

**ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН
ФАКУЛТЕТИ ФИЗИКА**

ХАЙРУЛЛО ҶҶРАЕВ

УСУЛҲОИ АДАДӢ

**ШӯроӢ илмӢ-методи Донишгоҳи милли Тоҷикистон
ба ҷоп тавсия кардааст.**

Душанбе
«ЭР-граф»
2021

УДК: 519.6(075.8)(575.8)

Ч-99

ББК: 22.172 (2 тоҷик)

УДК: 519.6(075.8) (575.3)

Ч-99

Чӯраев Х.Ш. Усулҳои ададӣ. — Душанбе: Эр-граф, 2021. — 204 ҷаҳ. рӯйхати адабиёт - 24 номгӯй.

Китоб дар асоси барномаи таълим аз фанни «Усулҳои ададӣ» («Математикаи ҳисоббарорӣ») барои донишҷӯёни ихтисосҳои «Мошинҳои ҳисоббарор, маҷмӯаҳо, системаҳо ва шабакаҳо», «Информатика» ва «Математикаи амалӣ» навишта шудааст.

Китоб аз бандҳои таълими назарияҳои хатой, интерполятсия ва наздиққуноҳо, дифференсиронӣ ва интегронии ададӣ, ҳалли тақрибии системаи моделаҳои хаттии алгебравӣ (СМХА), ҳалли муодилаҳои алгебравӣ ва трансцендентӣ, муодилаҳои фарқӣ, ҳалли ададии муодилаҳои дифференсиалии оддӣ (муқаррарӣ), ҳалли ададии муодилаҳои дифференсиалии бо ҳосилаҳои хусусӣ (муодилаҳои физикаӣ математикӣ)-ро дар бар мегирад. Баёни муҳ-тасари ҳар як мавзӯ пешниҳод кардашуда бо мисолҳои амалӣ мушаххас равшан карда мешавад.

Китоби таълимиро ҳамчунин метавонанд донишҷӯёни дигар таҳассусҳои мактабҳои олӣ, ки фанни таълими «Усулҳои ададӣ» ё «Усулҳои ҳисоб»-ро меомӯзанд истифода баранд.

Тақриздихандаҳо: профессори кафедраи физикаи назариявии Донишгоҳи миллии тоҷикистон, д.и.ф.-м., профессор **Комилов Қ.** ва мудири кафедраи информатика ва системаи информатсионии Донишгоҳи Тоҷикистону Россия (Слованӣ), н.и.ф.м., дотсент **Қобилов М.М.**

774581

ББК: 22.172 (2 тоҷик)

УДК: 519.6(075.8) (575.3)

ISBN – 987-99985-993-2-1



© Чӯраев Х.Ш., 2021

Мундариҷа

Пешгуфтор.....	7
Муқаддима	9
БОБИ I Назарияи хатой	14
§1. Қимати тақрибии ададҳо ва хатоии онҳо.....	14
§2. Навишти даҳии қимати тақрибии адад	17
§3. Хатои натиҷаи амалҳо бар қимати тақрибии адад	21
§4. Қоидаҳои наздиққуноӣ	30
§5. Намудҳои хатой.....	32
§6. Ҳисоббарорӣ аз рӯи формула	34
БОБИ II Назарияи интерполятсия	35
§1. Гузориши умумии масъалаи интерполятсионӣ	35
§2. Фарқҳои охирик ва нисбатҳои фарқӣ.....	41
§3. Бисёрраъзгии интерполятсионии Лагранҷ.....	45
§4. Саҳеҳии наздиқшавии бисёрраъзгии интерполятсионии Лагранҷ	46
§5. Бисёрраъзгии интерполятсионии Нютон барои гиреҳҳои номунтазам	47
§6. Бисёрраъзгии интерполятсионии Нютон барои гиреҳҳои мунтазам ва аъзои боқимондаи он.....	48
§7. Бисёрраъзгии интерполятсионии барои гиреҳҳои «марказӣ».....	53
§8. Экстраполятсия ва интерполятсияи чаппа	56
§9. Сплайн-интерполятсия	59
БОБИ III Дифференсиронии ададӣ	61
§1. Гузориши масъала	61
§2. Ноустувории масъалаи дифференсиронии ададӣ	62
§3. Формулаи дифференсиронии ададӣ дар асоси бисёрраъзгии Лагранҷ.....	63
§4. Формулаи дифференсиронии ададӣ барои гиреҳҳои номунтазам	64
§5. Формулаи дифференсиронии ададӣ барои гиреҳҳои мунтазам	66

БОБИ IV Интегронии адади	68
§1. Гузориши масъала	68
§2. Формулаи квадратурии росткунчаҳо.....	71
§3. Формулаи квадратурии трапетсия	73
§4. Формулаи Симпсон (параболикӣ)	74
§5. Формулаи квадратурии Нютон-Котес.....	76
§6. Аъзои боқимондаи формулаҳои квадратурӣ.....	78
§7. Формулаи квадратурии Чебишев ва Гаусс	82
§8. Ҳисоби тақрибии қимати интегралӣ ғайри хос	87
§9. Усули Л.В. Канторович (чудокунӣ махсусият).....	89
§10. Ҳисоби тақрибии интегралӣ қаратӣ	90
БОБИ V Назарияи наздиккунонӣ	91
§1. Гузориши масъала	91
§2. Ҳисоби қимати функсияҳо.....	92
§3. Тартибдиҳӣ ва истифодаи ҷадвалҳои математикӣ	95
§4. Наздикшавии миёнаквадратӣ	108
§5. Мураттабкунӣ формулаҳои эмпирикӣ.....	110
§6. Усули квадратҳои хурдтарин	111
БОБИ VI Ҳалли тақрибии системаи муодилаҳои хаттӣ алгебравӣ (СМАХ)	117
§1. Мафҳумҳои асосӣ.....	117
§2. Гузориши масъалаи ёфтани ҳалли тақрибии СМАХ.....	119
§3. Усули итератсияи содда.....	120
§4. Шартӣ наздикшавӣ ва саҳеҳии раванди итератсионӣ.....	124
§5. Усули Зейдел	127
§6. Шартӣ наздикшавӣ ва саҳеҳии раванди Зейдел	128
§7. Доир ба ҳалли СМАХ-и махсус (вайроншуда) ва шартан нодуруст гузошташуда	129
§8. Ёфтани ҳалли нормали СМАХ бо усули танзимкунонии Тихонов.....	131
БОБИ VII Ҳалли муодилаҳои алгебравӣ ва транстендентӣ ..	134
§1. Гузориши масъала	134
§2. Мафҳумҳои асосии муодилаҳои алгебравӣ ва транстендентӣ	135

§3. Муайян намудани фосилаи мавҷудияти решаи муодила	137
§4. Тарзи графики муайян намудани фосилаи мавҷудияти решаи муодила	140
§5. Усули ба духиссаи баробар чудокунӣ порча	141
§6. Усули расанда (Нютон)	144
§7. Усули хорда	147
§8. Усули итератсияи содда	149
§9. Муайян намудани решаи муодилаи алгебравӣ бо усули ҳисоби қимати бисёрғозӣ	152
§10. Решаҳои муодилаҳои алгебравии ошӯбӣ (сингулярӣ) ..	154

БОБИ VIII Муодилаи фарқӣ	163
§1. Мафҳумҳои асосӣ	163
§2. Муодилаи фарқии хаттӣ тартибӣ якум	163
§3. Муодилаи фарқии хаттӣ тартибӣ якум бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда.....	166
§4. Муодилаи фарқии хаттӣ тартибӣ дуҷуми якҷинса бо коэффитсиентҳои доимӣ.....	167
§5. Муодилаи фарқии хаттӣ тартиби дуҷум бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда.....	170
§6. Усули гузарониши роста	170
§7. Усули гузарониши чаппа.....	172
§8. Шартӣ устувории усули гузарониш.....	173

БОБИ IX Усули ададии ҳалли муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ	175
§1. Ҳалли ададии муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ ..	175
§2. Усули ба қатори Тейлор чудо кардан	176
§3. Усулҳои Рунге-Кутта	179
§4. Усули фарқии ҳалли масъалаи канорӣ барои муодилаи дифференсиалии муқаррарии тартибӣ дуҷум	181

БОБИ X Моделсозии ададии муодилаи намуди эллиптикӣ ...	183
§1. Гузориши масъала	183
§2. Муодилаи фарқии масъалаи канорӣ якум барои муодилаи Пуассон	184

§3. Муодилаи Пуассон бо шартӣ канории сифрӣ	185
§4. Модели адабии якченакаи Пуассон бо усули фарқҳои охиринок	186
§5. Модели адабии муодилаи дученакаи Пуассон бо усули фарқҳои охиринок	187
§6. Гузориши масъалаи физикӣ	189
§7. Модели математики масъала	190
БОБИ XI Моделсозии адабии муодилаи намуди гиперболикӣ	
§1. Гузориши масъала	193
§2. Аппроксиматсияи масъалаи канории якҷум барои муодилаи гиперболикӣ	194
БОБИ XII Моделсозии адабии муодилаи намуди параболикӣ	
§1. Гузориши масъала	196
§2. Аппроксиматсияи масъалаи гармигузаронӣ	198
Адабиётҳои истифодашуда	202

ПЕШГУФТОР

Муносибати байни ҳамдигарии инсон ва табиат манбаи асосии пешрафти илму техника мебошад. Ин муносибат баъзан ба тағйирёбии самтҳои анъанавии рушди ин ҷараён оварда, боиси ислохот ва ҷаҳиш дар муҳимтарин соҳаҳои илм ва баъд аз он дар соҳаҳои гуногуни хоҷагӣ мегардад. Яке аз ин гуна самтҳои рушд – компютерикунонии ҷамъият аст, ки он ба пайдоиши соҳаи нави дониши ташҳиси ҳисобӣ замина гузошт. Усулҳои математикӣ дар қори натиҷагирӣ ин соҳа нақши муайянкунандаро мебозанд.

Барои ҳалли проблемаҳои ташҳиси ҳисобӣ истифодаи моделҳои математикӣ ба мақсад мувофиқ аст, яъне бо истифодаи компютер пайдо намудани ҳамаи амалиётҳои мавҷудаи қисмҳои ташҳиси гузаронидашуда, инчунин навишти мушаххаси таҳқиқ ва равандиҳои физикӣ амалӣ карда мешавад. Татбиқи иҷроӣ ҳамаи ин амалиётҳо бо ёрии компютер имконияти тақрибии ҳисобиро бо қисмҳои ташҳисӣ муайян менамояд. Ҳамаи ин комплекси масъалаҳо майдони таҳқиқотҳои ихтисосмандони соҳаҳои гуногуни илму техника мебошад, ки он ба пайдошавии равияҳои нави ихтисосҳо ба монанди математикаи амалӣ, информатика, физикаи компютерӣ ва ғайраҳо замина гузоштааст. Барои тайёр намудани мутахассисони соҳаҳои нав дар ҳамаи донишгоҳу донишқадаҳо (мактабҳои олӣ) факултет, шӯъба ва кафедраҳо ташкил карда шудаанд.

Мутахассисони соҳаҳои нав назария ва амалияҳои таъминоти математикӣ, имкониятҳои коркард ва истифодаи технологияҳои наватарини компютериро меомӯзанд. Ин омӯзиш назария ва амалияи якҷанд фанҳои таълимиро дар бар мегирад, ки яке аз онҳо математикаи ҳисоббарорӣ ё усулҳои адабӣ мебошад.

Курси усулҳои адабӣ аз таълими бандҳои назарияи хато, интерполатсия, наздикуниҳо, дифференсиронӣ ва интегронии адабӣ, ҳалли муодилаҳои алгебравию трансцендентӣ, системаи муодилаҳои хаттии алгебравӣ, муодилаҳои дифференсиалии оддӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ иборат мебошад. Мазмуни китоби таълимии мазкур анъанавӣ буда, дар он усулҳо аз нав такмил дода шуда, усулҳои муосир ҳамроҳ карда шудаанд.

Китоби мазкур васоити таълимӣ буда, мувофиқ барномаи курси «Усулҳои ададӣ» («Математикаи ҳисоббарорӣ») барои донишҷӯёни ихтисосҳои 40020100 (мошинҳои ҳисоббарор, маҷмӯаҳо, системаҳо ва шабакаҳо), 0101 (математикаи умумӣ), 0102 (математикаи амалӣ), 010201 (информатика) ва 0105 (механика)-и ДМТ навишта шудааст. Аз он донишҷӯёни мактабҳои олии дигар, ки фанни «Усулҳои ададӣ» ё «Усулҳои ҳисоб»-ро меомӯзанд низ истифода карда метавонанд.

Лексияҳо, ки онҳоро муаллиф дар ихтисоси мошинҳои ҳисоббарор, маҷмӯаҳо, системаҳо ва шабакаҳои факултети физика ва ихтисоси информатикаи факултаи механикаи математикаи Донишгоҳи миллии Тоҷикистон тӯли чанд сол хондааст, матни китобро ташкил мекунад.

Муаллиф ба устодон Қ.Қомиллов, Р.И. Садуллоев, М. Қобилов, ки дар тайёркунии маводҳои дастур ёрии бегаразона расонидаанд, вақти пурқимати худро баҳри пайдошавии он дарег надоштаанд, барои маслиҳатҳои муфиди арзишнокашон минатдорӣ худро изҳор менамояд.

Китоби таълимии мазкур дар кори ба забони тоҷики навиштани васоитҳои таълимӣ аз фанни «Усулҳои ададӣ» барои донишҷӯён яке аз қадамҳои аввалин аст. Бинобар он муаллиф фикру мулоҳизаҳои хонандагонро оид ба он ба камоли қаноатмандӣ қабул хоҳад кард.

Хоҳишмандам фикру мулоҳиза ва таклифу пешниҳодҳои худро ба суроғи зерин фиристонам: 734025, ш. Душанбе, хиёбони Рудаки 17, ДМТ бинои таълимии 16, ҳучраи 507, кафедраи Мошинҳои ҳисоббарор, система ва шабакаҳо.

МУҚАДДИМА

1. Дар бораи усулҳои ададӣ. Компютерикунонии ҷамъият ба пайдоиши соҳаҳои нави илм, зиёдшавӣ, коркард ва истифодаи технологияҳои наватарини корхонаҳои истеҳсолӣ, механизмҳои идоракунии системаҳои мураккаб ва ғайра замина гузошт. Дар кори натиҷагирӣ масъалаҳои гуногуни воқеъӣ, ки он таҷдидҳои ягон равандро акс менамояд моделҳои математикӣ роли муайянкунанда-ро мебозад. Ба омӯзиши моделҳои математикии сохташуда усулҳои математикӣ машғул аст. Усулҳои математикӣ аз якҷанд шохаҳо иборат мебошад, ки яке аз онҳо усулҳои ададӣ аст. Усулҳои ададӣ назарияи усулҳои тақрибӣ ва алгоритмҳои ҳал кардани масъалаҳои ҷинсан якхелаи ба худ хосро меомӯзад. Ин маънои онро дорад, ки ба ҷои ҳалли аниқӣ баъзе аз масъалаҳо мо ҳалли ба он наздики бо ягон маъно тағйирёфтаи масъаларо муайян менамоем. Мақсад ва ғояи асосии ин фан аз коркарди усулҳои нави ҳалли масъалаҳо, ки онҳо барои компютер мутобиқанд, иборат аст. Усулҳо – иваз ё наздиккунии масъалаи додашуда ба масъалаи дигар, ки бештар барои ҳал дар компютер мувофиқ аст, мебошад. Вале ҳалли масъалаи наздиккунӣ аз баъзе параметрҳои идоракунӣ, ки бо саҳеҳии муайяне дода мешаванд, вобастагӣ дорад. Масалан, дар масъалаи интегралҳои ададӣ чунин параметрҳо гиреҳҳо ва вазни функсия дар формулаи квадратурӣ мебошанд. Ҳалли масъалаи иваз ё наздиккунии масъала элементҳои фазои охирченака мебошанд.

Ҳалли ҳаргуна масъалаи воқеъӣ, ки он таҷдидҳои ягон равандро акс менамояд, аз зинаҳои асосии тадқиқот иборат аст, ки онҳоро сифатан чунин баён кардан мумкин аст: модели математикӣ, алгоритми ҳисоб, мурабтаб намудани барномаи алгоритми ҳисоб, амали ҳисоб дар компютер, муқоисаи натиҷаи ададии ҳисоб бо ҳалли аниқӣ модели математикии интиҳобшуда.

Модели математикӣ ин навишти тақрибии раванд ба намуди муодилаи алгебравӣ, дифференсиалӣ ё интегралӣ мебошад, ки қонун ва қоидаҳои таҷдидҳои ягон равандро акс менамояд (масалан дар физика-энергия, вазн, миқдори ҳаракат ва ғайра мебошанд). Барои осон гардидани ҳалли масъала омилҳои камтаъсир ва қамаҳамият ба эътибор гирифта намешаванд. Бо назардошти чунин омилҳо масъалаи воқеъӣ ба масъалаи математикии соддае оварда мешавад, ки он танҳо тавсифҳои асосии равандро дар бар мегирад.

Ин масъалаи нисбатан содда модели математикии раванд номида мешавад.

Алгоритми ҳисоб - ин пайдарпаии амалҳои арифметику мантиқие мебошад, ки бо ёрии он ҳалли масъалаи математикии дар модели математикии интиҳобшуда ёфта мешавад. Талаботҳои алгоритми ҳисобро, ки барои истифодаи компютерӣ мутобиқанд фанни «Усулҳои ададӣ» меомӯзад.

Баъди ҳосил кардани модели математики ба тадқиқ ва ҳалли он шурӯъ мекунанд. Ёфтани ҳалли аниқ на ҳама вақт имконпазир буда, дар бисёр ҳолатҳо хеле душвор мебошад ва ҳисоббарориҳои зиёдеро талаб менамояд. Бинобар он барои ёфтани ҳалли матлуб усулҳои тақрибии гуногун истифода бурда мешаванд. Усулҳои тақрибӣ се хеланд: аналитикӣ, ададӣ ва графикӣ. Мо дар оянда баъзе аз усулҳои тақрибии аналитикӣ ва ададиرو дида мебароем.

Усулҳои тақрибии аналитикӣ аз ёфтани ҳалли масъала дар намуди ягон формула иборат мебошад. Дар бисёр ҳолатҳо ҳалли

аналитикӣ ба намуди бисёраъзогии умумикардашудаи $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$

ҷустуҷӯ карда мешавад, ки дар он a_k доимӣ буда, $\varphi_k(x)$ функциаҳои интиҳобшуда аз синфи муайяни функцияҳо мебошанд. Масъалан, дар масъалаи сохтани бисёраъзогиҳои интерполационӣ $\varphi_k(x) = x^k$ аст.

Моҳияти усулҳои ададӣ аз ҳосил кардани ҳалли тақрибии масъалаи математикӣ ҳамчун ададҳо иборат аст. Ин ададҳо дар натиҷаи иҷрои миқдори охириноки амалҳои оддӣ бо додашудаҳои масъала ҳосил карда мешавад. Бо усулҳои ададӣ ҳал дар намуди ҷадвал ёфта мешавад.

Вазифаи асосии фанни «Усулҳои ададӣ» аз ёфтани ҳалҳои тақрибии аналитикӣ ё ададии масъалаҳои гуногуни математика ва исботи наздик будани онҳо ба ҳалли аниқ иборат аст. Масъалаҳои наздиккунӣ, бояд, беҳтарин наздиккуниро ба ҳалли масъалаи аввала ҳангоми зиёдкунии миқдори гиреҳҳо ифода намояд. Сифати баҳои хатой ва интиҳоби тарзи наздиккунӣ - масъалаи асосии назари усулҳои ададӣ мебошад.

Усулҳои ададӣ барои ҳалли масъалаҳои амалӣ истифода бурда мешавад ва бо пайдошавии масъалаҳои нав ва ҳалли онҳо такмил

меёбад. Яке аз ингуна таҳқиқотҳои нав дар усулҳои ададӣ таҳхисӣ ҳисобӣ мебошад.

2. Таҳхиси ҳисобӣ. Мафҳуми таҳхис дар адабиёти муосир [14] чунин баён карда шуда аст: таълимотест оиди усулҳо ва принципҳои дарк ва муайянкунии бемориҳо, таҳхиси техникӣ бошад, барои нишон додани усулҳои устуворкунӣ ва омӯхтани аломатҳои нуқсонҳои техникӣ дар мошинҳо, таҷҳизот ва қисмҳои он ва ғайра истифода бурда мешавад.

Дар зери мафҳуми таҳхисӣ ҳисобӣ маҷмӯи усулҳо ва васоитро мефаҳманд, ки барои омӯхтани тавсифи объектҳои таҳқиқшаванда дар асоси ахбороти ёрирасон тавассути компютер коркард мешаванд. Мақсади таҳхиси ҳисобӣ муайян намудани миқдор ё сифати объекти таҳқиқшаванда дар асоси ченкунӣ бо воситаи ахборот дар онҳо мебошад. Принципҳои асосии фарқи таҳхиси ҳисобӣ аз ҳисоббарориҳои анъанавӣ дар он аст, ки вай бо ҳаҷми зиёди ахбороти таҳқиқии объекти мавҷуда, коркард ва тавсиф мешавад. Иҷрои ин кор бе истифодаи усулҳои математикаи ҳисоббарориҳои муосир, таъминоти барномавии пешрафта ва васоити пуриқтидори техникаи ҳисоб ғайриимкон аст.

Таҳхиси ҳисобӣ дар соҳаҳои гуногуни муҳимтарини илм ва хоҷагӣ, масалан дар тиб, экология, астрофизика, геофизика, химия, биология, кристаллография ва ғайраҳо ба кор бурда мешавад. Таъбиқи таҳхиси ҳисобӣ дар тиб моҳияти босамари таҳхис, инчунин осон кардан ва тезонидани коркарди усулҳои навӣ табобати беморро ифода мекунад. Истифодаи таҳхиси ҳисобӣ барои назорати маҳсулоти саноатӣ, мошин ва механизмҳои гуногуни раванди истеҳсолот ва идоракунии онҳо, кушодани имкониятҳои коркард ва истифодаи технологияи нави маҳсулоти гуногуни саноатӣ хизмат менамояд.

Усулҳои таъбиқи таҳхиси ҳисобии муосир хеле зиёданд. Асоси таҳқиқи таҳхиси ҳисобиро интиҳоби моделҳои математикӣ таъкил медиҳад. Ба омӯзиши моделҳои математикии сохташуда усулҳои математикӣ машғул мебошад. Усулҳои математикӣ - навишти алгоритми ҳисобӣ мебошад, яъне сохтани усули наздиккунии ҳалли масъала ё усули ададӣ.

Дар мавриди ҳалли масъалаи доништан зарур аст, ки кадоме аз ахборот дода шудаанд: қиматҳои ибтидоӣ, коэффитсиентҳо, элементҳои сарҳадӣ ва ғайра.

Барои ҳар як масъалаи гузошташудаи ташхисӣ ҳисобӣ масъалаи мавҷуд будани ҳалли он, ягона будани ҳал ва вобастагии ҳал аз ахбороти додашуда, гузошта мешавад. Вобаста ба ин масъалаи ташхисӣ ҳисобӣ ба масъалаҳои корректӣ ва ғайрикорректӣ ҷудо мешавад.

Масъалаи корректӣ гузошта шудааст, агар 1) ҳалли масъала ба рои ҳамаи додашудаҳои имконпазири дохилшаванда мавҷуд бошад; 2) ҳал ягона бошад; 3) ҳалли масъала аз додашудаҳои дохилшаванда бефосила вобаста, яъне устувор бошад.

Масъалаи ғайрикорректӣ гузошта шудааст, агар ақалан яке аз ин шартҳо иҷро нагардад. Дар масъалаи ғайрикорректӣ гузошташуда, одатан шартҳои устуворӣ иҷро намешавад.

3. Мисолҳои корректӣ ва ғайрикорректӣ. Вобаста ба усулҳои адабии дар ин қисм муоинашаванда масъалаҳои зеринро дида мебароем:

1) Масъалаи интегронӣ. Дар $[a, b]$ функсияи бефосилаи $f(x)$ дода шавад. Бузургии

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

ёфта шавад.

Бигузур ба ҷои функсияи $f(x)$ функсияи $\tilde{f}(x)$ аз фазои $C[a, b]$ дода шуда бошад, он гоҳ ба ҷои $I(f)$ қимати

$$\tilde{I}(f) = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$$

ҳисоб карда мешавад. Фарқи онҳо

$$\Delta I = \tilde{I}(f) - I(f) = \int_a^b (\tilde{f}(x) - f(x)) dx$$

мебошад. Маълум аст, ки

$$|\Delta I| \leq (b-a) \max_{a < x < b} |\tilde{f}(x) - f(x)| \leq (b-a)\varepsilon,$$

агар

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

бошад. Ин нишон медиҳад, ки $I(f)$ нисбати функсияи $f(x)$ бефосила аст. Мувофиқи таърифи интегралҳои муайян, барои ба қадри кофӣ калони n , қимати

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \quad c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^n c_k = 1.$$

-ро, ки $x_k \in [a, b]$, $c_k = x_k - x_{k-1}$ мебошанд, ҳамчун қимати тақрибии интеграл $I(f)$ қабул кардан мумкин аст.

Дар асоси гуфтаҳои боло, пайдо мекунем:

$$\Delta I_n = \tilde{I}_n(f) - I_n(f) = \sum_{k=1}^n c_k (\tilde{f}_k - f_k),$$

$$\tilde{f}_k = \tilde{f}(x_k), \quad f_k = f(x_k),$$

$$|\Delta I_n| \leq \sum_{k=1}^n c_k \max_{1 \leq k \leq n} |\tilde{f}_k - f_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |\tilde{f}_k - f_k|.$$

Ҳамин тавр, масъалаи ҳисоби интеграл бо ёри формулаи квадратури коррект гузошта шудааст.

2) Масъалаи дифференсиронӣ. Масъалаи дифференсиронии функсияи тақрибии $u(x)$, ғайрикоррект мебошад. Дар ҳақиқат, фарз мекунем, ки

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \frac{1}{N} \sin(N^2 x) \quad (\text{ё } \tilde{u}(x) = u(x) + \frac{1}{N} \cos(N^2 x))$$

бошад. Дар ин ҷо N - адади доимии ба қадри кофӣ калон аст. Он гоҳ дар фазои функсияҳои дар порчаи $[0, d]$ бефосила (метрикии $C[0, d]$ ($d > \frac{\pi}{n^2}$)) фарқи

$$\|\Delta u\| = \|\tilde{u}(x) - u(x)\| = 1/N \leq \varepsilon,$$

Барои $N \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ҷой дорад. Барои ҳамаи ҳосила бошад

$$\Delta u' = \tilde{u}'(x) - u'(x) = N \cos(N^2 x), \quad \|\Delta u'\|_C = N \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

аст.

Ҳамин тавр, ба каме тағйирёбии функсияи $u(x)$ дар фазои C (функсияҳои дар порчаи $[0, d]$ бефосила), тағйирёбии калони ҳосилаи функсия дар C мувофиқ меояд.

Аз ин рӯ, масъалаи дифференсиронии ададӣ ғайрикорректӣ мебошад. Дар бандҳои аввал масъалаи корректӣ ва усулҳои адабии ҳалли он, ки дар компютер мувофиқ аст, муоина карда мешавад. Дар банди ҳалли муодилаҳо ва системаи муодилаҳо масъалаи ғайрикорректӣ низ ҳамроҳ ва муоина карда мешавад.

БОБИ I НАЗАРИЯИ ХАТОЙ

§1. Қимати тақрибии ададҳо ва хатоии онҳо

Воҳиди муайяни ададӣ додашударо бузургӣ гуфтан мумкин аст. Масалан, дарозӣ, масоҳат, ҳаҷм бузургӣ мебошанд. Агар масоҳатӣ ягон синфхона баробарӣ 45 м^2 бошад, он гоҳ масоҳат бузургӣ буда, адади 45 -қимати бузургии додашуда аст. Бузургӣҳо доимӣ ва тағйирёбанда мешаванд.

Бузургӣ доимӣ аст, агар дар тамоми ҳолатҳо фақат як қиматро қабул намояд. Бузургӣ тағйирёбанда аст, агар вобаста аз шартӣ масъала қиматҳои гуногунро қабул намояд. Мисол, шитоби озодафтии ҷисм дар рӯи замин, бузургии доимӣ буда, қимати ягонаи ададии $g = 9,81 \dots \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ро дорад. Вале роҳи S-и тай-намояндаи нуқтаи материалӣ ҳангоми ҳаракатии вай бузургии тағйирёбанда аст.

Қимати бузургӣ, ки барои дар ҳақиқат мавҷуд будани он шубҳа нест, ададӣ аниқ номида мешавад. Дар амалия ҳангоми ҷустуҷӯи қимати баъзе аз бузургӣҳо, қимати тақрибии онро ме-гиранд, ки он ҳудуди муайяни аниқро дорад. Масъалан, ҳангоми ҷенкунии бузургӣҳои физики бо ёрии асбобҳои ҷенку-нанда ба амсоли ҳароратсанҷ, сониясанҷ ва ғайраҳо.

Дар ҳисоббарориҳои амалӣ бештар бо қиматҳои тақрибии ададҳо кордор мешавем. Масоҳати доира аз формулаи

$$S = \pi R^2$$

ҳисоб карда мешавад, ки дар ин ҷо R -радиуси давра аст. Натиҷаи ҳисоби аниқӣ масоҳат S, аз саҳеҳии қимати тақрибии ададӣ p ва R вобаста мебошад.

Бигузур адади x -қимати аниқ ва a -қимати тақрибии ягон бузургӣ бошанд. Дар ин маврид адади x -ро тақрибан бароба-ри адади a мегӯянд, яъне $x \approx a$ менависанд.

Агар маълум бошад, ки $a < x$, он гоҳ a қимати тақрибии ада-ди x бо норасоӣ ва $a > x$ бошад, он гоҳ a қимати тақрибии ададӣ x бо барзиёдӣ ном дорад.

Фарқи қимати аниқ ва қимати тақрибии бузургӣ хатоии бу-зургии тақрибӣ номида шуда, бо

$$\Delta a = x - a$$

ишора карда мешавад. Хатои тақрибӣ Δa метавонад адади мус-бат ва ё манфӣ шавад.

Модули фарқи қимати аниқ ва қимати тақрибии бузургӣ хатоӣ мутлақӣ бузургии тақрибӣ номида шуда, бо

$$\bar{\Delta} a = |x - a|$$

ишора карда мешавад.

Мисоли 1. Барои ҷенкунии дарозии порчаи p хаткаши тақсимоти ҷадвалиаш 0,1 см истифода бурда, қимати тақрибии дарозии порча $a = 207 \text{ см}$ -ро ҳосил намуданд. Маълум аст, ки ҳангоми ҷенкуни ба хатоии на зиёдтар аз 0,1 см роҳ дода шуд, яъне хатоии мутлақӣ ҷенкуни аз 0,1 см зи-ёд не: $\bar{\Delta} a = 0,1 \text{ см}$.

Хатои ҳудуди мутлақӣ тақриби гуфта, адади $\Delta a > 0$ -ро мегӯянд, ки

$$\bar{\Delta} a = |x - a| \leq \Delta a.$$

Ин нобаробарию ба намуди

$$a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a$$

таъсир кардан мумкин аст.

Аз ин маълум мешавад, ки $a - \Delta a$ қимати тақрибии адади x бо норасоӣ, ва $a + \Delta a$ қимати тақрибии адади x бо барзиёдӣ мебошад. Навишти $x = a \pm \Delta a$ бо мазмуни боло и-стифода мебаранд.

Мисоли 2. Хатои ҳудудии мутлақӣ бузургии тақрибии адади $\pi = 3,14$ -ро, ки ба сифати қимати тақрибии адади π ги-рифта шуда аст, муайян менамоем. Маълум аст, ки $3,14 < \pi < 3,15$. Аз инҷо маълум мешавад, ки $|a - \pi| < 0,01$. Адади $\Delta a = 0,01$ -ро хатои ҳудудии мутлақ гуфтан мумкин аст. Агар $3,14 < \pi < 3,142$ гирем, он гоҳ баҳои дурусти $\Delta a = 0,002$, $\pi = 3,14 \pm 0,002$ -ро соҳиб мешавем.

Барои дониستاني тавсифи сифати ҷенкуни хатоӣ мутлақ нокифоя аст. Масалан, ду ҷисм бар кашида мешавад, ки хато-ии мутлақӣ якхела доранд, яъне $p_1 = 237,4 \pm 0,2 \text{ г}$, $p_2 = 3,9 \pm 0,2 \text{ г}$. Аммо сифати ҷенкунии бузургии p_1 нисбат ба ҷенкунии бу-зургии p_2 бештар аст. Ин ҳолатро хатоии нисбӣ тавсиф мена-мояд.

Хатоии нисбии бузургии тақрибии a гуфта, нисбати хатоии мутлақи он $\tilde{\Delta}a$ -ро бар қимати мутлақи аниқи он x меноманд ва бо δa ишора мекунамд:

$$\delta a = \frac{\tilde{\Delta}a}{|x|}.$$

Зеро қимати аниқи бузургӣ ҳамавақт номуайян аст, бинобар он ба қимати тақрибии он иваз карда мешавад:

$$\tilde{\delta}a = \frac{\tilde{\Delta}a}{|a|}.$$

Хатоии ҳудудии нисбии адади тақрибии a гуфта, адади $\delta a > 0$ - ро мегӯянд, ки $\delta a \leq \tilde{\delta}a$. Маълум аст, ки нисбати хатои ҳудуди мутлақ бар қимати мутлақи тақрибии бузургӣ хатои ҳудудии нисбии адади тақрибро ифода менамояд, яъне

$$\delta a = \frac{\tilde{\Delta}a}{|a|}.$$

Аз ин баробари

$$\tilde{\Delta}a = |a| \cdot \delta a.$$

Хатои ҳудудии нисбро дар бисёр мавридҳо бо фисад муайян мекунамд, яъне

$$\delta a = \frac{\tilde{\Delta}a}{|a|} \cdot 100\%.$$

Мисоли 3. Бигузор $\pi = 3,14$; $\tilde{\Delta}a = 0,002$ бошад. Хатоии ҳудудии нисбӣ

$$\delta a = \frac{0,002}{3,14} \cdot 100\% = 0,00064 \cdot 100\% = 0,064\%.$$

Мисоли 4. Маълум аст, ки дар 0°C массаи як детсиметри кубии об $999,846 + 0,001\text{г}$. мебошад. Хатои ҳудудии мутлақи $\tilde{\Delta}m = 0,001\text{г}$, $m = 999,846\text{г}$. бошад, он гоҳ хатоии нисбӣ

$$\tilde{\delta}m = \frac{0,001}{999,846} \cdot 100\% = 0,001\%$$

мешавад.

§2. Навишти даҳии қимати тақрибии адад

Адади дилхоҳӣ x -ро дар системаи ҳисоби ихтиёрӣ ба намуни бисёраъзогии охиринок ё беохирӣ зерин навиштан мумкин аст:

$$x = \pm(\alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_1 q + \alpha_0 + \alpha_{-1} q^{-1} + \alpha_{-2} q^{-2} + \dots + \alpha_{-k} q^{-k}) \quad (*)$$

ё

$$x = \pm(\alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n} + \alpha_{k-n+1} q^{k-n+1} + \dots). \quad (*)$$

Дар ин ҷо α_i - рақамҳои адади x ($\alpha_i = 0, 1, 2, \dots, 8, 9$), q - асоси системаи ҳисоб, $0 \leq \alpha_i \leq q$, n, k - ягон адади бутун ва $\alpha_k \neq 0$ ($\alpha_{-k} \neq 0$) мебошанд. Масалан, адади $\pi = 3,14\dots$ -ро дар асоси баробарии (*) дар системаи ҳисоби даҳӣ ба намуни

$$\pi = 3,14\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + \dots$$

навиштан мумкин аст.

1. Рақами бозътимод. Рақами a дар навишти даҳи қиммати тақрибии адади x бозътимод бо маънои васеъ номида мешавад, агар хатои мутлақи адади тақрибии x аз воҳиди разряди рақами a зиёд набошад.

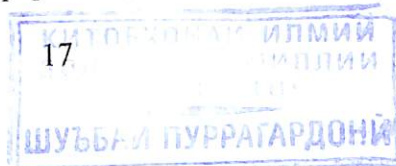
Мисоли 5. Бигузор $x = 7,158 \pm 0,0009$ бошад. Аз баски $\Delta a = 0,0009$ аст, аз ин рӯ ҳамаи рақамҳои адади $a = 7,158$ - қимати тақрибии адади x бозътимод бо маънои васеъ мебошанд.

Рақами a дар навишти даҳии қимати тақрибии бузургӣ бозътимод ба маънои танг номида мешавад, агар хатоии мутлақи бузургӣ аз нисфи воҳиди разряди рақами a зиёд набошад.

Мисоли 6. Бигузор $a = 3,14$ - қимати тақрибии адади $\pi = 3,14159\dots$. Хатои тақриби $\tilde{\Delta}a < 0,00041 < 0,0005 = \frac{1}{2} \cdot 0,001$. Бинобар он ҳамаи рақамҳои тақрибии қимати адади π бозътимод ба маънои танг мебошад.

Рақамҳои бозътимод, ки дар навишти қимати тақрибии адад ноаёнанд, рақамҳои шубҳанок номида мешаванд. Ҳангоми навишти даҳии қимати тақрибии адад танҳо рақамҳои бозътимод навишта мешаванд.

Барои чунин навишт хатои ҳудудии мутлақ якбора муайян карда мешавад. Масалан, фарз мекунем, ки навишти қимати



такрибии адад ҳамаи рақамҳо боэътимод: $a=0,284$; $b=25,74$; $c=16,000214$. Он гоҳ $\Delta a < 0,001$, $\Delta b < 0,01$, $\Delta c < 0,000001$. Агар барои инҳо маълум бошад, ки дар навишти адад ҳамаи рақамҳо боэътимод бо маънои танганд, он гоҳ $\Delta a < 0,0005$, $\Delta b < 0,005$, $\Delta c < 0,0000005$.

2. Тарзи навишти қимати такрибии адад. Харгуна адади a дар системаи дахӣ додасуда ба намуди

$$a = a_0 \cdot 10^n \quad (1)$$

ифода карда мешавад, ки тарзҳои гуногунро соҳиб шуда метавонад. Масалан, $3524 = 35,24 \cdot 10^2 = 3,524 \cdot 10^3 = 0,3524 \cdot 10^4$ ва амсоли инҳо.

Намуди навишти адад нормали аст, агар дар тарзи навишти (1) зарбшавандаи a_0 нобаробарии $a_0 < 1$ -ро қаноат намояд. Дар ин ҳолат зарбшавандаи a_0 мантиқа ном дошта, нишондихандаи дараҷа p -тартиби адад a мебошад. Навишти адад дар намуди нормали якқиммата намебошад. Масалан, адади $34,7$ -ро дар намуди нормалӣ чунин тасвир кардан мумкин аст: $34,7 = 0,347 \cdot 10^2 = 0,0347 \cdot 10^3$.

Намуди навишти адад стандартӣ аст, агар дар намуди навишти (1) зарбшавандаи a_0 нобаробарии $1 \leq a_0 < 10$ -ро қаноат намояд. Адади $34,7$ дар навишти стандартӣ чунин ифода карда мешавад: $3,47 \cdot 10^1$. Навишти адад дар намуди стандартӣ ягона аст.

Навишти адад дар намуди стандарти бо нигоҳдошти рақамҳои боэътимод дар физика, астрономия, техника ва ҳоказо васеъ истифода бурда мешавад.

3. Навишти адади бутун. Навишти қимати такрибии ададӣ бутун махсусияти худро дорад.

Агар ҳамаи ҳудудии мутлақи адад аз воҳид хурд бошад, он гоҳ ҳамаи рақамҳои дар адади бутун навишта шуда боэътимод аст.

Агар ҳамаи такриби аз воҳид калон бошад, он гоҳ қимати такрибии адад ба намуди ададӣ бутун навишта мешавад, ки рақамҳои охири он шубҳанок аст. Ин рақамҳои шубҳанок бо сифр иваз карда мешаванд. Масалан, бигузор $a=34235$ -қимати такрибии баъзе аз ададҳо бо ҳамаи аз 50 зиёдншаванда бошад. Қимати такрибии адади a -ро чунин навишта мешавад:

$a=34200$. Ин намуди навишти адад нишон медиҳад, ки $a=342 \cdot 10^2$ ё ин ки намуди стандарти $a=3,42 \cdot 10^4$.

Мисоли 7. Вазни ангиштсанг дар захирагоҳи шабакаи гармидиҳи тақрибан 1200т муайян карда шуда аст, ки ҳамаи тақрибан ба 100т мерасад. Натиҷаи барқашӣ ба намуди $12 \cdot 10^2$ т навишта мешавад, ки рақамҳои 1, 2 боэътимод бо маънои васеъ мебошанд.

Мисоли 8. Навишти қиммати такрибии ду ададӣ $a_1=231000$ ва $a_2=2310 \cdot 10^2$ баробарқувва нест. Чунки дар навишти адади a_1 ҳамаи рақамҳо боэътимод аст. Вале дар навишти адади a_2 фақат чор рақами аввала боэътимод аст. Агар рақамҳо боэътимод бо маънои васеъ бошанд, он гоҳ $\Delta a_1 = 1$, $\Delta a_2 = 100$.

4. Рақамҳои қимматнок (аҳамиятнок). Рақамҳои ададӣ ба намуди касри дахӣ навишташуда қимматнок ҳисобида мешаванд, агар аз аввали тарафи чап сар карда, ҳамаи рақамҳои он аз сифр фарқкунанда ва боэътимод бошад. Масалан, барои ададҳои 7,36; 0,000207; 564; 0,300 се рақами қимматнок мавҷуд аст, агар ҳамаи ин се рақамҳо боэътимод бошад.

5. Яклуктқунии ададҳо. Дар ҳисобқуниҳои амалӣ бо ададҳои дучор мешавем, ки навишти рақамҳои қимматноки аз ҳад зиёдро дорад. Қисме аз ин рақамҳоро барои нигоҳ доштани тартиби разряд, бо сифр иваз менамоянд. Иҷрои чунин амалиётро яклуктқунии адад меноманд. Натиҷаи яклуктқуниро бо a_1 ишора мекунем.

Бузургии мутлақи фарқи $|a - a_1|$ -ро ҳамаи яклуктқуний мегӯянд, ва адади a_1 -ро чунин интиҳоб менамоянд, ки ҳамаи яклуктқуни хурдтарин бошад.

Мисоли 9. Адади $a=3754,83$ бо саҳеҳии то бутун яклукт карда шавад. Пас аз яклуктқуний агар $a_1=3754$ гирифта шавад, он гоҳ ҳамаи яклуктқуний $|a - a_1| = 0,83$ ва агар $a_1=3755$ қабул шавад, он гоҳ ҳамаи яклуктқуний $|a - a_1| = 0,17$ мешавад, ки нисбати яклуктқунии аввала беҳтар аст.

6. Қоидаи яклуктқуний. Чунин қоидаи яклуктқуний қабул карда шудааст [1]: Агар дар адад x қисми

$$a = \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n} \quad (k < n)$$

қабул шуда бошад, он гоҳ

$$\tilde{x} = \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} q^{k-n}$$

барои $a > \frac{1}{2} \alpha_{k-n} q^{k-n}$ ва

$$\tilde{x} = \alpha_k q^k + \alpha_{k-1} q^{k-1} + \dots + (\alpha_{k-n} + 1) q^{k-n}$$

барои $a < \frac{1}{2} \alpha_{k-n} q^{k-n}$ гирифта мешавад.

Агар $a = \frac{1}{2} \alpha_{k-n} q^{k-n}$ бошад, барои $q=10$ ва α_{k-n} -и чуфт

$$\tilde{x} = \alpha_k 10^k + \alpha_{k-1} 10^{k-1} + \dots + \alpha_{k-n} 10^{k-n},$$

α_{k-n} -и тоқ

$$\tilde{x} = \alpha_k 10^k + \alpha_{k-1} 10^{k-1} + \dots + (\alpha_{k-n} + 1) \cdot 10^{k-n},$$

қабул карда мешавад. Масъалан, адади $x = 14,465$ то ду рақами садяки яклухт карда шавад? Аз баски $0,065 > 0,5 \cdot 10^{-1}$ аст, бинобар он $\tilde{x} = 14,5$ мешавад.

Хамин тавр, дар асоси қоидаҳои яклухткунӣ дар боло оварда ба натиҷаҳои зерин меоем:

а) Агар рақами партофташаванда аз 5 хурд бошад, он гоҳ рақамҳои разряди даҳии боқимонда бетағйир нигоҳ дошта мешавад. Масалан, $3,64342 \approx 3,643$.

б) Агар рақами партофташаванда баробари 5 буда дар байни рақамҳои разряди даҳии пеш партофташуда ғайрисиғриашон мавҷуд бошанд, он гоҳ рақами охири боқимонанда як воҳид зиёд карда мешавад. Масалан, $12,64534 \approx 12,645 \approx 12,65$.

в) Агар рақами партофташаванда баробари 5 буда ҳамаи рақамҳои разряди даҳии пеш партофташуда сифрҳо бошанд, он гоҳ дар мавриди чуфт будани рақами охири боқимонандаи пеш аз он бетағйир монда ҳангоми тоқ будан ба як воҳид зиёд карда мешавад. Масалан, $23,124500 \approx 23,124$.

г) Агар аввалин рақами партофташаванда калон аз 5 бошад, он гоҳ ба рақами охири боқимонда як воҳид илова карда мешавад. Масалан, $13,48769 \approx 13,488 \approx 13,49$.

§3. Хатои натиҷаи амалҳо бар қимати тақрибии адад

1. Масъалаи асосии назарияи ҳисоби тақрибӣ. Дар назарияи ҳисоби тақрибӣ ду намуди асосии масъала дида мешавад: Масъалаи роста ва чаппа (баръакс).

Масъалаи роста ин силсилаи амалҳои мебошанд, ки бар қимати тақрибии адад гузаронида мешавад. Талаб карда мешавад, ки хатои натиҷаи ҳосилшуда баҳо дода шавад. Масалан ҳисобкунӣ аз рӯи формулаи додашуда.

Масъалаи чаппа хатоии натиҷа дода мешавад ва талаб карда мешавад, ки хатоии бузургӣ, ки нисбати онҳо амалҳои иҷро карда мешаванд, ёфта шаванд.

2. Суммаи қимати тақрибии ададҳо. Бигузор $a_1, a_2, \dots, a_n$ қиматҳои тақрибии ададҳо ва $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n$ хатои ҳудудии мутлақии онҳо бошад.

Теоремаи 1. Хатои мутлақии ҳудуди суммаи якчанд ададҳои тақрибӣ ба суммаи хатои мутлақии ҳудудии ҷамъшавандаҳо баробар аст, яъне

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \Delta a_k,$$

ки

$$u = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Барои исботи теоремаи 1 адабиётҳои [5, 6] -ро нигаред.

Мисоли 10. Дода шуда аст $x_1 = 71,27 \pm 0,01$; $x_2 = 35,86 \pm 0,02$.

Суммаи ин ададҳо

$$S = x_1 + x_2 = 107,13 \pm 0,03$$

мебошад, ки дорои хатои ҳудудии

$$\Delta S = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0,03$$

аст. Рақами охири ин ададҳо шубҳанок аст.

3. Зарби ададҳои тақрибӣ. Бигузор a ва b қиматҳои тақрибии ду адад, δa ва δb хатои нисбии ҳудудии онҳо бошанд.

Теоремаи 2. Хатои нисбии ҳудудии ҳосили зарби ду адади тақрибии аз сифр фарқкунанда ба суммаи ҳудуди хатоии нисбии зарбшавандаҳо баробар аст. Агар $u = a \cdot b$ бошад, он гоҳ $\delta u = \delta a + \delta b$ аст.

Барои исботи теоремаи 2 ба адабиётҳои [5, 6] -ро нигаред.

Мисоли 11. Бигузор $x \approx a = 7,12$; $y \approx b = 8,27$ ҳамаи рақамҳо бо маънои васеъ бозътимоданд, бинобар он

$$\Delta a = 0,01; \quad \Delta b = 0,01;$$

$$\delta a = 0,0015; \quad \delta b = 0,0013;$$

$$a \cdot b = 58,8824; \quad \delta ab = \delta a + \delta b = 0,0028.$$

Хатой нисбии ҳосили зарбро $\delta ab = 0,003$ гирифтани мумкин аст.

Хатой мутлақи зарбро ҳисоб мекунем:

$$\Delta ab = a \cdot b \cdot \delta ab$$

он гоҳ $\Delta ab < 60 \cdot 0,003 = 0,18$. Аз ин ҷо $\Delta ab = 0,2$ гирифтани мумкин аст. Бинобар он $x \cdot y = 58,9 \pm 0,2$, ки рақами 9 шубҳанок мебошад.

4. Тақсими ададҳои тақрибӣ.

Теорема 3. Хатой нисбии ҳудудии нисбати ду қимати тақрибии ададҳо ба суммаи хатой нисбии ҳудудии тақсимшаванда ва тақсимкунанда баробар мебошад.

