 30 минут?

Задание 3.4

Общий график работ предусматривает, что корабль должен быть спущен на воду не позднее 5 июня. Спуску на воду предшествует процедура тщательного контроля, которая длится 14 дней. Корабль будет собран и передан для контроля самое раннее к 15 мая. Определите полное резервное время контроля корабля. (Все календарные дни считать рабочими).

4. Пример выполнения упражнения на умение №4

Задание

Определите длину пути, соединяющего события 2 и 6, заданной сетевой модели.

Рисунок

Работа	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-6	5-6
Продолжительность	5	3	6	4	2	2	5	8

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определение работ, входящих в путь	По условию задачи: $L_1(2,6) = (2-4, 4-6)$
2	Определение продолжительности работ, входящих в путь	Для L_1 : $t(2-4) = 4$, $t(4-6) = 5$ Для L_2 : $t(2-3) = 6$, $t(3-4) = 2$, $t(4-6) = 5$
3	Расчет длины пути по формуле: $L_{ij} = \sum t_{im,jk}$	$L_1 = 4 + 5 = 9$ $L_2 = 6 + 2 + 5 = 13$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 4.1

Определите длину пути (3-5-7) по фрагменту таблицы:

Работа	3-5	5-7
Продолжительность	5	3

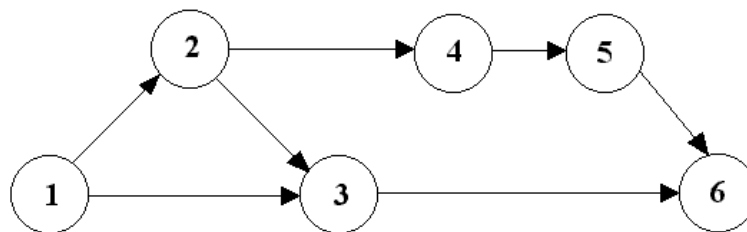
Задание 4.2

Определите длину пути 2-3-6-7-9-10 по следующим данным:

Работа	2-3	3-6	6-7	7-9	9-10
Продолжительность	5	8	6	4	2

Задание 4.3

Определите длину пути из события 1 в событие 5 по сетевой модели



Работа	1-2	2-3	2-4	3-6	4-5	5-6
Продолжительность	5	6	4	4	2	8

Задание 4.4

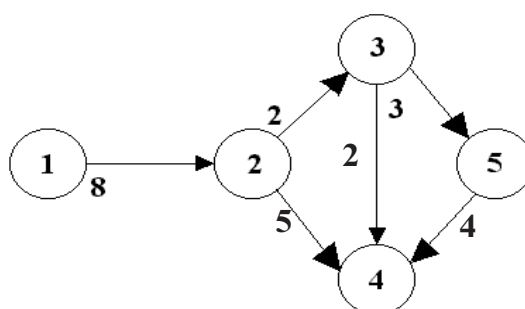
Определите длину пути из события 5 в событие 7 по фрагменту таблицы продолжительности работ:

Работа	5-6	6-7	5-7
Продолжительность	5	8	6

5. Пример выполнения упражнения на умение №5.

Задание

Задан сетевой график:



Определите длину критического пути.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определение перечня полных путей	$L_1 = (1-2, 2-3, 3-5)$ $L_2 = (1-2, 2-3, 3-4, 4-5)$ $L_3 = (1-2, 2-4, 4-5)$
2	Определение продолжительностей работ	Для L_1 : $t(1-2) = 8, t(2-3) = 2, t(3-5) = 3$ Для L_2 : $t(1-2) = 8, t(2-3) = 2, t(3-4) = 2, t(4-5) = 4$ Для L_3 : $t(1-2) = 8, t(2-4) = 5, t(4-5) = 4$
3	Расчет длины полных путей	$L_1 = 8 + 2 + 3 = 13$ $L_2 = 8 + 2 + 2 + 4 = 16$ $L_3 = 8 + 5 + 4 = 17$
4	Определение длины критического пути по формуле	$L_{кр} = \max\{13, 16, 17\} = 17$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 5.1

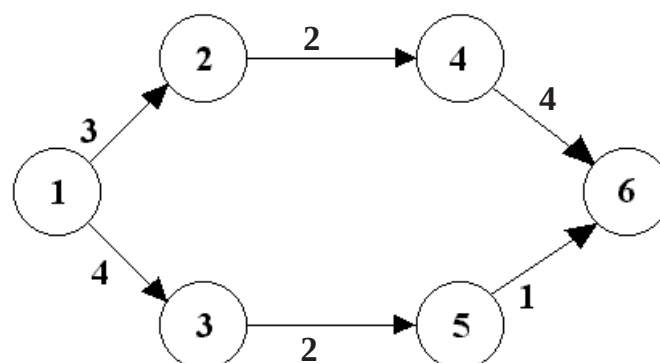
Сетевая модель задана таблицей продолжительности работ:

Работа	1-2	2-3	2-4	3-6	4-5	5-6
Продолжительность	5	6	4	4	2	8

Определите длину критического пути.