Исбот. Бигузор $a > 0$ ва $b > 0$ ягон ададҳои тақрибӣ, Δa ва Δb мувофиқан хатой мутлақи ҳудудии a ва b бошад. Фарз мекунем, ки $\Delta a < a$ ва $\Delta b < b$, он гоҳ $a - \Delta a > 0$ ва $b - \Delta b > 0$ мебошанд. Ишораи $u = \frac{a}{b}$ -ро қабул мекунем. Мувофиқи таърифи хатойи мутлақ ҳосил мекунем:

$$a - \Delta a < x < a + \Delta a,$$

$$b - \Delta b < y < b + \Delta b.$$

Аз нобаробарии дуҷум пайдо мекунем:

$$\frac{1}{b + \Delta b} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{b - \Delta b}$$

Инро бо нобаробарии якум зарб намуда, ҳосил мекунем

$$\frac{a - \Delta a}{b + \Delta b} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{a + \Delta a}{b - \Delta b}.$$

Аз қисмҳои нобаробарӣ $\frac{a}{b}$ -ро кам карда, пайдо менамоем

$$-\frac{a\Delta b + b\Delta a}{b(b + \Delta b)} \leq \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \leq \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b(b - \Delta b)}$$

Дар маҳраҷи нобаробарӣ Δb -ро ба эътибор нагирифта ($\Delta b \ll b$) баҳои дағали зеринро пайдо мекунем:

$$-\frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2} \leq \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \leq \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}$$

аз ин ҷо мебарояд, ки

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right| \leq \Delta u = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}$$

Ҳар ду қисми баробарии охириро ба u тақсим намуда, пайдо мекунем

$$\frac{\Delta u}{u} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{b} \cdot \frac{b}{b} \right) / u = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Ҳамин тавр, $\delta u = \delta a + \delta b$ -ро ҳосил намудем, ки исботи теорема тасдиқ мекунанд.

Мисоли 12. Бигузор $a = 3,17$; $b = 2,34$ ададҳои тақрибии x ва y , ки ҳамаи рақамҳояш бозътимод бо маънои васеъ аст, он гоҳ

$$\Delta a = 0,01; \quad \Delta b = 0,01;$$

$$\delta a = 0,004; \quad \delta b = 0,005;$$

$$u = \frac{a}{b} = 1,355; \quad \delta u = \delta a + \delta b = 0,004 + 0,005 = 0,009.$$

δu -ро 0,01-қабул кардан мумкин аст.

Хатой мутлақро ҳисоб мекунем:

$$\Delta u = u \cdot \delta u = 1,355 \cdot 0,01 \approx 1,4 \cdot 0,01 = 0,014.$$

он гоҳ $\frac{x}{y} = 1,355 \pm 0,014$.

5. Бадараҷабардорӣ ва аз решабарории адади тақрибӣ.

Теоремаи 4. Хатой нисбии ҳудудии дараҷаи адади тақрибӣ ба ҳосили зарби нишондиҳандаи дараҷа бар хатой нисбии ҳудудии асос баробар аст.

Исбот. Бигузор a қимати тақрибии асоси дараҷа, ба хатой нисбии ҳудудии вай ва n -адади натуралӣ бошанд, он гоҳ

$$u = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n$$

аз теоремаи 2 бармеояд:

$$\delta u = \delta a + \delta a + \cdots + \delta a = n \cdot \delta a$$

аз ин ҷо $\delta u = n \cdot \delta a$ теорема исбот шуд.

Теоремаи 5. Хатой нисбии худудии реша аз адади тақрибӣ ба нисбати худудӣ хатой нисбии адади тахти реша бар нишондиҳандаи реша баробар аст.

Исбот. Бигузор a -қимати тақрибии адади тахтирешагӣ ва δa хатой нисбии худудӣ вай бошад. Ишораи " $a = b$ " -ро қабул намуда, пайдо мекунем

$$a = b^n.$$

Мувофиқи теоремаи 4, $\delta a = n \cdot \delta b$, ки δb -худудӣ хатой нисбии b .
Аз ин ҷо

$$\delta b = \frac{\delta a}{n}$$

ва теорема исбот шуд.

Мисоли 13. Бигузор $a=1,2$ адади тақрибии x бошад. Он гоҳ

$$u = a^3 = 1,2^3 = 1,728; \quad \delta a = \frac{0,1}{1,2} \approx 0,09; \quad \delta u = 3 \cdot 0,09 = 0,27.$$

Хатой мутлақи дараҷаро ҳисоб мекунем:

$$\Delta u = u \cdot \delta u = 1,728 \cdot 0,27 \approx 0,5.$$

Хатой яклухткуниро ба назар гирифта, пайдо мекунем
 $x^3 = 1,7 \pm 0,08$.

6. Баҳои хатой натиҷаи амалиёт (масъалаи роста).

Мисоли 14. Одатан даври лаппиши торро бо формулаи

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ ҳисоб мекунам. Фарз мекунем, ки } \pi = 3,142; l = 120,00 \text{ см}$$

$$g = 9,81 \dots \frac{m}{c^2} \text{ (рақамҳо боэътимод бо маънои тангаш) бошад.}$$

Теоремаи хатой нисбино барои ҳолати хусусии зарб ва реша истифода бурда, пайдо мекунем (хатой коэффитсиенти 2 нол гирифта мешавад):

$$\delta T = \delta \pi + \frac{1}{2}(\delta l + \delta g)$$

Бо назардошти додашудаҳои ибтидоӣ:

$$\Delta \pi = 0,00041; \quad \Delta l = 0,0055; \quad \Delta g = 0,005;$$

$$\delta \pi = 0,00014; \quad \delta l = 0,000042; \quad \delta g = 0,000006.$$

Аз ин ҷо $\delta T = 0,00017$.

Барои баҳо додани хатой мутлақи ΔT ҳисоби дағали T -ро аз формулаи додашуда гузаронида, $T = 2,2$ сония -ро пайдо мекунем. Аз ин ҷо

$$\Delta T = 2,2 \cdot 0,00017 \approx 0,0004.$$

Ҳисобкунии заруриро бо саҳеҳии то се рақами даҳӣ иҷро намуда, пайдо мекунем, ки $T \approx 2,198$ сония.

Мисоли 15. Диагонали C -и росткунҷа ҳисоб карда шавад, агар тарафҳо $a = 3,18 \pm 0,005 \text{ см}$ ва $b = 2,5 \pm 0,05 \text{ см}$ бошад. Барои ин формулаи $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ -ро истифода намоед.

Хатоҳои мутлақ Δc ва нисбӣ δc -ро муайян менамоем.

1) a^2 -ро ҳисоб мекунем.

Дар асоси теоремаи 4 ва формулаи $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$, пайдо мекунем:

$$\delta a^2 = 2\delta a = 2 \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Формулаи $\Delta a = a \cdot \delta a$ -ро истифода карда, меёбем

$$\Delta a^2 = \delta a^2 \cdot a^2 = 2 \cdot \frac{\Delta a}{a} \cdot a^2 = 2 \cdot \Delta a \cdot a = 2 \cdot 0,005 \cdot 3,18 = 0,0318 < 0,032.$$

a^2 -ро ҳисоб намуда, бо назардошти хатой якум пайдо мекунем:

$$a^2 = (3,18)^2 = 10,112 \pm 0,033$$

2) Ба ҳамин монанд b^2 -ро ҳисоб мекунем:

$$\delta b^2 = 2 \cdot \delta b = 2 \cdot \frac{\Delta b}{b}$$

ва

$$\Delta b^2 = \delta b^2 \cdot b^2 = 2 \cdot \frac{\Delta b}{b} \cdot b^2 = 2 \cdot \Delta b \cdot b = 2 \cdot 0,05 \cdot 2,5 = 0,25.$$

Аз ин ҷо $b^2 = (2,5)^2 = 6,25 \pm 0,25$.

3) Суммаи $a^2 + b^2$ -ро меёбем. Теоремаи 1-ро истифода намуда, пайдо мекунем:

$$\Delta(a^2 + b^2) = \Delta a^2 + \Delta b^2 = 0,033 + 0,25 = 0,283 < 0,29.$$

Натиҷаи ҳисобкуниро бо ду рақами даҳӣ пеш аз вергул ва яклухткунӣ хатойро ба назар гирифта, пайдо мекунем

$$a^2 + b^2 = 10,112 + 6,25 = 16,36 \pm 0,29.$$

4) $\sqrt{a^2 + b^2}$ -ро бо назардошти теоремаи 5 ҳисоб мекунем.

$$\delta\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\delta(a^2 + b^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

ва

$$\Delta\sqrt{a^2 + b^2} = \delta\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Барои баҳодиҳии хатой шарт нест, ки қимати калонтарини a ва b бо саҳеҳии аниқӣ ададӣ додашуда гирифта шавад. Қимати онҳоро ба намуди $a=3$ ва $b=2,5$ гирифта мумкин аст. Дар ин ҳолат

$$\Delta\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,29}{\sqrt{3^2 + 2,5^2}} < \frac{0,29}{2 \cdot 3,9} < 0,04$$

Натиҷаро бо чунин саҳеҳӣ менависем:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3,18^2 + 2,5^2} = 4,045$$

Хатоҳои ва рақами аҳамиятнокро ба назар гирифта, $c = 4,05 \pm 0,05$ -ро ҳосил мекунем. Дар ин ҳолат хатоии нисбӣ

$$\delta c = \frac{\Delta c}{c} = \frac{0,05}{4,05} = 0,013 = 1,3\%$$

мешавад.

7. Ҳалли масъалаи чаппа. Қайд кардан ҷоиз аст, ки масъала ғайри як қимата ҳал карда мешавад ва бинобарин математики номуайян мебошад. Барои ҳал намудани масъалаҳо кифоя аст, ки ба хатогии додашудаҳои ибтидоӣ муайяне гузошта шаванд. Масалан, фарз кардан мумкин аст, ки хатогии бузургҳо байни ҳам баробаранд.

Мисоли 16. Радиуси асос ва баландии силиндри ростӣ доиравиҷро бо кадом саҳеҳӣ чен кардан лозим аст, ки ҳангоми ҳисоб намудани ҳаҷми силиндр бо ёрии формулаи $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$ хатой мутлақ аз 100 см^3 зиёд нашавад. Қимати дағали тақрибии R ва H чунин аст: $R \approx 30 \text{ см}$, $H \approx 80 \text{ см}$.

Дар асоси теоремаҳои асосӣ оиди баҳодиҳии хатой нисбӣ, пайдо мекунем:

$$\delta V = \delta \pi + 2 \cdot \delta R + \delta H.$$

Аз баски ба мо хатой мутлақ зарур аст, бинобарин

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H}$$

ва

$$\Delta V = \frac{V}{\pi} \cdot \Delta \pi + 2 \cdot \frac{V}{R} \cdot \Delta R + \frac{V}{H} \cdot \Delta H.$$

Ҳисобкуниҳои заруриро иҷро намуда, пайдо мекунем:

$$\Delta V = 72000 \cdot \Delta \pi + 15200 \cdot \Delta R + 2900 \cdot \Delta H$$

Аз баски $\Delta V = 100$, он гоҳ муодилаи зеринро барои муайянкунии номаълумҳои

$\Delta \pi$, ΔR , ΔH ҳосил мекунем:

$$720\Delta\pi + 152\Delta R + 29\Delta H = 1. \quad (1)$$

Адади π -ро метавонем бо саҳеҳии дилхоҳ гирем. Бинобар он $\pi \approx 3,142$; $\Delta \pi = 0,00041$. Аз ин ҷо $720 \cdot \Delta \pi = 720 \cdot 0,00041 = 0,296$. Аз муодилаи (1) муодилаи

$$152\Delta R + 29 \cdot \Delta H = 0,704$$

-ро пайдо мекунем.

Бигузор R ва H бо саҳеҳии якхела чен шуда бошанд, яъне $\Delta R = \Delta H$, он гоҳ $181 \cdot \Delta R = 0,704$. Аз ин ҷо $\Delta R = \Delta H = 0,003$.

Ҳамин тариқ, агар R ва H бо хатой ҳудудии аз $0,003 \text{ см}$ зиёд набуда чен карда шавад, ҳаҷми V бо хатой аз 100 см^3 зиёд набуда ҳисоб карда мешавад.

Мисоли 17. Агар $a \approx 53 \text{ см}$, $b \approx 6 \text{ см}$ бошад, бо кадом саҳеҳии тарафҳои a ва b -и росткунҷаро чен кардан лозим аст, ки ҳангоми ҳисобкунии диагонали c хатой мутлақ аз $0,5 \text{ см}$ зиёд нашавад.

Дар мисоли 15 нишон дода шуд, ки хатой нисбии ҳудудии

$$\delta c = \frac{a^2 \cdot \delta a + b^2 \cdot \delta b}{a^2 + b^2} \quad (2)$$

мебошад. Дар ин ҷо $\Delta c = 0,5 \text{ см}$ ва Δa , Δb номаълум. Маълум аст, ки масъала математики номуайян аст, зеро Δa ва Δb -ро аз як муодилаи ду номаълум муайян карда мешаванд. Талаб менамоем, ки ченкунии тарафҳои росткунҷа ҳатман бо саҳеҳии якхела гузаронида шавад. Дар ин ҳолат $\delta a = \delta b$ ва масъала ошкор мешавад. Дар баробарии (2) $\delta a = \delta b$ гузошта, пайдо

мекунем $\delta c = \delta a$. Аз ин ҷо $\delta a = \delta b = \frac{\Delta c}{c}$. Қимати ададхоро гузошта, меёбем:

$$\delta a = \delta b = \frac{0,5}{\sqrt{53^2 + 6^2}} = 0,01.$$

Аз ин ҷо $\Delta a = |a| \cdot \delta a = 0,01 \cdot 53 = 0,5$ ва $\Delta b = |b| \cdot \delta b = 0,01 \cdot 6 = 0,06$ мебошанд. Агар хатои мутлақ ҳангоми ченкунии тарафҳо a ва b мувофиқан аз 0,5 см ва 0,06 см нагузаранд, хатои мутлақи ҳисобкунии диагонали c аз 0,5 см зиёд намешавад.

8. Истифодаи усули ҳисоби дифференсиали барои баҳои хатои қимати функцияи элементарӣ. Бигузор функцияи $y=f(x)$ дар ягон порча муайян ва дифференсиронидашаванда бошад. Қайд мекунем, ки агар қимати аргумент тақрибӣ бошад, қимати функция низ тақрибӣ мешавад. Баҳодиҳи ба хатои қимати функция бо усули ҳисоби дифференсиали иҷро карда мешавад.

Аз фосилаи маълум қимати аргумент $x = a + \Delta a$ -ро мегирем, ки a -қимати тақрибии x ва Δa хатои мутлақ он, афзоиши тағйирёбандаи новобаста мебошад. Агар a қимати ибтидои x бошад, афзоиши функция $\Delta y = f(a + \Delta a) - f(a)$ хатои мутлақи бузургии y мешавад. Агар қимати $|\Delta a|$ хурд бошад, афзоиши функцияро бо дифференсиали функция $dy = f'(a) \cdot \Delta a$ тақрибан иваз кардан мумкин аст. Аз ин ҷо

$$\Delta y = f'(a) \cdot \Delta a \quad (3)$$

Ин баробари тақрибӣ буда, ҳамон қадар аниқ аст, чи қадаре $|\Delta a|$ хурд бошад. Чунки $\Delta a = |x - a| \leq \delta a$, δa -хатои мутлақи ҳудудии қимати тақрибии адади a мебошад. Аз баробарии (3) пайдо мекунем:

$$|\Delta y| = |f'(a)| \cdot |\Delta a| \leq |f'(a)| \cdot \delta a$$

Аз ин ҷо $\Delta y = |f'(a)| \cdot \delta a$ -ро қабул кардан мумкин аст. Хатои ҳудудии мутлақ қимати функция ба ҳосили зарби бузургии мутлақ ҳосилаи функция ва хатои ҳудудии мутлақ қимати аргумент баробар аст.

Хатои нисби ҳудудиро муайян менамоем:

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{|f'(x)| \cdot \delta a}{|f(a)|} = \frac{|f'(a)|}{|f(a)|} \cdot |a| \cdot \frac{\delta a}{a}.$$

Аз ин ҷо $\delta y = \left| \frac{f'(a)}{f(a)} \right| \cdot |a| \cdot \delta a$ аст.

Мисоли 18. Хатои ҳудудии мутлақ бузургии $y = \ln x$ -ро ёбед, агар:

а) $x = 12,6 \pm 0,2$; б) $x = 2743 \pm 0,5$ бошад.

Бо назардошти ҳосилаи $(\ln x)' = \frac{1}{x}$:

$$\text{а) } \Delta y = \frac{1}{a} \cdot \Delta a = \frac{1}{12,6} \cdot 0,2 < 0,02;$$

$$\text{б) } \Delta y = \frac{1}{a} \cdot \Delta a = \frac{1}{2743} \cdot 0,5 < 0,0002.$$

Ин мисол нишон медиҳад, ки бо афзоиши x хатои ҳисобкунии $\ln x$ камшаванда аст.

Мисоли 19. Хатои ҳудудии мутлақ қимати функцияи $y = \sin x$ -ро ёбед, агар $x = 28^\circ 4' 30''$ бошад.

Меёбем $\Delta y = |\cos x| \cdot \Delta x$. Аз баски $\Delta x = 30''$, бинобар он хатоиро ба радиан табдил медиҳем, яъне

$$\Delta x = \frac{\pi \cdot 30}{180 \cdot 3600} = \frac{\pi}{6 \cdot 3600} < 0,000164.$$

Аз ҷадвали қимати функцияҳои тригонометрии истифода карда, $\cos 28^\circ 34' < 0,88$ -ро ҳосил мекунем. Ба ҳамин монанд, $\Delta y = 0,88 \cdot 0,000164 = 0,00013$ -ро пайдо мекунем, ки хатои ҳудудии мутлақ қимати функцияро дар нуқтаи $x = 28^\circ 4' 30''$ тасвир менамояд.

Мисоли 20. Масоҳати секунҷаро аз формулаи

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin r$$

ҳисоб кунед, агар $a = 27,3 \text{ см}$; $b = 44,6 \text{ см}$; $r = 64^\circ 26' \pm 2''$ бошад. Хатои нисбии масоҳат S -ро баҳо диҳед. Мувофиқи теоремаи зарби хатои нисби

$$\delta S = \delta a + \delta b + \delta \sin r$$

мебошад. Мувофиқи шарт масъала ҳамаи рақамҳои a ва b бо маъноии танг бозътимоданд. Бинобар он

$$\delta a = \frac{1}{546} < 0,002;$$

$$\delta b = \frac{1}{892} < 0,0012$$

буда, $\delta \sin r$ -ро муайян менамоем. Барои ин кунчи $2'$ -ро ба радиан табдил дода, пайдо мекунем $\Delta r = 0,0006$

$$\delta \sin r = \frac{\sin r}{\cos r} = \operatorname{ctg} 64^{\circ} 26' \cdot \Delta r$$

Аз баски $\operatorname{ctg} 64^{\circ} 26' < \frac{1}{2}$ аст, $\delta \sin r = 0,0003$ ва хатои ҳудудии нисбии масоҳат $\delta S = 0,002 + 0,0012 + 0,0003 = 0,0035 = 0,35\%$ мешавад.

§4. Қоидаҳои наздиккунонӣ

Элементи асосии кори ҳисобиро баҳои хатои натиҷаи амалиёт ташкил медиҳад. Ҳисобӣ ҳатман баҳисоб гирии хатои ва ҳатман баҳисоб нагирифтани хатои фарқ дорад. Ҳисоби ҳатман баҳисобгирии хатои гуфта, ошкор муайян намудани ҳудуди натиҷаи хатоиро мегӯянд. Чунин ҳисобро ҳисобкунии ҳатмии баҳисобгирии хатои бо усули хатои ҳудудӣ меноманд. Барои ёфтани хатой ҳудудии натиҷа теоремаҳои 1-5 ё баҳои хатой бо ёрии ҳисобӣ дифференсиалӣ истифода бурда мешавад.

Баҳои хатой на ҳама вақт шартӣ ҳатмии ҳисоб мебошад. Қоидаи оддии асосноке мавҷуд аст, ки дар муддати кӯтоҳтарин бо саҳеҳии аниқи муайян натиҷаро нишон медиҳад. Ин қоидаро қоидаи аломати боэътимод ё рақами зерҳисобӣ меноманд.

Қоидаи 1. Агар миқдори ҷамъшавандаҳо зиёд набошад, дар қимати тақрибии суммаи алгебравӣ, ки дар навишт ҳамаи рақамҳо боэътимод аст, пас аз вергул миқдори рақамҳои даҳӣ аз аъзои ҷамъшавандаи миқдори касри даҳиаш кам буда муайян карда мешавад. Дар ин ҳолат аъзоҳое, ки миқдори касри даҳиашон зиёд аст, то ба миқдори рақамҳои даҳии камтарин ҷамъӣ як яклухт карда мешаванд.

Мисоли 21. Суммаи $37,8356 + 21,73 + 52,3$ -ро ҳисоб кунед. Миқдори аломати даҳӣ камтаринро пас аз вергул ҷамъшавандаи $52,3$ дорад. Ҷамъшавандаҳои боқимондари яклухт карда, дар онҳо то ду аломат даҳӣ пас аз вергул нигоҳ медорем. Он гоҳ $37,84 + 21,73 + 52,3 = 111,87$. Натиҷаро яклухт намуда, пайдо мекунем $111,9$.

Қоидаи 2. Дар ҳосили зарби ададҳои тақрибӣ, агар миқдори зарбшавандаҳо зиёд набошанд, натиҷаи ҳосили зарб вобаста аз зарбшавандаи миқдори камтарини рақамҳои аҳамиятнок дошта, гирифта мешавад. Дар ин ҳолат зарбшавандаҳои боқимонда то як рақами зиёдати аз зарбшавандаи камтарин рақами аҳамиятнок дошта яклухт карда мешавад.

Мисоли 22. $28,763 \cdot 0,23 \approx 28,8 \cdot 0,23 = 6,624 = 6,6$.

Қоидаи 3. Ҳангоми бадарачабардории ададӣ тақрибӣ (ба квадрат ё куб), инчунин аз решаи квадратӣ ё кубӣ баровардани адади тақрибӣ, натиҷа вобаста аз миқдори рақамҳои аҳамиятнок мавҷудаи асосӣ дараҷа ё ифодаи таҳти решагӣ гирифта мешавад.

Мисоли 23. Ҳисоб кунед: $(2,32)^2$.

Дар навишти адади додашуда се рақами аҳамиятнок мавҷуд аст. Ҳисобкуни заруриро иҷро намуда, $5,3824$ -ро ҳосил мекунем. Дар натиҷа ададери нигоҳ медорем, ки миқдори рақамҳои аҳамиятнокӣ ба миқдори асос баробар аст. Натиҷаро то се рақами аҳамиятнок яклухт намуда, пайдо мекунем $(2,32)^2 \approx 5,38$.

Қоидаи 4. Ҳангоми иҷрои пайдарпаии амалҳо бо ададҳои тақрибӣ дар фосилаи додашуда натиҷаи пайдошуда вобаста аз қоидаҳои болоӣ бо як рақами зиёдати нигоҳ дошта мешавад. Ҳангоми яклухткунии натиҷаи охирин ин рақам партофта мешавад.

Мисоли 24. Ҳисоб кунед $A = xy + \frac{z}{x+y}$ -ро, агар $x=2,84$;

$y=0,38$; $z=27,64$ бошад.

1) $x \cdot y = 2,84 \cdot 0,38$ -ро ҳисоб мекунем. Мувофиқи қоидаи 2 натиҷаи ҳисоби $x \cdot y = 1,08$ мешавад.

2) $x + y = 2,84 + 0,38 = 3,22$. Мувофиқи қоидаи 1 ҳамаи рақамҳо нигоҳ дошта мешавад.

3) $z : (x + y) = 27,64 : 3,22$ -ро ҳисоб мекунем. Ҳисобкунии заруриро иҷро намуда, пайдо мекунем $8,584$. Мувофиқи қоидаи 4 чор рақами аҳамиятнок нигоҳ дошта мешавад, яъне ҳамаи рақамҳо.

4) Натиҷаи 1) ва 3)-ро ҷамъ намуда, адади A -ро муайян мекунем: $A = 1,08 + 8,584 = 9,66$. Натиҷаи амалҳо ва қоидаҳои истифода намуда $A=9,7$ -ро соҳиб мешавем.

Қоидаи 5. Ҳалли масъалаи чаппа. Барои он, ки қимати функцияи $u = f(x, y, \dots)$ п рақами бозътимот дошта бошад, қимати аргументҳо $x, y, \dots$ бояд чандтоғӣ рақами эътимоднок дошта бошад.

Барои он ки дар натиҷаи пайдарпаии амалиётҳои аниқ адади п рақами эътимоднокдор ҳосил шавад, аргументҳо ва ҳамаи натиҷаҳои мобайни $n+1$ –тоқӣ рақамҳои бозътимод гирифта шуда, натиҷа то п рақами эътимоднок яклухт кардан мешавад.

§5. Намудҳои хатой

Хатойҳо ба се намуд чудо мешаванд:

1. Хатойи бартарафнашаванда. Хатое, ки аз ҳисоби ченкуниҳои додашудаҳои аввала пайдо мешавад, бартарафнашаванда ном дорад. Агар мо ҳудуди хатойи додашудаҳои авваларо донем, мувофиқи қоидаҳои додашуда хатойи натиҷаи баҳодиҳиро ҳисоб мекунем, вале онро бартараф карда наметавонем.

2. Хатойи яклухткунӣ. Дар рафти ҳисобкуниҳо яклухткунӣ ададҳо гузаронида мешавад, ки дар натиҷаи иҷрои амалҳо ҳосил мешавад. Дар ҳолатҳои хусусии амалиёти яклухткунӣ додашудаҳои аввала низ иҷро карда мешаванд. Хатое, ки дар натиҷаи яклухткунӣ ададҳо пайдо мешавад, хатойи яклухткунӣ меноманд.

3. Хатойи усулҳо. Бигузур бузургии u аз формулаи $u = f(x, y, \dots)$ ҳисоб карда шавад. Агар истифодаи ин формула ғайри имкон бошад, формулаи $u = f(x, y, \dots)$ –ро бо $u = \varphi(x, y, \dots)$ иваз менамоем, ки рафти ҳисобкуниро оддӣ намуда, натиҷаи ба натиҷаи ҳисобкунӣ аз рӯи формулаи аввала наздикро медиҳад. Иҷрои ҳисобкуниро бо формулаи дуҷум гузаронида мо натиҷаи тақрибиро соҳиб мешавем, ки он новобаста аз интиҳоби аниқӣ додашудаҳо ва ҳисобҳои дурусти ҳамаи амалҳо пайдо мешавад. Ин хатоиро хатойи усул меноманд, яъне хатойи усулҳо – ин хатое, мешавад, ки дар натиҷаи иваз намудани як раванди математики ба дигараш пайдо мешавад. Мисоли оддӣ чунин хатойҳо ҳисобкуни бо ёрии формулаи тақрибӣ мебошад.

Барои додани баҳои аниқ ба натиҷа, ҳамаи раванди ҳисобкуниро таҳлил кардан зарур аст. Яъне ҳамаи хатойҳо ха-

тои усулҳо, бартарафнашаванда ва яклухткунӣ ба эътибор гирифтани лозим аст. Агар $\Delta'u$ -хатойи усулҳо, $\Delta''u$ –бартарафнашаванда, $\Delta'''u$ –яклукткунӣ бошад, он гоҳ хатойи умумӣ

$$\Delta u = \Delta'u + \Delta''u + \Delta'''u.$$

Мисоли 25. Ҳисоб кунед $u = \sqrt[3]{1+x}$ –ро ҳангоми $x \approx 0,238$ (ҳамаи рақамҳо бо маънои танг бозътимоданд) будан. Формулаи тақрибии маълумро истифода мебарем

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$$

Агар $0 < x < 1$ бошад, хатойи ҳисоб аз рӯи формула аз $\frac{1}{16} \cdot x^3$ хурд мешавад. Ин хатойи усул аст, ки дар ҳолати қимати x , аниқ будан низ ҷой дорад. Қимати ҳудудии онро бо $\Delta'u$ ишора мекунем. Дар ин ҳолат

$$\Delta'u = \frac{0,24^3}{16} = 0,000864 \approx 0,0009.$$

Дар асоси теоремаи суммаи хатой ва баҳои хатойи бартарафнашаванда

$$\Delta''u = \frac{1}{3}\Delta x + \frac{1}{9}2x\Delta x.$$

Қимати $x=0,238$, $\Delta x=0,0000$ –ро гузошта, меёбем, ки $\Delta''u=0,0002$. Дар охир қимати $x=0,238$ -ро дар формула гузошта, пайдо мекунем

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 = 1 + 0,0793 - 0,0063 = 1,0730$$

Хатойи яклухткунӣ барои $\frac{1}{3}x = 0,0793$ аз $0,00004$ ва барои $\frac{1}{9}x^2 = 0,0063$ аз $0,00001$ зиёд нест.

Натиҷаи ҳосилшударо яклухт намуда ба хатойи $\Delta'''u=0,0001$ соҳиб мешавем, ки ин аз хатойи яклухткунӣ суммаи аъзоҳо $0,00005$ вобаста аст.

Мувофиқи формулаи хатойи умумӣ

$$\Delta u = \Delta'u + \Delta''u + \Delta'''u = 0,0012$$

мешавад. Аз ин ҷо $\sqrt[3]{1,238} = 1,073 \pm 0,0012$.

§6. Ҳисоббарорӣ аз рӯи формула

Ҳисоббарори муайян намудани қимати бузурги аз рӯи формулаи муайян ин ҳисобкунии қимати функсияи аз як ё якчанд тағйирёбанда вобаста мебошад.

Бигузор бузургии

$$y = \frac{2,75x^2 - 1,25}{x + 3,47}$$

ҳангоми $x=1,42$ ва $x=2,25$ будан, ҳисоб кардан лозим бошад. Пеш аз ҳама алгоритми ҳисоби иҷроӣ амалҳоро тартиб медиҳем. Баъд аз он ҷадвали иҷроӣ ҳар як амалиётро, барои навишти натиҷа тартиб медиҳем.

Алгоритми ҳисоби қимати функсияи додашударо чунин тартиб додан мумкин аст:

- 1) ба қимати x адади 3,47 -ро ҳамроҳ мекунем;
- 2) қимати x -ро ба дараҷаи ду (ба квадрат) мебардорем;
- 3) натиҷаи амалиёти 2)-ро ба адади 2,75 зарб мезанем;
- 4) аз натиҷаи амалиёти 3) адади 1,25-ро кам мекунем;
- 5) натиҷаи амалиёти 4) -ро ба натиҷаи амалиёти 1) тақсим мекунем.

Натиҷаи амалиёти 5) қимати функсияи додашударо ифода менамояд.

Ҷадвали ҳисоби қимати функсия намуди зеринро дорад:

№ б/т	x	$x+3,47$	x^2	$2,75 \cdot x^2$	$2,75x^2 - 1,25$	$y = \frac{2,75x^2 - 1,25}{x+3,47}$
1	1,42	4,89	2,016	5,544	4,292	0,878
2	2,25	5,72	5,0625	13,921875	12,671875	2,2154

БОБИ II НАЗАРИЯИ ИНТЕРПОЛЯТСИЯ

§1. Гузориши умумии масъалаи интерполясионӣ

1. **Максади асосӣ ва гузориши масъала.** Ҳангоми ҳалли масъалаҳои гуногуни характери табиқӣ дошта аз функсияҳои ба тарзӣ ҷадвалӣ додашуда, истифода бурда мешавад. Ба монанди функсияи Лежандр, Бессел, Матйе ва ҳоказо (нигаред [16]). Ҷадвалҳои додашудаи қимати функсияҳо одатан дар натиҷаи гузаронидани таҷрибаҳои амалӣ ва ё натиҷаи ҳисоб мебошад. Агар қимати функсия дар баъзе аз нуқтаҳои порчаи муайян маълум бошад, саволи тарзи дар дигар нуқтаҳо муайян намудани қимати функсия пайдо мешавад. Ба ғайр аз ин ҳолатҳое мешавад, ки функсия ба намуди формула дода шудааст, вале ҳисоби қимати вай бо ин формула мураккаб аст. Бинобарин барои ҳисобкунии қимати функсия аз чунин формулаҳои оддӣ истифода мекунем, ки ҳисоббарориҳои соддаро иҷро намуда, қимати тақрибии функсияро бо саҳеҳии муайяни додашуда дар нуқтаи дилхоҳи порча муайян намоем. Усулҳои истифода ва сохтани чунин формулаҳо бисёр ва гуногун мебошад, ки онро масъалаи оиди интерполятсияи функсияҳо меноманд. Ин масъаларо математикӣ чунин баён менамоянд:

Фарз мекунем, ки дар $n+1$ -то нуқтаҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$ қимати функсияи $y = f(x)$, яъне $y_k = f(x_k)$ ($k=0, 1, \dots, n$) дода шуда аст. Чунин функсияи оддӣ $\varphi(x)$ ёфта шавад, ки шартҳои зеринро қаноат мекунонад:

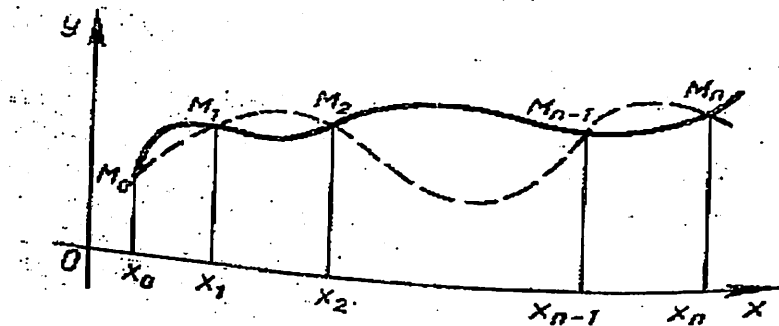
а) дар нуқтаҳои x_k ($k=0, 1, \dots, n$) қимати функсияи $\varphi(x)$ бо қимати функсияи додашудаи $f(x)$ баробар бошад, яъне $\varphi(x_k) = f(x_k) = y_k$ ($k=0, 1, \dots, n$);

б) барои қиматҳои боқимондаи x аз соҳаи муайяни баробарии тақрибии $f(x) \approx \varphi(x)$ иҷро шавад.

Функсияи $\varphi(x)$ функсияи интерполясионӣ, раванди сохтани он интерполятсиякунонӣ, нуқтаҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$, ки дар онҳо қимати функсияи интерполятсионии $\varphi(x)$ бо қимати функсияи додашудаи $f(x)$ баробар аст, гиреҳҳои интерполятсионӣ номида мешаванд.

Мақсади асосии интерполятсия - ҳосил намудани алгоритми ҳисобкунии қимати функсияи $f(x)$ барои қимати x -и дар ҷадвали додашудаҳо набуда мебошад.

2. Интерполятсияи параболӣ. Функсияҳои интерполиатсионӣ одатан аз синфи муайяни функсияҳо интихоб карда мешаванд. Дар бисёр мавридҳо ба сифати чунин функсияҳо бисёраъзогии $F_n(x)$, ки номи бисёраъзогии интерполиатсиониро дорад, гирифта мешавад. Интерполиатсиякунӣ бо ёрии чунин бисёраъзогӣ интерполиатсияи параболӣ номида мешавад. Маънои геометрии он чунин аст, ки графики функсияи додашудаи $f(x)$ бо графики параболҳои бисёраъзогии $F_n(x)$ иваз карда мешавад. Дар ин ҳолат график дорои $n+1$ нуқтаи умумӣ мебошад. Хатӣ қачӣ яклукhti дар расми 1 тасвиршуда функсияи $f(x)$, хати қачи штрихӣ - параболҳои $F_n(x)$ аст.



Расми 1

Гузориши масъалаи интерполиатсияи параболӣро чунин ифода кардан мумкин аст: Бигузор қимати функсияи $f(x)$ дар $n+1$ ғиреҳи интерполятсионии $x_0, x_1, \dots, x_n$ ки $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n$ аст, дода шуда бошад. Талаб карда мешавад, ки функсияи интерполиатсионии параболӣ сохта шавад. Чунин функсияи интерполиатсионӣ одатан бо усулҳои зерин сохта мешавад:

1. Ба сифати функсияи интерполятсионӣ бисёраъзогии

$$F_n(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n \quad (1)$$

ро қабул намуда, талаб менамоем, ки дар ғиреҳҳои интерполиатсионӣ қимати бисёраъзогии интерполиатсионӣ бо қимати функсияи додашуда баробар бошад, яъне

$$F_n(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Барои муайян намудани коэффитсиентҳои бисёраъзогии (1) дар асоси шартӣ (2) чунин системаи муодилаҳо ро месозем:

$$\begin{cases} c_0 x_0^n + c_1 x_0^{n-1} + \dots + c_{n-1} x_0 + c_n = y_0 \\ c_0 x_1^n + c_1 x_1^{n-1} + \dots + c_{n-1} x_1 + c_n = y_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c_0 x_n^n + c_1 x_n^{n-1} + \dots + c_{n-1} x_n + c_n = y_n \end{cases}$$

Ин системаи $n+1$ муодила бо $n+1$ номаълумҳои $c_0, c_1, \dots, c_n$ мебошад. Муайянкунандаи асосии системаро тартиб медиҳем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

Ин муайянкунанда бо номи муайянкунандаи Вандермонд (аз курси алгебраи олий) [9] маълум аст. Аз баски ғиреҳҳои интерполятсионии $x_0, x_1, \dots, x_n$ гуногунанд, $\Delta \neq 0$ мебошад ва система ҳалли ягона дорад. Ин ягонагӣ ва мавҷудияти бисёраъзогии интерполиатсионии $F_n(x)$ -ро ифода менамояд.

Маълум аст, ки барои ҳамагуна фосилаи охириноки маҳдуд маҷмӯи бисёраъзогии алгебравӣ дар синфи функсияи бефосилаи ин порча полином мебошад. Барои ҳақиқати ин гуфтаҳо аз курси таҳлили математики [7] теоремаи Вейерштрассро бе исбот овардан мумкин аст:

Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи маҳдудии $[a, b]$ бефосила бошад, он гоҳ барои ҳаргуна $\varepsilon > 0$ бисёраъзогии $F_n(x)$ -и дараҷаи $n = n(\varepsilon)$ мавҷуд аст, ки барои ҳамагуна $x \in [a, b]$ нобаробарии

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - F_n(x)| < \varepsilon$$

ичро мешавад.

2. Ба сифати функцияи интерполясионӣ бисёраъзогии тригонометрии даврии

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \quad (3)$$

-ро қабул менамоем, ки $2n+1$ коэффисиентҳои ихтиёрии $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ -ро дорад. Талаб карда мешавад, ки барои функцияи $f(x)$ -и қиматаш дар $2n+1$ ғиреҳҳои $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1} \leq 2\pi$ маълум, коэффисиентҳои бисёраъзогии (3) аз шарт

$$T_n(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, 2n+1)$$

ки системаи $2n+1$ муодиларо нисбати a_j ва b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) ҳосил менамояд, муайян карда шавад.

Нишон додан мумкин аст, ки ин система ҳалли ягона дорад. Барои ин тағйирёбандаи x -ро бо $z = e^{ix}$ иваз намуда, аз формулаи Эйлер истифода мебарем. Дар ин ҳолат $\cos jx = \frac{1}{2}(z^j + z^{-j})$, $\sin jx = \frac{1}{2i}(z^j - z^{-j})$ ва

$$T_n(x) = z^{-n}(c_0 + c_1 z + \dots + c_{2n} z^{2n}) = z^{-n} F_{2n}(z)$$

мешавад.

Ҳамин тавр, интерполятсиякунонии $f(x)$ бо бисёраъзогии тригонометрии $T_n(x)$, ба интерполятсиякунонии $z^n f(z)$ ба бисёраъзогии алгебравии $F_{2n}(z)$ бо ғиреҳҳои $z_k = e^{ix_k}$ ($k = 1, 2, \dots, 2n+1$) баробарқувва аст.

Аз курси таҳлили математикӣ [7] маълум аст, ки синфи бисёраъзогии тригонометрӣ $T_n(x)$ дар синфи функцияҳои бифосилаи даврашон 2π бисёраъзогӣ мебошанд. Бинобар он фарз кардан мумкин аст, ки интерполятсияи тригонометрӣ аз интиҳоби ғиреҳҳои дохилӣ барои синфи функцияҳои даврии бифосила дар бисёр мавридҳо бо қадри кофи аниқ интерполятсияшаванда вобаста аст.

3. Дар мавриди умумӣ ба сифати функцияи интерполясионӣ комбинатсияи ҳаттии баъзе аз функцияҳои элементариро қабул менамоем:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(x) \quad (4)$$

ки $\{\Phi_k(x)\}$ -мачмӯъи охириноки функцияи ҳақиқии ҳатти новобаста дар порчаи $[a, b]$ қабул шуда, c_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$) -коэффисиентҳои номаълум аст.

Аз шарт (2) истифода карда, системаи $n+1$ муодилаҳоро барои муайян намудани коэффисиентҳои c_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$) ҳосил мекунем:

$$\sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5)$$

Бигузур, системаи функцияҳои $\Phi_k(x)$ ҳангоми интиҳоби дилхоҳи ғиреҳҳои $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ муайянкунандаи ғайрисифрии системаи муодилаҳои (5)-ро ифода намояд, яъне

$$\Delta(\Phi) = \begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Дар ин ҳолат бо қимати додашудаи y_i ($i = 0, 1, \dots, n$) коэффисиентҳои c_i ($i = 0, 1, \dots, n$) як қимата муайян карда мешаванд. Системаи функцияҳои $\Phi_i(x)$ -ро, ки шарт (6) барои қиматҳои гуногуни $x_i \in [a, b]$ иҷро мешавад, системаи Чебышев дар $[a, b]$ меноманд, дар комбинатсияи ҳаттии дилхоҳи (4) дар нуктаҳои гуногуни порчаи $[a, b]$ на беш аз n реша дошта бошад. Масъалан, $\{x^i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) системаи Чебышев аст.

3. Хатой ва наздикшавии раванди интерполятсия. Фарз мекунем, ки барои функцияи $f(x)$ бисёраъзогии интерполятсионии $F_n(x)$ -и намуди (4), ҷой дорад. Фарқи функцияи $f(x)$ бо бисёраъзогии интерполятсионии $F_n(x)$ -ро, хатой бисёраъзогии интерполятсионии (1) меноманд, яъне

$$R_n(x) = f(x) - F_n(x).$$

Бузургии $F_n(x)$ аз бисёр омилҳо ба монанди хосиятҳои функцияи $f(x)$, ҳамаи параметрҳои интерполятсиякунӣ, ҷойгиршавии нуктаҳои интерполятсиякунӣ x ва ғайраҳо вобаста мебошад. Аз ин рӯ, муоинаи $F_n(x)$ масъалаи душвор аст ва онро барои формулаҳои мушаххаси интерполятсионӣ дида мебароем. Баҳодихии хатой вобаста аз синфи

функсияҳо иҷро карда мешавад. Агар нуқтаҳои интерполятсиякунонӣ x қайдшуда бошанд, хатой якқимата баҳо дода мешавад:

$$\rho(\varepsilon_n) = |R_n(x)| = |f(x) - F_n(x)|.$$

Агар интерполятсиякунӣ дар порчаи $[a, b]$ пурра иҷро карда шавад, он гоҳ хатой $\rho(\varepsilon_n)$ бо усулҳои гуногун баҳо дода мешавад. Агар масъалаи интерполятсиякунонии мунтазами $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ муоина шавад, он гоҳ ба сифати баҳои хатой

$$\rho(\varepsilon_n) = \sup_x |R_n(x)|$$

-ро қабул менамоянд. Агар интерполятсиякунонии функсияи $f(x)$ дар ягон порчаи $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ ва хатой миёнаи квадрати интерполятсиякунӣ иҷро карда шавад, он гоҳ баҳои хатой

$$\rho^2(R_n) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - F_n(x)]^2 dx$$

мешавад.

Масъалаи наздикшавии функсияи интерполятсиониро муоина мекунем. Бигузор функсияи $F_n(x)$ интиҳоб ва қайдшуда бошад ва функсияи $f(x)$ дар ҳамаи нуқтаҳо (гиреҳҳо)-и порчаи $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ имконияти интерполятсия шавандагӣ дошта бошад. Фарз мекунем, ки микдори гиреҳҳо n номаҳдуд афзуншаванда аст ва ҷойгиршавии гиреҳҳо чунон сохта мешавад, ки дар қадами n -уми раванди интерполятсиякунӣ барои n -гиреҳҳои дар сатр n -ум нишондодашуда иҷро мешавад. Масалан сатри n -уми ҷадвали гиреҳҳои беохири ҷадвали секунҷаи зеринро гирифтани мумкин аст:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^1 & & & & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \end{array}$$

Барои баҳо додани наздикшавии раванди интерполятсия функсияи алоҳида гирифта, синфи функсияҳои баъзе хосиятҳои

умумидошта, тадқиқ карда мешавад. Масалан, K синфи функсияи $f(x)$ бо наздикшавии

$$\rho(\varepsilon_n) = \rho[f(x) - F_n(x)] \rightarrow 0$$

ҳангоми $n \rightarrow \infty$ ва $x \in [\alpha, \beta]$ синфи муайяни функсияҳо мебошад.

§2. Фарқҳои охирик ва нисбатҳои фарқӣ

1. Фарқҳои охирик. Фазои хатии R -ҳамаи функсияи ҳақиқии дар тири ҳақиқӣ додашударо муоина мекунем. Барои функсияи $y = f(x) \in R$ функсияи $f(x+h) - f(x)$ -ро мувофиқ мегузоредем, ки h -адади ҳақиқии қайдшуда мебошад. Ин функсия низ ба маҷмӯи хатии R -тааллуқ дорад. Мувофиқи таърифи оператор (функсия) (ниг. [8]), мо операторро муайян намудем, ки онро бо $\Delta f(x)$ ишора мекунем. Яъне

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x). \quad (7)$$

Ба ҳамин монанд, операторҳои $\nabla f(x)$ ва $\delta f(x)$ -ро низ дохил кардан мумкин аст, ки онҳо намуди

$$\nabla y = \nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \quad (8)$$

$$\delta y = \delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (9)$$

-ро доранд.

Маълум аст [8], ки барои оператори A дар фазои хатии R хосиятҳои зерин ҷой дорад:

- 1) $A(c_1x + c_2y) = c_1Ax + c_2Ay$;
- 2) $Cx = Ax + Bx$, агар $C = A + B$ бошад;
- 3) $Cx = A(Bx)$, агар $C = AB$, $(AB)C = A(BC)$ бошад;
- 4) $A^{m+n} = A^m A^n = A^n A^m$, агар $A^{m+n}x = A^m(A^n x) = A^n(A^m x)$

Санҷидан мумкин аст, ки барои операторҳои Δ, ∇ ва δ ҳамаи хосиятҳои дар боло овардашудаи оператор иҷрошаванда аст.

Баробарии (7), (8), (9) фарқи охирикоки тартиби якум ном дошта, худ операторҳои Δ -фарқи рости охирик, ∇ -фарқи чаппаи охирик, δ -фарқи марказии охирикоки тасвир мекунанд.

Дар ин ҷо бо фарқи рости охирик маҳдуд мешавем, чунки барои фарқи чаппа ва марказӣ ҳамаи амалиётҳои дар фарқи рости муоинашаванда яхкел гузаронида мешавад.

Фарқи охирноки қиматҳои функсия гуфта, баробарии

$$\Delta y_k = \Delta f(x_k) = f(x_0 + kh) - f(x_0 + (k-1)h)$$

-ро барои $k = 0, 1, 2, \dots$ меноманд.

Ба ҳамин монанд, фарқҳои охирноки тартиби олий

$$\Delta^i y = \Delta(\Delta^{i-1} y) \quad (i = 2, 3, \dots)$$

ё фарқҳои охирноки тартиби олии

$$\Delta^i y_k = \Delta(\Delta^{i-1} y_k) \quad (i = 2, 3, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

муайян карда мешавад. Масалан, агар $i = 2$ бошад, он гоҳ

$$\Delta^2 y = \Delta(f(x+h) - f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

ё

$$\Delta^2 y_k = \Delta f(x_0 + kh) - \Delta f(x_0 + (k-1)h) = f(x_0 + 2kh) - 2f(x_0 + kh) + f(x_0 + (k-1)h) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, h)$$

Фарқҳои охирнок дорони ҳосиятҳои зерин мебошад:

Ҳосияти 1. Агар

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

бисёраъзогии дараҷаи n бошад, он гоҳ

$$\Delta^m P_n(x) = \begin{cases} n! a_0 h^m, & \text{агар } m = n \text{ бошад} \\ 0, & \text{агар } m > n \text{ бошад.} \end{cases}$$

Ҳосияти 2. Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[x, x+kh]$ дорони ҳосилаи бефосилаи $f^{(k)}(x)$ бошад, он гоҳ баробарии

$$f^{(k)}(x) \approx \frac{\Delta^k f(x)}{h^k}$$

ҷой дорад.

2. Нисбатҳои фарқӣ. Фарқҳои тақсимшударо одатан нисбатҳои фарқӣ мегӯянд. Бигузор қимати функсияи бефосилаи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ дода шуда бошад, яъне барои қиматҳои гуногуни $x_i \in [a, b] (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ қимати функсия $f(x_i)$ дода шуда аст. Аз қиматҳои функсияи $f(x_i)$ истифода бурда, муносибати зеринро тартиб медиҳем:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Ин баробари маънои наздикшавии миёнаи тағйирёбии функсияи $f(x)$ -ро дар порчаи $[x_{i+1}, x_i] (i = 0, 1, 2, \dots)$ ифода менамояд. Формулаи (10) нисбатҳои фарқӣ тартиби якум ном дорад. Аз ин истифода намуда, нисбатҳои фарқии тартиби дуумро тартиб медиҳем:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Нисбатҳои фарқии тартиби дилхоҳро бо ёрии нисбатҳои фарқии тартиби дилхоҳи як дараҷа паст муайян кардан мумкин аст:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}, x_{i+n+1}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n+1}) - f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})}{x_{i+n+1} - x_i}$$

($i = 0, 1, 2, \dots$)

Нисбатҳои фарқӣ дорони ҳосиятҳои зерин аст, ки онҳоро бе исбот меорем (нигар. [2-6]):

1) Барои ҳаргуна n баробарии зерин ҷой дорад

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)},$$

$$\omega'(x_i) = (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

Дар ҳақиқат, агар $n=1$ бошад, он гоҳ

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

2) Нисбатҳои фарқҳои тартиби дилхоҳ нисбат ба аргументҳои худ функсияи симметрӣ мебошад, яъне аз иваз намурадани ҷои гиреҳҳо қимати нисбати фарқӣ дигар намешавад. Масалан, барои $n = 1$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f(x_1, x_0).$$

3) Агар гиреҳҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$ аз порчаи $[a, b]$ ва $f(x)$ дар $[a, b]$ дорони ҳосилаи бефосилаи тартиби n бошанд, он гоҳ дар порчаи $[a, b]$ чунин нуқтаи ξ мавҷуд аст, ки барои он баробарии

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

чой дорад.

Натиҷа. Бигузор $f(x)$ бисёраъзогии дараҷаи n бошад:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Ҳосилаи тартиби n -уми функсия бузургии доимӣ мебошад:

$$f^{(n)}(x) = n! a_0$$

Мувофиқи ҳосияти нисбатҳои фарқӣ, баробарии зерин чой дорад

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \cdot n! a_0 = a_0.$$

3. Вобастагии фарқҳои охиринок ва нисбатҳои фарқӣ. Маълум аст, ки бузургии дилҳохи қимати функсия $f(x_n)$ ба қимати ибтидоии функсия $f(x_0)$ ва нисбатҳои фарқӣ $f(x_0, x_1)$, $f(x_0, x_1, x_2)$, ..., барои нуқтаи ибтидои x_0 муайян карда мешавад. Дар ҳақиқат, барои ҳаргуна $n=1, 2, \dots$ баробарии зерин чой дорад:

$$f(x_n) = f(x_0) + (x_n - x_0) f(x_0, x_1) + (x_n - x_0)(x_n - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Ин баробариро барои $n=1$ ва $n=2$ муоина мекунем. Нисбати фарқии тартиби якумро истифода карда пайдо мекунем:

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_0, x_1).$$

Тартиби дуюмро истифода карда, ҳосил мекунем:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_0) f(x_1, x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0) f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) f(x_0, x_1, x_2).$$

Агар қиматҳои аргумент x мунтазам бошанд, он гоҳ нисбатҳои фарқӣ ба фарқҳои охиринок вобаста мегардад. Бигузор $x_k = x_0 + kh$ ($k=0, 1, \dots$) ва қимати $f(x_k) = f(x_0 + kh) = y_k$ маълум бошад, он гоҳ

$$f(x_0, x_1) = f(x_0, x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

Барои нисбатҳои фарқӣ тартиби дуюм баробарии

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{1}{2h} \left(\frac{\Delta y}{1!h} - \frac{\Delta y_0}{1!h} \right) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

чой дорад.

Ҳамин тавр, пай дар пай барои $m=3, 4, \dots, n$

$$f(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh) = \frac{\Delta^n y_0}{h^n n!}$$

-ро нишон додан мумкин аст.

§3. Бисёраъзогии интерполлятсионии Лагранж

Маълум аст, ки барои ҳар як функсияи $f(x)$ -и дар порчаи $[a, b]$ муайян ва гиреҳҳои интихобии дилҳохи $x_0, x_1, \dots, x_n$ дар байни бисёраъзогии алгебравии дараҷаи на зиёдтар аз n бисёраъзогии интерполлятсионии ягонаи $\varphi(x)$ мавҷуд аст, ки он ба намуди

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Phi_i(x)$$

тасвир карда мешавад. Дар ин ҷо $\Phi_i(x)$ бисёраъзогии дараҷаи n , қаноаткунандаи шарти

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ҳангоми } i \neq j \\ 1 & \text{ҳангоми } i = j \end{cases}$$

мебошад.

Барои муайян намудани $\Phi_i(x)$ чунин бисёраъзогии дараҷаи n -ро интихоб менамоем, ки дар нуқтаҳои $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ ба сифр ва дар нуқтаи x_i ба як баробар шавад. Бигузор

$$\Phi_i(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

бошад. Аз шарти $\Phi(x_i) = 1$, A -ро меёбем:

$$A = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Қимати A -ро истифода намуда, бисёраъзогии интерполлятсионии зеринро ҳосил мекунем:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} f(x_i).$$

Ин бисёраъзогии интерполлятсионии Лагранж ном дошта, чунин ишора карда мешавад:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)} f(x_i), \quad (11)$$

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

$$\omega_n'(x_i) = (x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n).$$

Мисоли 1. Қимати функсияи $y = 2^x$ ба намуди чадвалӣ

x	-1	0	1	2
y	0.5	1	2	4

дода шуда аст. Ҳангоми $n=3$ будан, бисёраъзогии интерполятсионии Лагранҷро созед.

Формулаи (11)-ро барои $n=3$ истифода бурда пайдо мекунем:

$$L_2(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + 1.$$

§4. Саҳеҳии наздикшавии бисёраъзогии интерполятсионии Лагранҷ

Бигузур $F_n(x) = f(x) - L_n(x)$ бошад, он гоҳ

$$f(x) = L_n(x) + F_n(x). \quad (12)$$

Фарқи $F_n(x)$ аъзои боқимондаи бисёраъзогии интерполятсионии Лагранҷ ном дорад. Қимати $F_n(x)$ ба хатоие, ки ҳангоми ивазкунии қимати функсияи $f(x)$ бо қимати бисёраъзогии $L_n(x)$ ҳосил мешавад, баробар аст. Агар функсияи $f(x)$ -ро дар порчаи $[a,b]$ дорои ҳосилаи то тартиби $n+1$ фарз кунем, аъзои боқимондаи бисёраъзогии интерполятсионии Лагранҷ

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \quad (13)$$

мешавад, ки нуқтаи $\xi \in [a,b]$ буда, аз интиҳоби нуқтаи x вобаста аст.

Агар $\max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, бошад, он гоҳ

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

саҳеҳии наздикшавиро ифода менамояд.

Мисоли 2. Саҳеҳии наздикшавии функсияи $f(x) = 2^x$ -ро тавассути бисёраъзогии Лагранҷ $L_3(x)$ дар порчаи $[-1,2]$ муайян намоед.

Ҳосилаи тартиби чоруми функсияро меёбем:

$$f^{(4)}(x) = 2^x (\ln 2)^4.$$

Дар порчаи $[-1,2]$ функсияи 2^x афзоянда аст, аз ин рӯ $0 < 2^x < 4$.
 $M_4 = 4(\ln 2)^4$, $\ln 2 = 0,693$. Пас $M_4 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ ва $\omega_n(x) = x(x+1)(x-1)(x-2)$.

Хатои формула

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{24} |x(x+1)(x-1)(x-2)|.$$

Масалан, қимати наздикшавии $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414$ ва

$$|R_3(\sqrt{2})| \leq 0,024$$

мебошад. Қимати дуруст бошад ба $\sqrt{2} = 1,41421356237$.

§5. Бисёраъзогии интерполятсионии Нютон барои гиреҳҳои номуттазир

Бигузур функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a,b]$ бо тарзи чадвалӣ дода шуда бошад, яъне $y_i = f(x_i)$ барои $x_i \in [a,b]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Сохтани чунин бисёраъзогии интерполятсионие талаб карда мешавад, ки аз камбудихои ба бисёраъзогии Лагранҷ хос буда озод бошад. Барои сохтани чунин бисёраъзогӣ ба бисёраъзогии Лагранҷ $L_n(x)$ чунин формуларо мувофиқ мегузорем:

$$L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \cdots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)].$$

Фарқи $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) -ро муайян менамоем. Ин бисёраъзогии дараҷаи k мебошад. Аз қиматҳои бисёраъзогии интерполятсионии Лагранҷ дар гиреҳҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$ истифода карда, нисбати зеринро тартиб медиҳем

$$L_k(x_i, x_{i+1}) = \frac{L_k(x_{i+1}) - L_k(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Аз баски $L_k(x_i) = f(x_i)$ ва $L_k(x) \approx f(x)$, бинобар он мувофиқи п.2 §3 мавзӯи нисбатҳои фарқӣ

$$L_k(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, x_{i+1})$$

ё

$$L_k(x, x_i) = \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f(x, x_i).$$

мебошад.

Аз ин баробарӣ ва ҳосияти нисбатҳои фарқӣ мебарояд, ки

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) f(x, x_i)$$

ё

$$L_k(x) = f(x_i) + (x - x_i) f(x, x_i).$$

Ин амалиётро пай дар пай барои нисбатҳои фарқии тартиби ду, се, ... такрор намуда, барои нуқтаи x_0 ($i=0$) бисёраъзогии интерполясиониро ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \dots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)] = \\ &= f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \dots + \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n). \end{aligned} \quad (14)$$

Ин баробари бисёраъзогии интерполясионии Нютон барои гиреҳҳои дилхоҳ ҷойгиршуда ном дорад ва онро бо $P_n(x) = L_n(x)$ ишора мекунанд.

Аъзои боқимондаи бисёраъзогии Нютон ба аъзои боқимондаи бисёраъзогии Лагранж монанд мебошад. Онро мувофиқи формулаи (12) чунин тасвир кардан мумкин аст:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f(x; x_0; \dots; x_n).$$

Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ дорои ҳосилаи тартиби $n+1$ бошад, он гоҳ мувофиқи ҳосияти 3-и нисбатҳои фарқӣ

$$f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

мебошад. Дар ин ҷо ξ ягон нуқтаи дохили порчаи $[a, b]$ -и ҳамаи нуқтаҳои $x_0, x_1, \dots, x_n$ x -ро дарбар гиранда мебошад.

§6. Бисёраъзогии интерполясионии Нютон барои гиреҳҳои мунтазам ва аъзои боқимондаи он

1. Бисёраъзогии якуми интерполясионии Нютон ва аъзои боқимондаи он. Бигузор қимати функсияи $y=f(x)$ дар $n+1$ нуқтаи мунтазам ҷойгиршудаи $x_i = x_0 + ih$ дода шуда бошад:

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n	
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_n	

Дар бисёраъзогии интерполясионии Нютон барои гиреҳҳои дилхоҳ ҷойгиршуда (гиреҳҳои номунтазам) (14) ҳосияти нисбатҳои фарқиро барои гиреҳҳои мунтазам истифода мебарем. Дар асоси вобастагии фарқҳои охирик ва нисбатҳои фарқӣ, пайдо мекунем:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ &\quad + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (15)$$

Гузориши $q = \frac{x - x_0}{h}$ -ро истифода карда, пайдарпаии

$$\frac{x - x_i}{h} = \frac{x - x_0 - ih}{h} = q - i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

-ро пайдо намуда, аз (15) ҳосил мекунем:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + q(q-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (16)$$

Ин баробарӣ бисёраъзогии якуми интерполясионии Нютон барои гиреҳҳои мунтазам мебошад. Аъзои боқимондаи он

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

аст.

Дар асоси хатой бисёраъзогии интерполясионӣ барои ҳама $x \in [a, b] = [x_0; x_n]$ $P_n(x) = L_n(x)$, аъзои боқимондаи бисёраъзогии якуми Нютонро

$$R_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

гирифтани мумкин аст. Дар ин ҷо

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Тағйирёбандаи q -ро дохил намуда, пайдо мекунем:

$$R_n(x) = \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Наздиқшавии мутлақи формулаи (16) бо ёрии нобаробарии

$$|R_n(x)| \leq |q \cdot (q-1) \cdots (q-n)| \cdot M_{n+1} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

баҳо дода мешавад, ки

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Формулаи (16) -ро бо роҳи истифодаи бисёраъзогии алгебравӣ низ ҳосил кардан мумкин аст (нигаред [6]).

Мисоли 3. Қимати функсияи $y = \cos x$ ба намуди чадвал дода шуда аст

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	1,00000	0,99500	0,98007	0,95534	0,92106	0,87758	0,82534	0,76484

Қимати $\cos 0,05$ -ро ёфта, хатоиро баҳо диҳед.
Чадвали фарқҳои охирикро тартиб медиҳем:

	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,0	1,00000	-0,00500	-0,00993	0,00016	0,00000
1	0,1	0,99500	-0,01493	-0,00977	0,00016	0,00028
2	0,2	0,98007	0,02470	-0,00961	0,00044	0,00003
3	0,3	0,95537	-0,03431	-0,00917	0,00041	0,00009
4	0,4	0,92106	-0,04348	-0,00876	0,00050	
5	0,5	0,87758	-0,05224	-0,00826		
6	0,6	0,82534	-0,06050			
7	0,7	0,76484				

Агар $x_0=0,0$ бошад, он гоҳ $q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0,05-0,0}{0,10} = 0,5$. Қиматҳои муайяншударо дар формулаи (16) Ҳангоми $n=3$ будан гузошта, ҳосил мекунем:

$$P_3(0,05) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{6}\Delta^3 y_0 = 1,00000 + 0,5 \cdot (-0,00500) + \frac{0,5 \cdot (-0,5)}{2} \cdot (-0,00993) + \frac{0,5 \cdot (-0,5) \cdot (-1,5)}{6} \cdot (0,00016) \approx 0,99875.$$

Ҳосилаи $f^{(4)}(x) = \cos x$ ва $M_4 = \cos 0 = 1$. Буда, хатои мутлақ нобаробарии зеринро қаноат менамояд.

$$|R_3(0,05)| \leq \frac{0,1}{4!} \cdot |0,5 \cdot (-0,5) \cdot (-1,5) \cdot (-2,5)| < 4 \cdot 10^{-6}$$

Аз ин ҷо, ҳамаи рақамҳои натиҷаи ҳосилшуда боэътимод бо маънои васеъаш буда, $\cos 0,05 = 0,99875$ дуруст аст.

2. Бисёраъзогии дуҷуми интерполясионии Нютон ва аъзои боқимондаи он. Бигузур нуктаи интерполясионӣ дар наздикии нуктаи охири чадвал ҷойгир бошад. Дар ин маврид гиреҳҳои интерполясионии бо тартиби камшавӣ, яъне $x_n, x_{n-h}, x_{n-2h}, \dots$ гирифта мешаванд. Аз баробарии (14) ва ҳосияти 2-юм нисбатҳои фарқиро истифода бурда, бисёраъзогии Нютонро ба намуди

$$f(x) = f(x_n) + (x-x_n)f(x_n; x_{n-h}) + (x-x_n)(x-x_{n-h})f(x_n; x_{n-h}; x_{n-2h}) + \dots + (x-x_n)(x-x_{n-h}) \cdots (x-x_{n-(n-1)h})f(x_n; x_{n-h} \cdots x_{n-nh}) + K_n(x)$$

таъсир менамояд.

Мувофиқи §2, баробариҳои

$$f(x_n) = y_n, f(x_n; x_{n-h}) = f(x_{n-1}, x_n) = \frac{\Delta y_{n-1}}{h},$$

$$f(x_n; x_{n-h}; x_{n-2h}) = f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2},$$

$$\dots, f(x_n, x_{n-h}, \dots, x_{n-(k-1)h}) = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}.$$

ҷой доранд. Бинобар ин

$$f(x) = y_n + (x-x_n) \frac{\Delta y_{n-1}}{h} + (x-x_n)(x-x_{n-h}) \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} + \dots + (x-x_n)(x-x_{n-h}) \cdots (x-x_{n-(k-1)h}) \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}$$

мешавад. Гузориши $q = \frac{x - x_n}{h}$, $\frac{x - x_n + (k-1)h}{h} = q + k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$)-ро истифода карда, формулаи

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + q(q+1)\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} + \dots + q(q+1)\dots(q+k-1)\frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!} + R_n(x) \quad (17)$$

-ро ҳосил менамоем. Ин баробарӣ формулаи дуҷуми интерполясионии Нютон ном дорад.

Аъзои боқимондаи бисёраъзогии дуҷуми интерполясионии Нютон аз баробарии

$$F_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

муайян карда мешавад. Хатони мутлақи формулаи дуҷуми Нютон (17) чунин баҳо дода мешавад:

$$|R_n(x)| \leq |q(q+1)(q+2)\dots(q+n)| \cdot M_{n+1} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

ё баҳои тақрибӣ

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y}{(n+1)!} q(q+1)\dots(q+n)$$

Мисоли 4. Қимати функсияи $y = \cos x$ ба намуди чадвал I дода шудааст. Қиматӣ $\cos 0,55$ ва саҳеҳи наздикшавиро муайян намоед.

Аз чадвалӣ I маълум аст, ки қимати $x = 0,55$ ба охири чадвал мувофиқ меояд. Бинобар он бисёраъзогии дуҷуми Нютонро бо тартиби сеюм меорем:

$$P_3(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 y_{n-3}$$

Гиреҳи $x_n = 0,60$ -ро интихоб намуда,
 $q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0,55 - 0,60}{0,1} = -0,5$ -ро ҳосил мекунем. Қиматҳои ёфташуда ва додашудаҳои чадвалро истифода карда, пайдо мекунем:

$$P_3(0,55) = 0,82534 - 0,5 \cdot (-0,05224) + \frac{-0,5 \cdot 0,5}{2} \cdot (-0,00876) + \frac{-0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5}{6} \cdot 0,00044 = 0,85252.$$

Хатони мутлақро баҳо медиҳем: $f^{(4)}(x) = \cos x$, бинобар он $M_4 = \cos 0 = 1$:

$$|R_4(0,55)| \leq 1 \cdot \frac{0,1^4}{24} |(-0,5) \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5| < 4 \cdot 10^{-6}.$$

Ҳамаи рақамҳои натиҷаи ёфташуда боэътимод бо маънои тангаш мебошад. Аз ин ҷо қимати $\cos 0,55 = 0,85252$ мешавад.

§7. Бисёраъзогии интерполясионии барои гиреҳҳои «марказӣ»

1. Бисёраъзогии интерполясионии Гаусс ва аъзои боқимондаи он. Фарз мекунем, ки нуқтаи x дар наздикии гиреҳи мобайнии x_n -и чадвал аз тарафи чап ё рост ҷойгир бошад. Дар ин маврид гиреҳҳои чадвал аз нуқтаи x_n сар карда чуфт-чуфти ($x_n - kh, x_n + kh$) ($k = 1, 2, \dots$) гирифта мешавад. Дар бисёраъзогии интерполясионии Нютон тартиби гиреҳҳоро чунин интихоб мекунем

$$P_n(x) = f(x_n) + (x - x_n)f(x_n; x_n + h) + (x - x_n)(x - x_n - h) \cdot f(x_n, x_n + h, x_n - h) + (x - x_n)(x - x_n - h) \dots (x - x_n - kh) \cdot f(x_n, x_n + h, x_n - h, \dots, x_n - kh) + R_{2k}(x),$$

ки

$$R_{2k}(x) = \frac{(x - x_n)(x - x_n - h) \dots (x - x_n + kh)}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(\xi),$$

мебошад, истифода мебарем. Дар ин ҷо ξ нуқтае, ки гиреҳҳои $x_n - kh, x_n + kh$ ва x -ро дар бар мегирад.

Аз хосияти нисбатҳои фарқӣ ва вобастагии он бо фарқҳои охиринок, яъне

$$f(x_n) = y_n, \quad f(x_n, x_n + h) = \frac{\Delta y_n}{1!h},$$

ва гузориши $q = \frac{x - x_n}{h}, \frac{x - x_n + kh}{h} = q + k; \frac{x - x_n - kh}{h} = q - k$ пайдо мекунем:

$$y(x_n + qh) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} + \dots + \frac{(q-k+1) \dots (q-1)q(q+1) \dots (q+k+1)}{(2k-1)!} \Delta^{2k-1} y_{n-k+1} + \frac{(q-k) \dots (q-1)q(q+1) \dots (q+k)}{(2k)!} \Delta^{2k} y_{n-k+1} + R_{2k}(x) \quad (18)$$

Баробарии (18) бисёраъзогии интерполясионии Гаусс ном дорад. Аъзои боқимондаи бисёраъзогии Гаусс намуди

$$R_{2n}(x) = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+2)}(\xi) q(q^2-1^2)(q^2-2^2) \dots (q^2-n^2)$$

-ро қабул мекунад.

2. Бисёраъзогии интерполясионии Стирлинг ва аъзои боқимондаи он. Агар дар баробарии (18) фарқҳои охириноки тартиби чуфт

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}, \quad \Delta^4 y_{n-2} = \Delta^3 y_{n-1} - \Delta^3 y_{n-2}, \dots$$

-ро истифода барем, бисёраъзогии интерполясионии Стирлинг ҳосил мешавад.

$$y(x_n + qh) = y_n + \frac{q}{1!} \frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)}{4!} \Delta^4 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q^2-1^2) \dots (q^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} \frac{\Delta^{2k-1} y_{n-k} + \Delta^{2k-1} y_{n-k+1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2) \dots (q^2-(k-1)^2)}{(2k)!} \Delta^{2k} y_{n-k} + R_{2k}(x).$$

Дар ин ҷо $R_{2k}(x)$ аъзои боқимондаи бисёраъзогии мебошад, яъне

$$R_{2k}(x) = h^{2k+1} \frac{q^2(q^2-1^2) \dots (q^2-k^2)}{(2k+1)!} y^{(2k+1)}(\xi).$$

3. Бисёраъзогии интерполясионии Бессел ва аъзои боқимондаи он. Бисёраъзогии интерполясионии Нютон барои гиреҳои $(x_n, x_n+h), (x_n-h, x_n+2h), \dots, (x_n-kh+h, x_n+kh)$ намуди зеринро мегирад:

$$f(x) = f(x_n) + (x-x_n)f(x_n, x_n+h) + (x-x_n)(x-x_n-h) \cdot f(x_n, x_n+h, x_n-h) + \dots + (x-x_n+kh-h) \dots (x-x_n-kh+h) \cdot f(x_n, x_n+h, \dots, x_n+kh-h, x_n-kh+h) + (x-x_n+kh-h) \dots (x-x_n-kh+h) \cdot f(x_n, x_n+h, \dots, x_n-kh+h, x_n+kh) + R_{2k-1}(x)$$

Вобастагии нисбатҳои фарқӣ ва фарқҳои охириноки, яъне

$$f(x_n) = y_n, \quad f(x_n, x_n+h) = \frac{\Delta y_n}{1!h},$$

$$f(x_n, x_n+h, x_n-h) = f(x_n-h, x_n, x_n+h) = \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2!h^2}, \dots$$

ва гузориши $q = \frac{x-x_n}{h}$ -ро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$y(x_n + qh) = y_n + \frac{q}{1!} \Delta y_n + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{(q+k-2) \dots (q-k+1)}{(2k-2)!} \Delta^{2k-2} y_{n-k+1} + \frac{(q+k-1) \dots (q-k+1)}{(2k-2)!} \Delta^{2k-1} y_{n-k+1} + R_{2k-1}(x).$$

Барои ҳосил намудани формулаи симметрии нисбати нуқтаи $x_n + \frac{1}{2}h$ дар қисми чапӣ формула, гузоришҳои зеринро истифода менамоем:

$$\frac{1}{2}y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1} - \Delta y_n), \quad \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-1} = \frac{1}{2}(\Delta^2 y_n - \Delta^3 y_{n-1}),$$

$$\frac{1}{2}\Delta^4 y_{n-2} = \frac{1}{2}(\Delta^4 y_{n-1} - \Delta^5 y_{n-2}), \dots$$

Пас аз иҷро намудани ҳисобҳои зарурӣ, формулаи Бесселро пайдо мекунем

$$y(x_n + qh) = \frac{y_n + y_{n+1}}{2} + \frac{q - \frac{1}{2}}{1!} \Delta y_n + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{n-1} + \Delta^2 y_{n+1}}{2} +$$

$$+ \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{n-2} + \Delta^4 y_{n+1}}{2} +$$

$$+ \dots + \frac{(q+k-2) \dots (q-k+1)}{(2k-2)!} \cdot \frac{\Delta^{2k-2} y_{n-k+1} + \Delta^{2k-2} y_{n-k+2}}{2} + R_{2k-1}(x)$$

Дар ин ҷо

$$R_{2k-1}(x) = h^{2k} \frac{(q+k-1) \dots (q-k)}{(2k)!} y^{(2k)}(\xi)$$

аъзои боқимондаи бисёраъзогии интерполясионии Бессел, ки ξ нуқтаи порчаи дохили гирехҳои $x_n - kh + h$, $x_n + kh$, x мебошад.

§8. Экстраполятсия ва интерполятсияи чаппа

1. Экстраполятсия. Бигузор функсияи $y = f(x)$ дар шакли ҷадвал бо қадами доимии h дода шуда бошад.

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_k
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_k

Экстраполятсия гуфта, ҳисобӣ қимати функсияро барои қимати аргументи берун аз соҳаи додашудаи ҷадвал, яъне барои қиматҳои $x < x_0$ ва $x > x_n$ меноманд. Барои муайян намудани қимати функсия дар нуқтаи $x < x_0$ ва $x > x_n$ Бисёраъзогии интерполясионии якум ва дуҷуми Нютонро мувофиқан истифода кардан мумкин аст. Дар ин маврид $q = \frac{x - x_0}{h} < 0$ барои формулаи

якуми интерполятсионии ва $q = \frac{x - x_n}{h} > 0$ барои формулаи дуҷуми интерполятсионии Нютон мешавад.

Мисоли 5. Қимати функсияи $y = \sin x$ барои $x \in [0,3; 0,8]$ ба намуди ҷадвали дода шудааст. Қимати функсияро барои кунчи $x_0 = 0,2$ ва $x = 1$ муайян намоед.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,3	0,2955	0,09390			
0,4	0,3894	0,0900	-0,0039		
0,5	0,4794	0,0852	-0,0048	-0,0009	
0,6	0,5646	0,0796	-0,0056	-0,0008	0,0001
0,7	0,6442	0,0731	-0,0056	-0,0009	-0,0001
0,8	0,7174				

Барои қимати аввалии тартиби сеюми x , формулаи якумӣ Нютонро истифода мебарем. Дар ин маврид $x_0 = 0,3$ ва $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,2 - 0,3}{0,1} = -1$ мешавад. Қимати функсия

$$y = 0,2955 - 0,0939 + \frac{(-1) \cdot (-2)}{2} \cdot (-0,0039) + \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)}{6} \cdot (-0,0009) = 0,1986.$$

Аз ин ҷо $\sin 0,2 = 0,1986$ аст, ки аз қимати ҷадвал як воҳид фарқ дорад.

Акнун барои қимати $x = 1$ формулаи дуҷумӣ интерполятсионии тартиби сеюми Нютонро истифода мебарем. Қиматҳои

$x_n = 0,8$ ва $q = \frac{x - x_n}{h} = 2$ -ро муайян намуда, пайдо мекунем:

$$y = 0,7174 + 2 \cdot 0,731 + \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot (-0,0065) + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{6} \cdot (-0,0009) = 0,8405$$

Аз ин ҷо $\sin 1 = 0,8405$ буда, аз қимати ҷадвал бо як воҳиди даҳӣ фарқ мекунад.

2. Интерполятсияи чаппа. Фарз мекунем, ки қимати функсияи $y = f(x)$ ба намуди ҷадвали дода шуда бошад:

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_k
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_k

Агар функцияи $f(x)$ дар ягон порчаи $[a, b]$ монотонӣ (афзоюнда ё камшаванда) бошад, он гоҳ барои он функцияи баръакси $x = \varphi(y)$ -и монотонӣ (афзоюнда ё камшаванда) мавҷуд аст. Интерполятсияи чаппа аз муайян намудани қимати аргумент аз рӯи қимати ғайригиреҳҳои функция, ки дар порчаи $[a, b]$ меҳобад, иборат мебошад. Аз баски фарқи охириноки қиматҳои функцияи додашуда Δy қимати доими қабул намекунад (ба ғайр аз мавриди хатгӣ вобастагӣ), барои интерполятсияи чаппаи функцияи $x = \varphi(y)$ бисёраъзогии интерполятсионии Лагранҷро истифода мебарем. Дар ин маврид формула намуди зеринро мегирад:

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_{k-1})(y-y_{k+1})\dots(y-y_n)}{(y_k-y_0)(y_k-y_1)\dots(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k+1})\dots(y_k-y_n)} y_k.$$

Аъзои боқимондаи бисёраъзогии интерполятсионӣ

$$\bar{R}_n(y) = \varphi^{(n+1)}(\xi) \frac{(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_n)}{(n+1)!}.$$

Хатои мутлақӣ интерполятсиякунонӣ:

$$|\bar{R}_n(y)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_n)|,$$

ки $M_{n+1} = \max |\varphi^{(n+1)}(y)|$ мебошад.

Мисоли 6. Функцияи $y = f(x)$ дар намуди ҷадвалӣ дода шуда аст. Аз қимати додашудаи функцияи $y = 1,38$ истифода бурда, қимати мувофиқи аргумент x -ро ёбед.

x	2,0	2,5	3,0
y	1,260	1,357	1,442

Бисёраъзогии Лагранҷро барои $n = 2$ меорем:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

Қиматҳои x , ва y , -ро аз ҷадвал ба ин формула гузошта, ҳосил мекунем:

$$L_2(1,38) = 2,626..$$

Аз ин ҷо $\varphi(1,38) = 2,626$ мешавад.

§9. Сплайн-интерполятсия

Интерполятсиякунонии махсуси қисм-қисм полиномиро муоина менамоем, ки байни гиреҳҳои дилхоҳи ҳамсоя бисёраъзогии интерполятсионӣ ба намуди полиноми кубӣ мавҷуд бошад. Коэффитсиентҳои онҳо дар ҳар як интервал аз шартҳои зерин муайян карда мешавад [11]:

$$\begin{aligned} f_i &= y_i, \\ f'(x_i - 0) &= f'(x_i + 0), \\ f''(x_i - 0) &= f''(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Ба ғайр аз ин, дар сарҳад барои $x = x_0$ ва $x = x_n$ шартӣ

$$f''(x_0) = 0, f''(x_n) = 0 \quad (19)$$

гузошта мешавад.

Полиноми кубиро ба намуди

$$f(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_{i-1})^3 \quad (20)$$

мекобем, ки $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ аст.

Аз шартҳои $f_i = y_i$, пайдо мекунем

$$\begin{aligned} f(x_{i-1}) &= a_i = y_{i-1} \\ f(x_i) &= a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \end{aligned} \quad (21)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ҳосилаҳои функция:

$$\begin{aligned} f'(x) &= b_i + 2c_i(x-x_{i-1}) + 3d_i(x-x_{i-1})^2 \\ f''(x) &= 2c_i + 6d_i(x-x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \end{aligned}$$

-ро ҳисоб карда бефосилагии онро барои $x = x_i$ талаб менамоем:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad (22)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аз (21) ва (22) маълум аст, ки микдори умумии коэффитсиентҳои номаълум $4n$, микдори муодилаҳо бошад, ба $4n-2$ баробар аст. Ду муодилаи дигарро аз шарт (19) барои $x = x_0$ ва $x = x_n$ ҳосил мекунем:

$$c_i = 0, c_n + 3d_n h_n = 0.$$

Аз баробарии (22) $d_i = (c_{i+1} - c_i)/3h_i$ -ро ба баробарии (21) гузошта, $a_i = y_{i-1}$ -ро хориҷ намуда, пайдо мекунем:

$$b_i [(y_i - y_{i-1})/h_i] - \frac{1}{3} h_i (c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$b_n = [(y_n - y_{n-1})/h_n] - \frac{2}{3} h_n c_n.$$

Қиматҳои муайян шудаи b_i, b_{i+1} ва d_i -ро дар баробарии якуми (22) гузошта, пас аз иҷро намудани ҳисоб ва табдилдиҳиҳои зарури барои муайян намудани c_i муодилаи фарқии тартиби дуюмро

$$h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (23)$$

бо шарт канорӣ

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0 \quad (24)$$

ҳосил мекунем. Шарт $c_{n+1} = 0$ бо шарт $c_n + 3d_n h_n = 0$ ва муодилаи $c_{i+1} = c_i + d_i h_i$ баробарқувва мебошанд. Муодилаи фарқии (23) бо шарт (24) бо усули гузарониш (прогонка) ҳал карда мешавад.

БОБИ III ДИФФЕРЕНСИРОНИИ АДАДӢ

§1. Гузориши масъала

Ҳангоми ҳалли баъзе аз масъалаҳои амалӣ барои функсияи дар шакли ҷадвал додашуда зуд-зуд ёфтани ҳосилаҳои тартиби муайяни гуногун лозим меояд. Бо сабаби муайян набудани шакли аналитикии функсия дифференсиронии бевосита имкон надорад. Дар ин мавридҳо одатан барои ҳисоби дифференсиалӣ функсияи сохти мураккаб дошта ва ба намуди ҷадвалӣ додашуда, талаби сохтани алгоритмӣ оддӣ бо компютер зуд ҳисобшаванда гузошта мешавад. Чунин, усули ҳисобкунии дифференсиалӣ функсияро дифференсиронии ададӣ мегӯянд.

Дифференсиронии ададӣ барои функсияҳои зерин истифода ва иҷро карда мешавад:

- 1) Функсияҳои қиматшон ба намуди ҷадвалӣ дода шуда;
- 2) Вобастагии функционалии аргумент ва функсия шакли аналитикии мураккабдор.

Усулҳои дифференсиронии ададӣ гуногун мебошад. Яке аз ин гунна усулҳоро муоина менамоем. Фарз мекунем, ки функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ ба намуди ҷадвали ё аналитикии мураккаб дода шудааст. Талаб карда мешавад, ки қимати тақрибии ҳосилаи тартиби k -уми ин функсия дар нуктаи додашудаи x -и порчаи $[a, b]$ ёфта шавад.

Барои ҳалли ин масъала функсияи $f(x)$ -ро ба намуди $\varphi(x) + R(x)$ интиҳоб менамоем, ки дар он $\varphi(x)$ -функсияи интерполясионӣ, $R(x)$ -аъзои боқимондаи функсияи интерполясионӣ мебошанд.

Функсияи $f(x) = \varphi(x) + R(x)$ -ро k -маротиба дифференсиронида, пайдо мекунем:

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Ба сифати қимати $f^{(k)}(x)$ қимати $\varphi^{(k)}(x)$ -ро қабул карда шуда, $R^{(k)}(x)$ -бошад қимати хатоии наздиккунии $f^{(k)}(x)$ ба $\varphi^{(k)}(x)$ мебошад. Ҳангоми ивазкунии функсияи $f(x)$ ба функсияи интерполясионии $\varphi(x)$ талаб карда мешавад, ки аъзои боқимондаи ивазкунӣ (ё наздиккунӣ) $R(x)$ хурдтарин бошад.

Вале барои ҳисоби дифференциалӣ функсияи $R^{(k)}(x)$ ҳама вақт хурд намебошад. Ин масъаларо дар §2 муоина менамоем. Ҳалли масъалаи дифференсиронии ададӣ дар бандҳои дигари ин боб муҳокима карда мешавад.

§2. Ноустувории масъалаи дифференсиронии ададӣ

Масъалаи дифференсиронии

$$f(x) = \frac{du(x)}{dx},$$

ки $u(x) \in C^1[a, b]$ -фазои функсияи бо ҳосилаи бифосилаи тартиби якум дар $[a, b]$ ва $f(x) \in C[a, b]$ -фазои функсияҳои бифосила дар порчаи $[a, b]$ аст, муоина менамоем. Дар ҳар яки ин фазоҳо масофаи байни функсияҳо чунин муайян мешавад:

$$\|u_1(x) - u_2(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |u_1(x) - u_2(x)|.$$

Дар фазои $C^1[a, b]$ ду функсия $u_1(x) = u(x)$ ва $u_2(x) = u(x) + \frac{1}{n} \cos n^2 x$ -ро дида мебароем. Фосилаи байни онҳо барои ҳаргуна $n > N$

$$\|u_1(x) - u_2(x)\| = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{1}{n} \cos n^2 x \right| = \frac{1}{n}$$

соҳиби қимати хурдтарин аст, чунки $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ барои $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Вале функсияи

$$f_1(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{du(x)}{dx}$$

ва

$$f_2(x) = \frac{du_2(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[u(x) + \frac{1}{n} \cos n^2 x \right] = f_1(x) + n \sin n^2 x$$

мешавад. Масофаи байни онҳо

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |n \sin^2 x| = n$$

барои қимати калони n калон аст.

Маълум аст [13], ки барои ёфтани ҳосилаи тартиби k -уми функсияи $f(x)$ муодилаи

$$\int_0^x \frac{1}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} f(t) dt = u(x)$$

истифода мешавад. Дар ин ҷо $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(k-1)}(0) = 0$ буда, муодилаи муодилаи интегралӣ чинси якум мебошад. Ҳалли муодилаи интегралӣ чинси якум ноустувор аст, чунки бо каме тағйир ёфтани функсияи $u(x)$, ҳалли муодилаи $f(x)$ хеле зиёд тағйир меёбад (нигаред ба [13]). Усули муайян намудани ҳалли тақрибии муодилаи интегралӣ чинси як бо усули танзимкунии А.Н. Тихонов дар адабиёти [13] оварда шудааст.

Ҳамин тавр, аз мисолҳои дар боло овардашуда муайян гардид, ки барои функсияҳои дилхоҳи ниҳоят ба ҳам наздики $u_1(x)$ ва $u_2(x) \in C'$ масофаи байни ҳосилаҳои дилхоҳи $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ дар C қимати калонро қабул карда метавонад. Бинобарин, масъалаи дифференсиронии функсия дар фазои C ғайрикорректӣ мебошад. Ғайрикорректӣ будани ин масъаларо низ барои масъалаи дифференсиронии ададӣ баён намудан мумкин аст. Чи тавре, ки дар муқаддима қайд намудем, қимати функсияҳо дар натиҷаи таҳлили таҷрибавӣ муайян шуда, бо саҳеҳии δ , ($|\delta_i| \leq \delta_0$, $i = 0, 1, \dots, n$) дода мешаванд. Наздикшавии қиматҳои ҳосилаи функсияи бо саҳеҳии δ , додашуда, бо саҳеҳии муайяни $\varepsilon > 0$ баҳо дода мешавад. Ҳамаи ин қиматҳои бо саҳеҳӣ додашудаи функсия, ки дар формулаҳо иштирок мекунад, Хангоми ҳисоббарориҳо боз хатоҳои иловагиро зам менамояд. Мувофиқи шартҳои масъалаи дифференсиронии ададӣ бояд, саҳеҳии қимати функсияи дифференсиронидашаванда $\delta_i(\delta_0)$, бо саҳеҳии қимати ҳосилаи ин функсия ε ва қадами тири h (масофаи байни гиреҳҳо x_i) вобастагии муайянро дошта бошанд. Ин вобастагӣ барои масъалаи дифференсиронии ададӣ на ҳамавақт ҷой дорад. Аз ин рӯ ҳисоби дифференсиронии ададӣ бо саҳеҳии ҳалли масъалаи ба худи функсия гузошташуда тақия мекунад.

§3. Формулаи дифференсиронии ададӣ дар асоси бисёрраъзгии Лагранж

Бигузур дар порчаи $[a, b]$ маҷмӯи охиринокҳои нуктаҳои $\omega = \{x_i; x_i < x_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n; x_0 = a, x_n = b\}$ ва қиматҳои функсия $y_i =$

$f(x_i)$ - функцияи тури дода шуда бошад. Барои муайян намудани қимати функцияи $f(x)$ барои нуқтаи дилхоҳи $x_i < x < x_{i+1}$ бисёраъзогии Лагранж $L_n(x)$ сохта шуда бошад. Он гоҳ мувофиқи гуфтаҳои §1

$$f^k(x) = L_n^{(k)}(x) + R^{(k)}(x) \quad 1 \leq k < n$$

мешавад. Агар $k=1$ бошад,

$$f'(x) = L'_n(x) + R^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'_n(x_i)} \cdot \frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)] + R'(x),$$

$$R'(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \cdot \frac{df^{(n+1)}(x)}{dx} \right\}$$

($a < \theta < b$, $\theta = \theta x$, $0 < \theta < 1$) аст.

Ин баробариҳо формулаи дифференсиронии ададӣ дар асоси бисёраъзогии Лагранж мебошад. Ба сифати қимати наздиқкунии $f^{(k)}(x)$ қимати $L_n^{(k)}(x)$ -ро мегиранд, қимати $R^{(k)}(x)$ бошад хатой наздиқкунии $f^{(k)}(x)$ ба ҳосилаи тартиб k -уми бисёраъзогии Лагранж мебошад.

§4. Формулаи дифференсиронии ададӣ барои гиреҳҳои номунтазам

Бигуздор барои функцияи $f(x)$ бисёраъзогии Нютон барои гиреҳҳои номунтазам сохта шуда бошад:

$$f(x) = P_n(x) + R(x),$$

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0; x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n), \quad (1)$$

$$R(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f(x_0; x_1; \dots; x_n).$$

Дар ин ҷо $P_n(x)$ -бисёраъзогии Нютон, $R(x)$ -аъзои боқимондаи он. Барои ҳисоби ҳосилаи тартиби k -уми функцияи $f(x)$ баробарии зерин ҷой дорад:

$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Барои $k=1$, аз баробарии (1) бо истифодаи гузориши $x-x_i = a_i$; $(x-x_i)' = a'_i = 1$ ($i=0,1,\dots,n$), ҳосил мекунем:

$$P'_n(x) = f(x_0; x_1) + (a_0 + a_1)f(x_0; x_1; x_2) + (a_0a_1 + a_0a_2 + a_1a_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \dots + (a_0a_1\dots a_{n-2} + a_0a_1\dots a_{n-3}a_{n-1} + \dots + a_1a_2\dots a_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n), \quad (2)$$

$$R'(x) = \frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] \cdot f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \frac{df(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx}.$$

Мувофиқи таърифи ҳосила ва нисбати фарқӣ

$$\frac{df(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}{dx} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(x'; x_0; \dots; x_n) - f(x; x_0; \dots; x_n)}{x' - x} = \lim_{x' \rightarrow x} f(x'; x; x_0; x_1; \dots; x_n) = f(x; x; x_0; x_1; \dots; x_n)$$

Аз ҳосияти вобастагии нисбати фарқӣ ба ҳосила (нигаред ба §2 боби II), маълум аст, ки

$$f(x; x; x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+1)!}$$

ξ_1 -яке аз нуқтаи байни интервалӣ гиреҳҳои $x; x; x_0; \dots; x_n$ мебошад.

Ҳамин тавр, ҳосилаи аъзои боқимондаи бисёраъзогии Нютонро пайдо мекунем:

$$R'_n(x) = \frac{d\omega_n(x)}{dx} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} + \omega_n(x) \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!},$$

ξ_0 -яке аз нуқтаҳои байни интервалӣ гиреҳҳои $x; x_0; \dots; x_n$, $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ мебошад.

Баробарии (2) -ро дифференсиронида (барои $k=2$ аз баробарии (1)) амалиётҳои дар боло барои муайян намудани ҳосилаи аъзои боқимондаи бисёраъзогии Нютон гузаронидаро такрор намуда, ҳосил менамоем:

$$P''_n(x) = 2f(x_0; x_1; x_2) + 2(a_0 + a_1 + a_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \dots + 2(a_0a_1\dots a_{n-3} + a_0a_1\dots a_{n-1}a_{n-2} + \dots + a_2a_3\dots a_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n) \\ R''(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} \cdot \frac{d^2\omega_n(x)}{dx^2} + 2 \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} \cdot \frac{d\omega_n(x)}{dx} + 2\omega_n(x) \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}$$

Барои $k=m$ аз баробари (1) ба монанди муҳокимарониҳои ҳолатҳои $k=1$ ва $k=2$ барои ҳаргуна $m \leq n$, ҳосил мекунем:

$$P_n^{(m)}(x) = m! f(x_0; x_1; \dots; x_m) + (a_0 + a_1 + \dots + a_m) f(x_0; x_1; \dots; x_{m+1}) + \\ + (a_0 a_1 + a_0 a_2 + \dots + a_m a_{m+1}) f(x_0; x_1; \dots; x_{m+2}) + \dots + (a_0 a_1 \dots a_{n-m} + \\ + \dots + a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n),$$

$$R^m(x) = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{(m-i)!(n+i+1)!} \cdot f^{(n+i+1)}(\xi_i) \omega_n^{(m-i)}(x),$$

ки $\xi_i (i=0, 1, \dots, m)$ - нуктаҳо аз байни интервалҳои гирехҳои $x; x_0, \dots, x_n$ мебошад.

§5. Формулаи дифференсиронии ададӣ барои гирехҳои мунтазам

Бигуздор дар порчаи $[a, b]$ тури мунтазами

$$\omega_h = \{x_i = x_0 + ih, x_0 = a, h = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

ва функсияи турии мунтазам $y_i = f(x_i)$ дода шуда бошад ва барои муайян намудани қимати функсияи $f(x)$ дар нуктаҳои наздикии ибтидо ва охири порчаи $[a, b]$ (яъне $x_i < x < x_{i+1}$)-и ба тури ω_h дохил набуда, бисёраъзогии якум ва дуҷуми Нютонро мувофиқан сохта шуда бошад. Он гоҳ барои ҳисоби дифференсиалӣ функсияи $f(x)$ барои нуктаҳои дилхоҳи наздики аввал ва охири порчаи $[a, b]$ барбарии зерин ҷой дорад:

$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R^{(k)}(x), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ин баробариҳо барои бисёраъзогии якуми Нютон муайян менамояд. Барои бисёраъзогии дуҷуми Нютон ва дигар бисёраъзогиҳои интерполятсионӣ ба ҳамин монанд амалиёт иҷро намуда, ҳосилаҳои тартибҳои гуногунро муайян намудан мумкин аст.

Маълум аст, ки

$$P_n(x) = y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots$$

$$R(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Дар ин ҷо $h = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$, $q = \frac{x - x_0}{h}$, ξ - ягон нуктаи байни қиматҳои $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ мебошад. Фарз мекунем, ки

$f(x) \in C^{(k+2)}[a, b]$ аст, он гоҳ бо истифодаи бинумии Нютон пай дар пай пайдо мекунем:

$$P_n'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right],$$

$$R'(x) = \frac{h^n}{(n+1)!} \left\{ f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{d}{dq} [q(q-1) \dots (q-n)] + q(q-1) \dots (q-n) f^{(n+2)}(\xi) \right\},$$

$$P_n''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right],$$

$$R''(x) = \frac{h^{n-1}}{(n+1)!} \left\{ f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{d^2}{dq^2} [q(q-1) \dots (q-n)] + 2 f^{(n+2)}(\xi) \cdot \frac{d}{dq} [q(q-1) \dots (q-n)] + \right. \\ \left. + q(q-1) \dots (q-n) \cdot f^{(n+3)}(\xi) \right\}$$

.....

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{h^k} \left[\Delta^k y_0 + \frac{kq-1}{k} \Delta^{k+1} y_0 + \dots \right],$$

$$R^{(k)}(x) = \frac{h^{n-k+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{i=0}^k f^{(n+i+1)} \frac{d^{k-i}}{dq^{k-i}} [q(q-1) \dots (q-n)]$$

Дар ин ҷо

$$P_n^{(i)}(x) = \frac{dp_n^{(i-1)}(x)}{dx} = \frac{dp_n^{(i-1)}(x)}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

мебошад.

БОБИ IV ИНТЕГРОНИИ АДАДӢ

§1. Гузориши масъала

Ҳангоми ҳалли масъалаҳои гуногуни характери татбиқи дошта, ба ҳисоби интегралӣ муайян зарурият меафтад. Ҳисоби интегралӣ муайян вобаста аз функсияи зериинтегралӣ иҷро карда мешавад. Маълум аст [7], ки агар функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ дар порчаи додашудаи $[a;b]$ бефосила ва баинтегралӣ $F(x)$ дар порчаи додашудаи $[a;b]$ мавҷуд бошад, он гоҳ интегралӣ муайян аз ин функсия бо ёрии формулаи Нютон – Лейбнитс

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

ҳисоб карда мешавад, ки $F'(x) = f(x)$ аст. Аммо дар амалия формулаи (1)-ро наҳамеша истифода бурдан имкон дорад. Масалан:

1) агар функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ ба намуди чадвалӣ ифода карда нашавад. Мисол бархе аз чунин интегралҳо инҳоянд:

$$\int_a^b e^{-x^2} dx; \quad \int_a^b \frac{\sin x^2}{x} dx; \quad \int_a^b \sqrt[3]{3+x^7} dx.$$

2) агар намуди аналитикии функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ мураккаб бошад, он гоҳ ёфтани функсияи ибтидоии $F(x)$ мушқил ва баъзан ғайриимкон мешавад;

3) агар намуди аналитикии функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ номуайян бошад, аммо қимати он ба намуди чадвал ё ин ки графикӣ дода шуда бошад.

Дар ҳамаи ин ҳолатҳо зарурияти коркарди усулҳои тақрибии ҳисоби интегралӣ муайян бе истифодаи формулаи (1) ба миён меояд. Ҳисоби тақрибии интегралӣ муайян ин усули адабии ҳисоббарории дар асоси як қатор қиматҳои функсияи зериинтегралӣ мебошад.

Мақсади асосии интегронии ададӣ ин қиматҳои интегралӣ муайянро тақрибӣ ба ҳақиқии аниқ соҳиб шудан мебошад.

Барои ин функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ -ро ба функсияи $\varphi(x)$ -и бо ягон саҳеҳии муайяне ба он наздик, ки ҳисоби интегралӣ муайян аз он ягон мушқилӣ надорад, иваз карда мешавад.