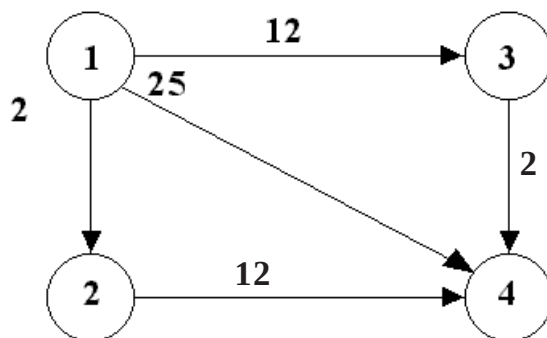
Задание 5.2

По сетевому графику определите длину критического пути.



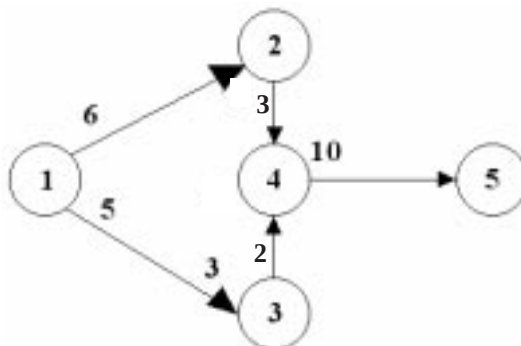
Задание 5.3

По сетевому графику определите длину критического пути.



Задание 5.4

Задана сетевая модель:



Определите длину критического пути.

6. Пример выполнения упражнения на умение №6

Задание

Игра задана платежной матрицей:

	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	3	6	4
A ₂	1	5	9
A ₃	7	2	8

Определите нижнюю цену игры.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Построение платежной матрицы $ a_{ij} $	$\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{array}$
2	Построение вектора α_i по формуле: $\alpha_i = \min_j a_{ij}$	$\alpha:$ $\begin{array}{ccc c} 3 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 2 \end{array}$
3	Определение нижней цены α по формуле: $\alpha = \max_i \alpha_i$	α_i $\begin{array}{ccc c} 3 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 2 \end{array}$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 6.1

Игра задана платежной матрицей:

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	0,25	0,35	0,40	0,10
A ₂	0,30	0,15	0,45	0,05
A ₃	0,40	0,50	0,25	0,15
A ₄	0,55	0,25	0,10	0,40

Определите нижнюю цену игры.

Задание 6.2

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3
A_1	900	600	200
A_2	1000	300	500
A_3	700	400	1200

Определите нижнюю цену игры.

Задание 6.3

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	$1/3$	$1/4$
A_2	$1/5$	$1/2$

Определите нижнюю цену игры.

7. Пример выполнения упражнения на умение №7

Задание

Игра задана платежной матрицей

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	4
A_2	1	5	9
A_3	7	2	8

Определить верхнюю цену игры.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Построение платежной матрицы $ a_{ij} $	$\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{array}$
2	Построение вектора β_j по формуле: $\beta_j = \max_i a_{ij}$	$\begin{array}{ccc c} 3 & 6 & 4 & \\ 1 & 5 & 9 & \beta_j \\ 7 & 2 & 8 & \\ \hline 7 & 6 & 9 & \end{array}$
3	Определение верхней цены β по формуле: $\beta = \min_j \beta_j$	$\begin{array}{ccc c} 3 & 6 & 4 & \\ 1 & 5 & 9 & \\ 7 & 2 & 8 & \\ \hline 7 & \mathbf{6} & 9 & \end{array}$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 7.1

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0,25	0,35	0,40	0,10
A_2	0,30	0,15	0,45	0,05
A_3	0,40	0,50	0,25	0,15
A_4	0,55	0,25	0,10	0,40

Определите верхнюю цену игры.

Задание 7.2

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3
A_1	900	600	200
A_2	1000	300	500
A_3	700	400	1200

Определите верхнюю цену игры.