Амалиёти ҳисоби қимати тақрибии интегралӣ муайян бо ду роҳ иҷро карда мешавад:

1) аз таърифи интегралӣ муайян [7] бармеояд, ки ҳамавақт суммаи интегралро, ки бо қимати интеграл шартан наздик аст, сохтан мумкин аст. Дар ин маврид ба ҷои ҳисоби интеграл масъалаи ҳисоби суммирониро иҷро кардан ҷоиз аст.

2) функсияи зериинтегралӣ бо ягон усул (бо саҳеҳии зарурӣ) ба функсияи бефосилаи тақрибии чадвалӣ дар порчаи интегронӣ, иваз карда мешавад. Масалан, иваз намудани функсияи зериинтегралӣ ба бисёрраъзогии алгебравӣ, функсияҳои интерполлятсионӣ ва ғайраҳо.

Дар мавриди умумӣ, агар $f(x) = \varphi(x) + R(x)$ бошад, он гоҳ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b R(x)dx$$

мешавад, ки $\varphi(x)$ - функсияи бефосилаи тақрибии соддаи дар порчаи $[a,b]$ бе душворӣ интегронидашаванда аст, $R(x)$ - хатой ивазкунии $f(x)$ ба $\varphi(x)$. Пас қимати тақрибии

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

-ро қабул карда, онро формулаи тақрибии интегронии ададӣ меноманд.

Интегронии ададии интегралӣ яққаратаро формулаи механикии квадратурӣ, дуқаратиро кубатурӣ мегӯянд.

Усулҳои гуногуни интегронии ададӣ мавҷуд аст, ки вобаста аз синфи функсияҳои зери интегралӣ истифода ва баҳо дода мешавад. Баъзе аз ин усулҳоро барои пайдо намудани формулаҳои квадратурӣ дида мебароем. Барои пурра таҳлил намудани мавзӯ ва омӯзиши усулҳои дигари интегронии ададӣ аз адабиётҳои [1-6] истифода бурдан мумкин аст.

Бигузор $[a,b]$ порчаи охиринок ё беохири тири ададӣ бошад ва интегралӣ

$$\int_a^b f(x)p(x)dx$$

-ро муоина менамоем. Дар ин ҷо $f(x)$ – функсияи дар порчаи $[a,b]$ – муайян: $P(x)$ – ягон функсияи мусбати дар порчаи $[a,b]$

дода шуда, ки $\int_a^b P(x)dx > 0$ мебошад. Барои ҳисобӣ қимати ин интегралӣ муайян дар ҳолати умумӣ формулаи квадратурии намуди зерин доштаро месозем:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (2)$$

$$\left(\ddot{e} \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) \right)$$

Бо ин формулаҳо имконияти ёфтани қиматӣ тақрибии интеграл барои синфҳои гуногуни функсияи $f(x)$ ҷой дорад, ки ҳисобӣ интеграл ба ҳисобӣ комбинатсияи хаттии қимати функсияи зериинтегралӣ миқдори охириноки нуктаҳои порчаи $[a,b]$ ё ба ҳисоби комбинатсияи хаттии қимати функсияи зериинтегралӣ ва ҳосилаи он дар ҳамаи нуктаҳо ё баъзе аз ин нуктаҳои порча, иваз карда мешавад. Дар ин ҷо $x_k(x_k^n)$ – гиреҳо,

ададҳои $A_k(A_k^n)$ – коэффисиентҳои формулаи квадратурӣ ном дорад. Формула дорои $2n+1$ параметрҳо мебошад: $n, A_k(A_k^n), x_k(x_k^n) (k=1,2,\dots,n)$. Ин параметрҳоро бояд чунон интихоб намуд, ки формула дорои натиҷаи беҳтарин ҳангоми интегронии $f(x)$ дар синфи функсияи интихобшуда бошад ва аз он вобаста набошад.

$$R_n(x) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

$$\left(\ddot{e} R_n(x) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) \right)$$

аъзои боқимонда ё хатой формулаи квадратурии (2) ном дорад.

§2. Формулаи квадратурии росткунҷаҳо

Бигузур интегралӣ муайяни

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

дода шуда бошад. Аз §1 истифода намуда, амалиётҳои зеринро иҷро менамоем:

1) порчаи $[a,b]$ -ро ба n ҳиссаи баробар тақсим намуда, қадамро меёбем:

$$h = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

2) ба сифати x_0 ибтидои порча a -ро қабул намуда, x_i -ро аз рӯи формулаи

$$x_0 = a,$$

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ҳисоб мекунем.

3) қиматҳои x_i -ро ба функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ гузошта, қиматӣ y_i -ро муайян мекунем:

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

4) интегралӣ муайяни (1)-ро ба суммаи интегралӣ барои функсия $f(x)$ дар порчаи $[a,b]$ иваз менамоем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

5) қиматҳои ҳосилшударо аз нишондодҳои 1) -3) ба формулаи нишондоди 4) гузошта, қимати интегралро меёбем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (2)$$

Ин формулаи квадратурии росткунҷа бо координатаи чап (росткунҷаҳои чап) мебошад.

6) агар қимати интегралро аз рӯи формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (3)$$

муайян кунем, он гоҳ формулаи квадратурии росткунҷа бо координатаи рост (росткунҷаҳои рост) -ро ҳосил мекунем.

Мисоли 1. Аз нишондодҳои 1) -6) истифода бурда: ҳангоми $n=10$ будан

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

-ро ҳисоб намоед. Барои ҳисоби интеграл: пеш аз ҳама h -ро муайян мекунем:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1.$$

Барои иҷро намудани қадамҳои 2) -6) чадвали зеринро тартиб медиҳем, ки ҳар як сутуни чадвал як қадами иҷрои амалиётро дар бар мегирад:

i	x_i	x_{i+1}	$y_i = \frac{1}{x_i + 1}$	$y_i = \frac{1}{x_i + 1}$
0	0	1	1	
1	0,1	1,1	0,90909	0,90909
2	0,2	1,2	0,83333	0,83333
3	0,3	1,3	0,76923	0,76923
4	0,4	1,4	0,71429	0,71429
5	0,5	1,5	0,66667	0,66667
6	0,6	1,6	0,62500	0,62500

Натиҷаи ҳосилшударо ба формулаи (2) ва (3) гузошта, қимати интегралро мувофиқан бо координатаи чап ва рост муайян менамоем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877.$$

Интегралро додашударо аз формулаи Нютон Лейбнитс истифода бурда, ҳисоб намуда, бо қиматҳои тақрибии ёфташуда муқоиса менамоем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln(1+1) - \ln(0+1) \approx 0,693197$$

Натиҷаҳои ҳосилшуда нишон медиҳанд, ки формулаи квадратурии росткунҷа ҳалли тақрибии дағалро ифода мекунад.

§3. Формулаи квадратурии трапетсия

Бигзор $a=x_0$, $b=x_1$ ва

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \quad (1)$$

бошад. Барои ҳосил намудани формулаи трапетсия, амалиётҳои зеринро иҷро менамоем:

1) функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ -ро бо формулаи интерполационии хаттӣ иваз менамоем:

$$f(x) \approx y_0 + t\Delta y_0$$

Дар ин ҷо $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$.

2) тағйирёбандаи x -ро ба тағйирёбандаи t тавассути формулаи $x=x_0+ht$ иваз менамоем, ё $t=\frac{x-x_0}{h}$. Дар ин маврид $dx = hdt$, агар $x=x_0$ бошад, он гоҳ $t=0$, агар $x=x_1$ бошад, $t=1$, чунки $h=(b-a)/n$ аст.

3) мувофиқи натиҷаҳои пешини 1) ва 2) тарафи ростии баробарии (1) дорои қимати зерин мегардад.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \int_0^1 (y_0 + t\Delta y_0)dt = h \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2} \right) = h \frac{y_0 + y_1}{2}. \quad (2)$$

Ин формулаи квадратурии трапетсия мебошад.

Барои ҳосил намудани формулаи умумии квадратурии трапетсия, порчаи интегралро $[a,b]$ -ро ба n ҳиссаи баробар ҷудо намуда, ба ҳар яки ин қисмҳо (порчаҳо)-и ҳосилшуда формулаи (2)-ро татбиқ менамоем:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &= h \frac{y_0 + y_1}{2}, \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx &= h \frac{y_1 + y_2}{2}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx &= h \frac{y_{n-1} + y_n}{2}. \end{aligned}$$

Дар ин ҷо $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), $x_n = b$, $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) ва $h = \frac{b-a}{n}$ мебошанд. Натиҷаҳои қиматҳои интегрониро дар порчаҳои $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0: 1: 2: \dots: n$) ҷамъ намуда, пайдо мекунем:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

Мисоли 2. Барои ҳисоби мисоли 1 формулаи квадратурии трапетсияро истифода намоед. Аз натиҷаҳои ҳисоби мисоли 1, яъне ҷадвали II истифода намуда, ҳосил мекунем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_9 \right) = 0,1 \cdot \left(\frac{1+0,5}{2} + 0,90909 + 0,83333 + 0,76923 + 0,71429 + 0,66667 + \right. \\ \left. + 0,62500 + 0,58824 + 0,55556 + 0,52632 \right) = 0,1 \left(\frac{1,5}{2} + 6,18773 \right) = 0,69373$$

Натиҷаҳои ҳосилшударо бо натиҷаи ҳисоби аналитикии қимати интеграл муқоиса намуда, муайян менамоем, ки ҳатой нисбат ба формулаи квадратурии росткунҷа хеле камтар мебошад.

Ҳамин тавр, муайян гардид, ки формулаи квадратурии трапетсия нисбати формулаи квадратурии росткунҷа саххтар мебошад.

§4. Формулаи Симпсон (параболикӣ)

Гузоришҳои $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ -ро дохил намуда, порчаи $[a, b]$ -и интегрониho ба ду хиссаи баробар тақсим мекунем: $[x_0, x_1]$; $[x_1, x_2]$. Функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ -ро бо формулаи интерполясионии квадрати иваз мекунем, яъне

$$f(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0,$$

ки $t = \frac{x-x_0}{h}$ мебошад. Тағйирёбандаи интегрониро бо тағйирёбандаи t иваз намуда, ҳангоми $x = x_0 + ht$, $dx = hdt$, $t = 0$ агар $x = x_0$ ва $t = 2$ агар $x = x_2$ будан пайдо мекунем:

$$\int_a^b f(x)dx = h \int_0^2 (y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2-t}{2}\Delta^2 y_0)dt.$$

Аз фарқҳои охиринок истифода бурда, тавассути ҳисобкунӣҳои зарурӣ, ҳосил мекунам

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (1)$$

Ин баробари, формулаи Симпсон меноманд.

Барои ёфтани формулаи умумии Симпсон, порчаи $[a, b]$ -и интегрониро ба $2n$ ҳиссаи баробар тақсим намуда, барои ҳар як порчаи $[x_i, x_{i+2}]$ -и ҳосилшуда формулаи (1)-ро мавриди истифода қарор медиҳем:

$$\begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \\ \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}), \end{array}$$

Ҳамаи қиматҳои ҳосилшударо ҷамъ намуда, пайдо меку-
нем:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx =$$

$$= \frac{h}{3} \{y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})\}.$$

Гузоришҳои $\tau_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}$ ва $\tau_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}$ -ро дохил намуда, формулаи квадратурии Симпсонро барои ҳолати умумӣ пайдо мекунем:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + y_{2n} + 4\tau_1 + 2\tau_2)$$

Мисоли 3. Мисоли 1-ро истифода бурда, ҳисоб мекунем.
Натиҷаҳои дар ҷадвали I овардашударо истифода бурда, қимати интегралро бо ёрии формулаи квадратурии Симпсон ҳисоб мекунем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} &= \frac{h}{3} (y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) = \\ &= \frac{0,1}{3} (1 + 0,5 + 4 \cdot (0,90909 + 0,76923 + 0,66667 + 0,58824 + 0,5232) + \\ &\quad + 2 \cdot (0,83333 + 0,71429 + 0,62500 + 0,55556)) = \\ &= \frac{0,1}{3} (1,5 + 4 \cdot 3,45955 + 2 \cdot 2,72818) = 0,69315. \end{aligned}$$

Ин натиҷаро бо қимати аниқии интеграл муқоиса намуда, муайян менамоем, ки хатой бо формулаи квадратураи Симпсон нисбатан камтар мебошад, яъне

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 \approx 0,693147.$$

Ҳамин тавр, маълум намудем, ки дар амалия истифода кардани формулаи квадратурии Симпсон барои ҳисоби қимати интегралӣ муайян нисбат ба формулаи квадратурии росткунҷа ва трапетсия саҳеҳтар мебошад.

§5. Формулаи квадратурии Нютон-Котес

Фарз мекунем, ки барои функсияи додашуда $f(x)$ қимати интеграл

$$J(f) = \int_a^b f(x) dx$$

-ро ҳисоб кардан лозим бошад. Барои муайян намудани қимати интеграл вобаста аз функсияи додашудаи $f(x)$ (аналитики ё ҷадвалӣ) амалиёти заруриро иҷро менамоем:

1) порчаи $[a, b]$ -ро ба n ҳиссаи баробар тақсим намуда, қадами $h = \frac{b-a}{n}$ -ро муайян менамоем;

2) нуқтаҳои мунтазам ҷойгиршудаи порчаи $[a, b]$ -ро бо $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), $x_n = b$ ва қимати функсияро дар ин нуқтаҳо бо

$$y_i = f(x_i) (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

ишорат менамоем:

3) функсияи зеринтегралӣ $f(x)$ -ро бо бисёрраъзогии интерполясионии Лагранж, яъне

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)} f(x_i),$$

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad (1)$$

$$\omega'_n(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n).$$

иваз намуда, баробарии тақрибии квадратурии

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (2)$$

-ро ҳосил мекунем, ки A_i - баъзе аз коэффитсиентҳои доими мебошад;

4) коэффитсиентҳои A_i -ро ба намуди ошкор муайян менамоем. Барои ин дар формулаи (1) ишоратҳои зеринро дохил менамоем:

$$q = \frac{x-x_0}{h}, \quad q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n).$$

5) натиҷаҳоро аз 1) -4) ба баробарии (2) гузошта, пайдо мекунем:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i} y_i dx$$

Аз баски $x=x_0+hq$, $dx=h dq$, он гоҳ

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq.$$

Ишораи

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq$$

-ро дохил намуда, пайдо мекунем

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i, \quad (3)$$

ки $h = \frac{b-a}{n}$ ва $y_i = f(x_0 + ih)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). мебошад.

Баробарии (3)-ро формулаи квадратурии Нютон-Котес ва H_i -ро коэффитсиенти он меноманд.

Коэффисиентҳои H_i дорои хосиятҳои зерин мебошад:

$$1) \sum_{i=0}^n H_i = 1; \quad 2) H_i = H_{n-i}.$$

Исботи ин хосиятҳо душворӣ надорад, ва онро ба хонандагон ҳавола менамоем.

Аз формулаи квадратурии Нютон-Котес (3) ҳангоми $n=1$ будан формулаи квадратурии трапетсия ва $n=2$ будан формулаи Симпсон (ҳамчун ҳолатҳои хусусӣ) ҳосил мешаванд.

Қиматҳои коэффисиентҳои H_i -ро барои $i=1, 2, \dots, 7$ ба намунаи қадвал тасвир менамоем.

i	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2} = 0,5$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{9}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{9}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$

§6. Аъзои боқимондаи формулаҳои квадратурӣ

Маълум аст, ки хатой формулаҳои квадратурии дар мавриди умумӣ аз баробарии

$$R = \int_a^b p(n)f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

муайян карда мешавад. Ин баробариҳо аъзои боқимондаи формулаи квадратурӣ низ меноманд. Аз ин баробарӣ истифода бурда, аъзои боқимондаи формулаҳои квадратурии росткунҷа, трапетсия, Симпсон ва Нютон-Котессро муайян менамоем.

а) аъзои боқимондаи формулаи квадратурӣ росткунҷа

$$R = \int_{x_0}^{x_1} ydx - h(y_0 + y_1) = \int_{x_1}^{x_2} ydx - h(y_1 + y_2). \quad (1)$$

Бигузор $y = f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ бошад. Аъзои боқимонда $R=R(h)$ -ро ҳамчун функсияи қадам h қабул намуда, аз (1) пайдо мекунем

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} ydx - h[y(x_0) + y(x_0 + h)]$$

Ин баробариҳо нисбати тағйирёбандаи h дифференсиронида, ҳосил мекунем

$$R'(h) = h \cdot y'(x_0 + h) = h \cdot y'(x_0 + h).$$

Дар ин ҷо $R(0) = 0$ аст.

Баробарии охириро нисбати тағйирёбандаи h интегронида, теоремаи қимати миёнаро истифода бурда, пайдо мекунем:

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = \int_0^h (t \cdot y'(x_0 + t))dt = -y'(\xi_1) \int_0^h tdt = -\frac{h^2}{2} y'(\xi_1),$$

ки дар ин ҷо $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Ҳамин тавр,

$$R = -\frac{h^2}{2} y'(\xi)$$

-ро пайдо намудем, ки $\xi \in (x_0, x_1)$. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки агар $y'(\xi) > 0$ бошад, он гоҳ қимати тақрибии интеграл бо барзиёдотӣ ва агар $y'(\xi) < 0$ бошад, он гоҳ бо норасоӣ ҳисоб карда мешавад.

б) аъзои боқимондаи формулаи квадратурии трапетсия

$$R = \int_{x_0}^{x_1} ydx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1). \quad (2)$$

Фарз мекунем: ки $y = f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ аст.

Аъзои боқимонда $R = R(h)$ -ро ҳамчун функцияи қадам h қабул намуда аз (2) ҳосил мекунем

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2} [y(x_0) + y(x_0 + h)].$$

Ин баробарино нисбати тағйирёбандаи h ду маротиба пай дар пай дифференсиронида, ҳосил мекунем:

$$R'(h) = \frac{1}{2} [y(x_0 + h) - y(x_0)] - \frac{h}{2} y'(x_0 + h)$$

ва

$$R''(h) = -\frac{h}{2} y''(x_0 + h).$$

Дар ин ҷо $R(0) = 0$ ва $R'(0) = 0$ мебошад.

Баробарии охирино нисбат ба тағйирёбандаи h интегро-нида, теоремаи қимати миёнаро истифода бурда, пай дар пай ҳосил мекунем:

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{h^2}{4} y''(\xi_1),$$

ки $\xi_1 \in (x_0, x_0 + h)$ ва

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{h^3}{12} y''(\xi),$$

ки $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

Ҳамин тавр, формулаи аъзои боқимонда

$$R = -\frac{h^3}{12} y''(\xi)$$

-ро ҳосил намудем, ки $\xi \in (x_0, x_1)$. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки агар $y''(\xi) > 0$ бошад, он гоҳ қимати тақрибии интеграл бо барзиёдотӣ ва агар $y''(\xi) < 0$ бошад, он гоҳ бо норасоӣ ҳисоб карда мешавад.

в) аъзои боқимондаи формулаи квадратурии Симпсон

$$R = \int_{x_0}^{x_2} y dx - \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Бигуздор $y = f(x) \in C^{(4)}[a, b]$ бошад. Ҳисобкуниҳои заруриро ба монанди ҳосилкунии аъзои боқимондаи формулаҳои росткунҷа ва трапетсия иҷро намуда, ҳосил мекунем

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi),$$

ки $\xi \in (x_0, x_2)$. Ин баробари аъзои боқимондаи формулаи квадратурии Симпсон буда, барои бисёраъзогиҳои дараҷаи дуум ва сеюм саҳеҳей мебошад.

Ҳамин тавр, аъзои боқимондаи формулаҳои квадратурии гуногунро муайян намудан мумкин аст (ниг. ба [3]).

Саҳеҳии хатогиҳои формулаҳои квадратурӣ аз руи формулаҳо зерин ҳисоб карда мешавад:

а) барои формулаи росткунҷа $|r| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M_1;$

б) барои формулаи трапетсия $|r| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2;$

в) барои формулаи Симпсон $|r| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M_4.$

Дар ин ҷо $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$, $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Ҳамчун мисол, хатоии мисоли 1-ро тавассути формулаҳои додашуда ҳисоб мекунем:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}.$$

Дар порчаи $[0; 1]$ ҳамаи ҳосилаҳои функцияи монотонӣ мебошанд. Ҳангоми $x=0$ будан, ҳамаи ҳосилаи функция қимати мутлақӣ калонтаринро соҳиб мешаванд. Бинобарин, $M_1=1$; $M_2=2$; $M_4=24$. Ин нишон медиҳад, ки барои хатоҳои формулаҳо нобаробариҳои зерин иҷро мешаванд:

а) формулаи чаппаи росткунҷа $|r| \leq 0,05;$

б) формулаи трапетсия $|r| \leq 0,0017;$

в) формулаи Симпсон $|r| \leq 0,000033$

Натиҷаи қимати интегралро муқоиса менамоем:

1) формулаи росткунҷа 0,71877;

2) формулаи трапетсия 0,69377;

3) формулаи Симпсон 0,69315;

4) формулаи аналитики $\int_0^1 \frac{dx}{n+1} = \ln 2 \approx 0,6931472$.

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки формулаи Симпсон нисбат ба формулаи росткунҷа ва трапетсия сахҳои дурустро медиҳад. Ҳаҷми ҳисоб бо формулаҳои трапетсия ва росткунҷа қариб баробар мебошад. Аммо ҳаҷми ҳисоб бо формулаи Симпсон нисбатан зиёдтар бошад ҳам, натиҷа сахҳ аст.

§7. Формулаи квадратурии Чебишев ва Гаусс

Ҳисоби тақрибии қимати интегралро бо ёрии формулаҳои квадратурӣ дар мавзӯҳои гузашта муоина намудем. Маълум гардид, ки дар порчаи интегронӣ гиреҳҳо мунтазам, функцияи зериинтегралӣ ба бисёраъзогии интерполясионӣ иваз карда мешавад ва хатой баҳо дода мешавад. Мавридҳо ҷой доранд, ки формулаҳо сахҳ мебошанд, яъне бо интиҳоби гиреҳҳо ва коэффицентҳои формулаи квадратурӣ аъзои боқимондаи он ба сифр баробар мешавад. Ин гуна формуларо аввалин маротиба Гаусс ҳосил кардааст.

Бигузор қимати интегралӣ муайян

$$J(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

-ро ҳисоб кардан зарур бошад ва $f(x)$ дар тамоми порчаи $[-1, 1]$ функцияи ба қадри кофи суфта аст. Аз §1, маълум аст, ки

$$J(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i). \quad (1)$$

Коэффицентҳои A_i нуқтаҳои x_i ($i=1, 2, \dots, n$) -ро чунон интиҳоб кардан зарур аст, ки баробарии (1) барои ҳамаи бисёраъзогии $f(x)$ -и тартиби олии N -ум сахҳ бошад.

Аз баски $2n$ -то доимии x_i ва A_i ($i=1:2:\dots:n$) мавҷуд аст, бинобарин бисёраъзогии дараҷаи $2n-1$, $2n$ коэффицентро муайян менамояд, ки тартиби баландтарин дар ҳолати умумӣ $N=2n-1$ аст. Барои ҷой доштани баробарии (1) шарт ва зарур аст, ки

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$$

бошад. Дар ҳақиқат, агар $f(x)=x^k$ бошад, он гоҳ аз баробарии (1) ҳосил мешавад

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1) \quad (2)$$

ва агар $f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k x^k$ бошад, он гоҳ

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k x_i^k$$

Маълум аст, ки

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & \text{агар } k \text{ чуфт бошад,} \\ 0 & \text{агар } k \text{ тоқ бошад.} \end{cases}$$

Бинобарин аз баробарии (2) системаи $2n$ муодиларо барои муайян намудани x_i ва A_i пайдо менамоям:

$$\sum_{i=1}^n A_i = 2,$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1},$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0.$$

Ин система ғайрихаттӣ мебошад, аз ин рӯ ҳал намудани он ба мушкилиҳои математикӣ меорад. Барои раҳо ёфтани аз ин мушкилиҳо аз бисёраъзогии Лежандр истифода бурдан мумкин аст:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right].$$

Гиреҳҳои x_k бояд решаҳои бисёраъзогии Лежандри тартиби n бошад,

$$P_n(x_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Коэффитсиентҳои A_k аз шартҳои ортогоналии бисёраъзогии Лежандр

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0$$

барои $k < n$, ки барои он баробарии

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i^k P_n(x_i) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

ҷой дорад, муайян карда мешавад

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2 p_{n-1}^2(x_k)}.$$

Баробарии (1)-ро формулаи квадратурии Гаусс меноманд, агар x_k —сифри бисёраъзогии Лежандр $P_n(x)$ ва A_k ($k=1:2:\dots:n$) аз шартҳои ортогоналии он муайян шавад.

Дар интегралӣ $J(f)$ ҳудудӣ интегрони аз a то b , яъне аз -1 ва 1 фарқкунанда бошад, формулаи Гаусс ба намуди

$$J(f) = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + \dots + A_n f(t_n)]$$

ифода мешавад, ки

$$t_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

буда, x_i ва A_i решаи системаи муодилаҳои (3) мебошанд.

Мисоли 4. Формулаи квадратурии Гауссро истифода карда, барои $n=4$ қимати

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

ро ҳисоб кунед.

Ҳал. Дар ин ҷо $a=0$, $b=1$ аст. Мувофиқи формулаи (3)

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{b-a}{2} [A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + A_4 f(t_4)]$$

мебошад. Аргументҳои t_i ва коэффисентҳои A_i ($i=1, 2, 3, 4$) —ро ҳисоб мекунем:

$$t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_1 = 0,5 - 0,430568 = 0,069432;$$

$$t_2 = 0,330009; t_3 = 0,669991; t_4 = 0,930568;$$

$$A_1 = A_4 = 0,347855; A_2 = A_3 = 0,652145.$$

Аз ин ҷо

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = 1,218951.$$

Дар баробарии (1) A_i — коэффитсиентҳои доими мебошанд. Чебишев пешниҳод менамояд, ки гиреҳҳои x_i -ро чунон интихоб бояд кард, ки коэффитсиентҳои A_i , байни ҳам баробар бошанд ва формулаи квадратурии (1) барои ҳамаи бисёраъзогии тартиби n камтар аз n аниқ бошад.

Аз баробарии (1) ҳангоми $f(x) \equiv 1$ ва $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ будан, ҳосил мекунем:

$$A = \frac{2}{n}.$$

Ҳамин тавр, формулаи квадратурии Чебишев ро дар шакли

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (3)$$

ҳосил менамоем. Барои муайян намудани гиреҳҳои x_k дар баробарии (3) функсияи $f(x) = x, x^2, \dots, x^k$ —ро чунон истифода бурда мешавад, ки ҳисоби интеграл тавассути формулаи квадратурии Чебишев аниқ бошад.

Ҳисобкуниҳои заруриро пас аз гузоштани $f(x)$ иҷро намуда, барои муайян намудани x_k системаи муодилаҳоро пайдо мекунем:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \frac{n}{3} \\ t_1^3 + t_2^3 + \dots + t_n^3 = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = \frac{n[1 - (-1)^{n+1}]}{2(n+1)} \end{cases} \quad (4)$$

Ҳалли ин система барои ёфтани решаи муодилаи алгебра-
вии дараҷаи n оварда мешавад. Дар ҳақиқат, аз система барои
 $n=2$ муодилаи квадратии

$$2t_2^2 = \frac{2}{3} \quad \left(2t_1^2 = \frac{2}{3} \right)$$

-ро ҳосил мекунем, ки

$$t_1 = t_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Дар мавриди ҳудуди интегрони аз a то b будан, формулаи
Чебишев ба намуди

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)] \quad (5)$$

ифода мешавад, ки

$$t_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

буда, x_i -решаи системаи муодилаҳои (4) мебошад.

Мисоли 5. Қимати

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{5} (\sin t_1 + \sin t_2 + \sin t_3 + \sin t_4 + \sin t_5),$$

ки $t_i = \frac{\pi}{4} (1 + x_i)$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) мебошанд. Аз системаи муодилаҳо
барои $n=5$,

$$-x_1 = x_5 = 0,832498; \quad -x_2 = x_4 = 0,374541; \quad x_3 = 0$$

ва $t_1 = 7^\circ 32' 26''$; $t_2 = 28^\circ 08' 74''$;

$$t_3 = 45^\circ 00'; \quad t_4 = 61^\circ 51' 26''; \quad t_5 = 82^\circ 27' 74''; \quad \sin t_1 = 0,13117; \quad \sin t_2 = 0,47171;$$

$$\sin t_3 = 0,70711; \quad \sin t_4 = 0,88176; \quad \sin t_5 = 0,99135.$$

Ҳамин тавр,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{10} \cdot 3,18311 = 1,000004$$

аст.

§8. Ҳисобӣ тақрибии қимати интегралӣ ғайри хос

Дар амалия ба ҳисобкунии интегралҳои p ба p мешавем,
ки ҳудуди интегронӣ ё функсияи зериинтегралӣ дар пор-
чаи интегронӣ ба беохир майл доранд. Барои ҳисобӣ ингуна
интегралҳо усулҳои гуногун мавҷуд аст, ки вобаста ба ҳудуди
интегронӣ ва функсияи зериинтегралӣ истифода бурда меша-
вад.

Аз курси таҳлили математики [7] маълум аст, ки

$$\int_a^b f(x) dx$$

интегралӣ хос аст, агар ҳудуди интегрони $[a:b]$ охирик ва
функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ дар $[a:b]$ бефосила бошад. Дар
мавриди иҷро нагардидани аққалан яке аз ин шартҳо интеграл
ғайрихос аст. Ин ҳолатҳо дида мебароем.

а) дар аввал тақрибӣ ҳисобкунии интегралӣ ғайрихоси
 $\int_a^b f(x) dx$ -ро бо ҳудуди интегрони беохир, ки $f(x)$ -функсияи бе-
фосила дар $[a,b]$ аст, муоина менамоем. Фарз мекунем, ки
 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ наздикшаванда бошад.

Барои ҳисоби интегралӣ ғайрихоси наздикшаванда бо
сахҳии додашудаи ϵ онро ба намуди

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx$$

ифода мекунем. Дар асоси наздикшаванда будани интегралӣ
ғайри хос, адади b -ро чунон интихоб менамоем, ки нобароба-
рии

$$\left| \int_b^\infty f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

иҷро шавад.

Интегралӣ хоси $\int_a^b f(x) dx$ -ро бо яке аз формулаҳои квадрату-
рии дар мавзӯҳои гузашта овардашуда, масалан формулаи

Симпсон ҳисоб менамояд. Агар S – қимати тақрибии интеграл бо яке аз формулаҳои квадратури бо саҳеҳи $\frac{\varepsilon}{2}$, яъне

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ҳисобшуда бошад, он гоҳ

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx - S \right| < \varepsilon.$$

Ҳамин тавр, барои ҳисоб намудани интегралӣ ғайри хос ҳудуди интегронири чудо намуда, дар яке аз порчаи охириноки интегронӣ формулаи квадратурӣ истифода бурда мешавад.

б) агар функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ дар порчаи интегрони $[a, b]$ бефосила набошад, он гоҳ усули чудо намудани нуктаи махсусро истифода кардан мумкин аст. Бигузор $\int_a^b f(x) dx$ ҳисоб

карда шавад, ки $f(x)$ -функсия махсуси дар баъзе аз нуктаҳои порчаи $[a, b]$ ба беохир майлқунанда аст. Барои қимати тақрибии ин гуна интегралро ҳисоб намудан усули ба зарби ду функсия ва суммаи ду функсия чудо кунӣ функсияи зериинтегралӣ $f(x)$ -ро истифода мебаранд:

1) Функсияи $f(x)$ –ро ба намуди $f(x) = \varphi(x) \cdot P(x)$ оварда, формулаи квадратуриро дар боло оварда шударо истифода мебарем. Дар ин ҷо $\varphi(x)$ -функсияи дар порчаи $[a, b]$ маҳдуд ва ҳосилаи бефосилаи тартиби муайяндор, $P(x) > 0$ дар $[a, b]$ мебошад. Масалан, барои ҳисоби интегралӣ

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}},$$

функсияи $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ -ро ба намуди

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

таъсир кардан мумкин аст. Формулаи квадратуриро истифода бурда, қимати интегралро тақрибан аз баробарии

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \approx \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}},$$

ҳисоб кардан мумкин аст.

2) функсияи $f(x)$ –ба намуди суммаи ду функсия $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ оварда, усулҳои интегронири ададиро истифода мебарем. Дар ин ҷо $\varphi(x)$ -функсияи хос ва дорои ҳосилаҳои бефосила аст, $\psi(x)$ -функсияи оддии интегронидашаванда мебошад. Масалан, барои ҳисоби интегралӣ

$$\int_{-1}^1 \frac{2dx}{1-x^2},$$

функсияи $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$ -ро ба намуди

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

чудо карда, усулҳои интегронири метавонем истифода барем.

§9. Усули Л.В. Канторович (чудокунӣ махсусият)

Интегралӣ

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-c)^\alpha}$$

-ро, ки $c \in [a, b]$, $0 < \alpha < 1$ ва $\varphi(x)$ функсияи бефосила дар порчаи $[a, b]$ мебошад, муоина мекунем.

Бигузор функсияи $\varphi(x) \in C^{(m-1)}[a, b]$, яъне $\varphi(x)$ дорои ҳосилаҳои бефосилаи то тартиби $m+1$ дар порчаи $[a, b]$ бошад, он гоҳ барои ин функсия қатори Тейлорро истифода бурдан мумкин аст, яъне функсияи $\varphi(x)$ -ро ба қатори Тейлор бо дараҷаи $(x-c)$ чудо намудан мумкин аст, ки

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

Дар ин маврид

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-c)^\alpha} dx = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!} \int_a^b (x-c)^{k-\alpha} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!(k+1-\alpha)} [(b-c)^{k+1-\alpha} - (a-c)^{k+1-\alpha}]$$

Ин тарзи муайянкунии қимати интегралӣ ғайри хосро усули Кантрович меноманд.

§10. Ҳисоби тақрибии интегралӣ каратӣ

Интегралӣ каратӣ

$$\iint_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1)$$

-ро муоина мекунем, ки $f(x_1, \dots, x_n)$ -функсияи бисёртағйирёбандаи бефосилаи муайян дар соҳаи D мебошад.

Барои ҳисобӣ қимати ин интегралӣ каратӣ соҳаи интегронии D -ро ба якчанд соҳаҳо ҷудо намуда, гиреҳҳои туриро тартиб медиҳем. Қимати функсияи бисёртағйирёбандаи зеринтегралиро дар ин тур муайян намуда, формулаи зеринро ҳосил мекунем

$$\iint_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^l \dots \sum_{k=0}^r A_i B_j \dots C_k f(x_1^i, x_2^j, \dots, x_n^k) + R(f)$$

Ин баробари формулаи кубатурӣ, нуктаҳои $(x_1^i, x_2^j, \dots, x_n^k) \in D$ гиреҳҳои турӣ, ададҳои $A_i, B_j, \dots, C_k$ коэффитсиентҳо ва $R(f)$ -ро аъзои боқимондаи формулаи кубатурӣ меноманд.

Агар соҳаи D -росткунҷаи $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ бошад, он гоҳ интегралӣ (1)-ро ба намуди

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx \approx \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy,$$

ки $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ ва $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ навишта, формулаи квадратуриро истифода мебарем. Дар натиҷаи пайдарпай татбиқ намудани формулаи квадратурӣ, формулаи кубатуриро пайдо мекунем.

БОБИ V НАЗАРИЯИ НАЗДИККУНОНӢ

§1. Гузориши масъала

Маълум аст, ки барои функсияҳои дар порчаи $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ ва $g(x)$ мафҳуми наздикшавӣ ҷой дорад, яъне барои ҳар гуна $\varepsilon > 0$ интервале мавҷудаст, ки барои ҳамаи нуктаҳои ин интервал нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Мавридҳои ҷой доранд, ки қимати функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ -ро дар нуктаҳои гуногун бо саҳеҳии $\varepsilon > 0$ ҳисоб кардан зарур меояд. Саволе пайдо мегардад, ки оё қимати ин функсияҳо наздиканд ё онҳоро наздиккунондан мумкин аст. Намуди аналитикии функсияро бо саҳеҳии $\varepsilon > 0$ бо функсияи оддӣ иваз намуда, қимати функсияи соддаро ба сифати қимати функсияи аввалаи додашуда қабул менамоем. Дар боби II ба функсияи интерполясионӣ наздиккунии функсияи $f(x)$ -ро омӯхтем. Наздиккунии қимати интегралро бо саҳеҳии $\varepsilon > 0$ дар асоси иваз намоии функсияи зеринтегралӣ ба функсияи оддӣ, яъне ба бисёр-аъзогии интерполясионӣ дар боби IV нишон дода шуд. Ин наздиккунии дониستاني қимати функсия, яъне ҷадвали қиматҳои $f(x)$ -ро талаб мекард. Агар $f(x)$ ба таври аналитикӣ дода шуда бошад ва формулаи $f(x)$ оддӣ набошад, он гоҳ ёфтани $f(x_i)$ ҳисобкуниҳои зиёдеро талаб мекунад. Бинобарин истифодаи усулҳои дигари наздиккунии зарур меояд, ки ба омӯзиши яке аз онҳо шурӯъ менамоем.

Маълум аст, ки маҷмӯи функсияҳои $f(x)$ -и танҳо бо саҳеҳии ε фарқкунанда дорои элементҳои гуногун мебошанд. Пас, муайян намудани чунин элементҳои ин маҷмӯъ, ки ба $f(x)$ ба қадри имкон наздиктарин буда, шакли оддиро дорад, дар амалия ғойаданок мебошад. Гузориши чунин масъалаҳои характери амалӣ доштаро меорем:

1. Бигузур F - фазои метрикӣ ва U зермаҷмӯи ин маҷмӯъ бошад. Агар α, β элементҳои маҷмӯи F бошанд, он гоҳ масофаи байни ин элементҳо $\rho(\alpha, \beta)$ аст. Барои ҳар гуна элементи $f \in U$ ва ададӣ додашудаи $\varepsilon \geq 0$ чунин эле-

менти $\varphi \in U$ ёфта шавад, ки масофаи байни ин элементҳо $\rho(f, \varphi) \leq \varepsilon$, бошад.

2. Барои $f \in U$ чунин $\varphi_0 \in U$ ёфта шавад, ки

$$\rho(f, \varphi_0) = \inf_{\varphi \in U} \rho(f, \varphi)$$

бошад. Элементи φ_0 -элементи наздиккунии беҳтарин ва бузургии $\rho(f, \varphi_0)$ -бузургии наздиккунии беҳтарин ном доранд.

Элементи φ , ки ҳалли масъалаи 1 аст, элементи наздиккунии номида мешавад. Усули ҳалли масъалаи наздиккуниро дар ин боб меомӯзем.

§2. Ҳисоби қимати функцияҳо

1. Ҳисоби суммаи қатор. Бигузур функцияи $f(x)$ дар баъзе аз интервалҳо ба намуди қатори дараҷагӣ

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots, \quad (1)$$

ки коэффитсиентҳои аз баробарии

$$c_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

ҳисоб карда мешаванд, дода шуда бошад.

Қимати дилхоҳи x -ро аз интервали наздикшавӣ интихоб менамоем. Қимати функция дар ин нуқта ба суммаи қатори ададӣ баробар мебошанд. Ба сифати қимати наздикшавии функцияи $f(x)$ суммаи n аъзои аввала гирифта мешавад:

$$f(x) \approx S_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n. \quad (3)$$

Дар ин маврид ҳаттои наздикшавии қимати функция ба суммаи аъзои боқимондаи қатор $R_n(x)$ баробар буда, ҳаттои мутлақ бошад чунин аст:

$$|\Delta f(x)| = |R_n(x)| = |f(x) - S_n(x)|. \quad (4)$$

2. Баҳои наздикшавии ҳаттои қимати функция.

Баҳои наздикшавии функцияи $S_n(x)$ намуди (3) аз ду намуди ҳаттои: партофтани аъзои боқимонда $R_n(x)$ ва ҳисобкунии $S_n(x)$ иборат аст. Агар бузургии мутлақии ин ҳаттоиҳо мувофиқан ба ададҳои ε_1 ва ε_2 баҳо дода шавад, он гоҳ ҳаттои мутлақии

қимати наздикшавии функция тақрибан ба адади $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ баҳо дода мешавад.

Барои ҳаттои ҳисоббарорӣ ε_2 баҳо додан аз мавзӯи назари ҳаттоиҳо истифода бурда мешавад (ниг. ба боби I). ε_1 ҳаттои $R_n(x)$ бо усули маълуми курси таҳлили математикӣ [7] баҳо дода мешавад. Баъзе аз ин баҳодихоро муоина мекунем,

1) Баҳои ҳаттои қатори аломатбадал. Бигузур қимати функцияи $f(x)$ дар нуқтаи x қатори ададӣ аломатбадали

$$f(\bar{x}) = c_1 - c_2 + c_3 - \dots + (-1)^{n-1}c_n + \dots$$

-ро ифода намояд, ки барои n -и дилхоҳ $c_n > 0$ ва шарти кифоягии наздикшавии қатор,

$$a) c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq c_{n+1} \geq \dots,$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0,$$

ичро гардад. Дар ин маврид ҳаттои мутлақ $|R_n(x)|$ баробарии тақрибии намуди (3) нобаробарии

$$|R_n(x)| \leq c_{n+1} \quad (5)$$

-ро қаноат менамояд.

2) Баҳои ҳаттои қатори доимиаломат. Бигузур

$$f(\bar{x}) = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қимати функцияи $f(x)$ дар нуқтаи $\bar{x}$ буда, барои ҳаргуна ададӣ натуралии n $a_n > 0$ ва

$$R_n(\bar{x}) = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$$

аъзои боқимондаи қатор бошад.

Агар қатори

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

мавҷуд бошад, ки барои ҳамаи ададӣ натуралии k : а) ҳамаи $b_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$); б) $a_{n+k} \leq b_k$; в) суммаи он σ маълум бошад, он гоҳ

$$|R_n(\bar{x})| \leq \sigma.$$

3) Аъзои боқимондаи формулаи Маклорен. Фарз мекунем, ки функцияи $f(x)$ ба намуди қатори Маклорен

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

дода шуда бошад. Чи тавре, ки маълум аст (ниг. [7])

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

дар ин ҷо $0 < \theta < 1$ мебошад.

4) Суммаи баъзе аз қаторҳои дараҷагии наздикшаванда. Якчанд баробариҳои маълумро аз курси таҳлили математикӣ [7] меорем:

$$1) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \dots$$

қатор дар интервалӣ $(-1, 1)$ наздикшаванда мебошад;

$$2) \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \dots$$

қатор дар интервалӣ $(-1, 1)$ наздикшаванда мебошад;

$$3) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

қатор дар интервалӣ $(-1, 1)$ наздикшаванда мебошад;

$$4) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

қатор дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ наздикшаванда аст;

$$5) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

қатор дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ наздикшаванда аст;

$$6) \lg x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

қатор дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ наздикшаванда аст;

$$7) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

қатор дар интервалӣ $(-1, 1)$ наздикшаванда аст;

$$8) \lg(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right)$$

қатор дар интервалӣ $(-1, 1)$ наздикшаванда аст, ки

$$M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343;$$

$$9) \lg \frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

қатор дар интервалӣ $(-1, 1)$ наздикшаванда аст;

$$10) 10^x = 1 + \frac{2,303}{1!}x + \frac{(2,303x)^2}{2!} + \dots$$

қатор дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ наздикшаванда аст.

Маълум аст, ки ба сифати қимати наздикшавии функсия дар ҷадвал суммаи охириҳои қатор гирифта мешавад. Худуди тағйирёбии аргументи x бошад, вобаста аз радиуси наздикшавии сумма, ки бо ададӣ боэътимодӣ аломати даҳӣ баробар аст, муайян карда мешавад. Ҳамчун мисол формулаи 1-ро муоина менамоем:

Агар $n=2$ бошад, он гоҳ

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x.$$

Дар асоси формулаи (5) ҳаттои мутлақ

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{8}x^2.$$

Барои ноил шудан ба натиҷа бо ду ададӣ боэътимоди аломати даҳӣ, бояд нобаробарии

$$\frac{1}{8}x^2 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}, \quad x^2 \leq 0,04; \quad |x| < 0,19$$

иҷро шавад.

Агар се адади боэътимоди аломати даҳӣ бошад, он гоҳ

$$\frac{1}{8}x^2 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}, \quad x^2 \leq 0,004; \quad |x| < 0,062.$$

Агар чор ададӣ боэътимоди аломати даҳӣ бошад, он гоҳ

$$\frac{1}{8}x^2 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}, \quad x^2 \leq 0,0004; \quad |x| < 0,020.$$

§3. Тартибдихӣ ва истифодаи ҷадвалҳои математикӣ

1. Принципҳои асосии тартибдихии ҷадвал. Бигуздор функсияи $y=f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ муайян бошад. Қимати x -ро дар $n+1$ нуқтаи ин порча:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$$

Гирифта, киматҳои мувофиқи функсияро дар ин нуктаҳо ҳисоб мекунем:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_k = f(x_k), \dots, y_n = f(x_n).$$

Қимати аргументро дар як сутун ва қимати ба он мувофиқи функсияро дар сутуни дигар ҷойгир намуда, ҷадвали оддиро ҳосил мекунем:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
k	x_k	y_k
$k+1$	x_{k+1}	y_{k+1}
...	...	...

Фарқи байни қимати ду нуктаҳои ҳамсоя

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

-ро қадами ҷадвал мегуянд.

Фарқи байни қимати ду функсияҳои ҳамсоя

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

-ро қадами функсияи ҷадвалӣ мегуянд.

Дар аксари ҷадвалҳо қадам бузургии доимӣ мебошад ва онро бо h -ишора мекунанд.

Як қисми ҷадвали қиматҳои функсияи $y=x^2$ -ро муоина мекунем:

x	$y = x^2$	$\Delta y \cdot 10^2$
-	-	-
6,10	37,21	12
6,11	37,33	12
6,12	37,45	13
6,13	37,58	12
6,14	37,70	-
-	-	-

Дар ин ҷадвал $h=0.01$. Қадами функсияи ҷадвалӣ дар сутуни сеюм ҷой дода шуда аст, ки бо тартиби ... 0,12; 0,12; 0,13; 0,12 ... тасвир шудааст.

Ҷадвале, ки дар он қимати функсия бо k рақами аҳамиятнок тасвир ёфтааст, ҷадвали k -қиматӣ мегуянд. Ин ҷадвали ҷорқимата аст, чунки ҳамаи қиматҳои функсия аз ҷор рақами аҳамиятнокӣ дорои рақамҳои бозътимод (бо маънои танг) иборат аст. Масалан, $6,11^2=37,3321$ қимати аниқ, $6,11^2=37,33$ қимат дар ҷадвал. Хатои мутлақ

$$\Delta = 0,0021 < 0,005$$

Миқдори қиматҳои функсия, ки дар ҷадвали додашуда мавҷуд аст, андозаи (ҳаҷми) ҷадвал номида мешавад. Ҷи қадаре, ки қадами ҷадвал хурд бошад, ҳамон қадар андозаи ҷадвал калон аст. Масалан, барои қадами $h=0,1$ ҷадвали квадрати ададҳо дар порчаи $[0;10]$ ба 101 қимат тасвир меёбад, ва агар $h=0,01$ бошад бо 1001 қимат.

Агар андозаи ҷадвал бузург бошад, он гоҳ навишти қимати функсия дар як сутун ғайри имкон аст, бинобар ин тарзи навишти дигарро истифода менамоянд.

Қисми ҷадвали қиматҳои функсияи $y = x^{-1}$ -ро муоина мекунем.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	-	-	-	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	6695	4673	-	-	-	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	-	-	-	4386	4367
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ин ҷадвали ду даромада: бутун бо даҳ якии қимати аргументи x дар сутуни чап ва садякиҳо дар сатри боло ҷой дода шудаанд.

Масалан, ҳангоми $x=2,23$ қимати $y=x^{-1}=2,23^{-1}=0,4484$ мебошад, ки дар буриш сатри "2,2" ва сутуни "3"-юми ҷадвал ҷойгир мебошад.

Ҷадвали нишондодашуда ҷоррақама буда, бо қадами $h=0,01$ ва қимати функсия ба намуди даҳяки бутун тасвир ёфтааст. Ҷадвалҳои сохтори мураккабдор, ки се ва зиёда даромад доранд низ истифода мешаванд.

Ҷадвалҳои математикӣ бояд талаботҳои зеринро қонеъ гардонанд:

1) қадами доимӣ дошта бошанд (барои он ки чадвал қадами доимӣ дошта бошад, фосилаи онро ба қисмҳои баробар чудо кардан зарур аст).

2) Барои ҳамаи қиматҳои функсия хатоҳои мутлақи ҳудудӣ ё нисбӣ яхела бошанд. Барои таъмини яхелаи хатои мутлақ ҳамаи қиматҳои чадвалии функсия бо ададӣ яхелаи бозътимодӣ аломати даҳӣ ҳисоб карда мешавад. Барои таъмини яхелаи хатои нисбӣ қимати функсия бо миқдори яхелаи рақамҳои аҳамиятнок, гирифта мешаванд.

3) Барои сохтани чадвал аз интерполясияи хаттӣ истифода кардан лозим аст.

2. Интерполясияи хаттӣ. Бо ёрии қимати функсияи чадвалӣ $y = f(x)$ бевосита ёфтани қимати функсия фақат барои қиматҳои чадвали аргумент имконпазир аст. Дар ҳолатҳои дигар аз интерполясияи хаттӣ истифода кардан лозим аст.

Бигузор барои функсияи $y = f(x)$ чадвали қиматҳо бо қадами доимии h сохта шуда бошад. Дар ҳар як порчаи $[x_k; x_{k+1}]$ қимати тақрибии функсияи додашудаи y хаттӣ аст, яъне қимати аргумент дар нуқтаҳои x_k ва x_{k+1} бо қимати функсияи y дар ҳамаи нуқтаҳо мувофиқ мебошад. Маънои геометрии он чунин аст, ки барои x аз порчаи $[x_k; x_{k+1}]$ қимати $y = f(x)$ бо порчаи хати рост аз нуқтаҳои $(x_k; y_k)$ ва $(x_{k+1}; y_{k+1})$ гузаронида иваз карда мешавад (расми 1.).

Масалан. Порчаи $[x_0; x_1]$ -ро дида мебароем. Ишора мекунем:

$$x_1 - x_0 = h; \quad y_1 - y_0 = \Delta y_0; \quad x - x_0 = \Delta x; \quad y - y_0 = \Delta y,$$

ки x қимати дилхоҳ аз порчаи $[x_0; x_1]$, y - қимати номаълуми функсия, ки ба ин нуқта мувофиқ аст. Мувофиқи таносуб ҳосил мекунем, ки

$$\frac{\Delta x}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta y_0}$$

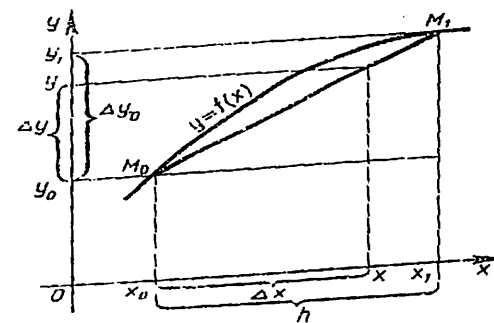
Аз ин ҷо

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{h} \cdot \Delta y_0$$

ва

$$y = y_0 + \frac{\Delta x}{h} \cdot \Delta y_0$$

Ин формулаи интерполясияи хаттӣ мебошад.



Расми 1. Графики вобастагии бисёрраъзогии интерполясионӣ аз аргумент.

Мисоли 1. Бо истифодаи чадвали поён, ёфта шавад 6,114². Дар ин ҷо $h=10$ (10 ҳазорякӣ), $\Delta x=4$ (4 ҳазорякӣ)

x	x^2	$\Delta y_0 \cdot 10^2$
6,110	37,33	12
6,120	37,45	

$\Delta y_0=12$ (12 садякӣ). Ҳосил мекунем $\Delta y = \frac{4}{10} \cdot 12 = 4,8$ (4,8 садякӣ).

Яклухт намуда, пайдо мекунем $\Delta y=5$ (5 садякӣ), аз ин ҷо $y=37,33+0,05=37,38$. Ҳамин тавр, $6,114^2=37,38$ аст.

3. Шартҳои иҷроии интерполясияи хаттӣ. Интерполясияи хаттиро ҳамеша истифода бурдан мумкин аст, вале натиҷаи он фақат дар ҳамаи ҳолате қаноатманд ҳисобида мешавад, ки агар қимати функсияи ҳосилшуда, саҳеҳии қимати чадвалии функсияро дошта бошад.

Мегуянд, ки чадвал шартҳои интерполясияи хаттиро қаноат мекунонад, агар хатои мутлақӣ қимати чадвалии функсия аз хатои мутлақӣ ҳудудии қимати функсияи чадвалӣ зиёд набошад.

Аз курси таҳлили математикӣ дида мумкин аст, ки чадвал бо қадами доимӣ шартҳои интерполясияи хаттиро қаноат намояд, агар қиматҳои ҳамаи аз ҳамдигар фарқкунандаи

чадвал на камтар аз 4 воҳиди тартиби камтарини қимати чадвалии функцияро дошта бошад.

4. Чадвали нисбатӣ қисмҳо. Истифодаи усули интерполи-
атсияи хаттӣ ба ҳисоббарории афзоиши функция Δy аз фор-
мулаи

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{h} \Delta y_0$$

мебарояд.

Қисми зиёди чадвалҳо бо қадами $h=10$ (дар воҳиди тартиби мувофик) истифода мешаванд. Он гоҳ

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{10} \cdot \Delta y_0$$

ки Δx қимати бутунро аз порчаи $[1;9]$ қабул мекунад.

Барои ҳисоби Δy махсус, чадвали нисбатӣ қисмҳо сохта шудааст.

Дар сутуни чапи чунин чадвалҳо қимати Δx дар сатри бо-
лои қимати Δy_0 ҷой дода мешавад. Дар буриш ин сатру, сутун
ҳосили зарби $\frac{\Delta x}{10} \cdot \Delta y_0$ ёфта мешавад. Бо ин чадвал Δy ва форму-
лаи $y = y_0 + \Delta y$ қимати нави функцияи y мувофиқан барои
қимати x додашуда, ҳисоб карда мешавад.

Мисоли 2. Бо ёрии чадвали боло ва поён қимати $6,114^2$ -ро
меёбем. $\Delta x = 4$, $\Delta y_0 = 0,12$ мебошад.

n	11	12	13
1	1,1	1,2	-
2	2,2	2,4	-
3	3,3	3,6	-
4	4,4	4,8	-
5	5,5	6,0	-
6	6,6	7,2	-
7	7,7	8,4	-
8	8,8	9,6	-
9	9,9	10,8	-

Дар буриши сатри "4" ва сутуни "12"-и чадвал рақами 4,8
(саҷякӣ) мавҷуд аст. Ба сифати $\Delta y=0,05$ -ро қабул намуда, $y = y_0$
 $+ \Delta y = 37,33 + 0,05 = 37,38$ меёбем, ки $6,114^2=37,38$ аст.

5. Истифодаи чадвал. Микдори зиёди чадвалҳо мавҷуданд,
ки дар онҳо қиматҳои функцияҳои гуногун мавҷуданд. Онҳо
дар ҳисоббарориҳо васеъ истифода бурда мешаванд. Масалан,
чадвали чоррақама, функцияҳои махсус ва амсоли инҳо. Ин
чадвалҳо дар маълумотномаҳои гуногуни математикиву
техникӣ ва адабиётҳои махсус пурра оварда шудаанд.

Принсипҳои умумии кор бо чадвалҳо:

1. Шиносоӣ бо сохти чадвал, омӯхтани қоидаи истифода-
барии он. Муайян намудани саҳеҳӣ ва қадами чадвал.

2. Ёфтани қимати функция бевосита аз чадвал, агар вай ба-
рои қимати аргументи ҳисобшаванда дар чадвал мавҷуд бошад.

3. Ёфтани қимати функция ҳангоми истифодашаванда бу-
дани интерполятсия, агар онро барои қимати ғайричадвалии
аргумент ҳисоб кардан зарур бошад.

4. Ҳангоми кор кардан бо баъзе аз чадвалҳо ҳосиятҳои функ-
сия (даврий, ҷуфт, тоқ ва ғайра)-ро истифода бурдан зарур аст.

Қисме аз чадвали қимати функцияи $y=\sin x$ -ро муоина ме-
кунем.

градус	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7603	0,7623	0,7642	0,7660

Ин чадвал:

а) қадами $h=10'$ -ро дорад;

б) чадвал дорои ду даромад;

в) чадвали чоррақама буда, ҳамаи қиматҳои чадвали
бозътимод ба маънои танг мебошанд;

г) интерполятсияи хати татбиқшаванда аст.

Мисоли 3. Қимати $\sin 47^\circ 20'$ ёфта шавад.

Бевосита аз чадвали боло муайян мекунем, ки $\sin 47^\circ$
 $20'=0,7353$.

Мисоли 4. Қимати $\sin 46^\circ 18'$ ёфта шавад.

Қимати аргумент $x=46^{\circ}18'$ дар ҷадвал мавҷуд нест. Барои муайян намудани қимати функсия усули интерполляцияи хатиро истифода мебарем. Қайд мекунем, ки $x_0=46^{\circ}10'$, $x_1=46^{\circ}20'$, $h=10'$, $\Delta x=8'$, $\Delta y=20$.

Аз ҷадвали нисбатӣ қисмҳо меёбем.

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{h} \cdot \Delta y_0 = \frac{8'}{10'} \cdot 20 = 16',$$

яъне $\Delta y=0,0016$. Он гоҳ

$$y=y_0 + \Delta y = \sin 46^{\circ}10' + 0,0016 = 0,7214 + 0,0016 = 0,7230.$$

Ҳамин тавр, $\sin 46^{\circ}18' = 0,7230$ аст.

Мисоли 5. Қимати $\sin 131^{\circ}20'$ ёфта шавад.

Қимати аргумент $x=131^{\circ}20'$ дар ҳудуди ҷадвали додашуда намехобад. Формулаи мувофиқориро истифода бурда, меёбем

$$y = \sin 131^{\circ}20' = \sin(180^{\circ} - 48^{\circ}40') = \sin 48^{\circ}40'$$

Бевосита аз ҷадвал муайян мекунем, ки $\sin 48^{\circ}40' = 0,7509$.

Ҳамин тавр $\sin 131^{\circ}20' = 0,7509$.

6. Интерполляцияи чаппа (баръакс). Бигузор қимати ҷадвалии функсияи $y = f(x)$ ва қимати функсияи y дода шуда бошанд. Талаб карда мешавад, ки аз қимати ҷадвалӣ истифода бурда қимати аргумент x дар ҳолати иҷрошавии $f(\bar{x}) = \bar{y}$ муайян карда шавад.

Агар қимати додашудаи $\bar{y}$ дар ҷадвали функсияи $y = f(x)$ мавҷуд бошад, он гоҳ қимати x бевосита аз ҷадвал муайян карда мешавад.

Агар қимати додашудаи функсияи $\bar{y}$ дар ҷадвали функсия мавҷуд набошад, дар ин ҳолат усули интерполляцияи чаппа истифода бурда мешавад. Аз формулаи

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{h} \cdot \Delta y_0$$

истифода бурда, Δx -ро меёбем.

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta y_0} \cdot h$$

Қимати x аз формулаи $x = x_0 + \Delta x$ муайян карда мешавад.

Мисоли 6. Дода шуда аст, ки $\lg x = 3,840$. x аз ҷадвали додашудаи зерин ёфта шавад.

x	$\lg x$	Δy_0
$75^{\circ}20'$	3,821	
$75^{\circ}30'$	3,867	46

Гузориши $h=10$, $\Delta y = 19$, $\Delta y_0 = 46$ -ро истифода намуда, аз формулаи

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta y_0} \cdot h$$

меёбем:

$$\Delta x = \frac{19 \cdot 10}{46} = 4,13 \approx 4'$$

Ҳамин тавр, $x = 75^{\circ}20' + 4' = 75^{\circ}24'$. Он гоҳ қимати дилхоҳи x аз рӯи формулаи

$$x = 75^{\circ}24' + n \cdot 180^{\circ}$$

муайян карда мешавад, ки $n=0; \pm 1; \pm 2; \dots$

7. Мураттабкунӣ ҷадвалҳо. Ҳар як ҷадвали мураттабшаванда бояд шартҳои зеринро қаноат намояд:

- 1) Қадами доимӣ дошта бошад;
- 2) Принципҳои якхелаи саҳеҳии мутлақ ё нисбӣ ба асоси гирифта шавад;
- 3) Имконпазирии интерполляцияи хаттӣ ё интерполляцияи квадратӣ.

Масъалаи мураттабкунӣ ҷадвалро чунин иҷро намудан мумкин: дар порчаи $[a, b]$ барои функсияи $f(x)$ бо саҳеҳии додашуда (масалан: чоррақама) ҷадвал тартибдиҳед, ки бо қадами пешаки интихобшуда барои тартиб додани ҷадвал интерполляцияи хаттӣ имконпазир бошад.

Ҳангоми мураттабкунӣ ҷадвал санҷиши ҳисоб гузаронида мешавад. Санҷиш одатан ба сохтани графикаи функсия аз рӯи қиматҳои ҳисобшуда, амалӣ карда мешавад. Мавқеи ҷойгиршавии хати қатъ мунтазам бошад, он гоҳ ҳисобӣ қимати функсия дуруст аст. Агар дар график мавқеи ҷойгиршавии хати қатъ номунтазам бошад, он гоҳ ҳисобӣ қимати функсия нодуруст аст. Барои санҷиш, мураттабкунӣ ҷадвалӣ фарқҳо зарур аст. Ҷадвали фарқҳоро тартиб медиҳем,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_{n-3}	y_{n-3}		$\Delta^2 y_{n-3}$	
		Δy_{n-2}		$\Delta^3 y_{n-3} + \varepsilon$
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2} + \varepsilon$	
		$\Delta y_{n-1} + \varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-2} - 3\varepsilon$
x_n	$y_n + \varepsilon$		$\Delta^2 y_{n-1} - 2\varepsilon$	
		$\Delta y_{n-1} - \varepsilon$		$\Delta^3 y_{n-1} + 3\varepsilon$
x_{n+1}	y_{n+1}		$\Delta^2 y_n + \varepsilon$	
		Δy_{n+1}		$\Delta^3 y_n - \varepsilon$
x_{n+3}	y_{n+3}		$\Delta^2 y_{n+1}$	

Дар ин чадвал хатой ҷудокардашуда аст, ки ҳангоми ҳисобӣ фарқҳои Δy , $\Delta^2 y$ ва $\Delta^3 y$ пайдо мешавад.

Дурустии ҳисобӣ фарқҳо бо ёрии баробариҳои

$$y_0 + (\Delta y_0 + \Delta y_1 + \dots + \Delta y_n) = y_n,$$

$$\Delta y_0 + (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \dots + \Delta^2 y_{n-1}) = \Delta y_n,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\Delta^k y_0 + (\Delta^{k+1} y_0 + \dots + \Delta^{k+1} y_{n-k}) = \Delta^{k-1} y_n,$$

муайян карда мешавад.

Мисоли 7. Дар порчаи наонқадар калон барои қимати чадвалии функсияи $y = e^{-x}$, чадвали фарқҳоро тартиб диҳед.

x	y	$\Delta y \cdot 10^4$	$\Delta^2 y \cdot 10^4$	$\Delta^3 y \cdot 10^4$	$\Delta^4 y \cdot 10^4$
1,00	0,3679	-180	10		
1,05	0,3499	-170	7	-3	
1,10	0,3329	-163	12	5	8
1,15	0,3166	-151	1	-11	-16
1,20	0,3015	-150	10	9	20
1,25	0,2865	-140	7	-3	-12
1,30	0,2725	-133	7	0	3
1,35	0,2592	-126			
1,40	0,2466				

Аз чадвал маълум мешавад, ки дар ҳисобӣ фарқи тартиби дуюм (сутуни чор) мунтазами вайрон шудааст. Мумкин аст, ки қимати функсия дар нуқтаи $x=1,20$ нодуруст ҳисоб шуда бошад. Дар ҳақиқат, аз чадвали чоррақама муайян менамоем, ки $\varepsilon^{1,2}=0,3012$.

8. Мисолҳои тартибдиҳии чадвал:

Мисоли 8. Дар порчаи $[0,1;0,2]$ бо қадами $h=0,01$ барои функсияи

$$y = \frac{0,2}{24-x^2} + 0,06\sqrt{x}$$

чадвали чоррақама тартиб диҳед.

Қайд менамоем, ки функсия дар порчаи $[0,1;0,2]$ афзоянда мебошад. Бинобарин қимати тақрибии онро дар нуқтаҳои аввал ва охири порча муайян менамоем:

$$f(0,1) = \frac{0,2}{24-0,12} + 0,06\sqrt{0,1} \approx 0,03,$$

$$f(0,2) = \frac{0,2}{24-0,2^2} + 0,06\sqrt{0,2} \approx 0,06,$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки барои ҳамаи қиматҳои $x \in [0,1;0,2]$ нобаробарии $0,03 < f(x) < 0,06$ ҷой дорад.

Алгоритми ҳисобӣ қимати функсияро тартиб медиҳем:

1) нуқтаҳои x_i -ро дар порчаи $[0,1;0,2]$ бо қадами $h=0,01$ интихоб мекунем, яъне $x_i = x_0 + ih$ ($i=1,2,\dots,10$);

2) қимати x^2 -ро ҳисоб мекунем;

3) қимати $24-x^2$ -ро ҳисоб мекунем;

4) қимати $\frac{0,2}{24-x^2}$ -ро ҳисоб мекунем;

5) қимати $\sqrt{x}$ -ро ҳисоб мекунем;

6) қимати $\frac{0,2}{24-x^2} + 0,06\sqrt{x}$ -ро ҳисоб мекунем.

Аз алгоритм истифода намуда, чадвали қимати функсияро месозем:

i	x_i	x_i^2	$24-x_i^2$	$\frac{0,2}{24-x_i^2}$	$\sqrt{x_i}$	$0,06\sqrt{x_i}$	$y=y_4+y_6$
		y_2	$y_3=24-y_2$	$y_4=\frac{0,2}{y_3}$	y_5	y_6	
0	0,1	0,01	23,99	0,008337	0,3162	0,0190	0,0199
1	0,11	0,0121	23,9879	0,008338	0,3317	0,0199	0,02083
2	0,12	0,0144	23,9856	0,008338	0,3464	0,0208	0,029139
3	0,13	0,0169	23,9831	0,008339	0,3605	0,0216	0,028939
4	0,14	0,0196	23,9804	0,008340	0,3742	0,0224	0,030740
5	0,15	0,0225	23,9775	0,008411	0,3873	0,0232	0,031611
6	0,16	0,0256	23,9744	0,008422	0,4000	0,0240	0,032422
7	0,17	0,0289	23,9711	0,008433	0,4123	0,0247	0,035833
8	0,18	0,0324	23,9676	0,008445	0,4243	0,0254	0,033858
9	0,19	0,0361	23,9639	0,008458	0,4359	0,0262	0,034658
10	0,2	0,04	23,96	0,008472	0,4472	0,0268	0,034972

Аз чадвалӣ қимати функсияи тартибдодашуда истифода бурда, чадвали фарқхоро тартиб медиҳем:

i	x	y	$\Delta y \cdot 10^5$	$\Delta^2 y \cdot 10^5$
0	0,10	0,01990	93	-4
1	0,11	0,02083	89	-3
2	0,12	0,02172	86	-3
3	0,13	0,02258	83	-3
4	0,14	0,02341	80	-3
5	0,15	0,02421	77	-2
6	0,16	0,02498	75	-2
7	0,17	0,02573	73	-3
8	0,18	0,02646	70	-1
9	0,19	0,02716	69	
10	0,20	0,02785		

Аз чадвал маълум аст, ки қимати функсия дуруст ҳисоб карда шудааст, чунки сутуни фарқи тартиби дуюм мунтазам мебошад. Чадвалӣ тартибдода функсияи интерполятсияи хати-ро ташкил медиҳад, чунки $|\Delta^2 y| \leq 4 \cdot 10^{-5}$.

Мисоли 9. Дар порчаи $[1; 2]$ чадвалӣ қиматҳои функсияи

$$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

-ро бо саҳеҳии $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ ва қадамӣ h , ки чадвал интерполятсияи хати-ро ифода мекунад, созад.

Бо истифодаи формулаи (5) қадам h -ро муайян менамоем:

$$|R_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2,$$

$$\text{ки } M_2 = \max_x |f''(x)|.$$

Маълум, ки қадам аз нобаробарии $\frac{1}{8} M_2 h^2 \leq \varepsilon$ ҳисоб карда

$$\text{мешавад, яъне } h^2 \leq \frac{8\varepsilon}{M_2}.$$

Ҳосилаи функсияи $f(x)$ -ро меёбем:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

Барои қимати $x \in [1; 2]$

$$|f''(x)| < \frac{2}{\sqrt{(1+1)^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 0,72.$$

Аз ин ҷо $M_2=0,72$ ва $h=0,05$ мешавад. Ба қоидаҳои чадвалсозӣ ва ҳаҷмиҳои ҳисобкуниҳо диққат дода, чадвали қимати функсияро тартиб медиҳем:

1	2	3	4	5	6	7
i	x_i	x_i^2	x_i^2+1	$\sqrt{1+x_i^2}$	$x_i + \sqrt{1+x_i^2}$	$\ln(x_i + \sqrt{1+x_i^2})$
0	1	1	2	1,4142	2,4142	0,881368
1	1,05	1,1025	2,1025	1,4500	2,5000	0,916291
2	1,10	1,2100	2,2100	1,4866	2,5866	0,950344
3	1,15	1,3225	2,3225	1,5240	2,6740	0,983575
4	1,20	1,4400	2,4400	1,5620	2,7620	1,015955
5	1,25	1,5625	2,5625	1,6008	2,8508	1,0475996
...	...	...	...	...	...	...
19	1,95	3,8025	4,8025	2,1915	4,1415	1,421058
20	2,00	4,0000	5,0000	2,2361	4,2361	1,443643

§4. Наздикшавии миёнаквдратӣ

Бигуздор М- маҷмӯи функсияҳои дар порчаи $[a, b]$ дода шудаи бефосила бошад. Барои ҳар гуна ду функсияи $x(t)$ ва $y(t)$ (аз М) масофа муайян карда шуда аст [8]:

$$1) \rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|,$$

1) $\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$,
агар $m = C[a, b]$ - фазои функсияҳои бефосила дар порчаи $[a, b]$ бошад;

$$2) \rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt,$$

агар $m = L[a, b]$ - фазои функсияҳои интегронидашаванда аз рӯи
модул дар порчаи $[a, b]$;

$$3) \rho(x, y) = \left\{ \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

агар $m = L_2[a, b]$ - фазои функсияҳои интегронидашаванда бо квадрат дар порчаи $[a, b]$;

$$4) \rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^n \left(x(t_k) - y(t_k) \right)^2 \right\}^{1/2}$$

агар $M=l_1$ – фазои суммаи қиматҳои функция бо квадрат дар порчаи $[a, b]$ (ё фазои n -ченаки E -Эвклидӣ);

$$5) \rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(x(t_k) - y(t_k) \right)^2 \right\}^{1/2}$$

агар $M=l_2$ – фазои суммаи қиматҳои функсияҳои пайдарпаии наздикшаванда бо квадрат дар порчаи $[a, b]$.
 Дар ҳар яки ин фазоҳо ε -атрофи нуктаҳо мавҷуд аст, ки функсияи бефосила $C[a, b]$ (ё

Дар ҳар яки ин фазоҳо ε -атрофи нуқтаҳо мавҷуд аст, ки $\rho(x, y) < \varepsilon$. Агар ε -атроф дар фазои функцияи бифосила $C[a, b]$ (ё $L[a, b]$) гирифта шавад, он гоҳ наздикшавии функция мунтазам номида мешавад. Агар ε -атроф дар фазои $L_1[a, b]$ (ё l_1, l_2) гирифта шавад, он гоҳ наздикшавии функция миёнаквадрати ном дорад.

Функсия $l, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ дар порчаи $[a, b]$ хатти новобаста ва ба фазои $L_2[a, b]$ тааллуқ дорад. Маҷмӯи бисёрраъзогӣ бо коэффитсиентҳои ҳақиқӣ дараҷаи n зиёд аз n —ро ҳамчун

мачмӯи хатгӣ дар фазои функсияҳои $1, x, x^2, \dots, x^n$ дидан мумкин аст. Бинобарин бисёраъзогии

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

назидикшавии бехтаринро барои функсияи $f(x) \in L_2[a, b]$ дар фазои метрики $L_2[a, b]$ ифода менамояд, ки

$$\delta_n^2 = \inf_p \int_a^b p(x)[f(x) - p_n(x)]^2 dx$$

аст. Агар ишораҳои

$$S_i = \int_a^b p(x)x^i dx, \quad m_i = \int_a^b p(x)f(x)x^i dx$$

-ро дохил намоем, он гоҳ коэффитсиентҳои бисёраъзогии $P_n(x)$ -и наздикшавии бехтарин ҳамчун ҳалли системаи

$$\begin{cases} a_0 S_0 + a_1 S_1 + \dots + a_n S_n = m_0, \\ a_0 S_1 + a_1 S_2 + \dots + a_n S_{n+1} = m_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0 S_n + a_1 S_{n+1} + \dots + a_n S_{2n} = m_n, \end{cases}$$

Муайян карда мешавад.

Бузургии δ_n - тамоюли хурдтарин аз баробарии

$$\delta_n^2 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_n & m_0 \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} & m_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} & m_n \\ m_0 & m_1 & \dots & m_n & (f, f) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix}}$$

Муайян карда мешавад.

§5. Мураттабкунии формулаҳои эмпирикӣ

1. Гузориши масъала. Хангоми эмпирикӣ муайян намудани вобастагии байни бузургиҳо аз рӯи мушоҳидаҳо чадвале тартиб дода мешавад, ки мувофиқи он формулаи наздикшавии вобастагии бузургиҳои таҳқиқотӣ интихоб мешавад. Яъне функсияи дар яке аз синфҳо омӯхташуда, ки қиматҳояш ба қиматҳои таҷрибавӣ наздик аст, вобаста карда мешавад. Чунин формулаи ҳосилшударо эмпирикӣ меноманд.

Бигузур дар натиҷаи таҷриба қиматҳои $y_1, y_2, \dots, y_n$ -и бузургии y , ки ба қиматҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ -и бузургии дигари x мувофиқ аст, ҳосил шуда бошад. Ин додашудаҳоро дар чадвал чунин ҷой медиҳанд:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Маҷмӯи нуқтаҳои $M_k(x_k, y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) нуқтаҳои таҷрибавӣ (таҳқиқӣ) ном дошта, барои сохтани нуқтаҳои график имкон медиҳанд.

Агар муодилаи вобастагии y ва x дода шавад, он гоҳ мо формулаи эмпириро пайдо мекунем. Дар ин формула одатан як ва ё якчанд тағйирёбандаҳо дохил мешаванд, ки онҳоро муайян намудан зарур аст.

2. Наздикшавии хаттӣ. Бигузур нуқтаҳои таҷрибавӣ ба ягон аз хатти рост наздик ҷойгир шуда бошанд. Дар ин маврид формулаи эмпириро ба намуди

$$\varphi(x) = ax + b$$

интихоб менамоянд. Параметри a ва b -ро бо усулҳои гуногун муайян кардан мумкин аст.

3. Усули риштакашӣ. Нуқтаҳои график дар вараки миллиметрӣ бо масштаби наонкадар калон тасвир карда мешавад. Бузургии порчаи бо хати рост бурранда дар тири координата (ё тангенс кунҷи байни хати рости ҳосилшуда ва тири абсисса) баробари a гирифта мешавад. Параметри a ва b графикӣ муайян карда мешавад.

4. Усули интихоби нуқта. Дар вараки миллиметрӣ графики нуқтаҳо ва хати ростро месозем. Дар хати рост ду нуқтаи

дилхоҳи гуногунро интихоб намуда, координатаҳои (x, y) , $(\bar{x}, \bar{y})$ -ро муайян мекунем. Барои муайян намудани a ва b системаи муодилаҳоро пайдо мекунем:

$$\begin{cases} ax + b = y, \\ a\bar{x} + b = \bar{y}. \end{cases}$$

Ин системаро ҳал намуда, a ва b -ро муайян менамоям.

Мисоли 10. Фарз мекунем, ки вобастагии маҳлулшавии намаки нитрати натрии S бо вақти t дода шуда бошад:

$T^\circ\text{C}$	0°	4°	10°	15°	21°	29°	36°	51°	68°
S	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Нуқтаҳои таҷрибавии ҳосилшуда ба хати рост наздик мешавад. Бинобар он формулаи хатии эмпириро меёбем

$$\bar{S} = at + b$$

Барои муайян намудани параметрҳои a ва b усули интихоби нуқтаро истифода мебарем. Нуқтаҳои таҷрибавии $(0; 66,7)$ ва $(51; 113,6)$ -ро интихоб карда системаи зеринро пайдо мекунем:

$$\begin{cases} b = 66,7, \\ 51a + b = 113,6. \end{cases}$$

Решаҳои ин система $a = 0,92$ ва $b = 66,7$ мешавад. Дар ин маврид формулаи эмпирикӣ $\bar{S} = 0,92t + 66,7$ мешавад.

§6. Усули квадратҳои хурдтарин

Бигузур вобастагии x ва y бо формулаи аз якчанд параметр вобастаи $y = \varphi(x, a, b, c, \dots)$ дода шуда бошад. Барои муайян намудани параметрҳои $a, b, c, \dots$ аз чадвалӣ таҷрибавии ҳосилкардашуда истифода мебарем.

Формулаи эмпирикии функсияро дар нуқтаи x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) ба y_i ишора мекунем. Параметрҳои $a, b, c, \dots$ формулаи эмпириро чунон интихоб мекунем, ки фарқи байни қимати нуқтаҳои $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ва $(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ хурдтарин бошад, яъне

$$S(a, b, c, \dots) = \sqrt{(y_1 - \bar{y}_1)^2 + \dots + (y_n - \bar{y}_n)^2}.$$

Қимати хурдтаринро дар ин маврид функсияи

$$F(a, b, c, \dots) = (y_1 - y_1)^2 + \dots + (y_n - y_n)^2 \quad (1)$$

сохиб мешавад. Чунин тарзи интихоби параметрҳои $a, b, c, \dots$ -ро усули квадратаҳои хурдтарин меноманд.

Муайян намудани параметрҳои формулаи эмпирикии $y = f(x, a, b, c)$ -ро муоина мекунем. Параметрҳои a, b, c , -ро муайян менамоем, ки қимати функсияи $F(a, b, c)$ дар соҳаи муоиншаванда хурдтарин бошад. Барои муоина намудани қимати хурдтарини функсияи $F(a, b, c)$ шартӣ

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

-ро истифода мебарем. Мувофиқи формулаи (1) баробарии охирин намудӣ

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a, b, c)) \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a, b, c)) \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a, b, c)) \frac{\partial f}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

-ро мегирад, ки $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$ дар нуқтаи $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ ҳисоб карда мешаванд.

Системаи се муодилаи се номаълум a, b, c -ро пайдо намудем, ки онро ҳал намуда, решаҳои a^*, b^*, c^* -ро сохиб мешавем. Аз ин ҷо формулаи эмпириро ба намуди

$$y = f(x, a^*, b^*, c^*)$$

-ро ҳосил мекунем.

Формулаҳои эмпирикӣ вобаста аз қимати функсияҳои таҷрибавӣ ба намудҳои хаттӣ, квадратӣ, дараҷагӣ ва нишондиҳандагӣ ҷудо карда мешаванд. Онҳоро дида мебароем:

а) **Хаттӣ вобаста.** Формулаи эмпирикии $y = ax + b$, ки аз ду параметр a ва b вобаста аст, хаттӣ мебошад.

Барои муайян намудани параметрҳо бо усули квадратҳои хурдтарин системаи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем.

Ҳисоб ва табдилдиҳии заруриро истифода намуда, пайдо мекунем:

$$\begin{cases} M_{xx} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy}, \\ M_x \cdot a + b = M_y, \end{cases}$$

$$M_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad M_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad M_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad M_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

Системаро ҳал намуда, формулаи эмпирикии $y = a^*x + b^*$ -ро ҳосил менамоем.

Мисоли 11. Бигузур функсия ба намуди чадвали

x	0	1	2	3
y	1,5	2	2,5	3

дода шуда бошад. Барои формулаи эмпирикии $y = ax + b$, параметрҳои a ва b -ро муайян намоед.

Барои усули квадратҳои хурдтаринро истифода бурдан, параметрҳои a ва b -ро муайян намудан чадвали зеринро тартиб медиҳем:

n	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$	x_k^3	x_k^4	$x_k^2 y_k$
0	0	1,5	0	0	0	0	0
1	1	2	1	2	1	1	2
2	2	2,5	4	5	8	16	10
3	3	3	9	9	27	81	27
Σ	6	9	14	16	36	98	39

Системаи

$$\begin{aligned} 14a + 6b &= 16 \\ 6a + 4b &= 9 \end{aligned}$$

-ро ҳал намуда, пайдо мекунем: $a=0,5$; $b=1,5$.

Ҳамин тавр, формулаи эмпирикӣ $\bar{y} = 0,5x + 1,5$ -ро дар порчаи $[0,3]$ пайдо намудем.

б) Вобастагии квадратӣ. Формулаи эмпирикиро ба намуди функсияи квадратии

$$y = ax^2 + bx + c$$

қабул мекунем. Барои муайян намудани параметрҳои a , b , c системаи муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

Пас аз иҷро намудани ҳисобкуниҳои зарурӣ, пайдо мекунем:

$$M_{x^4} \cdot a + M_{x^3} \cdot b + M_{x^2} \cdot c = M_{x^2y},$$

$$M_{x^3} \cdot a + M_{x^2} \cdot b + M_x \cdot c = M_{xy},$$

$$M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b + c = M_y,$$

$$M_{x^4} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4,$$

$$M_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$M_{x^3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3,$$

$$M_{x^2y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i,$$

$$M_{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$M_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i,$$

Решаи система муодилаҳоро муайян намуда, формулаи эмпирикии

$$\bar{y} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

-ро пайдо мекунем.

Мисоли 12. Қимати чадвали функсияи дар мисоли 5 овардашударо истифода бурда, параметрҳои a, b, c -ро муайян намоед.

$$M_{x^4} = \frac{98}{4}, \quad M_{x^3} = \frac{36}{4}, \quad M_{x^2} = \frac{14}{4},$$

$$M_x = \frac{6}{4}, \quad M_{xy} = \frac{16}{4}, \quad M_{x^2y} = \frac{39}{4},$$

$$M_y = \frac{9}{4}, \quad a=0, \quad b=0,5, \quad c=1,5$$

Формулаи эмпирикии квадратӣ дар порчаи $[0,3]$ $y = 0x^2 + 0,5x + 1,5$ мешавад.

в) Вобастагии дараҷа ва нишондиҳанда. Дар ҳарду маврид бо истифодаи гузоришҳо ба вобастагии хаттӣ табдил дода, параметрҳои a ва b -ро бо усули квадратҳои хурдтарин муайян кардан мумкин аст. Пас аз ин ба ҳолати аввала баргашта, параметрҳои дигар муайян карда мешаванд.

Мисоли 13. Барои муайян намудани характеристикаи волфраими лампаи электрӣ санчиши қувва ва шиддати барқ гузаронида шуд. Натиҷаи таҷриба чадвалӣ дода шудааст:

V	2	4	8	16	25	32	50	64
I	2,45	3,70	5,70	8,55	11,25	12,95	17,15	20,00

Қиматҳои таҷрибавиро дар ҷадвали логарифми ҷой дода муайян менамоем, ки ба ягон хати рост наздик ҷойгир аст. Ба ин монанд, формулаи эмпирикиро ба намуди

$$V = C \cdot I^a$$

мекобем.

Ба вобастагии хатии

$$Y = ax + b$$

гузашта, a ва b -ро муайян менамоем, ки $y = \ln V$, $x = \ln I$, $b = \ln c$, $a = \alpha$ мебошад.

Барои муайян намудани a ва b чадвалӣ зеринро тартиб медиҳем:

Рақами таҷриба	Қимати қувваи ҳаракат	Қимати шиддати ҳаракат	Логарифми қувваи ҳаракат	Логарифми шиддати ҳаракат	Ҳосили зарби қиматҳо	Квадрати логарифми қиматҳо
k	I_k	V_k	$x_k = \ln I_k$	$Y_k = \ln V_k$	$x_k y_k$	x_k^2
1	2,45	2	0,3892	0,3010	0,1171	0,1515
2	3,70	4	0,5682	0,6021	0,3421	0,3229
3	5,70	8	0,7559	0,9031	0,6827	0,5714
4	8,55	16	0,9320	1,2041	1,1222	0,8686
5	11,25	25	1,0512	1,3979	1,4659	1,1050
6	12,95	32	1,1123	1,5051	1,6741	1,2372
7	17,15	50	1,2343	1,6990	2,0970	1,5235
8	20,00	64	1,3010	1,8062	2,3499	1,6926
сумма			7,3441	9,4185	9,8546	7,4726

Барои муайян намудани параметрҳои a ва b системаи

$$\begin{cases} 0,9341a + 0,9180b = 1,2318 \\ 0,9180a + b = 1,1773 \end{cases}$$

-ро пайдо мекунем. Ин система дорони решаҳои $a=1,652$ ва $b=0,34$ мебошад. Параметрҳои муайяншударо истифода бурда, c ва α -ро муайян мекунем:

$$c=10^b = 10^{0,34} = 0,485 \text{ ва } a=\alpha = 1,65.$$

Ҳамин тавр, формулаи эмпирикии

$$\bar{V} = 0,485 \cdot I^{1,65}$$

-ро пайдо кардем.

БОБИ VI ҲАЛЛИ ТАҚРИБИИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ХАТТИ АЛГЕБРАВИЙ (СМАХ)

§1. Мафҳумҳои асосӣ

1. Мафҳумҳои асосии фазои метрикий. Маҷмӯи n ададҳои ҳақиқии ботартибовардашудаи $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ро нуқтаи фазои n -ченака меноманд.

Бигуздор ду нуқтаи фазои n -ченакаи $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ дода шуда бошад. Масофаи ин нуқтаҳо $\rho(x, y)$ -ро муайян менамоем. Тарзи дохилкунии масофаро метрикаи фазо мегӯянд. Масофа $\rho(x, y)$ одатан дар фазои n -ченака бо се тарзи зерин:

$$1) \rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|),$$

$$2) \rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$3) \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

муайян менамоянд.

Мисоли 1. Масофаи байни нуқтаҳои $x=(3; -2; 5)$ ва $y=(4; 1; -6)$ ёфта шавад.

Ҳал. Масофаро бо се тарзи дар боло оварда шуда ҳисоб мекунем;

$$1) \rho(x, y) = \max(|3-4|; |-2-1|; |5-(-6)|) = \max(1; 3; 11) = 11,$$

$$2) \rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3| = 1 + 3 + 11 = 15,$$

$$3) \rho(x, y) = \sqrt{1^2 + 3^2 + 11^2} = \sqrt{131} \approx 11,5.$$

2. Мафҳумҳои асосӣ доир ба СМАХ. Ҳаргуна системаи m муодилаҳои алгебравии хаттии n номаълума намуди

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

-ро дорад, ки дар ин ҷо бузургҳои $x_1, x_2, \dots, x_n$ -номаълумҳои система, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ -коэффициентҳои назди номаълумҳои система ва $b_1, b_2, \dots, b_m$ -аъзоҳои озод (тарафи рост)-и система номдоранд.

Системаи (1) -ро ба намуди кӯтоҳи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

ё

$$Ax = b$$

низ навиштан мумкин аст. Ин шаклҳо мувофиқан шакли векторӣ ва матритсавии СМАХ ном доранд. Дар ин маврид $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \{x_j\}$ -вектори номаълум, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) = \{b_i\}$ -вектори озод (тарафи рост) ва

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}$$

-матритсаи система мебошанд.

Ҳалли СМАХ (1) гуфта, дилхоҳ маҷмӯи бузургҳои $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -ро меноманд, ки ҳангоми ба ҷойҳои тағйирёбандаҳо (номаълумҳо)-и $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ни муодилаҳои система гузоштан, онҳо системаи мазкурро қаноат намоянд. Масалан, системаи

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

дорои ҳалли ягонаи $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$ аст.

Системаҳои мавҷуданд, ки дорои якчанд ҳалҳо мебошанд. Масалан системаи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

дорои ҳалҳои $\{x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1\}$, $\{x_1 = 8; x_2 = 0; x_3 = -3\}$ ва ғайраҳо мебошад. Системаҳои низ ҳастанд, ки ягон ҳал надоранд.

Системаҳои, ки ақалан дорои якто ҳал мебошад, системаҳои ҳамҷоя номида мешавад. Системаҳои, ки дорои ҳал нестанд, системаҳои ноҳамҷоя меноманд.

Системаҳои, ки ҳалли ягона доранд, системаҳои муайян ва ҳалли бешумор доштара системаҳои номуайян меноманд.

Усулҳои ҳалли СМАХ -ро ба ду гурӯҳ ҷудо намудан мумкин аст: усулҳои дақиқ ва тақрибӣ.

Усул дақиқ номида мешавад, агар пас аз иҷрои амалҳои охиринок ҳосил намудани ҳалли дақиқ система имконпазир бошад. Дар ин маврид талаб карда мешавад, ки элементҳои матритса ва тарафи рости система дақиқ бошад. Усул тақрибист, агар пас аз иҷрои амалҳои охиринок новобаста аз дақиқ ё тақрибӣ дода шудани элементҳои матритса ва тарафи рости система, ҳосил намудани ҳалли дақиқи система ғайри имкон бошад.

Усулҳои, ки ҳалли СМАХ (1) -ро дақиқ медиҳанд, дар курси математика олии омӯхта мешаванд (нигаред ба [9]). Ба онҳо усули Крамер, ёфтани ҳал бо истифодаи матритсаи баръакс, схемаҳои гуногуни Гаусс (пай дар пай хориҷкунии номаълумҳо, хориҷкунӣ бо истифодаи элементи асосӣ, усули ҷордан, схемаи Халетский ва ғайраҳо) мансубанд.

Мо усулҳои, ки ҳалли тақрибии СМАХ (1) -ро муоина мекунем, ки ба он усулҳои итератсияи содда, усули Зейдел, усули танзимкунонии Тихонов ва ғайраҳо дохил мешаванд.

§2. Гузориши масъалаи ёфтани ҳалли тақрибии СМАХ

Бигузур муодилаи

$$Ax = b \quad (1)$$

дода шуда бошад ва ҳалли он талаб карда шавад. Дар ин ҷо x -элементи номаълум аз фазои метрикий X , b -элементи додашуда аз фазои метрикий Y , A -оператор (матритса)-и амалкунанда аз X ба Y буда, дар қисми $D(A)$ (соҳаи муайянии оператор)-и фазои X муайян мебошад.

Мо масъалаҳои мавҷудият ва ягонагии ҳалли системаи (1)-ро муоина накарда, онҳоро иҷрошаванда фарз мекунем ва ба ҷустуҷӯи ҳалли тақриби шурӯъ мекунем.

Мақсади асоси ёфтани ҳалли тақрибии ба элементи x^* наздики муодилаи (1) мебошад, яъне сохтани алгоритми чунин ҳалли тақриби лозим аст, ин он пай дар пайи $x_n \in X$ ($n=1,2,\dots$) буда, бо афзудани n ба ҳалли ягонаи x^* наздик шавад. Дар ин ҳолат масъалаҳои зерин пайдо мешавад:

- 1) ҷой доштани мавҷуд будани муносибати $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$;
- 2) баҳо додан ба хатой, яъне ба ифодаи $\rho_X(x_n, x^*) = \delta_n$;
- 3) муайян кардани тартиби ба сифр наздикшавии пайдарпаии $\{\delta_n\}$.

Усулҳои гуногуни сохтани алгоритми ҳалли тақрибии $\{x_n\}$ мавҷуд аст. Ин усулҳо ба ду гуруҳ: итеративӣ ва ба муодилаи нисбатан содда овардан ҷудо мешаванд.

Шакли умумии усули итеративӣ чунин аст:

- а) Муодилаи (1) бо ягон усул ба намуди

$$x = \varphi(x)$$

табдил дода мешавад, ки дар ин ҷо φ -оператори амалкунанда аз X ба X аст.

- б) Ҳалли сифри дилхоҳи x_0 -ро интихоб намуда, аз баробарии

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n=1,2,\dots)$$

пайдарпаии ҳаллӣ тақрибиро ёфтан аст.

- в) Иҷрошавии шартҳои 1)-3) санҷида мешавад.

Усули бо муодилаи нисбатан содда овардани СМАХ-ро дар бандҳои ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегралӣ муоина карда мешавад.

§3. Усули итератсияи содда

Усулҳое, ки ҳалли СМАХ (1)-ро тақрибӣ медиҳанд, асосан итератсионӣ (такроршаванда) мебошанд. Моҳияти ин усулҳо аз он иборат аст, ки ҳалли СМАХ ҳамчун ҳудуди ягон пайдарпаии $\{x^{(k)}\}_{k=1,\infty}$, ки дар он наздикшавии навбатӣ ба ҳал аз наздикшавии

пештара, тарафи рост ва матритсаи система функционалӣ вобаста аст, ҳосил карда мешавад, яъне

$$x^{(k)} = f_k(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, b, A), \quad (k=1,2,\dots).$$

Чун қоида ба сифати наздикшавандаи аввала (сифр) $x^{(0)}$ тарафи рост b қабул карда мешавад.

Усули итератсионӣ содда номида мешавад, агар наздикшавандаи пасоянд $x^{(k)}$ танҳо аз пештараи $x^{(k-1)}$ хатти вобаста бошад.

Алгоритми усули итератсиониро дида мебароем:

Бигузор СМАХ

$$Ax = b$$

дода шуда бошад, ки дар ин ҷо A матритсаи квадратии андозаи $n \times n$, b вектори тарафи рост, x вектори номаълум мебошанд.

Барои ҳалли $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ -ро ҳамчун ҳудуди ягон пайдарпаии наздикшавандаи $\{x^{(k)}\}_{k=1,\infty}$ муайян намудан амалҳои заруриро иҷро менамоем:

- 1) Бо ягон усул аз системаи (1) системаи ба он баробарқувваи

$$x = \alpha x + \beta \quad (2)$$

-ро пайдо мекунем. Яъне α ва β -ро чунин интихоб менамоем, ки системаи (1) ба системаи (2) баробарқувва бошад. Дар ин ҷо $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -вектори номуайян, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ -вектори маълум ва

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

-матритсаи маълум мебошанд.

- 2) Ҳалли тақрибии сифри $x^{(0)}$ -ро интихоб намуда аз (2) пайдарпаии

$$x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta, \quad k=1,2,\dots \quad (3)$$

-ро ҳосил мекунем. Яъне α ва β -и интихобшуда бояд чунин бошад, ки пайдарпаии $\{x^{(k)}\}$ ба x^* наздикшаванда бошад ва

$x^{(k)} \rightarrow x^*$ ҳангоми $k \rightarrow \infty$. Дар ин ҷо $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ мебошад.

Яке аз тарзҳои овардани СМАХ (1) ба шакли (2), ки шакли нормали системаи (1) ном дорад, дида мебароем. Фарз мекунем, ки элементҳои диагоналии матритсаи А, яъне $a_{ii} \neq 0$ ($i=1,2,\dots,n$) мебошанд. Дар ин ҳолат аз системаи (1)

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad (i=1,2,\dots,n; \quad i \neq j)$$

-ро ҳосил мекунем. Ишораҳои $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, ($i, j=1,2,\dots,n$) -ро дохил намуда, баробарии

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad (i=1,2,\dots,n; \quad i \neq j)$$

-ро ҳосил мекунем. Агар $i=j$ бошад, $\alpha_{ij} = 0$ аст.

Ба сифати ҳалли тақрибии аввала (сифрӣ) аъзои озодро, яъне $x_i^{(0)} = \beta_i$ ($i=1,2,\dots,n$) -ро қабул намуда, ҳалли тақрибии якум

$$x_i^{(1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(0)}, \quad (i=1,2,\dots,n; \quad i \neq j)$$

-ро муайян менамоем. Ин ҳалли тақрибиро истифода бурда, ҳалли тақрибии дуюмӣ

$$x_i^{(2)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(1)}, \quad (i=1,2,\dots,n; \quad i \neq j)$$

-ро меёбем. Ҳамин тариқ, пай дар пай ҳалли тақрибии $(k+1)$ -умро ба намуди

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \quad (i=1,2,\dots,n; \quad i \neq j; \quad k=0,1,2,\dots)$$

муайян менамоем. Агар пайдарпаии ҳалҳои тақрибии $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(k)}, \dots$ наздикшаванда бошанд, яъне $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^*$, он гоҳ x_i^* ҳалли системаи (1) мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи хосияти ҳудуди пайдарпаи

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot (\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)})$$

мебошад, ки $x_i^* = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^*$ аст.

Мисоли 2. Ҳалли системаи

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 = 13, \\ 0,5x_1 + 2,5x_2 - 0,5x_3 = 3,5, \\ 0,5x_1 - 0,5x_2 + 2,5x_3 = 3,5 \end{cases}$$

бо усули итератсияи содда бо саҳеҳии $\varepsilon=0,01$ ёфта шавад.

Мувофиқи алгоритми боло амалҳои зеринро иҷро менамоем:

1) Шакли нормали системаро пайдо мекунем

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2. \end{cases}$$

2) Ҳалли тақрибии сифрӣро интихоб мекунем

$$x_1^{(0)} = 3,25; \quad x_2^{(0)} = 1,4; \quad x_3^{(0)} = 1,4.$$

3) Ҳалҳои тақрибии пасоянда (якум, дуюм, сеюм, ...) -ро пай дар пай меёбем:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3,25 - 0,125 \cdot 1,4 - 0,125 \cdot 1,4 = 2,9 \\ x_2^{(1)} = 1,4 - 0,2 \cdot 3,25 + 0,2 \cdot 1,4 = 1,03 \\ x_3^{(1)} = 1,4 - 0,2 \cdot 3,25 + 0,2 \cdot 1,4 = 1,03 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3,25 - 0,125 \cdot 1,03 - 0,125 \cdot 1,03 = 2,992 \\ x_2^{(2)} = 1,4 - 0,2 \cdot 2,9 - 0,2 \cdot 1,03 = 1,026 \\ x_3^{(2)} = 1,4 - 0,2 \cdot 2,9 + 0,2 \cdot 1,03 = 1,026 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 3,25 - 0,125 \cdot 1,026 - 0,125 \cdot 1,026 = 2,9935 \\ x_2^{(3)} = 1,4 - 0,2 \cdot 2,992 - 0,2 \cdot 1,026 = 1,0068 \\ x_3^{(3)} = 1,4 - 0,2 \cdot 2,992 + 0,2 \cdot 1,026 = 1,0068 \end{cases}$$

Ҳамин тавр бо саҳеҳии $\varepsilon=0,01$ ба сифати ҳалли тақрибӣ бузургҳои $x_1=2,9935$; $x_2=1,0068$; $x_3=1,0068$ -ро қабул кардан мумкин аст. Ҳалли аниқ система $x_1=3$; $x_2=1$; $x_3=1$ аст.