Задание 7.3

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	$1/3$	$1/4$
A_2	$1/5$	$1/2$

Определите верхнюю цену игры.

Задание 7.4

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3
A_1	900	600	200
A_2	1000	300	500
A_3	700	400	1200

Определите верхнюю цену игры.

8. Пример выполнения упражнения на умение №8

Задание

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	1	3
A_2	-2	10

Определите седловую точку игры.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Построение платежной матрицы $ a_{ij} $	$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{array}$
2	Определение нижней цены α по формуле: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ (a_{ij} – значения выигрыша при каждой паре стратегий)	$\begin{array}{cc c} & & \alpha \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \end{array}$
3	Определение нижней цены β по формуле: $\beta = \max_j \min_i a_{ij}$ (a_{ij} – значения выигрыша при каждой паре стратегий)	$\begin{array}{cc c} 1 & 3 & \\ -2 & 10 & \\ \hline 1 & 10 & \beta \end{array}$
4	Определение седловой точки v^* по формуле: $v^* = \alpha = \beta$	$v^* = 1$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 8.1

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	5	2	4
A_2	2	6	1	1
A_3	1	2	0	3

Определите седловую точку игры.

Задание 8.2

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	2	2
A_2	1	2	3	4

Определите седловую точку игры.

Задание 8.3

Платежная матрица имеет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	35	60	40
A_2	15	45	25	50

Найдите седловую точку.

Задание 8.4

Определите седловую точку игры, если ее платежная матрица имеет вид:

	B_1	B_2	B_3
A_1	9	1	3
A_2	7	5	8
A_3	2	4	6

9. Пример выполнения упражнения на умение №9

Задание

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

Определите частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока A .

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Построение платежной матрицы $ a_{ij} $	$a_{11} = 1; a_{12} = -1;$ $a_{21} = -1; a_{22} = 1$
2	Расчет p_1 по формуле: $p_1 = (a_{22} - a_{21}) / (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})$	$p_1 = (1 - (-1)) / (1 + 1 - (-1) - (-1)) = 2/4 = 1/2$
3	Расчет p_2 по формуле: $p_2 = 1 - p_1$	$p_2 = 1 - 1/2 = 1/2$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 9.1

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	1	0
A_2	0	1/2

Определите частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока А.

Задание 9.2.

Определите частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока А в игре, заданной платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	40	20
A_2	30	60

Задание 9.3

Определите частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока А в игре, заданной платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	2	0
A_2	1	3

Задание 9.4

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	3,5	2
A_2	1	4,5

Определите частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока А.

10. Пример выполнения упражнения на умение №10

Задание

Задана игра 2×2 . Вектор платежей при применении противником стратегии B_1 составляет $\{2, 1\}$. Частота использования игроком А чистых стратегий A_1 и A_2 равна и составляет 0,5. Определите цену игры.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определение a_{11} и a_{21}	$a_{11} = 2$ $a_{21} = 1$
2	Определение p_1 и p_2	$p_1 = 0,5$ $p_2 = 0,5$
3	Расчет цены игры по формуле: $v = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$	$v = 2 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 1,5$

Решите самостоятельно следующие задания.

Задание 10.1

Задана игра 2×2 . Вектор платежей при применении противником стратегии B_1 составляет $\{1, 0\}$. Частота использования игроком А чистых стратегий A_1 и A_2 равна и составляет $1/3$ и $2/3$. Определите цену игры.

Задание 10.2

Игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

Частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока А равны соответственно $1/2$ и $1/2$. Определите цену игры.

Задание 10.3

Задана игра 2×2 . Вектор платежей при применении противником стратегии B_1 составляет $\{3, 5; 1\}$. Частота использования игроком А чистых стратегий A_1 и A_2 равна и составляет 0,7 и 0,3. Определите цену игры.

Задание 10.4

Определите цену игры, если частоты p_1 и p_2 применения стратегий A_1 и A_2 для оптимальной смешанной стратегии игрока А равны 0,6 и 0,4. Платежная матрица игры:

	B_1	B_2
A_1	40	20
A_2	30	60

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ
ЮНИТА 2
ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Редактор О.А. Пурвин
Оператор компьютерной верстки С.А. Петров

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998	Сдано в печать		
НОУ "Современный Гуманитарный Институт"			
Уч.-изд. л. 5,69	Усл. печ. л.	Тираж	Заказ

Современный Гуманитарный Университет