§4. Шартӣ наздикшавӣ ва саҳеҳии раванди итератсионӣ

Шакли нормали СМАХ (1) -ро дида мебароем. Маълум аст, ки дар тарафи рости (2) оператори (матритсаи) α дар фазои n -ченака додашуда аст. Ҳал кардани системаи (2) -ин ёфтани нуқтаи беҳаракати оператор, яъне маънои ёфтани нуқтаи $x^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ -ро дорад, ки ҳангоми ба тарафи рости (2) гузаштан боз худ нуқтаи x^* ҳосил мешавад (нигаред ба [6,10]).

Теорема. Агар яке аз шартҳои зерин:

$$1) \|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$2) \|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$3) \|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2)} < 1$$

ичро гардад, он гоҳ раванди итератсионии (2) барои ҳаргуна ҳалли аввалаи $x^{(0)}$ ба ҳалли аниқ системаи (1) x^* наздикшаванда аст.

Исбот. Агар барои элементҳои матритсаи α тарафи рости системаи (2) ақалан яке аз шартҳои 1), 2), 3) иҷро шавад, он гоҳ дар фазои n -ченакаи мувофиқ барои оператори (матритсаи) α нуқтаи беҳаракат мавҷуд аст. Ин имкони истифодаи теоремаи инъикоси фишурдашавандаро медиҳад, ки дар асоси он барои оператори α нуқтаи беҳаракати ягонаи $x^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ мавҷуд аст ва он ҳалли системаи (2) -ро ифода мекунад. Пайдарпаии итератсиониро барои оператори α бо интихоби ҳалли аввалаи ихтиёрии $x^{(0)}$ месозем:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= \alpha x^{(k-1)} + \beta = \alpha(\alpha x^{(k-2)} + \beta) + \beta = \alpha(\alpha(\alpha x^{(k-3)} + \beta) + \beta) + \beta = \\ &= \dots = \alpha^k x^{(0)} + (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \dots + \alpha + E)\beta. \end{aligned}$$

Дар ин ҷо E -матритсаи воҳидӣ аст. Мувофиқи шартҳои 1)-3) теорема $|\alpha| < 1$, пас $\{\alpha^k x^{(0)}\}$ ҳангоми $k \rightarrow \infty$ барои ҳаргуна $x^{(0)}$ ба

векторӣ сифрӣ майл мекунад. Матритсаи $\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \dots + \alpha + E$ бошад, суммаи хусусии прогрессияи геометрии матритсавии беохир наздикшаванда аст, Пас ҳудуди он матритсаи $(E - \alpha)^{-1}$ аст. Дар баробарии боло ба ҳудуд гузашта меёбем:

$$x^* = (E - \alpha)^{-1} \beta.$$

Аз ин ҷо $(E - \alpha)x^* = (E - \alpha)(E - \alpha)^{-1} \beta$ ё $x^* = \alpha x^* + \beta$ мебошад. Ин нишон медиҳад, ки x^* ҳудуди пайдарпаии $\{x^{(k)}\}$, ҳалли системаи (2) (ё (1)) аст. Теорема исбот шуд.

Мисоли 3. Барои системаи дар мисоли 1 буда, раванди итератсионӣ наздикшаванда аст. Дар ҳақиқат, матритсаи шакли нормали система намуди

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

-ро дорад ва

$$|\alpha_{11}| + |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = 0 + 0,2 + 0,2 = 0,4 < 1;$$

$$|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| + |\alpha_{32}| = 0,125 + 0 + 0,2 = 0,325 < 1;$$

$$|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| + |\alpha_{33}| = 0,125 + 0,2 + 0 = 0,325 < 1$$

аст. Бинобар ин $\|\alpha\|_2 = \max(0,4; 0,325; 0,325) = 0,4 < 1$, яъне раванди итератсионӣ наздикшаванда аст.

Дар амалия бо саҳеҳии додашудаи $\varepsilon > 0$ ёфтани ҳалли СМАХ (1) бо усули итератсия зарур меояд. Агар векторӣ $x_i^{(k)}$ ҳалли тақрибии k -ум ва векторӣ x_i ҳалли аниқ системаи ҳатти номуайян бошад, он гоҳ барои баҳо додани ҳатои $\|x - x_i^{(k)}\| \leq \varepsilon$ нобаробарии

$$\|x - x_i^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|$$

-ро истифода мебаранд. Дар ин ҷо $\|\alpha\|$ яке аз шартҳои теорема аст, $\|\beta\|$ -нормай вектори β , k -қадами кифояи итератсионист, барои соҳиб шудан ба саҳеҳии додашудаи ε . Дар ин ҳолат фарз карда мешавад, ки пайдарпаии тақрибии

x_i' ($i=1,2,\dots,k$; $i=1,2,\dots,n$) аниқ ҳисоб шуда, хатойи яқлукткунӣ ба эътибор гирифта намешавад.

Мисоли 4. Нишон диҳед, ки барои системаи

$$\begin{cases} 10,3x_1 + 17,2x_2 + 13,4x_3 = 13,6 \\ 4,5x_1 - 1,6x_2 - 10,3x_3 = -22,1 \\ 9,2x_1 + 2,5x_2 - 3,7x_3 = 17,5 \end{cases}$$

раванди итератсионӣ наздикшаванда аст. Микдори итератсияро, ки барои ёфтани ҳалли тақрибии он бо саҳеҳии $\epsilon=0,0001$ зарур аст, муайян кунед.

Ҳал. 1) Системаро ба шакли нормалӣ меорем:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2717x_2 + 0,4022x_3 - 1,9022 \\ x_2 = -0,1000x_1 - 0,0222x_3 + 0,4889 \\ x_3 = 0,4369x_1 - 0,1553x_2 + 2,1456 \end{cases}$$

1) Матритсаи шакли нормалӣ система намуди

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,2717 & 0,4022 \\ -0,1000 & 0 & -0,0222 \\ 0,4369 & -0,1553 & 0 \end{pmatrix}$$

-ро дорад. Барои он

$$\alpha_{12} = \max(0,5369; 0,4270; 0,4244) = 0,5369 < 1$$

аст, пас раванди итератсионӣ наздикшаванда мебошад.

2) Дорем

$$\beta = (-1,9022; 0,4882; 2,1456),$$

$$\|\beta\|_2 = 1,9022 + 0,4882 + 2,1456 = 4,5360$$

3) Барои ёфтани микдори тартиби итератсия нобаробарии

(3)-ро истифода намуда, меёбем:

$$\frac{0,5369^{k+1}}{1 - 0,5369} \cdot 4,5360 \leq 0,0001.$$

Аз ин нобаробарии маълум мешавад, ки микдори итератсия $k > 34$ аст.

Ҳамин тавр, барои ёфтани ҳалли тақрибии система бо саҳеҳии $\epsilon=0,0001$ микдори қадами итератсионӣ на камтар аз $k=35$ аст.

§5. Усули Зейдел

Усули Зейдел ин усули мукамалкардашудаи итератсионӣ мебошад. Дар ин усул барои ҳисоби тақрибии қадами $k+1$ -уми номаълуми x_i , қадами $k+1$ -уми тақрибии пештар ёфташудаи номаълумҳои $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ истифода бурда мешавад.

Бигуздор шакли нормалӣ СМАХ дода шуда бошад:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j.$$

Алгоритми усули Зейделро ба намуди зерин иҷро мекунем:

1) Ҳалли тақрибии аввала (сифри)-и $x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; \dots; x_n^{(0)}$ -ро интихоб мекунем;

2) Аз муодилаи якуми системаи (1) $x_1^{(1)}$ -ро меёбем:

$$x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(0)} + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(0)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}x_j^{(0)}.$$

3) Аз муодилаи дууми системаи (1) $x_2^{(1)}$ -ро меёбем:

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{22}x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(0)} = \\ &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j}x_j^{(0)}. \end{aligned}$$

4) Аз муодилаи сеюми системаи (1) $x_3^{(1)}$ -ро меёбем:

$$\begin{aligned} x_3^{(1)} &= \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} + \alpha_{33}x_3^{(0)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(0)} = \\ &= \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} + \sum_{j=3}^n \alpha_{3j}x_j^{(0)}. \end{aligned}$$

5) Ҳамин тарик пай дар пай $x_n^{(1)}$ -ро меёбем:

$$x_n^{(1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}x_j^{(1)} + \alpha_{nn}x_n^{(0)}.$$

Амалҳои 2)-5) -ро барои қадами k -уми ҳалли тақрибии $x_i^{(k)}$ такрор намуда, айнан ҳамин тавр $x_i^{(k+1)}$ -ро меёбем:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)}$$

... ..

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}$$

Дар ин ҷо $k=0, 1, 2, \dots$ аст.

Мисоли 5. Системаи дар мисоли 1 овардашударо бо усули Зейдел ҳал кунед.

Мувофиқи алгоритми боло амал намуда, ҳалли онро дар шакли ҷадвал ҷойгир мекунем:

к-қадами итератсия	x_1	x_2	x_3
0	3,25	1,4	1,4
1	2,9	1,1	1,04
2	2,9825	1,0115	1,0058
3	2,9978375	1.00274	1,0009905

§6. Шарти наздикшавӣ ва саҳеҳии раванди Зейдел

Раванди Зейдел барои СМАХ (1) новобаста аз интихоби ҳалли аввала ба ҳалли ягонаи система наздикшаванда аст, агар яке аз нобаробариҳои

$$|\alpha_1| = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$|\alpha_2| = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1,$$

$$|\alpha_3| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right)^2} < 1$$

ичро гардад. Раванди Зейдел нисбат ба раванди итератсияи содда зудтар ба ҳалли ягона наздикшаванда аст.

Бигузор x ҳалли аниқи СМАХ (1), $x^{(k)}$ -ҳалли тақрибии система бо усули Зейдел ҳисоб шуда бошад, он гоҳ барои баҳои хатоии ин усул нобаробарии

$$\|x - x^{(k)}\|_l \leq \frac{\|\alpha\|_l^{(k)}}{1 - \|\alpha\|_l} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_l,$$

-ро истифода мебаранд, ки дар ин ҷо $l=1, 2, 3$ нормаҳои болоро ифода мекунад.

Мисоли 6. Мисоли 4-ро истифода намуда, ҳисоб кунед, ки барои ёфтани ҳал бо саҳеҳии $\epsilon=0,0001$ кадом тартиби усули Зейдел кифоя аст.

Алгоритми ҳисоб:

- 1) ба шакли нормалӣ овардани система;
- 2) ҳисоби наздикшавии аввала;
- 3) ҳисоби нормаҳо:

$$\|\alpha\|_1 = \max(0,25; 0,4; 0,4) = 0,4;$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 = \max(0,35; 0,3; 0,36) = 0,36.$$

4) ёфтани тартиби итератсия k . Аз формулаи (10) нобаробарии

$$\frac{0,4^k}{1 - 0,4} \cdot 0,36 \leq 10^{-4}$$

-ро ҳосил мекунем, ки $k=34$ аст.

§7. Доир ба ҳалли СМАХ-и махсус (вайроншуда) ва шартан нодуруст гузошташуда

Бигузор СМАХ

$$Ax = b \quad (4)$$

дода шуда бошад, ки дар ин ҷо $A = \{a_{ij}\}$ -матритсаи андозаи $n \times n$, $x = \{x_i\}$ -вектори номаълум, $b = \{b_j\}$ -вектори муайян.

Ин система метавонад ҳалли ягона, ҳалли бешумор дошта бошад ва ҳал надошта бошад.

Ҳангоми ҳал намудани ингуна системаҳо бо усули дақиқ якҷанд манбаъҳои ноаниқии ҳал пайдо мешавад. Яке аз ин манбаъҳо дар раванди ҳисобкунӣ зарурияти яклухткунӣ адад мебошад. Манбаъи дигар дар раванди ҳалли масъалаҳои

амалӣ, ки ба CMAX оварда мешавад, пайдо мегардад. Чунки элементҳои матритса ва вектори додашуда (тарафи рости система) бо ягон саҳеҳии аниқ тақриби муайян аст. Аниқ набудани додашудаҳои аввала (элементҳои матритса ва векторӣ озод) сабаби пайдоиши хатоии ҳал мешавад.

СМАХ (4) махсус (вайроншуда) номида мешавад агар муайянкунандаи он баробари сифр, яъне $\det A = 0$ бошад. Дар ин маврид матритсаи A дорои қимати хоси сифрӣ аст. СМАХ (4) шартан нодуруст гузошташуда аст, агар матритсаи A қимати хоси ба сифр наздикро дошта бошад. Масалан системаи (ниг. ба [20])

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 5, \\ \sqrt{2}x_1 + \sqrt{98}x_2 = \sqrt{50} \end{cases}$$

махсус буда, системаи

$$\begin{cases} x_1 + 1,99x_2 = 2,99 \\ 1,99x_1 + 3,98x_2 = 5,97 \end{cases}$$

шартан нодуруст гузошташуда аст. Барои ёфтани қимати хоси сифрӣ ва ба сифр наздикӣ системаҳои мувофиқ аз боби IX адабиёти [14] истифода бурда мешавад.

Агар ҳисобкуниҳо бо саҳеҳии охирнок (муайяни дақиқ) иҷро карда шавад, он гоҳ барои махсус ё шартан нодуруст гузошташудаи СМАХ ҳалро муайян кардан ғайриимкон аст. Дар масъалаҳои амалии додашуда, ҳамеша элементҳои матритса ва тарафи рости СМАХ (4) тақрибӣ муайян аст. Дар ин ҳолат ба ҷои муайян намудани ҳалли системаи (4) ёфтани ҳалли системаи дигари

$$Ax = \tilde{b} \quad (5)$$

лозим аст, ки додашудаҳои ибтидоии (A, b) бо мазмуни

$$\|A - \tilde{A}\| \leq h, \quad \|\tilde{b} - b\| \leq \delta \quad (6)$$

наздик аст. Дар ин ҷо одатан характери масъала бо мазмуни норма муайян карда мешавад. Доштани матритсаи $\tilde{A}$ ба ҷои A имконият намедихад, ки махсус ё шартан нодуруст будани СМАХ (4) дақиқ карда шавад.

Дар ин маврид оиди системаи дақиқ (4), ки ҳалро муайян кардан лозим аст, фақат нобаробарии (6) барои матритсаи A ва

тарафи рост b маълум аст. Системаҳои дорои чунин додашудаҳои аввала (A, b) бешумор буда, дар ҷаҳорҷубаи сатҳи муайянии хатои онҳоро фарқ кардан ғайриимкон мебошад. Бинобар ин ба ҷои системаи (4) мо системаи тақрибии (5)-ро дорем, ки ёфтани ҳалли тақрибӣ лозим аст. Вале системаи (5) мумкин ҳалшаванда бошад. Дар ин маврид савол кадом элементро ба сифати ҳалли тақрибии системаи (4) қабул кардан мумкин аст, пайдо мешавад.

Дар байни системаҳои дақиқ метавонад системаи вайроншуда ҷой дошта бошад. Агар ингуна системаҳо ҳалшаванда бошанд, он гоҳ дорои ҳалли беохир мебошанд. Ёфтани кадоме аз ин ҳалҳо ба миён меояд.

Ҳамин тавр, як қатор синфи СМАХ мавҷуд аст, ки дар байни онҳо метавонанд системаи махсус ва ё ҳалнашаванда ҷой дошта бошад. Усулҳои сохтани алгоритми ҳалли тақрибии ингуна синфҳои система бояд якхела ва умумӣ бошанд. Ҳалли ёфташудаи системаи (4) хангоми каме тағйир ёфтани додашудаҳои аввала (A, b) бояд шартан устувориро қаноат намояд.

Алгоритми ёфтани ҳалли тақрибии махсус ва шартан нодуруст гузошташудаи СМАХ аз тарафи академики АИ Шӯравӣ А.Н.Тихонов соли 1963 пешниҳод карда шуда, онро усули танзимкунонӣ номида аст [8].

§8. Ёфтани ҳалли нормали СМАХ бо усули танзимкунонии Тихонов

СМАХ (4) –ро муоина менамоем. Бигузор $x = \{x_i\} \in R^n$ вектори номаълум, $b = \{b_i\} \in R^m$ –вектори додашуда ва $A = \{a_{ij}\}$ матритсаи додашуда аст. Дар ин ҷо $j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, m$ ва шарт нест, ки $n = m$ бошад. Ин система мумкин аст ҳалшаванда, махсус (дорои ҳалли бешумор) ва ҳалнашаванда бошад.

Ҳалли қалбакӣ (дурӯғин ҳалӣ) системаи (4) гуфта вектори $\tilde{x}$ -ро меноманд, ки барои он хатоии $\|Ax - b\|$ дар ҳамаи фазои R^n қимати хурдтаринро соҳиб шавад. Системаи (4) метавонад дорои якчанд ҳалли мавҳум бошад. Бигузор F_A маҷмӯи ҳалҳои мавҳум бошад ва x' -ягон вектори интиҳобӣ, ки одатан аз гузориши масъала муайян карда мешавад, аз R^n аст.

Ҳалли нормали системаи (4) нисбат ба вектори x вайроншуда ё шартан нодуруст гузошташудаи (4)-ро муоина менамоем.

Аз баски системаи (4) мумкин ҳалнашаванда бошад, он гоҳ

$$\|Ax - \tilde{b}\| \leq \|Ax - \tilde{b}\| + \|\tilde{b} - b\|, \quad \|Ax - \tilde{b}\| \leq \|Ax - b\| + \|\tilde{b} - b\|.$$

Бинобар ин ҳалли тақрибии x_δ -ро нисбат ба ҳалли мавхум x дар синфи $\mathcal{Q}_\delta$ -векторҳои x , ки барои онҳо $\|Ax - \tilde{b}\| \leq \delta$ мебошад, ҷустуҷӯ менамоем. Синфи $\mathcal{Q}_\delta$ ин синфӣ ҳалҳои тақрибии имконпазир аст. Дар ин синф ба сифати ҳалли тақрибӣ векторӣ $\tilde{x}_\delta$ дилхоҳ гирифта намешавад, чунки чунин ҳалли тақрибии интиҳобкарда мумкин аст, ки нисбати каме тағйирёбии вектори таърифи рости муодила ноустувор бошад. Барои ин принципи интиҳоб лозим мебошад, ки он ҳақиқатан аз гузориши масъала пайдо мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи таърифи ҳалли нормалӣ ҳалли ҷустуҷӯшавандаи x^0 бояд ноҳақ бо нормаи хурдтарин бошад. Бинобар ин ба сифати ҳалли тақрибии ба x^0 наздик чунин x_δ аз $\mathcal{Q}_\delta$ гирифта мешавад, ки функционали $\Omega[x] = \|x\|^2$ дар маҷмӯи $\mathcal{Q}_\delta$ дорои қимати хурдтарин бошад.

Бигузор x_δ -вектор аз $\mathcal{Q}_\delta$, ки функционали $\Omega[x] = \|x\|^2$ дар маҷмӯи $\mathcal{Q}_\delta$ қимати хурдтаринро соҳиб мешавад. Онро ҳамчун натиҷаи татбиқи ягон оператори $R(\tilde{b}, \delta)$ аз параметри δ вобаста ба тарафи рости СМАХ (4) دیدан мумкин аст. Ҷой дорад

Теоремаи 1. Операторӣ $R(\tilde{b}, \delta)$ дорои хосиятҳои зерин мебошад:

1) вай барои ҳамагуна $\tilde{b} \in R^n$ ва ҳаргуна $\delta > 0$ муайян карда шудааст;

2) ҳангоми $\delta \rightarrow 0$ $x_\delta = R(\tilde{b}, \delta)$ ба ҳалли нормали x^0 -и муодилаи $Ax = \tilde{b}$ наздик мешавад, яъне вай ҳалли танзимшуда барои муодилаи (4) мебошад.

Исботи теорема ро намеорем. Исбот дар [18, сах. 115-117] оварда шудааст.

Масъалаи ёфтани вектори x_δ -ро чунин гузоштан мумкин аст: Аз байни векторҳои x шarti $\|Ax - \tilde{b}\| \leq \delta$ -ро қаноаткунонанда вектори x_δ бо нормаи хурдтарин, яъне минимикунандаи функционали $\Omega[x] = \|x\|^2$ ёфта шавад.

Ин масъала бо истифодаи усули Лагранж ҳал карда мешавад. Ба сифати x_δ вектори x^α минимикунандаи функционали Тихонов

$$M^\alpha[x, \tilde{b}] = \|Ax - \tilde{b}\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad \alpha > 0 \quad (7)$$

бо параметри α гирифта мешавад, ки вай α аз баробарии $\|Ax^\alpha - \tilde{b}\| = \delta$ муайян карда мешавад.

Аз баски (7) функционали квадратӣ аст, барои $\tilde{b} \in R^n$ ва $\alpha > 0$ фақат як вектори x^α -и минимикунанда он мавҷуд аст. Дар ҳақиқат, фарз мекунем, ки ду вектори x^α ва $\hat{x}^\alpha$ минимикунандаи ин функционал мавҷуд аст. Вектори x -и дар хати рост ҷойгиршудаи пайвастандаи векторҳои x^α ва $\hat{x}^\alpha$ -ро дида мебароем:

$$x = x^\alpha + \beta(\hat{x}^\alpha - x^\alpha).$$

Функционали (7) дар элементи ин хати рост функционали квадратии ғайриманфӣ нисбати ба β аст. Пас, вай наметавонад ҳангоми ду қимати гуногуни β ($\beta = 0$ ва $\beta = 1$) қимати хурдтаринро сазовор гардад.

Компонентаи x_j^α -и вектори x^α ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттии

$$\alpha x_k^\alpha + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{kj} x_j^\alpha = \bar{b}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

мебошад, ки аз шarti минимуми функционали (7) ҳосил мешавад:

$$\frac{\partial M^\alpha}{\partial x_j^\alpha} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Дар ин ҷо $\bar{a}_{kj} = \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij}$, $\bar{b}_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} \tilde{b}_i$ мебошанд.

Эзоҳ. Намуди дигари функционали $\Omega[x] = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2}$ дар маҷмӯи $\mathcal{Q}_\delta$ дар [10] истифода шудааст.

БОБИ VII ҲАЛЛИ МУОДИЛАҲОИ АЛГЕБРАВӢ ВА ТРАНСТЕНДЕНТӢ

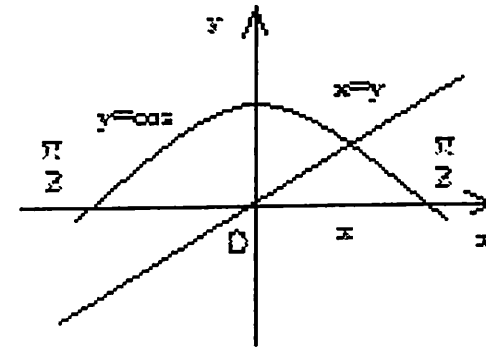
§1. Гузориши масъала

Ҳалли муодилаҳои хаттӣ дар курси алгебраи мактабҳои миёнаи умумӣ омӯхта мешаванд, ки ҳамаи онҳо аз формулаи маълум муайян мекунанд, масалан, муодилаи квадратӣ. Усули ҳалли муодилаҳои хаттӣ аз даврони юнони қадим маълум мебошад. Дар асри XV формула барои ҳалли муодилаҳои дараҷаи сеюм ва чорум муайян карда шуд. Барои ҳосил намудани ин формулаҳо саҳми математикони итолиёӣ Ш.Ферро, Н.Тартали, Дж.Кардано, Л.Феррари бузург мебошад. Пас аз ин давраи муайян намудани формула барои муодилаи дараҷаи панҷум ва дараҷаи аз он баландтар сар шуд. Муайян намудани формула, ки бе натиҷа буд, 300 сол давом кард. Дар солҳои 20-уми асри XIX аз тарафи математики Норвегӣ Н. Абел исбот карда шуд, ки муодилаҳои дараҷаи панҷум ва аз он боло бо ёрии коэффитсиентҳо ба намуди формула ифода намудан ғайриимкон аст.

Агар мо муодилаҳои ғайрихаттиро дида бароем, ҳалли масъала боз душвортар мешавад. Дар ин ҳолат муайян намудани формула барои ифода намудани ҳамаи муодилаҳои ғайриимкон аст. Масалан, ба сифати мисол муодилаи оддӣ

$$\cos x - x = 0 \quad (1)$$

-ро дида мебароем. Ин муодила ба муодилаи $\cos x = x$ баробарқувва мебошад. Графики функсияҳои $y_1 = \cos x$ ва $y_2 = x$ -ро тасвир менамоем. Аз нақша маълум аст, ки онҳо ҳамдигарро дар нуқтаи x^* мебуранд (расми 1). Адади $x = x^*$ ҳамаи муодилаи (1) мебошад, вале барои он формулаи дақиқии ҳисобкунӣ вучуд надорад. Бинобар он барои ҳал намудани ингуна муодилаҳо бояд алгоритми ҳисобкунии умумие ҷой дошта бошад, ки ҳамаи муодиларо ба намуди оддӣ муайян карда шавад. Як қатор алгоритмҳои ҳисобкунии ҳалли тақрибии муодилаҳои алгебравӣ ва транстендентӣ мавҷуд мебошад, ки онҳоро дар ин боб дида мебароем.



Расми 1.

§2. Мафҳумҳои асосии муодилаҳои алгебравӣ ва транстендентӣ

Муодилаи намуди

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

-ро дида мебароем.

Муодилаи (1) муодилаи ратсионалии бутун номида мешавад, агар барои қимати аргументи x ва баъзе аз доимӣҳо амалиёти ҷамъ, тарҳ, зарб ва ба дараҷаи мусбати бутуни бардоштан иҷро шавад, яъне

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0),$$

ки n -адади бутуни мусбат, $a_0, a_1, \dots, a_n$ - ададҳои доимии додшуда ва x - параметри номаълум мебошад.

Муодилаи (1) муодилаи ратсионалии касрӣ номида мешавад, агар аз нисбати ду функсияи ратсионалии бутун иборат бошад, яъне

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = 0.$$

Маҷмӯи муодилаҳои ратсионалии бутун ва касрӣ синфи муодилаҳои ратсионалиро ифода мекунанд.

Муодилаи (1) муодилаи ирратсионалӣ номида мешавад, агар барои аргументи x ва баъзе аз доимӣҳо, ба ғайр аз амалиёти дар муодилаи ратсионали номбаршуда, боз амали аз ҳамаи

барории оддии охирнок, ки натиҷааш ратсионалӣ нест ҳамроҳ шавад. Масалан,

$$f(x) = \sqrt{\frac{5x^2 + 4x - 7}{3x^2 - 8x + 4}} + (\sqrt[5]{x} + 1)^3 = 0.$$

Маҷмӯи муодилаҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ синфи муодилаҳои алгебравиро ташкил медиҳад. Ҳаргуна муодилаи ғайриалгебравиро, муодилаи трансцендентӣ меноманд. Ба монанди

$$x + \log_3 x = 0; \quad 5e^x - 3x^2 + 15 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = x; \quad e^x - 1,4x^2 + 3 = 0.$$

Муодилаҳои алгебравӣ ва трансцендентӣ барои фарқ наму-дан аз муодилаҳои дифференциалӣ, интегралӣ, интегро-дифференциалӣ ва ғайра номи муодилаи ғайрихаттии алгебра-виро гирифтаанд.

Масъалаи ҳалли муодилаи (1) ба масъалаи муайян намуда-ни сифри функсияи $f(x)$ мувофиқат дорад.

Адади $x = \xi$ решаи муодилаи (1) (сифри функсияи $f(x)$) но-мида мешавад, агар $f(\xi) = 0$.

Адади ξ -решаи n -кратӣ ном дорад, агар ҳангоми $x = \xi$ функсияи $f(x)$ ва ҳамаи ҳосилаҳои то тартибӣ $(n-1)$ -ум дохил-шавандаи функсияи $f(x)$ ба сифр баробар шавад, яъне

$$f(\xi) = f'(\xi) = \dots = f^{(n-1)}(\xi) = 0 \quad \text{ва} \quad f^{(n)}(\xi) \neq 0.$$

Агар $n=1$ бошад, решаи муодила оддӣ аст.

Роҳи ҷустуҷӯи классикии ҳалли муодилаи (1) одатан бо ёрии истифодаи табдилдиҳиҳо ба муодилаи содда ё овардан ба маҷмӯи муодилаи содда мебошанд. Дар ин ҳолат соҳаи муайя-нии муодилаи додашуда ё маҳдуд мегардад, ё ин ки васеъ ме-шавад. Масалан, муодилаи $x^2 = 1$ -ро ба намуди $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$ табдил диҳем, яъне ба ҳарду қисми муодила функсияи $\sqrt{x}$ -ро ҳамроҳ намуда, соҳаи муайянии муодиларо маҳдуд мегардонем. Дар ин ҳолат $x = -1$ решаи муодилаи $x^2 = 1$ аст, вале решаи муо-дилаи $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$ нест.

Бинобар ин барои муодилаи (1) алгоритми тақриби муайян намудани реша пешниҳод карда мешавад. Ҳангоми муайянку-

нии қимати тақрибии решаи муодилаи (1) зарур аст, ки масъалаҳои зерин:

а) муайян намудани реша дар фосилаи ба қадри кифоя хурд, ки дар он фақат ва фақат як реша (оддӣ ё каратӣ)-и муо-дила мавҷуд бошад;

б) саҳеҳии реша бо аломати муқаррари ададӣ додашуда муойна шавад.

§3. Муайян намудани фосилаи мавҷудияти решаи муодила

Бигузур муодилаи

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

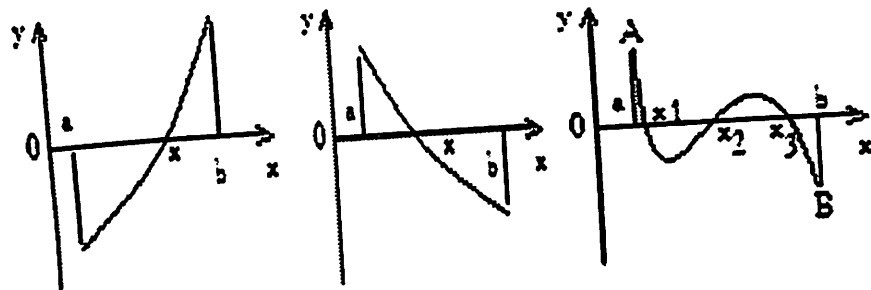
дода шуда бошад, ки $f(x)$ функсияи муайян ва бефосила дар ягон интервали охирнок ё беохири $a < x < b$ (ё ин ки бефосила, дифференсиронида шаванда ва амсоли ин) мебошад.

Қабул аз муайян намудани решаи муодила, дониستاني муодила реша дорад ва ин реша дар кадом интервал ҷойгир шудааст. Агар муодилаи (1) муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ бошад, он гоҳ вобаста аз дискриминант $D = b^2 - 4ac$ ва бо талаби мусбат будан он ҳулоса бароварда мешавад, ки муодилаи квадрати ду решаи ҳақиқӣ дорад. Яке аз ин решаҳо дар тара-фи чапи нуқтаи $x_0 = -\frac{b}{2a}$, ва дигаре дар тарафи рост ҷойгир аст.

Дар асоси формулаи решаи муодилаи квадратӣ ингуна ҳулоса бароварда мешавад. Агар барои ҳал намудани муодилаи (1) формула мавҷуд набошад, он гоҳ роҳи ҷустуҷӯи муайян наму-дани фосилаи мавҷудияти реша муҳим аст.

Дар расми 2 графики функсияи $f(x)$ тасвир карда шуда аст. Маълум аст, ки $f(x)$ функсияи бефосила дар порчаи $[a, b]$ ва дар охири порча дорои қиматҳои гуногун, яъне $f(b) < 0, f(a) > 0$ мебошад. Графики функсияи $f(x)$ хати бефосила буда, аз чоря-ки якум ба чоряки чорум гузаронида шуда аст, ки дар нимҳамвории якум $y = f(x) > 0$ ва дар нимҳамвории дуюм $y = f(x) < 0$ аст.

Аз нақша маълум аст, ки графики функсия тири Ox -ро дар нуқтаи $x = x^*$ мебурад. Дар ин нуқта қимати функсияи $f(x)$ ба сифр баробар аст, яъне адади $x = x^*$ решаи муодилаи (1) дар пор-чаи $[a, b]$ мебошад.



Расми 2

Расми 3.

Аз натиҷаҳои ҳосил шуда, хулоса баровардан мумкин аст, ки теоремаи зерин ҷой дорад, яъне теоремаи Болтсано-Коши оид ба қимати миёнаи порча (нигаред ба [7 сах. 169]).

Теорема 1. Агар функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$ бефосила ва дар охири порча қиматҳои дорои аломатҳои гуногунро дошта бошад, (яъне $f(a)f(b) < 0$) он гоҳ дар ин порча ақалан як решаи муодилаи (1) мавҷуд аст.

Исботи теоремаро намеорем (Исботи теорема дар курси таҳлили математика [7] мавҷуд аст).

Ин теорема имконияти муайян намудани миқдори решаҳоро дар порчаи $[a, b]$ намедихад. Мисолҳо овардан мумкин аст, ки шартҳои теорема иҷро мешавад, вале миқдори решаҳо дар порча зиёд аст (ба расми 3 нигаред).

Хатоии решаи тақрибии муодилаи (1) -ро баҳо медиҳем. Барои ин теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2. Бигузур ξ -решаи аниқ, $\bar{x}$ -решаи тақрибии муодилаи (1) дар порчаи $[a, b]$ бошад, ки $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ ҳангоми $a < x < b$ аст. Он гоҳ

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

Исбот. Теоремаи Лагранҷро истифода бурда (нигаред ба [5 сах. 221]), ҳосил мекунем:

$$f(\bar{x}) - f(\xi) = (\bar{x} - \xi) \cdot f'(\xi),$$

ки ξ -фосилаи байни қиматҳои $\bar{x}$ ва ξ , яъне $\xi \in [a, b]$ мебошад. Аз ин ҷо бармеояд, ки $f(\xi) = 0$ ва $f'(\xi) \geq m_1$ бинобар он

$$|f(\bar{x}) - f(\xi)| = |f(\xi)| \geq m_1 |\bar{x} - \xi|.$$

Аз ин ҷо

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

Мисоли 1. Фосилаи решаи муодилаи

$$x^4 - 18x^2 + 6 = 0$$

-ро муайян намоед.

Аз теоремаи 1 маълум мегардад, ки решаи муодилаи (1) ягонааст, агар $f'(x)$ мавҷуд бошад ва дар дохили интервали (a, b) дорои аломати доимӣ бошад, яъне агар $f'(x) > 0$ (ё ин ки $f'(x) < 0$) ҳангоми $a < x < b$ будан. Пас $f'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9)$, бинобар он $f'(x) = 0$ ҳангоми $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Ҷадвали аломати функсияи $f(x)$ -ро тартиб медиҳем:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	∞
$\text{Sign} f(x)$	-	-	-	+	-	-	+

Аз ҷадвал маълум аст, ки муодила дорои ду решаи ҳақиқӣ аст:

$$x_1 \in [-3, 0], \quad x_2 \in [0, 3].$$

Ба сифати решаи тақриби $\bar{x} = -0,57$ -ро қабул намуда, решаи аниқро муайян менамоем. Барои ин аз теоремаи 2 истифода мекунем:

$$f(\bar{x}) = (-0,57)^4 - 18 \cdot (-0,57)^2 + 6 = 0,10556 - 5,8482 + 6 = 0,25736$$

ҳангоми $\bar{x} = -0,57$ будан,

$$f(\bar{x}) = (-0,59)^4 - 18 \cdot (-0,59)^2 + 6 = 0,12117361 - 6,2658 + 6 \approx -0,1446$$

ҳангоми $\bar{x} = -0,59$ будан. Он гоҳ решаи аниқ ξ муодила дар интервали $(-0,59; -0,57)$ ва $(0,57; 0,59)$ мавҷуд аст. Ҳосилаи $f'(x) = 4x(x^2 - 9)$ монотони зиёдшаванда аст.

Бинобар он қимати хурдтарини вай дар ин интервал

$$m_1 = 4 \cdot (-0,57) \cdot (0,57^2 - 9) = 11,27415996.$$

Ҳамин тавр

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{0,25736}{11,27420} \approx 0,001.$$

§4. Тарзи графики муайян намудани фосилаи мавҷудияти решаи муодила

Чустучӯи решаи муодилаи

$$f(x)=0 \quad (1)$$

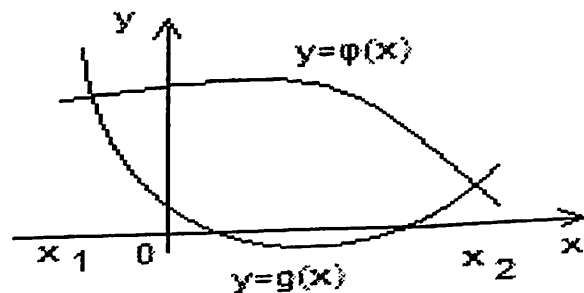
-ро бо тарзи графикӣ, яъне нуктаи буриши абсиссаи графики функсияи $y=f(x)$ -ро бо тири координатаи Ox муайян намударо дида мебароем. (Расми 3).

Аз расм маълум аст, ки функсияи $y=f(x)$ дар се нукта тири Ox -ро мебурад. Нуктаҳои буриши x_1 , x_2 ва x_3 сифри функсия буда, решаи муодилаи (1)-ро ифода мекунад.

Ҳангоми бо тарзи графики муайян намудани решаи муодилаи (1) дуруст аст, ки онро ба муодилаи ба он баробаркувва иваз намоем

$$\varphi(x)=\psi(x) \quad (2)$$

ва графики функсияҳои $y_1=\varphi(x)$ ва $y_2=\psi(x)$ -ро тасвир намоем. Он гоҳ решаи муодилаи (1) ҳамчун нуктаҳои буриши абсиссаи хатҳои қачи $y_1=\varphi(x)$ ва $y_2=\psi(x)$ муайян карда мешавад (Расми 4).



Расми 4.

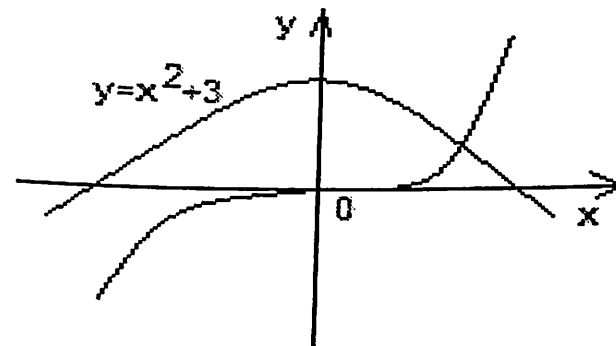
Аз расми 4 маълум аст, ки функсияҳои $y_1=\varphi(x)$ ва $y_2=g(x)$ дар нуктаҳои x_1^* ва x_2^* ҳамдигарро мебуранд. Аз ин ҷо нуктаҳои x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи (2) мебошад ва инчунин решаҳои муодилаи (1) -ро ифода менамоянд.

Роҳҳои чустучӯи табдилдиҳии муодилаи (1) ба намуди муодилаи (2)-ро чунон бояд гузошт, ки сохтани графики функсияҳои $y_1=\varphi(x)$ ва $y_2=g(x)$ оддӣ бошад. Дар ҳолати умумӣ

ҳангоми сохтани графики функсияҳои $y_1=\varphi(x)$ ва $y_2=g(x)$ татқиқи онро гузаронидан лозим аст, яъне соҳаи муайянӣ, нуктаи каниш, нуктаи буриши графики функсия бо тири координата, нуктаи экстремум, нуктаи қачравӣ (фурӯхамӣ, барҷастагӣ) ва ғайраҳо.

Мисоли 2. Муодилаи $x^3+x^2-3=0$ -ро бо тарзи графикӣ ҳал намоед.

Муодиларо ба намуди $x^3 = -x^2+3$ иваз намуда, графики функсияҳои $y_1=x^3$ ва $y_2=-x^2+3$ -ро месозем (Расми 5).



Расми 5

Аз расми 5 маълум аст, ки нуктаи буриш ин функсияҳо дар интервали $(0, 2)$ мавҷуд аст. Мувофиқи қайди мавзӯи §2 нуктаи буриш $x=x^*$ мебошад. Решаи муодила тақрибан $x=x^*=1,164$ мебошад.

§5. Усули ба духиссаи баробар ҷудокунии порча

Бигузур муодилаи

$$f(x)=0 \quad (1)$$

дода шуда бошад, ки дар ин ҷо $f(x)$ функсияи дар ягон фосилаи ҷудо карда шудаи $[a,b]$, фақат як нуктаи сифрӣ дорад, яъне $f(a)f(b)<0$ аст. Масъала аз бо саҳеҳии додашудаи $\epsilon>0$ муайян намудани нуктаи сифри функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a,b]$ мебошад, яъне ёфтани решаи муодилаи (1) аст. Барои муайян намудани решаи муодилаи (1) аз усули пайдарпай ба қисмҳо ҷудо

кардани порчаи $[a, b]$ истифода мекунем. Аз порчаи $[a, b]$ ду порчаи баробари $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ва $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ -ро ҳосил мекунем. Агар дар нуктаи $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$ қимати функсия ба сифр баробар шавад, он гоҳ нуктаи $x = \xi_1$ сифри функсия аст ва $f(\xi_1) = 0$. Дар ин маврид иҷро намудани амалиёт ба охир мерасад. Вагарна танҳо дар яке аз охирҳои порчаҳои $[a; \xi_1]$ ва $[\xi_1; b]$ аломатҳои функсияи $f(x)$ гуногунанд, яъне $f(a) \cdot f(\xi_1) < 0$ ($f(\xi_1) \cdot f(b) > 0$) ё $f(\xi_1) \cdot f(b) < 0$ ($f(a) \cdot f(\xi_1) > 0$) аст, решаи муодилаи $f(x)$ карда мешавад. Аз ин ду порча ҳамонашро, ки дар охирҳояш аломатҳои $f(x)$ гуногунанд ҳалро мекобем, яъне порчаи $[\xi_1; b]$ ($[a; \xi_1]$)-ро партофта, порча $[a; \xi_1]$ ($[\xi_1; b]$)-ро бо порчаи $[a_1; b_1]$ ишорат мекунем. Дар ҳолати баръакс, яъне $f(\xi_1) \cdot f(b) < 0$ ($f(a) \cdot f(\xi_1) > 0$) порчаи $[a; \xi_1]$ ($[\xi_1; b]$)-ро партофта, порчаи $[\xi_1; b]$ ($[a; \xi_1]$)-ро бо $[a_1; b_1]$ ишорат мекунем. Дарозии порчаи $[a_1; b_1]$ ба $\frac{b-a}{2}$ баробар аст. Агар дарозии порча, яъне $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$ шавад, он гоҳ нуктаи дилхоҳи $[a_1; b_1]$ -ро ба сифати қимати тақрибии решаи муодилаи (1) қабул кардан мумкин аст. Вагарна порчаи $[a_1; b_1]$ -ро ба ду ҳиссаи баробар ҷудо намуда, $\xi_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ -ро нуктаи мобайни порча қабул мекунем. Агар $f(\xi_2) = 0$ шавад, он гоҳ ξ_2 -решаи муодилаи (1) аст. Вагарна амалиётро давом дода, нуктаҳои $\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_n, \dots$ муайян карда мешавад. Дар натиҷа, мо бо ягон саҳеҳии муайян ба решаи муодилаи (1) соҳиб мешавем ё пайдарпаии порчаҳои дохилиҳам хобидаи $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$ -ро пайдо мекунем, ки дар дохили онҳо решаи муодилаи (1) мавҷуд аст.

Ҳангоми k маротиба иҷро кардани амалиёти ба ду ҳиссаи баробар ҷудокунии порча мо порчаи $[a_k; b_k]$ -ро ҳосил мекунем, ки $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$ буда, дарозияш ба $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ баробар аст. Агар $f(a_k) \cdot f(b_k) = 0$ бошад, он гоҳ $\xi_k = a_k$ ё $\xi_k = b_k$ решаи муодилаи (1) мешаванд. Дар ҳолати баръакс, решаи матлуб дар пор-

чаи $[a_k; b_k]$ ҷойгир аст. Агар чунин k -ро ёфта шавад, ки $\frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$ иҷро гардад, он гоҳ нуктаи $\xi_k = \frac{b_k + a_k}{2}$ решаи муодилаи (1) бо саҳеҳии ε аст. Дар ҳақиқат,

$$|\xi_k - x^*| = \left| \frac{b_k + a_k}{2} - x^* \right| \leq \frac{b_k - x^*}{2} + \frac{x^* - a_k}{2} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

Мисоли 3. Решаи хурдтарини муодилаи

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

-ро бо саҳеҳии $\varepsilon = 10^{-4}$ муайян кунед.

Ҳал. Аз мулоҳизаҳои §3 ва §4 истифода карда, нуктаҳои сарҳадии соҳаи муайянии функсияро муайян менамоем, ки дар он сифри функсия мавҷуд буда, шарти $f(a) \cdot f(b) < 0$ иҷро гардад. Ин гуна нуктаҳои сарҳади $a = -4$ ва $b = 4$ аст, яъне порчаи $[-4; 4]$. Ин порчаро ба ду ҳиссаи баробар ҷудо менамоем, яъне $\xi_1 = \frac{-4+4}{2} = 0$. Дар ин нукта $f(0) = 6 > 0$ аст, порчаи $[0; 4]$ -ро партофта, ҳалро дар порчаи $[-4; 0]$ мекобем. Порчаи $[-4; 0]$ -ро ба ду ҳиссаи баробар тақсим карда нуктаи $\xi_2 = \frac{-4+0}{2} = -2$ -ро ҳосил мекунем. Қимати функсия дар ин нукта $f(\xi_2) = -20 < 0$. Дар порчаи $[-2; 0]$ ҳалро ҷустуҷӯ карда, порчаи $[-4; -2]$ -ро партофта мешавад. Ин порчаро боз ба ду ҳисса ҷудо мекунем, яъне $\xi_3 = \frac{-2+0}{2} = -1$ -ро ёфтем. Дар ин нукта қимати функсияро ҳисоб мекунем: $f(\xi_3) = f(-1) = 0$. Ҳамин тавр, яке аз решаҳои муодила муайян шуд. Ҳисобкуниҳоро дар шакли ҷадвал ҷойгир мекунем:

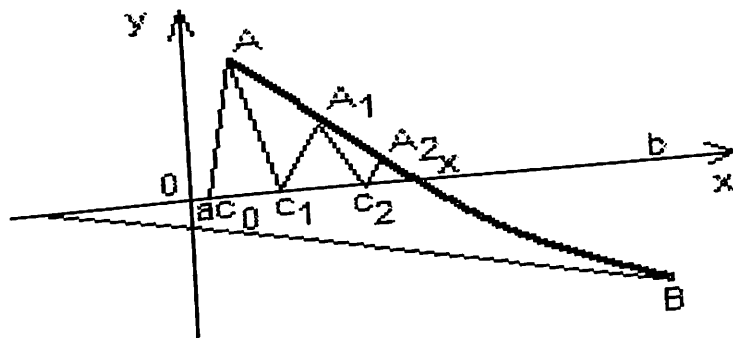
k	a_k	b_k	$\xi_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$f(\xi_k)$
0	-4	4	0	6
1	-4	0	-2	-20
2	-2	0	-1	0
3	-1	0	-0.5	

§6. Усули расанда (Нютон)

Усули расанда ба графики функция ба яке аз усулҳои бехтар истифодашавандаи муайян намудани ҳалли муодилаи (1) дар замони муосир мебошад.

Бигуздор дар порчаи $[a, b]$ функцияи $f(x)$ ва ҳосилаҳои $f'(x)$, $f''(x)$ бефосила буда, $f(a) \cdot f(b) < 0$ бошад.

Фарз мекунем, ки АВ камони хати қачи $y=f(x)$ бошад (Расми 6).



Расми 6.

Ин камони тири Ox -ро дар нуктаи x^* , ки $x=x^*$ ҳалли муодилаи (1) мебошад, мебурад. Бигуздор камони АВ нисбат ба тири Ox барҷаста бошад. Аз нуктаи А бо координатаҳои $(x_0=b, y_0=f(x_0))$ ба хати қачи $y=f(x)$ расанда мегузaronем. Коэффициенти кунҷии расанда дар нуктаи расиш ба қимати ҳосилаи функцияи $f(x)$ дар нуктаи расиш баробар аст, яъне $k=f'(x_0)$. Аз ин рӯ муодилаи расандаи аз нуктаи А (x_0, y_0) гузаранда намуди зеринро дорад

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

Ба баробарии (3) $y=0$, $y_0=f(x_0)$ -ро гузошта, нуктаи буриши расанда бо тири абсиссаи Ox -ро муайян мекунем. Ин нуктаро бо x_1 ишора мекунем:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Нуктаи $A_1(x_1, y_1 = f(x_1))$ -ро муайян намуда, аз он боз расанда мегузaronем, ки муодилаи он намуди

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

-ро мегирад. Буриши ин расанда бо тири Ox дар ҳолати $y=0$, $y_1 = f(x_1)$ будан, нуктаи

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

мешавад. Ин амалиётҳоро пай дар пай иҷро намуда, формулаи зерини

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

пайдо мекунем, ки нуктаи буриши расанда бо тири абсиссаи Ox -ро муайян мекунанд. Ин формула имконияти қадам ба қадам наздикшавии расандаро дар нуктаи буриш камони АВ бо тири Ox -ро ифода мекунанд. Формулаи (4) формулаи расанда (Нютон) ном дорад.

Агар мо амалиётҳоро аз нуктаи В, ки хати қач нисбат ба тири Ox фурӯҳаида аст, иҷро кунем, аз қадами аввал маълум мегардад, ки амалиёт ба тарафи дигари тири Ox , ки хати қач барҷастагӣ дорад равона мегардад. Аз ин рӯ ҷустуҷӯи ҳал аз муносибати барҷастагии камони хати қач бо тири Ox ба қимати реша наздик мегардад. Бинобар ин интиҳоби дурусти қимати ибтидоии x_0 дар аввал гузошта мешавад. Дар ҳақиқат, муносибати барҷастагии хати қачи $y=f(x)$ дар он нуктаҳое, ки барои онҳо

$$f(x) \cdot f''(x) > 0 \quad (5)$$

мебошад, муайян карда мешавад.

Мисоли 4. Бо усули расанда решаи мусбати муодилаи $e^x - 3x = 0$ ($e=2,71829\dots$) -ро бо сахтии $\varepsilon = 10^{-5}$ муайян намоед.

Ҳал.

$$f(x) = e^x - 3x; f'(x) = e^x - 3; f''(x) = e^x.$$

Мувофиқи нобаробарии (5) аз қиматҳои $x_0=0$ ва $x_0=1$ яке-ашро интиҳоб намудан лозим аст:

$$f(x) \cdot f''(x) \Big|_{x_0=0} = (e^x - 3x) \cdot e^x \Big|_{x=0} = (e^0 - 3 \cdot 0) e^0 = 1 > 0$$

$$f(x) \cdot f''(x) \Big|_{x=1} = (e^x - 3x) \cdot e^x \Big|_{x=1} = (e - 3) \cdot e < 0$$

Аз ин ҷо қимати ибтидои $x_0=0$ қабулкарда, ҳалро пай дар пай аз баробарии (4) муайян мекунем ва ба намуди ҷадвал тасвир менамоем.

Ҷадвали 1.

n	$x = x_n$	e^{x_n}	$3x_n$	$f(x_n) = e^{x_n} - 3x_n$	$f'(x_n) = e^{x_n} - 3$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0,0	1,0	0,0	1,0	-2	-0,5
1	0,5	11,65	1,50	0,15	-1,35	-0,11
2	0,61	1,8404	1,83	0,0104	-1,16	-0,009
3	0,619	1,8571	1,857	0,0001	-1,14	-0,000088
4	0,61909	1,8573	1,8573	0,0000	-	-

Аз ин ҷо ҳалли тақрибии муодила бо саҳеҳии додашуда $x=0,6191$ мебошад.

Суръати наздикшавии усули расандаро баҳо медиҳем. Барои ин формулаи Тейлорро дар нуктаи $x=x^*$ менависем.

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x^* - x_k)^2 \quad (x^* \leq \xi \leq x_k).$$

Аз баски $f(x^*)=0$ аст,

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - x^* - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x^* - x_k)^2$$

мешавад. Аз ин ҷо

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x^* - x_k)^2$$

Агар $m = \min_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ ва $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ бошад, он гоҳ

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_k - x^*|^2. \quad (6)$$

Нобаробарии (6) зудии наздикшавии усули расандаро баҳо медиҳад, агар қимати тақрибии ибтидои x_0 нобаробарии

$$\frac{M}{2m} |x_0 - x^*|^2 \leq c < 1$$

-ро таъмин намояд.

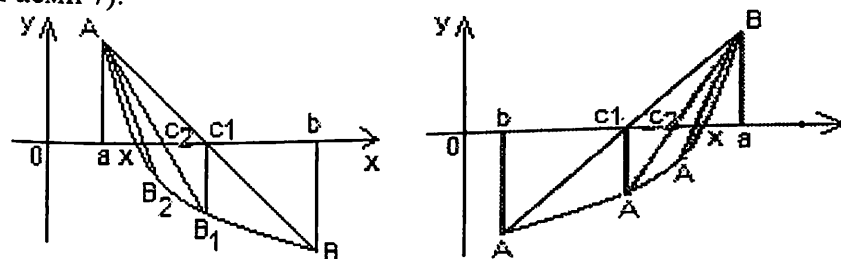
§7. Усули хорда

Решаи оддии муодилаи (1)-ро бо усули хорда муайян кардан мумкин аст.

Бигузор дар интервали $(a;b)$ фақат як решаи муодилаи (1) мавҷуд бошад ва функцияҳои $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ дар ин интервал бифосила буда, ҳосилаҳои $f'(x)$ ва $f''(x)$ мусбат бошад. Инчунин шарт $f(a) \cdot f(b) < 0$ иҷро шавад.

Дар ин маврид функцияи $f(x)$ дар интервали $(a;b)$ афзоюнда буда, хати қачи $y=f(x)$ тири Ox -ро дар нуктаи ξ мебурад ва фуруҳамида мешавад.

Камони AB -и хати қачи $y=f(x)$ -ро бо хордаи AB -и пайваस्तкунандаи нуктаҳои $A(a, f(a))$ ва $B(b, f(b))$ иваз мекунем (Расми 7).



Расми 7.

Хати рости AB тири Ox -ро мебурад. Ин нуктаи буришро бо x_1 ишора намуда, муайян менамоем. Муодилаи хати рости AB (хордаи AB) чунин намудро дорад.

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Аз баски $f(x)=0$ аст, бинобар он $x=x_1$ қабул намуда, пайдо мекунем:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Дар ин нукта қимати функсияи $f(x)$ –ро муайян намуда, онро ба сифати қимати аввалии ҳалли тақриби қабул мекунем. Нуктаи ҳосилшуда $A_1(x_1; f(x_1))$ ва нуктаи $B(b; f(b))$ –ро бо хати рост пайваст намуда, хордаи A_1B –ро ҳосил мекунем. Ин хорда тири Ox –ро дар нуктаи $c_2 = x_2$ мебурад.

Барои муайян намудани нуктаи буриш, муодилаи хати рости A_1B –ро истифода мебарем, яъне

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1).$$

Ин амалро пай дар пай иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}(b - x_{n-1}) \quad n=1, 2, \dots \quad (7)$$

Агар x_n наздикшавии n -уми қимати решаи муодилаи (1) бошад, он гоҳ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

Айнан ба ҳамин монанд, формулаи

$$x_n = b - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a) \quad (8)$$

ҳосил карда мешавад. Дар ин маврид бояд $f'(x) < 0$ ва $f''(x) < 0$ (ё $f'(x) > 0$ ва $f''(x) > 0$) бошад.

Мисоли 5. Барои муқоиса намудани усули хорда ва расанда мисоли 4-ро муоина менамоем. Аз шарти истифодабарии усули хорда истифода мебарем, яъне баробарии (7) ((8)) $f'(x) = e^x - 3$; $f''(x) = e^x$.

Ҷадвали 2

n	x_n	e^{x_n}	$3x_n$	$f(x_n)$	$f(b) - f(x_n)$	$f(x_n)/(f(b) - f(x_n))$
0	0,0	1,0	0,0	1,0	-1,3	$1/1,3 \approx 0,77$
1	0,77		2,31		-	

§8. Усули итератсияи содда

Муодилаи (1)-ро бо усули пай дар пай саҳеҳ намудани реша ҳал мекунем. Фарз мекунем, ки $f(x)$ –функсияи бефосила дар интервали (a, b) бошад.

Барои муайян намудани решаи муодилаи (1) бо ин усул муодиларо ба муодилаи баробарқувваи

$$x = \varphi(x) \quad (9)$$

иваз менамоем, ки $\varphi(x)$ –бо усулҳои гуногун ба яке аз ин функсияҳо баробар аст:

$$\varphi(x) = x - \alpha f(x), \quad \alpha = \text{const},$$

$$\varphi(x) = x + p(x)f(x),$$

$p(x)$ –функсияи дилхоҳе, ки дар порчаи $[a, b]$ сифр (реша) надорад.

Дар аввал тарзи графיקии ҳалли муодилаи (9)-ро дида мебароем. Графики функсияҳои $y_1 = x$ ва $y_2 = \varphi(x)$ –ро тасвир менамоем (Расми 8). Нуктаи ибтидои x_0 –ро интихоб намуда, қимати функсияи $\varphi(x_0)$ –ро ҳисоб мекунем. Дар натиҷа нуктаи M_0 –ро бо координатаҳои $(x_0, \varphi(x_0))$ муайян менамоем. Аз нуктаи $M_0(x_0, \varphi(x_0))$ параллел ба тири Ox хатти рост мегузаронем. Буриши хатти рости параллелиро бо функсияи $y_1 = x$ –ро муайян намуда, қимати x_1 –ро дар тири Ox пайдо мекунем. Аз қимати x_1 хати рости параллели ба тири координата Oy мегузаронем, яъне $\varphi(x_1)$ –ро муайян мекунем. Ин амалро пайдарпай иҷро намуда, қиматҳои $x_2, x_3, \dots$ –ро муайян менамоем, ки ба нуктаи буриши функсияҳои y_1 ва y_2 наздик мешавад.

Усули итератсияи содда формулаи

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

ки n -тартиби итератсия, x_0 –наздикшавии ибтидоии додашуда мебошад, ифода мекунад.

Агар φ –оператори фишурдашаванда бошад, он гоҳ пайдарпаии итератсионии наздикшаванда ва ҳудуди он решаи муодилаи (9) мебошад.

Усуле, ки асосаш ба муоина ва истифодаи пайдарпаии итератсионӣ бахшида шуда аст, усули итератсия ё пайдарпай наздикшавӣ меноманд.

Шартҳои наздикшавии пайдарпаии итератсиониро муоина мекунем:

1) Дар аввал функсияи φ -ро ҳамчун оператори муайян дар фазои ададҳои ҳақиқӣ қабул менамоем.

Исбот менамоем, ки φ — оператори фишурдашаванда аст. Дар ҳақиқат, ду нуқтаи дилхоҳи x ва y -ро аз маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ интихоб намуда, теоремаи Лагранҷро дар бораи афзоиши охиринок (нигаред [7]) истифода барем:

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y)$$

-ро ҳосил мекунем.

Фарз мекунем, ки функсияи $\varphi(x)$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ муайян ва дифференциронидашаванда буда, $|\varphi'(x)| \leq \alpha$ барои ҳамаи x -ҳо аст. Дар ин ҷо α ($0 < \alpha < 1$)-ададӣ додашуда мебошад. Мувофиқи фарзмон

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \alpha \cdot |x - y| = \alpha \rho(x, y)$$

мешавад.

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки φ — оператори фишурдашаванда аст. Дар асоси теоремаи инъикоси оператори фишурдашаванда (нигаред [11]) φ нуқтаи ягонаи беҳаракати x^* -ро дорад, яъне

$$x^* = \varphi(x^*)$$

(11)

аст.

Баробарии (11) нишон медиҳад, ки муодилаи (9) решаи ягона дорад. Ин ҳалро ҳамчун ҳудуди пайдарпаии итератсионии (10) бо наздикшавии ибтидоии дилхоҳи x_0 қабул кардан мумкин аст.

Мисоли 6. Решаи муодилаи

$$x - \operatorname{arctg} \frac{x}{10} - 1 = 0$$

-ро бо саҳеҳии $\varepsilon = 10^{-4}$ муайян намоед.

Ҳал. Функсияи $\varphi(x) = 1 + \operatorname{arctg} \frac{x}{10}$ -ро муоина менамоем. Ин функсия муайян ва дифференциронидашаванда дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад, ки

$$\varphi'(x) = \frac{10}{100 + x^2} \leq \frac{1}{10},$$

яъне адади $\alpha = \frac{1}{10} < 1$ мавҷуд аст, ки $|\varphi'(x)| \leq \alpha$ барои ҳамаи x -ҳои ҳақиқӣ.

Дар асоси гуфтаҳои боло муодилаи решаи ягона дорад ва онро бо усули пай дар пай наздикшавӣ муайян менамоем. Ҳалли ибтидоии $x_0 = 0$ -ро қабул мекунем. Пайдарпаии наздикшавӣ бо формулаи

$$x_{k+1} = 1 + \operatorname{arctg} \frac{x_k}{10} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

то иҷро шудани шarti

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon,$$

амалӣ мегардонем. Дар ин ҷо

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{10(10 - 1)} = \frac{1}{9}.$$

Иҷрои амалҳои наздикшавии итератсиониро ба намуди ҷадвал тасвир менамоем.

k	x_k	$\frac{x_k}{10}$	$\operatorname{arctg} \frac{x_k}{10}$	x_k	$\frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot x_{k+1} - x_k $
0	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.12
1	1.00000	0.10000	0.09968	1.09969	0.0111
2	1.09968	0.10997	0.10952	1.10952	0.0011
3	1.10992	0.11095	0.11049	1.11049	0.00011
4	1.11049	0.11105	0.11060	1.11060	0.00002 < 10 ⁻⁴

Аз ҷадвал маълум мешавад, ки $x_4 = 1.11060$ решаи тақрибии муодила бо саҳеҳии 10^{-4} мебошад.

Ҳамин тавр, шarti наздикшавии пайдарпаии итератсионии $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$, ки $x_k = \varphi(x_{k-1})$ ($k = 1, 2, \dots$) аст, ба решаи муодила

$x = \varphi(x)$ иҷрошавии шарт $|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$ мебошад. Наздикшавии пайдарпаии итератсионӣ бо ду тарз муайян карда мешавад:

1) $\varphi'(x) > 0$. Графики функцияҳои $y=x$ ва $y=\varphi(x)$ -ро тасвир мекунем. Дар мавриди $\varphi'(x) > 0$ функцияи $\varphi(x)$ афзоянда, чунки $\varphi'(x) < 1$. (Расми 6). Пайдарпаии итератсионӣ $x_0, x_1, \dots$ ба x^* аз тарафи чап афзоянда наздик мешавад агар $x_0 < x^*$, ва аз тарафи рост камшаванда, агар $x_0 > x^*$ бошад.

2) $\varphi'(x) < 0$. Функцияи $\varphi(x)$ камшаванда, чунки $\varphi'(x) > -1$ мебошад. Хатҳои шикаста мувофиқи шартҳои дар боло зикр гардида сохта мешаванд, ки характери наздикшавии онҳо ба буриши хатҳои $y=x$ ва $y=\varphi(x)$ даврӣ аст.

§9. Муайян намудани решаи муодилаи алгебравӣ бо усули ҳисоби қимати бисёрҷузъӣ

Муодилаи алгебравии

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

-ро дида мебароем. Аз §2 маълум аст, ки барои $x=c$ $f(c)=0$ бошад, он гоҳ $x=c$ ҳалли муодилаи (1) аст. Бинобар ин саволи мавҷудияти ҳисоби қимати бисёрҷузъӣ (функцияи алгебравӣ)-и $f(x)$ ба миён меояд. Ҳисоби қимати $f(x)$ барои қимати аргументи $x=\xi$ бевосита бо ёрии гузориши ξ дар бисёрҷузъии $f(x)$ имконпазир аст, яъне ҳисоби

$$f(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n.$$

Агар барои ин қимат $f(\xi)=0$ шавад, он гоҳ ξ ҳалли муодилаи (1) аст. Ҳисоби қимати функцияи алгебравӣ бо ҷудокунии бисёрҷузъӣ ба зарбшавандаҳо, яъне тақсими бисёрҷузъӣ ба дуҷузъии хаттӣ, сеҷузъии квадратӣ ва ғайра зич алоқаманд аст. Агар бисёрҷузъии $f(x)$ ба дуҷузъии хаттӣ (сеҷузъии квадратӣ) бебақия тақсим шавад, он гоҳ аз дуҷузъии хаттӣ (сеҷузъии квадратӣ) сифри функция муайян карда мешавад. Агар бақия пайдо шавад, он гоҳ бисёрҷузъии тартиби сифрӣ нисбат ба бисёрҷузъии аввала ҳосил мешавад.

Тақсими бисёрҷузъии $f(x)$ -ро ба дуҷузъии хаттӣ $x-\xi$ дида мебароем. Бисёрҷузъии

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

-ро ба намуди

$$f(x) = (x-\xi)g(x) + b_n$$

ифода мекунем, ки дар ин ҷо

$$g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

аст. Амалҳои заруриро иҷро намуда, тарафи чапи (1) -ро ба зарбшавандаҳо ҷудо мекунем, яъне $f(x)$ -ро ба намуди

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = (x-\xi)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}) + b_n$$

ифода мекунем. Қисмҳои тарафи ростро кушода ва аз баробарии қиматҳои бисёрҷузъии дараҷаи n , ҳангоми дилхоҳ будани қиматҳои x , истифода карда барои ёфтани b_k ($k=1, 2, \dots, n$) системаи баробариҳои

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_k = b_k - b_{k-1}\xi \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

ё

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_k = b_{k-1}\xi + a_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин системаҳо баробариҳои $b_n = f(\xi)$ -ро ҳосил мекунем, ки он қимати бисёрҷузъиро дар нуқтаи $x=\xi$ ифода мекунад. Ин ҳисобкуниҳоро ба шакли ҷадвал ҷойгир мекунем:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
ξ	0	$b_0 \xi$	$b_1 \xi$	$\dots$	$b_{n-2} \xi$	$b_{n-1} \xi$
	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-1}	$b_n = f(\xi)$

Ин тарзи ҳисобкунии қимати функцияро шакли Горнер меноманд.

Мисоли 7. Муайян намоед, ки $x=1$ решаи муодилаи

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$$

аст.

Ҳал. Агар $x=1$ ҳалли муодила бошад, он гоҳ ҷорҷузъии кубӣ ба дуҷузъии хаттӣ бебақия тақсим мешавад.

Шакли Горнерро истифода намуда, муодиларо ҳал мекунем. Барои ин чадвали ҳисобкуниро иҷро менамоем:

	1	2	3	-6
1		1*1	3*1	6*1
	1	3	6	0

Аз чадвал маълум мешавад, ки $b_n = f(1) = 0$ аст. Бинобар ин қимати $x=1$ ҳалли муодила мебошад.

§10. Решаҳои муодилаҳои алгебравии ошӯбӣ (сингулярӣ)

1. Омӯзиши хосияти муодилаҳо, тарзҳои ёфтани решаҳои онҳо, муайян кардани рафтор ва хусусияти ин решаҳо, модели компютери ёфтани решаҳо яке аз масъалаҳои асосии математикаи муосир ба ҳисоб меравад. Масалан, зоҳиран фаҳмост, ки ҳангоми дар порчаи $[a, b]$ бефосила будани функсияҳои $f_1(x)$ ва $f_2(x)$, аз наздикии сифрҳои онҳо, яъне решаҳои муодилаҳои $f_1(x)=0$ ва $f_2(x)=0$, наздик будани қиматҳои функсияҳо дар фосилаи дарозияш на он қадар калон, ки барои ин решаҳо атрофи умумӣ аст, бармеояд. Баръакс, фарз мекунем, ки дар ягон фосилаи $[a, b]$ қиматҳои ду функсияҳои бефосила ба ҳамдигар наздиканд. Он гоҳ чунин савол гузоштан мумкин аст: Нисбати ҷойгиршавии сифрҳои чунин функсияҳо чӣ гуфтан мумкин аст? Фаҳмост, ки дар ин фосила яке ё ҳар ду функсия сифрҳо надоштанишон мумкин аст. Рафту агар ҳар ду ҳам сифр дошта бошанд, он гоҳ наздик будани онҳо ҳатмӣ нест. Дар ҳолати умумӣ (ҳангоми дилхоҳ будани функсияҳои $f_1(x)$ ва $f_2(x)$) ҳатто решаҳо наздик ҳам бошанд, тарзи амалан ёфтани онҳо аз рӯи наздикии функсияҳо аз намуди кор вучуд надорад. Аз ин рӯ, бо мақсади ба даст овардани маълумоте доир ба ҷойгиршавии решаҳо бо муодилаҳои алгебравӣ маҳдуд мешавем.

Гузориши дақиқӣ масъаларо меорем. Муодилаи алгебравии дараҷаи n -уми

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

-ро дида мебароем. Фарз мекунем, ки ягон коэффитсиенти он ададӣ ниҳоят хурди (параметри) мусбати ε мебошад. Дар ин

ҳолат муодилаи (1)-ро муодилаи ошӯбӣ меномем. Решаҳои муодилаи ошӯбӣ аз ин параметр вобастагӣ доранд. Дикқати моро масъалаи зерин ҷалб хоҳад кард: Оё ягонто аз решаҳои муодилаи ошӯбӣ ҳангоми ба сифр наздик шудани параметр ба ягон решаи муодилае, ки аз (1) ҳангоми ба сифр баробар будани ҳамин параметр ҳосил мешавад, наздик аст?

Барои ба ин саволи гузошташуда ҷавоб додан мо аз формулаҳо барои решаҳои муодила, ки бо радикалҳо ифода мешаванд, истифода мекунем. Аниқтараш ҷавобро барои муодилаҳои дараҷаи $n \leq 4$ (квадратӣ, кубӣ ва дараҷаи 4-ум) меорем. Дикқати моро асосан ҳолате, ки коэффитсиенти назди дараҷаи калонтарин параметри хурд аст, ҷалб хоҳад кард.

2. Ҳолатеро дида мебароем, ки муодилаи (1) квадратӣ ($n=2$), яъне

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

аст. Дар он a_0 коэффитсиенти асосӣ, a_1 ва a_2 коэффитсиентҳои мутеъ ном доранд. Дар аввал ҳолатеро муоина менамоем, ки яке аз коэффитсиентҳои мутеъ ба қадри кофӣ хурд аст. Бигузур $a_1 = \varepsilon$ буда, дар он $a_0 \cdot a_2 < 0$ аст. Дар ин ҳолат ин муодила барои қиматҳои хурди $\varepsilon > 0$ ва муодилаи ғайриошӯбии

$$a_0 x^2 + a_2 = 0 \quad (2)$$

ду решаи гуногун доранд. Дар айнӣ ҳол решаҳои муодилаи ошӯбӣ $x_{1,2}(\varepsilon)$ ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ ба решаҳои муодилаи (2) наздиканд. Худи ҳамин хосият барои муодилаи ошӯбии намуди

$$a_0 x^2 + a_1 x + \varepsilon = 0$$

низ дуруст аст. Аниқаш решаҳои ин муодила ҳангоми хурд будани параметри $\varepsilon > 0$ ба решаҳои муодилаи

$$a_0 x^2 + a_1 x = 0,$$

яъне мувофиқан ба ададҳо $x_1 = 0$ ва $x_2 = -\frac{a_1}{a_0}$ наздиканд.

Ин тасдиқот бевосита аз формулаҳои решаҳои муодилаи квадратӣ бармеоянд. Дар ҳақиқат, масалан,

$$|x_1(\varepsilon) - x_1| = \left| \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0\varepsilon}}{2a_0} - 0 \right| = \left| \frac{a_1}{2a_0} + \frac{1}{2a_0} \sqrt{a_1^2 - 4a_0\varepsilon} \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{-a_1 + |a_1|}{2a_0} \right| = 0,$$

агар $a_1 > 0$ бошад. Барои чунин a_1

$$|x_2(\varepsilon) - x_2| = \left| \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0\varepsilon}}{2a_0} - \left(-\frac{a_1}{a_0} \right) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{-a_1 - |a_1|}{2a_0} + \frac{a_1}{a_0} \right| = 0.$$

Айнан ҳамин тавр, агар $a_1 < 0$ бошад, он гоҳ $x_2(\varepsilon)$ ба $x_1 = 0$ ва $x_1(\varepsilon)$ ба $x_2 = -\frac{a_1}{a_0}$ наздик аст.

Эзоҳи 1. Нишон додан мумкин аст, ки суръати (зуддии) наздикшавӣ дар ҳамаи ҳолатҳо нисбати параметри $\varepsilon > 0$ хаттӣ аст, яъне, масалан, $|x_1(\varepsilon) - x_1| = C\varepsilon$, ки дар ин ҷо C адади доимист. Барои ин аз он истифода кардан лозим аст, ки барои қиматҳои ба қадри кофӣ хурди x формулаи тақрибии $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2}$ ҷой дорад. Дар ҳақиқат,

$$|x_1(\varepsilon) - x_1| = \left| \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0\varepsilon}}{2a_0} - 0 \right| = \left| \frac{a_1 \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4a_0\varepsilon}{a_1^2}} \right)}{2a_0} \right| = \left| \frac{a_1}{2a_0} \left(-1 + 1 - \frac{4a_0\varepsilon}{a_1^2} \right) \right| = \frac{2\varepsilon}{|a_1|}.$$

Акнун ҳолати хурд будани коэффитсиенти асосӣ, яъне муодилаи

$$\varepsilon x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \quad (3)$$

-ро муоина менамоем. Ҳангоми $\varepsilon = 0$ будан муодилаи хаттӣ

$$a_1 x + a_2 = 0 \quad (4)$$

-ро ҳосил мекунем, ки $x = -\frac{a_2}{a_1}$ решаи он аст. Муодилаи ошӯбии

(3) барои ба қадри кофӣ хурди $\varepsilon > 0$ дорои ду решаи гуногун аст:

$$x_{1,2}(\varepsilon) = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2\varepsilon}}{2\varepsilon}. \quad (5)$$

Аз намуди ин решаҳо бевосита дида намешавад, ки $x_1(\varepsilon)$ ё $x_2(\varepsilon)$ ба решаи муодилаи (4) наздик аст. Барои инро нишон додан формулаҳои решаҳоро табдил медиҳем. Қисми чапи (3)-ро ба зарбшавандаҳо ҷудо мекунем:

$$\varepsilon x^2 + a_1 x + a_2 = \varepsilon \left(x^2 + \frac{a_1}{\varepsilon} x + \frac{a_2}{\varepsilon} \right) = \varepsilon \left(x + \frac{2a_2}{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2\varepsilon}} \right) \left(x + \frac{2a_2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2\varepsilon}} \right).$$

Ин нишон медиҳад, ки решаҳои муодилаи (2) бо формулаҳои

$$x_{1,2}(\varepsilon) = -\frac{2a_2}{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2\varepsilon}} \quad)$$

ифода мешаванд. Қайд мекунем, ки агар сурати касрҳои (5)-ро аз иррационалӣ озод кунем, яъне сурат ва махраҷи онҳоро мувофиқан ба $-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2\varepsilon}$ ва $-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2\varepsilon}$ зарбкунем, он гоҳ формулаҳои (6)-ро ҳосил мекунем (нигаред ба [3,4]).

Аз (6) ҳангоми ба сифр наздик шудани ε $x_2(\varepsilon) \rightarrow -\frac{a_2}{a_1}$, агар

$a_1 > 0$ бошад. Рафту агар $a_1 < 0$ бошад, он гоҳ $x_1(\varepsilon) \rightarrow -\frac{a_2}{a_1}$. Дар айни ҳол қимати мутлақи решаи дуюм ($x_1(\varepsilon)$ ҳангоми $a_1 > 0$ ё $x_2(\varepsilon)$ ҳангоми $a_1 < 0$ будан) ба беохир майл мекунад (наздик мешавад).

Ҳамин тариқ, нишон додем, ки теоремаи зерин ҷой дорад
Теоремаи 1. Яке аз решаҳои муодилаи ошӯбии (2) ҳангоми ба сифр майл кардани $\varepsilon > 0$ ба решаи муодилаи (3), яъне ба адади $-\frac{a_2}{a_1}$ наздик мешавад. Дар айни ҳол решаи дигарӣ аз рӯи

қимати мутлақ ба беохир майл мекунад.

Теоремаи исботшуда умумияти гуногунро дорад. Масалан, муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм бо коэффитсиентҳои доимии

$$\varepsilon y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = 0$$

-ро дида бароем, ки $a_1 > 0$, он гоҳ ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ ва $t \geq 0$ ҳалли вай $y(t, \varepsilon)$ ба $z(t)$, ки $z(t)$ -ҳалли муодилаи $a_1 z'(t) + a_2 z(t) = 0$ аст, майл мекунад (наздик мешавад).

3. Муодилаи ошӯбии каноники кубӣ ($n=3$), яъне

$$\varepsilon x^3 + px + q = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (7)$$

-ро дида мебароем. Ин муодила ақалан якто решаи ҳақиқӣ дорад. Дар ҳақиқат, барои қиматҳои калони манфии x қимати бисёраъзогии $\varepsilon x^3 + px + q$ манфӣ буда, барои қиматҳои калони мусбати x мусбат аст. Пас графики ин бисёраъзоги тири абсиссаро мебурад. Нуктаи буриш решаи муодилаи (7) аст. (Дар ҳолати умумӣ ин муодила якто ё сето решаи ҳақиқӣ (баъзан ду-тояш якхела) дорад. Ҳангоми $\varepsilon = 0$ будан аз (7) дорем $px + q = 0$, ки $x = -\frac{q}{p}$ решаи он аст. Пурсида мешавад, ки магар ҳангоми

$\varepsilon \rightarrow 0$ ягон решаи муодилаи ошубӣ ба решаи муодилаи $px+q=0$ наздик аст ё не. Барои ба ин савол ҷавоб гардонидан аз формулаи решаҳои муодилаи кубӣ (7) дар мавриди $\varepsilon=1$, ки бо номи формулаи Ч.Кардано (1501-1576) маълум аст, истифода мекунем (нигаред ба [9]):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{p} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{p} - \sqrt{D}}, \quad (8)$$

ки дар ин ҷо бузургии $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ буда, дискриминант ном дорад. Ҷй тавре, ки аз (8) дида мешавад, ҳангоми $D > 0$ будан муодилаи (7) якто решаи ҳақиқӣ дорад. (Ҳангоми $D = 0$ будан, муодила дуто решаи гуногун дорад. Масалан, муодилаи $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0$ дорои ду решаи $x_1 = -2$ ва $x_1 = 1$ аст.)

Эзоҳи 2. Бо дохил кардани тағйирёбандаи нав $y = x + \frac{a_1}{3a_0}$ ҳар гуна муодилаи кубии

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

-ро ба намуди (7) овардан мумкин аст, ки дар он $p = \frac{3a_0a_2 - a_1^2}{3a_0^2}$, $q = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}$ аст. Барои исбот кифоя аст, ки дар муодилаи кубӣ $x = y - \frac{a_1}{3a_0}$ гузошта, ҳисоббарориҳои заруриро иҷро намоем. Мана ҷаро мо на муодилаи кубии дилхоҳ, балки муодилаи намуди (7)-ро, ки муодилаи кубии каноникӣ ном дорад, муоина мекунем.

Ба муодилаи (7) баргашта ба ҳалли масъалаи гузошташуда да шуруъ мекунем. Сеаъзогии $ex^3 + px + q$ -ро ба зарбшавандаҳо ҷудо мекунем:

$$ex^3 + px + q = (ex^2 + ax + b)(x + c).$$

Кавсҳои тарафи ростӣ (9)-ро кушода ва аз баробарии киматҳои ду бисёраъзогии дараҷаи се, ҳангоми дилхоҳ будани киматҳои x , истифода карда барои ёфтани a , b , c системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} a + c\varepsilon = 0, \\ b + ca = p, \\ bc = q \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин система меёбем: $c = \frac{q}{b}$, $a = -c\varepsilon = -\frac{q\varepsilon}{b}$. Ин киматҳоро дар муодилаи дуҷум гузошта, муодилаи кубии

$$b^3 - pb^2 - q^2\varepsilon = 0$$

-ро пайдо менамоем. Мувофиқи эзоҳи 2 гузориши $y = b - \frac{p}{3}$ -ро иҷро намуда ба муодилаи

$$y^3 - \frac{p^2}{3}y - 2\left(\frac{p}{3}\right)^3 - q^2\varepsilon = 0$$

меоем. Дискриминанти ин муодилаи кубӣ ба $D = q^2\varepsilon\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2\varepsilon}{4}\right)$ баробар буда, ҳангоми $\varepsilon > 0$ будан мусбат аст. Пас вай решаи ҳақиқӣ дорад. Ин решаро аз рӯи формулаи Кардано (8) меёбем. Гузоришҳои зеринро иҷро менамоем:

$$Q = Q(\varepsilon) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \frac{q^2\varepsilon}{2}, \quad D = D(\varepsilon) = \frac{q^2\varepsilon}{2} \left(2\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \frac{q^2\varepsilon}{2}\right).$$

Мувофиқи формулаи (8) $y = \sqrt[3]{Q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{Q - \sqrt{D}} = T(\varepsilon)$ ва $b = y + \frac{p}{3} = T(\varepsilon) + \frac{p}{3}$. Инак, паҳнкунии (9) дуруст аст, агар $a = -\frac{q\varepsilon}{\frac{p}{3} + T(\varepsilon)}$, $b = \frac{p}{3} + T(\varepsilon)$, $c = \frac{q}{\frac{p}{3} + T(\varepsilon)}$ бошад. Аз (9) дида мешавад, ки решаҳои муодилаи (6) решаҳои муодилаҳои $ex^2 + ax + b = 0$ ва $x + c = 0$ мебошанд. Зоҳиран фаҳмост, ки ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$

$$Q(\varepsilon) \rightarrow \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad D(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Биноан $T(\varepsilon) \rightarrow \frac{2p}{3}$ ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$. Аз $x + c = 0$ дорем

$$x = x_3(\varepsilon) = -c = -\frac{q}{\frac{p}{3} + T(\varepsilon)}.$$

Аз ин ҷо $x_3(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{q}{\frac{p}{3} + \frac{2p}{3}} = -\frac{q}{p}$. Ҳамин тарик, $x_3(\varepsilon)$, ки решаи (7) аст, ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ ба решаи муодилаи $px + q = 0$ майл мекунад.

Решаҳои муодилаи $ex^2 + ax + b = 0$ бо формулаи (6) ҳисоб мешаванд, яъне

$$x_{1,2}(\varepsilon) = -\frac{2\left(\frac{p}{3} + T(\varepsilon)\right)}{-\frac{q\varepsilon}{\frac{p}{3} + T(\varepsilon)} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2\varepsilon^2}{\left(\frac{p}{3} + T(\varepsilon)\right)^2} - 4\left(\frac{p}{3} + T(\varepsilon)\right)\varepsilon}}.$$

Аз ин ҷо бевосита дида мешавад, ки $|x_{1,2}(\varepsilon)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$. Вале ин наздикшавиро бо истифодаи натиҷаи банди 2 ҳам нишон додан мумкин аст. Мувофиқи он ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ яке аз решаҳои муодилаи $\varepsilon x^2 + ax + b = 0$ ба решаи муодилаи $ax + b = 0$, яъне ба ададӣ

$$-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{p}{3} + T(\varepsilon)}{-q\varepsilon} = \frac{\left(\frac{p}{3} + T(\varepsilon)\right)^2}{q\varepsilon}$$

майл карда, дигаре аз рӯи қимати мутлақ ба беохир майл мекунад. Пас ҳар ду реша аз рӯи қимати мутлақ номаҳдуданд. Муҳокимарониҳои болоро ҷамъбаст карда ба хулосаи зерин меоём:

Теоремаи 2. Решаи ҳақиқии муодилаи (7) $x(\varepsilon)$, ки дар он ε ададӣ ба қадри кофӣ хурди мусбат аст, ба решаи муодилаи $px + q = 0$, яъне ба адади $-\frac{q}{p}$ наздик аст. Дар айни ҳол ду решаи дигари муодила (ҳақиқӣ ё комплексӣ) аз рӯи қимати мутлақ ба беохир майл мекунад.

4. Акнун саволи охирини дар банди 1 овардаро, яъне муодилаи тартиби чоруми ошӯбии

$$\varepsilon x^4 + px + q = 0 \quad (10)$$

-ро муоина менамоем.

Муҳокимарониҳои банди 3-ро истифода карда аз ба зарбшавандаҳо ҷудо кардаи

$$\varepsilon x^4 + px + q = (\varepsilon x^3 + mx^2 + nx + l)(x + k),$$

истифода намуда, пайдо мекунем: $k = \frac{q}{l}$, $m = -\varepsilon \frac{q}{l}$, $n = \varepsilon \left(\frac{q}{l}\right)^2$ ва

$$l^4 - pl^3 + \varepsilon q^3 = 0. \quad (11)$$

Гузориши $l = z + \frac{p}{4}$ -ро, ки z номаълуми нав аст, дар муодилаи (11) истифода намуда, барои ёфтани z муодила ҳосил мекунем:

$$z^4 - 6\left(\frac{p}{4}\right)^2 z^2 - 8\left(\frac{p}{4}\right)^3 z - 3\left(\frac{p}{4}\right)^4 + \varepsilon q^3 = 0. \quad (12)$$

Ин муодила ба синфи муодилаҳои намуди

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

тааллуқ дорад, ки решааш бо формулаи Феррарӣ [9]

$$x_1 = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} - \xi - \frac{2}{b}(\xi^2 - c)\eta}$$

ҳисоб карда мешавад. $\xi = t + a$, $\eta = \sqrt{2t + a}$, t -решаи муодилаи

$$b^2 - 4(2t + a)((t + a)^2 - c) = 0$$

мебошад. (Ба ҳамин монанд x_2, x_3 ва x_4 навишта мешавад.)

Бигузур $z = z(\varepsilon)$ яке аз решаҳои муодилаи (12) бошад. Вай бо формулаи Феррарӣ, ки a, b, c коэффитсиентҳо мебошад ифода карда мешавад. Ба мо лозим аст, ки ҳудуди $z(\varepsilon)$ ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ муайян карда шавад. Барои ин кифоя аст, ки ҳудуди $t(\varepsilon)$ ҳангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ -ро донем. Қиматҳои коэффитсиентҳои муодилаи (12) -ро ба муодилае, ки t -ро қаноатманд мекунад мегузорем.

Пас гузориши $t = y + 5\left(\frac{p}{4}\right)^2$ -ро истифода намуда, барои ёфтани y муодилаи кубиро ҳосил мекунем:

$$y^3 - \varepsilon q^3 y - 2\varepsilon \left(\frac{p}{4}\right)^2 q^3 = 0.$$

Решаи ин муодила бо формулаи Кардано ифода карда мешавад. Онро истифода намуда, пайдо мекунем:

$$t = t(\varepsilon) = y(\varepsilon) + 5\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \sqrt[3]{\varepsilon q^3 \left[\left(\frac{p}{4}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^4 - \frac{\varepsilon q^3}{27}}\right]} + \sqrt[3]{\varepsilon q^3 \left[\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^4 - \frac{\varepsilon q^3}{27}}\right]} + 5\left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

Ҳамин тариқ, $l_i = l_i(\varepsilon) = z_i(\varepsilon) + \frac{p}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$ -решаи муодилаи (11), ки $z_i(\varepsilon)$ бо формулаи Феррарӣ ҳисоб карда мешавад, мебошанд. Барои ин $\xi = \xi(\varepsilon) = t(\varepsilon) + a$, $\eta = \eta(\varepsilon) = \sqrt{2t(\varepsilon) + a}$ ва $t(\varepsilon)$ ба қимати дар боло муайяншуда баробар аст, ададҳои a, b, c - коэффитсиентҳои муодилаи (12), яъне

$$a = -6\left(\frac{p}{4}\right)^2, \quad b = -8\left(\frac{p}{4}\right)^3, \quad c = c(\varepsilon) = -3\left(\frac{p}{4}\right)^4 + \varepsilon q^3$$

аст.

Аз ин чо бевосита дидан мумкин аст, ки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(\varepsilon) = 5\left(\frac{p}{4}\right)^2$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi(\varepsilon) = -\left(\frac{p}{4}\right)^2$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = -\frac{p}{2}$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) = -3\left(\frac{p}{4}\right)^4$. Ин баробариҳоро истифода бурда, ба формулаи Феррари хангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ ба лимит гузашта, пайдо мекунем:

$$z_1(\varepsilon) \rightarrow \frac{3}{4}p, \quad z_i(\varepsilon) \rightarrow -\frac{p}{4}, \quad i = 2, 3, 4.$$

Бинобар ин $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_i(\varepsilon) = p$, ва $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_i(\varepsilon) = 0$ барои $i = 2, 3, 4$. Яке аз решаҳои муодилаи (10) решаи муодилаи $x + k = 0$, яъне $x_1 = x_1(\varepsilon) = -k = -\frac{q}{l_1(\varepsilon)}$ мебошад. Аз ин чо $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_1(\varepsilon) = -\frac{q}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_1(\varepsilon)} = -\frac{q}{p}$.

Ҳамин тавр теоремаи зерин исбот шуд.

Теоремаи 3. Ҳалли муодилаи (10) $x = x(\varepsilon)$ мавҷуд аст, ки хангоми $\varepsilon \rightarrow 0$ ба ҳалли муодилаи $xp + q = 0$ майл мекунад.

Эзоҳи 3. Дар банди 1 доир ба ҷойгиршавии решаҳо сухан мерафт. Аз наздик будан бармеояд, ки яке аз решаҳои муодилаҳои (3), (7), (10) хангоми $\varepsilon > 0$ -и кифоя хурд дар ε атрофи решаи муодилаи $a_1x + a_2 = 0$ ё $xp + q = 0$ ҷойгир аст.

БОБИ VIII МУОДИЛАИ ФАРҚӢ

§1. Мафҳумҳои асосӣ

Маълум аст, ки усулҳои адабии ҳалли муодилаҳои дифференциалӣ ба системаи муодилаҳои алгебравии хатти

$$Ay = f \quad (1)$$

оварда мешавад. Дар ин чо A –матритсаи намуди махсус дошта (матритсаи седиогналь), $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ –вектор (функцияи тӯри)-и номаълум, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ –вектор (функцияи тӯри)-и додашуда мебошанд.

Системаи муодилаҳои (1)-ро муодилаи фарқӣ мегӯянд. Чунки муодилаҳои фарқӣ дар мавридҳои аппроксиматсия на-мудани муодилаҳои дифференциалӣ пайдо мешавад. Функцияҳои аз тағйирёбандаҳо вобаста дар маҷмӯи нуқтаҳои дискретии координатии додашуда, ки ададан ба дахҳо ё ин ки садҳо ҳазор мерасанд, ҷустуҷӯ карда мешаванд. Системаи муодилаҳои алгебравӣ хаттии (муодилаи фарқӣ) барои муайян кардани функцияи дискретӣ ҳосил карда мешаванд.

Дар ин банд усулҳои ҳалли муодилаҳои фарқиро дида мебароем, ки барои ҳал намудани он шартҳои иловагӣ истифода мешавад. Агар қимати функцияи y_i ва фарқи тартиби якуми он дар як нуқта дода шавад, он гоҳ онро шартӣ аввала ё Коши мегӯянд. Агар қимати функцияи y_i ва ё фарқи тартиби якуми он дар нуқтаҳои гуногун дода шавад, он гоҳ масъалаи ҳосилшуда канорӣ мешавад. Ин шартҳоро мувофиқан шартҳои аввала (ибтидоӣ) ё масъалаи Коши ва ё шартҳои канорӣ меноманд. Усулҳои ҳосил намудани муодилаҳои фарқӣ, аппроксиматсия ва функцияҳои тӯрӣ дар бандҳои оянда муоина карда мешаванд.

§2. Муодилаи фарқии хаттии тартибӣ якум

Муодилаи фарқии хаттии тартибӣ якуми якҷинсаи

$$y_{k+1} = f_k y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

-ро дида мебароем, ки дар ин ҷо $f_k = f(x_k)$ -функсияи дискретии дар маҷмӯи $\{0, 1, 2, \dots\}$ додашуда, $y_k = y(x_k)$ -функсияи дискретии номаълум аст.

Фарз мекунем, ки қимати ибтидоии функсияи дискретии y_k дода шуда аст, яъне y_0 адади доимии дилхоҳи додашуда мебошад. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи фарқии (2) ба намуди

$$y_k = y_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} f_i \quad (3)$$

ифода карда мешавад.

Дар ҳақиқат, аз (1) барои қиматҳои новобастаи $0, 1, 2, \dots, k-1$ системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} y_1 = f_0 \cdot y_0, \\ y_2 = f_1 \cdot y_1, \\ \dots \dots \dots \\ y_k = f_{k-1} \cdot y_{k-1} \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Муодилаҳои системаро бо ҳам зарб намуда, муодилаи

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_k = y_0 \cdot y_1 \cdot \dots \cdot y_{k-1} \cdot f_0 \cdot f_1 \cdot \dots \cdot f_{k-1}$$

-ро пайдо мекунем. Дар натиҷаи ҳар ду қисми муодилаи охиринро ба $y = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_{k-1}$ тақсим карда ҳалли намуди (3) -ро пайдо мекунем.

Мисоли 1. Ҳалли муодилаи

$$y_{k+1} = \frac{1}{k+1} y_k.$$

ёфта шавад.

Ҳал. Дар ин ҷо $f_k = \frac{1}{k+1}$ аст, бинобар ин ҳалли муодила

$$y_k = y_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1}$$

мешавад. Аз баски

$$\prod_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{1}{k!},$$

бинобар ин

$$y_k = y_0 \cdot \frac{1}{k!}$$

аст.

Акнун муодилаи оддии фарқии ҳаттии тартиби якуми намуди

$$\Delta y_k = f_k$$

-ро дида мебароем. Мувофиқи мавзӯи фарқҳои охирнок (ниг. ба боби II, фасли 1 [22]) ин муодила намуди

$$y_{k+1} - y_k = f_k \quad (4)$$

-ро доро аст.

Бигзор қимати ибтидоии функсияи дискретии y_k дода шуда бошад, яъне y_0 адади доимии дилхоҳи додашуда. Он гоҳ ҳалли умумии муодилаи фарқии (4) ба намуди

$$y_k = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} f_i \quad (5)$$

ифода карда мешавад. Дар ҳақиқат, қиматҳои новобастаи аргументҳои $0, 1, 2, \dots, k-1$ -ро гузошта, аз (4) пайдо мекунем:

$$\begin{cases} y_1 - y_0 = f_0, \\ y_2 - y_1 = f_1, \\ \dots \dots \dots \\ y_k - y_{k-1} = f_{k-1}. \end{cases}$$

Ҳамаи муодилаҳои ин системаро ҷамъ карда, ҳалли намуди (5) -ро ҳосил мекунем.

Мисоли 2. Ҳалли муодилаи

$$\Delta y_k = k^2$$

-ро муайян кунед.

Ҳал. Мувофиқи формулаи (5)

$$y_k = y_0 + (1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2)$$

аст. Аз баски

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6}$$

мебошад, бинобар ин

$$y_k = y_0 + \frac{k(k-1)(2k-1)}{6}$$

ҳалли умумии муодила мешавад.

§3. Муодилаи фарқии ҳаттии тартибӣ якум бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда

Муодилаи фарқии

$$\Delta y_k + p_k y_k = q_k \quad (6)$$

-ро дида мебароем. Дар ин ҷо p_k ва q_k қиматҳои функсияҳои дар маҷмӯи $\{0, 1, 2, \dots\}$ муайян, y_k -функсияи тӯрии номуайян мебошанд.

Ҳалли муодилаи фарқии (5) -ро ба намуди зарби ду функсияҳои дискретӣ, яъне

$$y_k = u_k \cdot v_k$$

мекобем, ки u_k ва v_k -функсияҳои тӯрии дилхоҳи номуайян мебошанд. Аз хосиятҳои фарқҳои охиринок (ниг. ба боби II, фасли 1 [22]) истифода карда, пайдо мекунем, ки

$$\Delta y_k = u_{k+1} \cdot \Delta v_k + v_k \cdot \Delta u_k$$

аст. Қиматҳои y_k ва Δy_k -ро дар баробарии (6) гузошта, муодилаи

$$u_{k+1} \cdot \Delta v_k + v_k [\Delta u_k + p_k \cdot u_k] = q_k \quad (7)$$

-ро ҳосил мекунем. Функсияи тӯрии u_k -ро чунон бояд муайян намуд, ки ифодаи дохили қавси квадратии баробарии (7) ба сифр баробар шавад, яъне

$$\Delta u_k + p_k \cdot u_k = 0.$$

Ҳалли ин муодила мувофиқи ҳалли муодилаи (2) (формулаи (3)) чунин аст:

$$u_k = u_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} [1 - p_i]. \quad (8)$$

Пас аз интихоби u_k муодилаи (7) намуди

$$u_{k+1} \cdot \Delta v_k = q_k$$

-ро соҳиб мешавад. Ҳалли ин муодила дар асоси ҳалли муодилаи (4) ба намуди

$$v_k = v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{q_i}{u_{i+1}}$$

ифода мешавад.

Мисоли 3. Ҳалли умумии муодилаи фарқи якҷинсаи

$$y_{k+1} - \frac{1}{k+1} y_k = \frac{1}{k+2}$$

-ро муайян кунед.

Ҳал. Дар ин муодила $p_k = \frac{k}{k+1}$, $q_k = \frac{1}{k+2}$ мебошад. Бинобар ин ҳалли умумии муодила намуди

$$y_k = u_0 \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(v_0 + \frac{1}{u_0} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(i+1)!}{i+2} \right)$$

-ро соҳиб мешавад.

§4. Муодилаи фарқии ҳаттии тартибӣ дуҷинса бо коэффитсиентҳои доимӣ

Ёфтани ҳалли муодилаи фарқии

$$ay_{k+1} + by_k + cy_{k-1} = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

-ро дида мебароем. Дар ин ҷо a , b , c -коэффитсиентҳои доимӣ, ки $a \neq 0$ ва $c \neq 0$ аст.

Бигузор $y_k^{(1)}$ ва $y_k^{(2)}$ ду ҳалли фундаменталии системаи (9) бошад. Ин ҳалҳо ҳатти новобастаанд, агар баробарии

$$C_1 y_k^{(1)} + C_2 y_k^{(2)} = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

фақат ва фақат барои $C_1 = C_2 = 0$ иҷро шавад. Ин нишон медиҳад, ки муайянкунандаи системаи

$$\begin{cases} C_1 y_k^{(1)} + C_2 y_k^{(2)} = 0, \\ C_1 y_{k+m}^{(1)} + C_2 y_{k+m}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad k=1, 2, \dots; \quad m=1, 2, \dots$$

нобаробарӣ сифр аст, яъне

$$\begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} \\ y_{k+m}^{(1)} & y_{k+m}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad k=1, 2, \dots; \quad m=1, 2, \dots$$

Дар ҳолати хусусӣ

$$\begin{vmatrix} y_k^{(1)} & y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

аст.

Ҳалли умумии ин муодиларо ба намуди

$$y_k = C_1 y_k^{(1)} + C_2 y_k^{(2)} \quad (10)$$

ифода кардан мумкин аст, ки C_1 ва C_2 -доимиҳои дилхоҳ, $y_k^{(1)}$ ва $y_k^{(2)}$ ҳалҳои фундаменталии системаи (9) мебошанд. Доимиҳои C_1 ва C_2 аз шартҳои аввала ва ё канорӣ муайян карда мешаванд.

Барои ҳосил намудани ҳалли намуди (10) гузориши $y_k = t^k$ -ро истифода мебарем. Дар натиҷаи гузориш муодилаи характеристики

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (11)$$

-ро ҳосил мекунем, ки он дорои решаҳои $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ аст.

Вобаста аз дискриминант $D = b^2 - 4ac$ ҳалли намуди (10) муайян мешавад:

1) Агар $D > 0$ бошад, он гоҳ муодилаи (11) ду решаи ҳақиқии гуногуни t_1 ва t_2 -и аз сифр фарқкунандаро дорад ва ҳалли фундаменталии муодилаи (9)

$$y_k^{(1)} = t_1^{(k)}, \quad y_k^{(2)} = t_2^{(k)}$$

мешавад.

2) Агар $D = 0$ бошад, он гоҳ муодилаи (11) решаи ягонаи ҳақиқии каратии $t_1 = t_2 = t_0$ -ро дорад. Дар ин маврид ҳалли фундаменталии муодилаи (9)

$$y_k^{(1)} = t_0^{(k)}, \quad y_k^{(2)} = k \cdot t_0^{(k)}$$

мешавад.

3) Агар $D < 0$ бошад, он гоҳ муодилаи (11) решаҳои комплексии ҳамроҳ шуда

$$y_k^{(1)} = \rho^k \cos(k\varphi), \quad y_k^{(2)} = \rho^k \sin(k\varphi)$$

-ро доранд. Дар ин ҷо $\rho = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{|D|}}{b}$, $i = \sqrt{-1}$ аст.

Маълум аст, ки

$$t_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} = \rho \cdot e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$t_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a} = \rho \cdot e^{-i\varphi} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

мебошад. Аз ин ҷо ҳалҳои хусусӣ

$$t_1^k = \rho^k (\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)), \quad t_2^k = \rho^k (\cos(k\varphi) - i \sin(k\varphi))$$

мешаванд. Он гоҳ ҳалли умумии (10) намуди

$$y_k = \rho^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi)), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

-ро мегирад.

Мисоли 4. Ҷуфти харгӯшҳо ҳар моҳе ду харгӯшча (нар ва мода) мезоянд. Харгӯшҳои навзод бошад баъди ду моҳи зоиданашон ба наслдиҳӣ сар мекунанд. Агар дар аввали сол як ҷуфти харгӯшҳои навзод мавҷуд бошад, пас дар як сол чӣ қадар харгӯш пайдо мешавад?

Ин масъаларо математики машҳури Итолиявӣ Леонардо Фибоначчи гузошта аст.

Ҳал. Аз шарти масъала бармеояд, ки $y_0 = 1$, $y_1 = 1$ шарти аввалаи додашуда буда, $k = 12$ моҳ аст. Микдори харгӯшҳо дар 12 моҳ ҳалли муодилаи фарқии

$$y_k - y_{k-1} - y_{k-2} = 0 \quad \text{ё} \quad y_k = y_{k-1} + y_{k-2} \quad (k = 2, 3, 4, \dots, 12)$$

мебошад. Аз ин ҷо маълум мешавад, ки $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$ буда, ҳалли намуди (10)

$$y_{12} = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{11} + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{11}$$

мебошад, ки C_1 ва C_2 ҳалли системаи

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1, \end{cases}$$

яъне $C_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \approx 1.618$, $C_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \approx -0.618$, ки адади

Фибаначчӣ ном дорад. Ҳамин тарик, $y_{12} = 233$ аст.

§5. Муодилаи фарқии ҳаттии тартиби дуюм бо коэффитсиентҳои тағйирёбанда

Муодилаи фарқии тартиби дуюмро дида мебароем, ки он ба навишти зерин мувофиқ аст:

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \quad i=1,2,3,\dots \quad (12)$$

Барои ҳал намудани ин муодила ду шарт иловагӣ талаб карда мешавад: шарт Кошӣ ва канорӣ. Ин масъалаҳоро дида мебароем.

1. Масъалаи Кошӣ.

Бигзор қимати функсияҳои дискретии y_0 ва y_1 дода шуда бошанд. Ин қиматҳоро доништа пайдарпаии қиматҳои y_i -ро муайян менамоем. Қимати y_i аз муодилаи (12) ҳангоми муайян будани қиматҳои $y_0 = \mu_1$ ва $y_1 = \mu_2$ ёфта шаванд. Дар ин ҷо μ_1 ва μ_2 доимӣҳои дилхоҳи додашуда мебошанд. Ин масъала ҳалшаванда ва дорои ҳалли ягона аст. Пайдарпаии

$$y_{i+1} = \frac{1}{b_i} \cdot (c_i y_i - a_i y_{i-1} - f_i), \quad b_i \neq 0 \quad (i=1,2,3,\dots)$$

ҳалли масъаларо ифода мекунад.

2. Масъалаи канорӣ.

Ёфтани қимати функсияи дискретии y_i аз муодилаи (12), ҳангоми додашавии шартҳои канорӣ $y_0 = \mu_1$ ва $y_N = \mu_2$ талаб карда шудааст. Ин масъаларо масъалаи канорӣ чинси якум меноманд.

Масъалаи канориро ба намуди умумӣ чунин ифода кардан мумкин аст:

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_N y_{N-1} + \mu_2.$$

Дар ин ҷо $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N, \mu_1, \mu_2$ доимӣҳои дилхоҳи додашуда мебошанд. Ҳалли масъалаи канорӣ бо усули гузарониш (прогонка) муайян карда мешавад.

§6. Усули гузарониши роста

Ҳалли масъалаи канорӣ

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (13)$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \chi_N y_{N-1} + \mu_2$$

-ро, ки $a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0$ барои ҳамаи $i=1,2,\dots,N-1$ мебошанд, дида мебароем.

Мақсади асосӣ, муодилаи фарқии тартиби дуюми дар (13) бударо ба се муодилаи фарқии тартиби якум оварда, онҳоро ҳал намудан аст. Ин корро аз рӯи алгоритми зерин иҷро менамоем:

1) Гузориши $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ -ро, ки дар ин ҷо α_i, β_i - коэффитсиентҳои номаълуманд, иҷро мекунем.

2) Барои муайян намудани коэффитсиентҳои α_i, β_i муодилаи (13) -ро истифода мекунем:

Дар аввал $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ -ро гузошта муодилаи

$$(a_i \alpha_i - c_i) y_i + a_i \beta_i + b_i y_{i+1} = -f_i$$

-ро ҳосил мекунем. Пас гузориши дар банди 1 овардашударо истифода бурда, муодилаи фарқии тартиби якумро пайдо мекунем:

$$[(a_i \alpha_i - c_i) \alpha_{i+1} + b_i] y_{i+1} + a_i \beta_i + (a_i \alpha_i - c_i) \beta_{i+1} = -f_i.$$

Аз ин ҷо формулаҳои рекурентии

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (14)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i=1,2,\dots,N-1$$

-ро ҳосил мекунем.

3) Аз шартҳои якуми масъалаи (13) истифода бурда, α_i, β_i -ро меёбем. Аз баски дар банди 1 y_i барои ҳамаи $i=0,1,2,\dots,N-1$ чой дорад, $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$ аст. Бинобар ин $\alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = \mu_1$ мебошад.

Ҳамин тариқ, барои ёфтани коэффитсиентҳои α_i, β_i масъалаи Коширо пайдо намудем:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \alpha_1 = \chi_1 \quad (15)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_1 = \mu_1, \quad i=1,2,\dots,N-1$$

4) Пай дар пай аз (15) барои ёфтани y_N ҳамаи қиматҳои α_i, β_i -ро ҳисоб мекунем. Пас системаи

$$\begin{cases} y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2, \\ y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N \end{cases}$$

-ро, ки $1 - \alpha_N \chi_2 \neq 0$ аст, ҳал карда,

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}$$

-ро ҳосил мекунем.

5) мувофиқи бандҳои 1 ва 4 барои муайян кардани y_i масъалаи Коши ҳосил мешавад:

$$y_N = \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}, \quad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}.$$

Ин усулро усули гузарониши роста меноманд. Алгоритми ҳисоб бо ин усул чунин аст:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \chi_1; & \beta_1 &= \mu_1; \\ \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}; & \beta_{i+1} &= \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - \alpha_i a_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1; \\ y_N &= \frac{\mu_2 + \chi_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \chi_2}; & y_i &= \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}; \quad i = N-1, N-2, \dots, 2, 1. \end{aligned} \quad (16)$$

§7. Усули гузарониши чаппа

Ҳалли масъалаи канории (13) -ро дида мебароем. Алгоритми усули гузарониши ростаро ба намуди чаппа, яъне

1) гузориши

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1}$$

-ро истифода мекунем;

2) аз (13) пай дар пай y_{i+1} , y_i -ро хориҷ намуда, α_i ва β_i -ро муайян мекунем:

$$\alpha_i = \frac{a_i}{c_i - b_i \alpha_{i+1}}; \quad \beta_i = \frac{f_i + b_i \beta_{i+1}}{c_i - b_i \alpha_{i+1}}; \quad i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1.$$

3) аз шarti дуҷуми масъалаи (13) истифода намуда, α_N ва β_N -ро меёбем:

$$\alpha_N = \chi_2; \quad \beta_N = \mu_2.$$

4) пас аз пай дар пай муайян намудани α_i , β_i қимати y_0 -ро меёбем:

$$y_0 = \frac{\mu_1 + \chi_1 \beta_1}{1 - \alpha_1 \chi_1}.$$

5) аз банди 1) ва 4) истифода карда пай дар пай y_i -ро муайян менамоем:

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1}.$$

Ин усулро усули гузарониши чаппа меноманд. Намуди умумии алгоритми ҳисоби ин усул мувофиқи бандҳои 1)-5) чунин аст:

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \chi_2; & \alpha_i &= \frac{a_i}{c_i - b_i \alpha_{i+1}}; \quad i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1; \\ \beta_N &= \mu_2; & \beta_i &= \frac{f_i + b_i \beta_{i+1}}{c_i - b_i \alpha_{i+1}}; \quad i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1; \\ y_0 &= \frac{\mu_1 + \chi_1 \beta_1}{1 - \alpha_1 \chi_1}; & y_{i+1} &= \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (17)$$

§8. Шarti устувории усули гузарониш

Акнун $1 - \alpha_N \chi_2$ ($\ddot{\epsilon}$ $1 - \alpha_1 \chi_1$) -ро баҳо медиҳем:

$$|1 - \alpha_N \chi_2| \geq 1 - |\alpha_N| \cdot |\chi_2| \geq 1 - |\chi_2| > 0$$

аст, чунки $|\chi_2| < 1$ ё ин ки $|\alpha_N| < 1$.

Ҳисоббарорӣ дар компютер бо формулаҳои (16) ((17)) тақрибӣ бо ададӣ охиrhoки рақами эътимоднок гузаронида мешавад. Дар натиҷаи яклухткунӣ ҳаттӣ ба ҷои ҳалли y_i масъалаи (13), ҳалли тақрибии $\tilde{y}_i$ -и ҳамон масъала бо коэффитсиентҳои тақрибии $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_i$, $\tilde{\chi}_i$, $\tilde{\chi}_2$ ва тарафи ростии $\tilde{f}_i$, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ ёфта мешавад. Саволҳои пайдо мешаванд: Оё яклухткунӣ дар рафти ҳисобкунӣ ба афзудани хатоӣ, нодурустии ҳал ва ба афзудани бузургҳои ҳосилшаванда, қатгардонии ҳисоб намеорад? Барои ҷавоб додан ба ин саволҳо шarti устувории усулро нишон додан лозим аст.

Усули гузарониши устувор номида мешавад, агар $|\alpha_i| \leq 1$ барои $i = 1, 2, 3, \dots$ бошад. Маҳз дар ин ҳолат хатоӣ яклухткунӣ дар рафти ҳисобкунӣ, ки дар он асосӣ формулаҳои рекурентии (16) ((17)) пайдо мешавад, афзуншаванда нест. Шarti кифоя-

гиеро нишон медихем, ки барои формулаҳои (16) ((17)) маъно дорад:

$$|a_i| > 0, |b_i| > 0, |c_i| \geq |a_i| + |b_i|, |x_i| \leq 1, j=1,2; |x_1| + |x_2| < 2.$$

Ҳангоми иҷро шудани ин шартҳо нобаробарии $|a_i| \leq 1$ барои $i=1, 2, \dots, N$ ҷой дорад. Дар ҳақиқат $|a_i| = |x_i| \leq 1$ ва агар $|a_i| \leq 1$ барои $i=1, 2, \dots, N$ бошад, он гоҳ нишон додан мумкин аст, ки $|a_{i+1}| \leq 1$ аст. Барои ин фарқи $|c_i - a_i a_i| - |b_i|$ -ро дида мебароем. Аз баски $b_i \neq 0$ бинобар ин

$$|c_i - a_i a_i| - |b_i| \geq |c_i| - |a_i| \cdot |a_i| - |b_i| \geq |a_i|(1 - |a_i|) \geq 0$$

аст. Аз ин ҷо $|a_{i+1}| = \frac{|b_i|}{|c_i - a_i a_i|} \leq \frac{|b_i|}{|a_i|(1 - |a_i|) + |b_i|} \leq 1$ мешавад.

БОБИ IX УСУЛИ АДАДИИ ҲАЛЛИ МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНТСИАЛИИ МУҚАРРАРӢ

Дар ин боб усули фарқҳои охиринок, ки яке аз усулҳои ададии паҳнғаштаи ҳалли муодилаҳои дифференсиалии мебошад, дида мебароем. Мақсади асосӣ ин боб муоинаи ва татбиқи амалии ҳалли адабии масъалаи Коши барои муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ мебошад.

§1. Ҳалли адабии муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ

Муодилаи дифференсиалии муқаррарии тартиби якуми

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

-ро барои параметри x аз фосилаи $[a, b]$ ҳангоми муайян будани шарти аввалаи

$$y(a) = y_0 \quad (2)$$

дида мебароем. Дар ин ҷо y_0 -қимати додашуда, $f(x, y)$ - функцияи намуди муайян доштаи барои ҳамаи қиматҳои $x \in [a, b]$ бо компонентаҳои векторҳои y_1 ва y_2 қаноаткунандаи шарти Липшиц

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2| \quad (3)$$

мебошад, ки L - доимии Липшиц аст. Исбот кардан мумкин аст, ки ҳангоми иҷро шудани шарти (3), масъалаи (1)-(2) дорои ҳалли ягона мебошад.

Дар поён усулҳои ададиро ҳамчун усулҳои дискретии муайян, ки $y_n \approx y(x_n)$ пай дар пай тахмини дар турӣ

$$\omega_h = \left\{ x_n : x_n = x_0 + n \cdot h; n = 0, 1, 2, \dots, N; x_0 = a; x_N = b; h = \frac{b-a}{N} > 0 \right\}$$

ҳисоб карда мешавад, муҳокима менамоем. Дар ин ҷо y_n - қимати тақриби, $y(x_n)$ - қимати аниқи ҳал дар нуқтаи x_n ва h - қадами турӣ аст.

Усулҳои асосӣ интегриронии муодилаҳои дифференсиалии муқаррариро дар мисоли ҳалли масъалаи (1)-(2), ки масъалаи Коши барои муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ ном дорад,

муоина мекунем. Яке аз усулҳои нисбатан муайяни усули ҳалли муодилаҳои дифференциалии муқаррарӣ ин усули ба қатори Тейлор чудо кардан мебошад. Барои оддӣ чудо намудан ба қатор, ҳалли масъалаи (1)-(2) –ро барои ҳолати скалярӣ дида мебароем.

§2. Усули ба қатори Тейлор чудо кардан

Агар ҳалли масъала дар нуқтаи x_n муайян бошад, он гоҳ дар нуқтаи x_{n+1} ёфтани ҳал бо тарзи қоркарди ҳалли дар намуди қатори Тейлор дуруст аст, яъне

$$y(x_{n+1}) = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \dots \quad (4)$$

Агар ин қаторро ба p аъзои ҷамъшаванда маҳдуд намуда, қимати функсияи $y(x_n)$ -ро тақрибан ба қимати дискретии y_n иваз намоем, он гоҳ барои муайян кардани y_{n+1} ҳалли адабии масъалаи (1)-(2) баробарии тахминии зеринро пайдо мекунем:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \varphi(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

дар ин ҷо $\varphi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(x_n, y_n)$.

Барои қимати $p=1$ формулаи Эйлер ҳосил мешавад:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (6)$$

Формулаҳои (5) ва (6) оддӣ ҳисобшаванда буда, шартӣ аввалаи иловагиро талаб намекунад ва бо микдори қадами камтарин тартиби аппроксиматсияи формулаҳо ва интегррониро имконият медиҳад. Татбики амалии ин формула барои масъалаи гузошта дар функсияи $f(x, y)$ бо оддӣ ҳисоб шудани пурраи тартиби баланди ҳосила маҳдуд мегардад.

Маънои геометрии усули Эйлер дар порчаи $[x_n, x_{n+1}]$ аппроксиматсияи ҳалли масъала ба расанда порча мебошад. Инро бо сохтани ҳалли графикӣ дар нуқтаи x_n меорем (расми 1.).

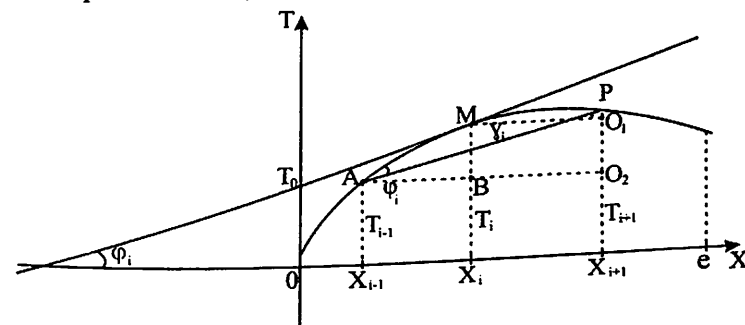
Тахмин мекунем, ки функсияи $y(x)$ дода шуда аст. Интервали $[a, b]$ -ро ба порчаҳои элементарии дарозияшон $\Delta x = h$ чудо намуда, маҷмӯи охиноки гирехҳои тури $x_i = a + ih$ ҳосил мекунем, дар ин ҷо $i = 1, 2, \dots, N$, микдори гирехҳо N аст. Дар ин ҳолат мо аз соҳаи

бефосилаи ω ба соҳаи тури ω_h , аз функсияи аргументи бефосилаи $y(x)$ ба функсияи аргументи дискретӣ $y_i = y(x_i)$ мегузарем.

Иваз кардани ҳосиларо бо ёрии муносибатҳои фарқи мумкин тахминан бо тарзи элементарӣ чунин бошад [1]: Графикҳои функсияи $y(x)$ дар расми 1 дода шуда аст. Агар бо ёрии φ_k кунҷи $\angle MAB$ -и бо раванди тири абсиссаи расанда ба камони $y(x)$ -и аз нуқтаи $M(x_k, y(x_k))$ гузарандаро ишора намоем, он гоҳ ҳосилаи функсияи $y(x)$ барои $x = x_k$ бо формулаи

$$y'(x_k) = \operatorname{tg}(\varphi_k) \quad (7)$$

муайян карда мешавад.



Расми 1. Муайян кардани ҳосилаи функсияи $y(x)$.

Дар ҳақиқат ду нуқта $A(x_{k-1}, y_{k-1})$ ва $P(x_{k+1}, y_{k+1})$ чунин интихоб мекунем, ки фарқи $x_k - x_{k-1} = x_{k+1} - x_k = h$ қифоя хурд бошад ва тахминан φ_k ба ψ_k ё ω_k иваз менамоем, яъне $\varphi_k = \angle DNO \approx \psi_k = \angle MAB \approx \omega_k = \angle PCQ$. Ин маънои онро дорад, ки ба ҷои расандаи MN яке аз хордаҳои MP ё AM -ро интихоб мекунем. Дар ин маврид:

$$y'(x_k) = \operatorname{tg}(\omega_k) = \frac{QP}{MQ} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \quad (8)$$

ё ин ки

$$y'(x_k) = \operatorname{tg}(\psi_k) = \frac{BM}{AB} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}. \quad (9)$$

Агар коэффитсиенти кунҷи расандаи MN -ро тахминан ба кунҷи хордаи AP иваз намоем, он гоҳ баробарии зеринро пайдо мекунем:

$$(10) \quad y'(x_k) = \text{tg}(\varphi_k) = \frac{AB + M\bar{Q}}{AP} = \frac{2h}{y^{k+1} - y^{k-1}}.$$

Тарафи рости формулаҳои (7)-(10) мувофиқан

муносибатҳои роста, ҷаъша ва миёна номида мешавад [17].

Мазлум аст, ки формулаҳои дар боло овардаи (7)-(10) ба-рои иваз кардани ҳосилаҳои функсияҳо ба муносибатҳои фарқи имконияти ягона нест. Истифодаи дигар усулҳои ивазкунии максданок ҷой дорад. Аммо ҳангоми интегриронии ададӣ муодилаҳои дифференсиалии бештар ин формулаҳо татбиқ карда мешавад [1].

Мисоли 1. Барои истифодаи ин усул мисоли оддии зерин-ро муоина менамоем:

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 + 2x - x^2, \quad y(0) = 0.$$

Санҷидан мумкин аст, ки функсияи $y = x^2$ ҳақиқатан аниқӣ масъ-

агаи (11) аст. Дар ин $f(x, y) = y^2 + 2x - x^2$ буда, дорон ҳосилаҳои оддӣ ҳисобшаванда аст. Аз ин ҷо барои ёфтани ҳақиқатан масъалаи

(11) бо назар дошти он, ки киматҳои параметри $x_n = h \cdot n$, форму-

$$(12) \quad y_{n+1} = y_n + hf(y_n^2 + 2nh - n^2h^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = 0.$$

Баъзе аз киматҳои ҳадро бо ҳисоб кардани кимати функси-яи ҳақиқатан аниқ ва тақрибии намуни (12) ҳангоми кимати қадам

Чадвали 1.

N_0	x	y	y_n	y_n^2	$2x_n$	x_n^2	$2x_n$	x_n^4	$y_{n^2+2x_n}$	$h(y_{n^2+2x_n}-x_{n^4})$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01999	0
1	0.1	0.01	0.02	0.0004	0.4	0.0016	0.4003996	0.0595484	0.03988	0.1999
2	0.2	0.04	0.0599	0.00358	0.6	0.0081	0.603584	0.078866	0.09768	0.15806
3	0.3	0.09	0.1194	0.01426	0.8	0.0256	0.81426	0.9768	0.132955	0.18009
4	0.4	0.16	0.1984	0.0393	1.0	0.0625	1.0393	1.15806	0.18	0.164
5	0.5	0.25	0.296	0.08766	1.2	0.1296	1.28766	1.32955	1.8	1.64
6	0.6	0.36	0.419	0.16965	1.4	0.2401	1.56965	1.8009	2.3256	2.64
7	0.7	0.49	0.5449	0.2968	1.6	0.4096	1.8969	1.8009	2.3256	2.64
8	0.8	0.64	0.725	0.5256	1.8	0.6561	2.3256	1.8	2.3256	2.64
9	0.9	0.81	0.805	0.64	2.0	0.81	2.81	2.0	2.81	2.0
10	1.0	1.00	1.00	1.00	2.2	0.96	2.96	2.2	2.96	2.2

§3. Усулҳои Рунге-Кутта

Аз чадвали мазлум метарад, ки ҳақиқатан аниқӣ кимати функси-яи аз ҳақиқатан тақрибии ададӣ дискретии функсияи фарқиро до-рад. Ин фарқиҳои дар натиҷаи истифодаи ду аъзон аъвалаи катори Тейлор, ҳамчун ҳатон пайдо шуда аст.

Усулҳои Рунге-Кутта ба сохтани формулаҳои барои функсияи $\varphi(x)$ асос ёфтааст, ки максимали ба Δ наздик ва ҳосилаҳои $f(x, y)$ -ро надорад. Барои усули ду зина ин равандро дар ивази катори Тейлор функсияи $\varphi(x, y, h)$ -ро ҷуннин пешниҳод карда мешавад. Метгузорем

$$(1) \quad \varphi(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ha, y + b_1 hf(x, y)),$$

дар ин ҷо c_1, c_2, a_1, b_1 - доимииҳои номутайян, муайян кардан лозим аст. Барои ёфтани ин доимииҳои функсияи $\varphi(x, y, h)$ ва Δ -ро ба на-муни катори дараҷагӣ аз рӯи параметри h пешниҳод менамоем.

Дар натиҷа пайдо мекунем:

$$(2) \quad \varphi(x, y, h) = (c_1 + c_2)f(x, y) + hc_2[a_1 f'_x(x, y) + b_1 f'_y(x, y)f(x, y)] + O(h^2),$$

Аз баробарихои (2) бо муқоиса намуниҳои коэффитсиенти барои муайян кардани c_1, c_2, a_1, b_1 системаи муодилаҳо пайдо мекунем:

$$(3) \quad c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 a_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 b_1 = \frac{1}{2}.$$

Ҳамин тавр, се муодилаи чор номутайяро ҳосил намудем. Дар ҳолати умумӣ барои аъзон $O(h)$ ягон муносибат ҷой надо-рад, бинобар ин яке аз параметрҳои оғоз қабул менамоем. Тахмин мекунем, ки $c_2 = \alpha$ ва $\alpha \neq 0$ аст. Он гоҳ

$$c_1 = 1 - \alpha, \quad a_1 = b_1 = \frac{2\alpha}{1}.$$

Барои кимати $\alpha = \frac{1}{2}$ формулаи намуни зеринро дорад:

$$(4) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))].$$

Барои ёфтани усули Рунге-Куттаи дузинаи ҳисоби фунси-
яи $f(x, y)$ -ро дар ҳар як қадами интегриронӣ m маротиба иҷро
карда, формулаи (1)-ро умумӣ кардан мумкин аст. Дар ин ҳолат
усули Рунге-Куттаи m -зинаро равшан ҳосил мекунем:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\varphi(x_n, y_n, h), \\ \varphi(x, y, h) &= \sum_{i=1}^m c_i k_i, \quad k_i = f(x, y), \\ k_i &= f(x + ha_i, y + h \sum_{d=1}^{i-1} b_{id} k_d), \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (5)$$

Баробарии (5) барои истифода дар амалия ҳангоми ҳалли
муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ қулай аст, чунки вай
ҳисоби иловагии додаҳои авваларо талаб надорад ва қадами
интегриронӣ имкони оддӣ ивазшави дорад.

Формулаи чорзинаи усули нисбатан машҳур:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (6)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), \quad k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Мисоли 2. Барои татбиқи формулаи Рунге-Кутта мисолро
дида мебароем. Ҳалли муодилаи

$$\frac{dy}{dx} = y$$

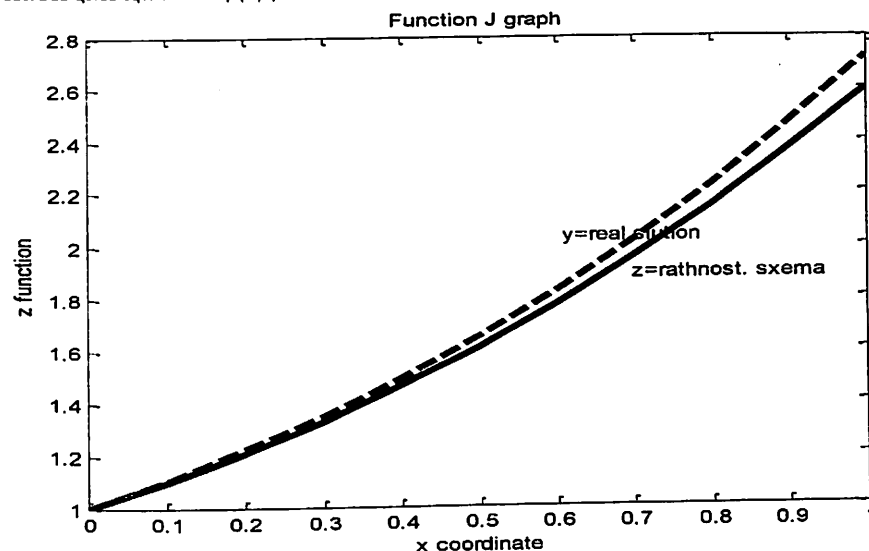
-ро бо шартӣ муайяни $y(0) = 1$ дар порчаи $[0, 1]$ бо қадами $h = 0,1$
меёбем.

Ҳалли аниқи масъала $y = e^x$ аст. Формулаи (6)-ро истифода
ва ишораи $\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ ворид намуда, ҳалли ададии
масъаларо ҳосил мекунем. Раванди ҳисоббарори дар ҷадвали 2
пешниҳод шудааст.

Ҷадвали 2.

x	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
y	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487	1.8221	2.0138	2.2255	2.4596	2.7183
z	1.1000	1.2100	1.3310	1.4641	1.6105	1.7716	1.9487	2.1436	2.3579	2.5937

Дар расми 1 вобастагии функсия аз аргументи x , ки
натиҷаи ҳалли ададии мисоли 2 аст пешниҳод шудааст.



Расми 2. Бо усули Рунге-Кутта ҳалли мисоли 2 дар намуди
графики вобастагии функсияи дискретӣ аз нуқтаҳои тури
мебошад.

Параметрҳои геометрии додашуда, дар ҳар як ҳолати
конкрети хосиятҳои физикӣ раванд ва шартҳои канори тав-
сифи фардӣ дорад, вале онро ба намуди оддӣ ва
фарқкунандаи дастаи шартҳои канорӣ ҳамаи намуд, мисолҳо
овардан мумкин аст. Объекти ҳаттӣ рост бо дарозии тегаи
воҳидии ба нуқтаҳо ҷудошударо дорем. Дар ин маврид муо-
дилаи дифференсиалӣ ба худ модели математики раванди
физикиро пешниҳод мекунад.

§4. Усули фарқи ҳалли масъалаи канорӣ барои муодилаи дифференсиалии муқаррарии тартибӣ дуҷум

Муодилаи дифференсиалии тартибӣ дуҷуми

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} - q(x)y = f(x), \quad p(x) \geq 0, q(x) > 0, 0 < x < 1 \quad (1)$$

-ро бо шартҳои канонии

$$y(0) = 0, y(1) = 0$$

(2)

дида мебароем.

Мувофиқи параграфи 2-юми бобби мазкур ифодаҳои ҳосилаҳои тартибӣ яқум ва дуҷумро дар тӯри муносибатҳои фарқи иваз намуда, муодилаи фарқии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - q_k y_k = f_k; k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad (3)$$

$$y_0 = 0; y_n = 0.$$

Муодилаи фарқии (3) системаи муодилаҳои алгебравии хатти аз $n+1$ муодилаи матритсаи седиоганалӣ иборат буда, схемаи фарқии номуайян мебошад.

Барои ҳалли масъалаи канонии муодилаи фарқии (3) усули гузарониши параграфҳои 6-9 аз бобӣ 8 истифода карда мешавад.

Тартиби аппроксиматсияи схемаи фарқӣ барои масъалаи канонӣ (1)-(2) ду аст. Дар ҳақиқат,

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} &= \frac{1}{h^2} \left[y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \right. \\ &+ \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n + \Theta_1 h) - 2y(x_n) + y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \\ &\left. + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n - \Theta_2 h) \right] = y''(x_n) + \frac{h^2}{24} \left[y^{(4)}(x_n + \Theta_1 h) + y^{(4)}(x_n - \Theta_2 h) \right] \end{aligned}$$

БОБИ Х МОДЕЛСОЗИИ АДАДИИ МУОДИЛАИ НАМУДИ ЭЛЛИПТИКӢ

§1. Гузориши масъала

Ёфтани функсияи $u(x, y, t)$ -ро аз муодилаи дученакаи динамикии

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \Phi(x, y, t)$$

дар соҳаи $G = \{(x, y, t), 0 < x < l, 0 < y < d, 0 < t < T\}$ ҳангоми иҷрои шартҳои канонии зерин дида мебароем:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); u(x, y, T) = \psi(x, y); u(x, 0, t) = f(x, t);$$

$$u(x, d, t) = g(x, t); u(0, y, t) = \alpha(y, t); u(l, y, t) = \beta(y, t).$$

Масъалаи модели динамики паҳншавии ҳарорати $u(x, y, t)$ дар сатҳи ҳамворӣ вобаста аз вақти t мебошад. Маънои физики коэффитсиенти a , ки умуман, мумкин ҳамаҷун функсия дар координата бошад, суръати чоришавии селҳои ҳарорат аз соҳаи нисбатан гарм ба соҳаи нисбатан хунук мебошад. Функсияи $\Phi(x, y, t)$ чоришавии ҳарорати беруна аст, ки аз координатаи фазои вобаста мебошад.

Ҳолати хусусии муодилаи гармигузарони ин статсионарӣ будани он мебошад, яъне паҳншавии гармӣ аз вақт вобастагӣ надорад. Муодилаи статсионарӣ навишти физики паҳншавии ҳароратро дар пластина новобаста аз чоришавии вақт дида мебароем. Ин масъала чунин гузориш дорад: Ёфта шавад функсияи $u(x, y)$ аз муодилаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\Phi(x, y), \quad (1)$$

дар соҳаи $D = \{(x, y), 0 < x < l, 0 < y < d\}$ ҳангоми додани шартҳои канонии

$$u(x, 0) = \varphi(x); u(x, d) = \psi(x); \quad (2)$$

$$u(0, y) = f(y); u(l, y) = g(y). \quad (3)$$

Масъалаи гузоштасуда, мувофиқи синфикунонии муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, ба синфи

масъалаҳои канори барои муодилаи намуди эллиптики тааллуқ дорад. Ин масъаларо масъалаи канории якум барои муодилаи Пуассон ном мебаранд. Муодилаи (1) муодилаи Пуассон мебошад.

§2. Муодилаи фарқии масъалаи канории якум барори муодилаи Пуассон

Дар аввал масъалаи (1)-(3) ба системаи муодилаҳои фарқӣ иваз менамоем. Алгоритми иваз намоии масъаларо чунин пешниҳод кардан мумкин аст:

1) қадами ҳисоби қимати x ва y -ро мувофиқан бо $h = \frac{1}{n}$ ва $k = \frac{1}{m}$ ишорат намуда маҷмӯи нуқтаҳои (x_n, y_m) -ро муайян мекунем. Дар ин маврид координатаҳои x_n ва y_m аз баробариҳои

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h, \quad y_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)k$$

ҳисоб карда мешавад. Дар ин ҷо $n=1,2,\dots$ ва $m=1,2,\dots$ ададҳои бутун мебошад.

2) қимати функсияҳои $u(x,y)$, $\Phi(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(y)$, $g(y)$ дар координатаҳои x_n ва y_m бо функсияҳои дискретии u_{nm} , Φ_{nm} , φ_n , ψ_n , f_m , g_m иваз менамоем.

3) муодилаи (1) ба системаи муодилаҳои фарқии

$$\frac{u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m}}{h^2} + \frac{u_{nm+1} - 2u_{nm} + u_{nm-1}}{k^2} = \Phi_{nm} \quad (4)$$

иваз карда мешавад. Ин муносибат барои ҳамаи нуқтаҳои тӯрии (x_n, y_m) дар дохили соҳаи D ҳолида иҷро мешавад, яъне $n=1,2,\dots$ ва $m=1,2,\dots$.

4) шартҳои канории (2) ва (3) ба намуди

$$n = 0, u(0, y_0) = u_{0m} = f_m; \quad (5)$$

$$n = N - 1, u(1, y_m) = u_{N-1m} = g_m;$$

$$m = 0, u(x_n, 0) = u_{n0} = \varphi_n;$$

$$m = M - 1, u(x_n, d) = u_n = \psi_n.$$

Барои n ва m мувофиқан иваз карда мешавад.

Ҳамин тавр, мо системаи муодилаҳои $N \times M$ -ро ҳосил намудем. Микдори номаълумҳо $(N+1) \times (M+2)$ нисбат ба муодилаҳо зиёд аст, ки онҳо аз шартҳои (5) муайян мегарданд.

§3. Муодилаи Пуассон бо шартҳои канории сифрӣ

Гузориши дурустии масъалаи канории барои муодилаи Пуассон ин аниқ додашавии шартҳои канорӣ аст. Дар системаи барномасозӣ ҳалро дар соҳаи квадратии аз $(N+1) \times (M+1)$ нуқта иборат буда муайян карда мешавад. Бинобар ин шартҳои канорӣ бояд барои ҳамаи чор тарафи квадрат муайян бошад. Додашавии шартҳои канории сифрӣ варианти аз ҳама қулай барои ҳалли масъалаи канории якум барои муодилаи Пуассон дар системаи барномасозӣ мебошад.

Раванди ҳалли масъаларо ба зинаҳои зерин чудо менамоем:

1. Соҳаи ҳалро бо пӯшонидани тӯр бо қадами h, k ва ҳисоби қимати функсияи $u(x,y)$ дар нуқтаҳои сарҳади месозем:

- қимати функсияи $u(x,y)$ -ро дар тарафи АВ бо формули

$$u(x,y) = f(y) \text{ ҳисоб менамоем;}$$

- қимати функсияи $u(x,y)$ -ро дар тарафи ВС бо формулаи

$$u(x,y) = \psi(x) \text{ ҳисоб менамоем;}$$

- қимати функсияи $u(x,y)$ -ро дар тарафи СД бо формулаи

$$u(x,y) = g(x) \text{ ҳисоб менамоем;}$$

- қимати функсияи $u(x,y)$ -ро дар тарафи ДА бо формулаи

$$u(x,y) = \varphi(x) \text{ ҳисоб менамоем.}$$

2. Барои муайян намудани қимати функсияи $u(x,y)$ -ро дар нуқтаҳои дохилии тӯр, мувофиқан муодилаи Пуассон дар ҳар як нуқта бо муодилаи фарқии охирик бо формулаи

$$u_{ij} = u(x_i, y_j) = \frac{1}{4} (u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1}) - \frac{1}{4} f_{ij}$$

иваз менамоем. Ҳалли ин система бо истифодаи усули Зейдел муайян карда мешавад. Барои ҳар як қимат пайдарпаии $u_{ij}^{(0)}, u_{ij}^{(1)}, \dots, u_{ij}^{(k)}, \dots$ -ро мегузorem, ки тосаҳеҳии хурдтарин наздикшаванда бошад. Ин муносибати ёфтани ҳамаи элементҳои пай дар пайро ба намудӣ

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4} (u_{i-1j}^{(k-1)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)} + u_{ij-1}^{(k-1)}) - \frac{1}{4} f_{ij}$$

тасвир мекунем.

Барои ҳисоб намудани $u_{ij}^{(k)}$ бо ин формула, бояд қимати ибтидоии $u_{ij}^{(0)}$, ки бо ягон усул муайян карда мешавад, интиҳоб карда лозим аст.

3. Барои ҳалли тақрибии авваларо муайян намудан функцияи $u(x, y)$ дар соҳа бо тарафи уфуқӣ (кутбӣ) мунтазам паҳншуда хонда мешавад.

§4. Модели ададии якченакаи Пуассон бо усули фарқҳои охиринок

Муодилаи намуди зеринро дида мебароем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(x), \quad (6)$$

дар ин ҷо x – координата; $u(x)$ – функцияи номаълум; $f(x)$ – ягон функцияи бефосила дар порчаи $[x_{\min}, x_{\max}]$ бо шартҳои канории Дирихле ё Нейман дар нуқтаҳои $x = x_{\min}$, $x = x_{\max}$.

Дар порчаи додашудаи $[x_{\min}, x_{\max}]$ бо қадами Δx тури координатии мунтазамро месозем:

$$\omega_h = \{x_k : x_0 = x_{\min}; x_k = x_{\min} + k \cdot h, k = 1, 2, \dots, N-1; x_N = x_{\max}\} \quad (7)$$

Бо векторҳои намуди ифодаи (2), дар соҳаи росткунча, тури мунтазами фазой-вақтиро муайян менамоем:

$$G = \{(x_k) : k = 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (8)$$

Шарти сарҳадии ҷинси якум (Дирихле) дар соҳаи муҳоки-машаванда мумкин аст дар намуди зерин пешниҳод шавад:

$$u(x_0) = g_1, \quad (9)$$

$$u(x_N) = g_2, \quad (10)$$

Дар ин ҷо x_0, x_N – координатоҳои сарҳадии нуқтаи соҳаи $[x_{\min}, x_{\max}]$; g_1, g_2 – ягон доимӣ аст.

Шарти канории ҷинси дуюм (Нейман) барои масъалаи пешниҳодшуда дар намуди зерин дода мешавад

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0} = g_1, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_N} = g_2, \quad (12)$$

Дар тури (8) мунтазам бо истифодаи фарқи охиринок шартҳои канории Дирихлеро дискретизатсия намуда ҳосил мекунем:

$$u_i = g_1, \quad (13)$$

$$u_n = g_2, \quad (14)$$

Дар ин ҷо u_i, u_n – қимати функцияи $u(x)$ мувофиқан дар нуқтаҳои x_i ва x_n мебошад.

Дар тури (8) дискретикунории шартҳои канории Нейманро иҷро намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{u_2 - u_1}{\Delta x} = g_1, \quad (15)$$

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x} = g_2, \quad (16)$$

Дар нуқтаҳои дохилии тури муодилаи (6) дискретикунонидро пайдо мекунем:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (17)$$

дар ин ҷо f_i – қимати функцияи $f(x)$ дар нуқтаҳои тури бо координатоҳои x_i аст.

Ҳамин тавр, дар натиҷаи дискретикунонии системаи муодилаҳои хаттии алгебравиро ҳосил намудем, ки ченакаш $n-2$ муодилаи намуди (17) барои нуқтаҳои дохилии соҳа ва муодилаи (13) ё (14) ва (15) ё ин ки (16) барои нуқтаҳои ду шартҳои канорӣ аст.

Дар поён як варианти барномаи ҳалли ададии муодилаи (6) – ро бо шартҳои канории (9)–(12) дар координатаи тури (8) меорем.

§5. Модели ададии муодилаи дученакаи Пуассон бо усули фарқҳои охиринок

Ҳалли муодилаи дученакаи Пуассон намуди

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (18)$$

-ро дида мебароем, дар ин ҷо x, y – координатаҳо; $u(x, y)$ – функцияи номуайян; $f(x, y)$ – ягон функцияи бефосила дар росткунча бо шартҳои канории Дирихле ё Нейман дар канор $x = x_{\min}, x = x_{\max}, y = y_{\min}, y = y_{\max}$ аст.

Дар фосилаи $[x_{\min}, x_{\max}]$ тури координатии мунтазам бо қадами Δx –ро медиҳем:

$$X = \{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (19)$$

дар фосилаи $[y_{\min}, y_{\max}]$ бошад, тури координатии мунтазам бо қадами Δy –ро медиҳем:

$$Y = \{y_j : j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (20)$$

Векторҳои ифодаи (19) ва (20) дар соҳаи росткунча тури дуҷенаи мунтазами зеринро муайян менамояд:

$$G = \{x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (21)$$

Шартҳои канории чинси якум (Дирихле) барои масъалаи дидашаванда ба намуди зерин пешниҳод кардан мумкин аст:

$$u(x_1, y) = g_1(y), \quad (22)$$

$$u(x_n, y) = g_2(y), \quad (23)$$

$$u(x, y_1) = g_3(x), \quad (24)$$

$$u(x, y_m) = g_4(x), \quad (25)$$

дар ин ҷо $u(x_1, y), u(x_n, y), u(x, y_1), u(x, y_m)$, – қимати функцияи $u(x, y)$ мувофиқан дар нуқтаи $(x_1, y), (x_n, y), (x, y_1), (x, y_m)$, мебошад.

Шарти канории Нейманро дар тури (21) дискрети намуда, пайдо мекунем:

$$\frac{u(x_1, y) - u(x_0, y)}{\Delta x} = g_1(y), \quad (26)$$

$$\frac{u(x_n, y) - u(x_{n-1}, y)}{\Delta x} = g_2(y), \quad (27)$$

$$\frac{u(x, y_1) - u(x, y_0)}{\Delta y} = g_3(x), \quad (28)$$

$$\frac{u(x, y_m) - u(x, y_{m-1})}{\Delta y} = g_4(x). \quad (29)$$

Муодилаи (18)-ро дар нуқтаҳои дохилии тури дискрети карда, пайдо мекунем:

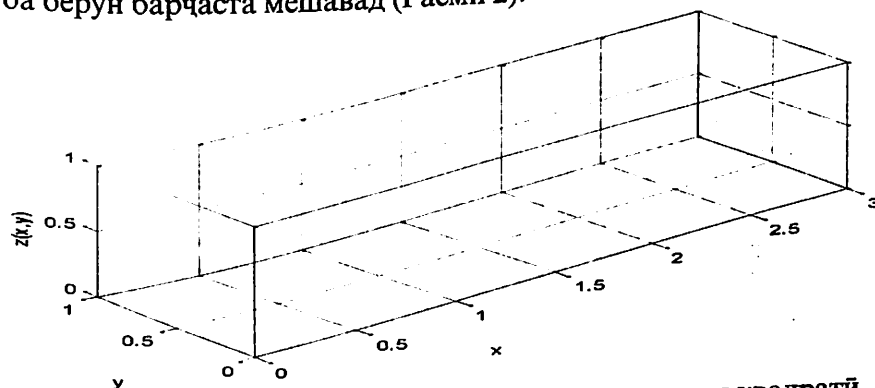
$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{(\Delta y)^2} = f(x_i, y_j)$$

дар ин ҷо $f(x_i, y_j)$ – қимати функцияи $f(x, y)$ дар нуқтаи тури бо координатаи (x_i, y_j) мебошад.

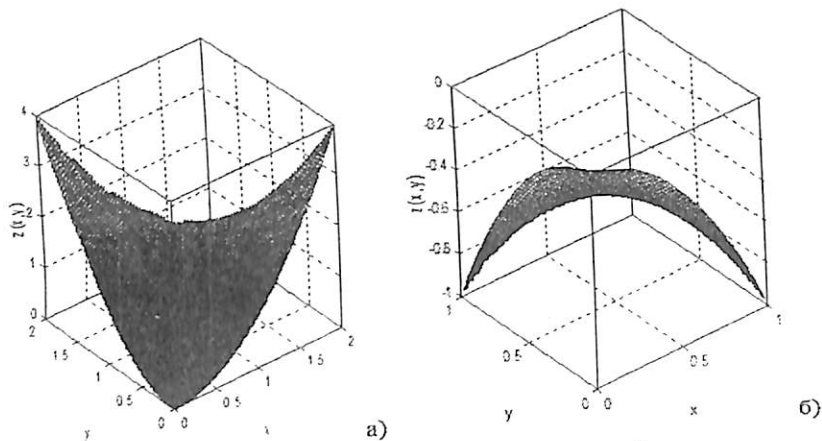
Ҳамин тавр, дар натиҷаи дискретикунӣ системаи муодилаҳои алгебравии ҳаттии $p \times m$ ченаро ҳосил намудем. Дар поён яке аз вариантҳои функцияро барои ҳалли адабии муодилаи (18) бо шарти сарҳадии (22) – (29) дар тури мунтазами (21) бо баёни пурра меорем.

§6. Гузориши масъалаи физикӣ

Равандҳои статсионарии бо каишии пластин, мембран, тобиши стержен, пахншавии гарми дар пластинҳоро дида мебароем. Ба сифати мисол, чунин масъалаи физикиро баён кардан мумкин аст: кубури шакли чоришавии квадратӣ дода шуда аст (расми 1), ки дар охири вай пленкаи эластикӣ озод кашида шуда аст. Дар дохили кубур ҳамеша фишори доимии на он қадар ғаёл мавҷуд мебошад, ки бо таъсири вай пленка барчаства ба берун ва фуруҳамида ба дарун амал мекунад. Агар дар дохили кубур ҳавои на он қадар гирифта шавад, он гоҳ пленка ба дарун кашида мешавад. Дар ҳолати баръакс пленка ба берун барчаства мешавад (Расми 2).



Расми 1. Шакли росткунҷавии кубур бо чоришавии квадратӣ.



Расми 2. Барчасти ба берун ва дохили кубур:
а) барчасти ба беруни кубур; б) барчасти ба дохили кубур.

§7. Модели математики масъала

Масъалаи дар §6 оварда бо муодилаи Пуассон навишта мешавад, ки он ба раванди статсионари гармигузарони мувофиқ аст:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \pm \varphi, \quad (1)$$

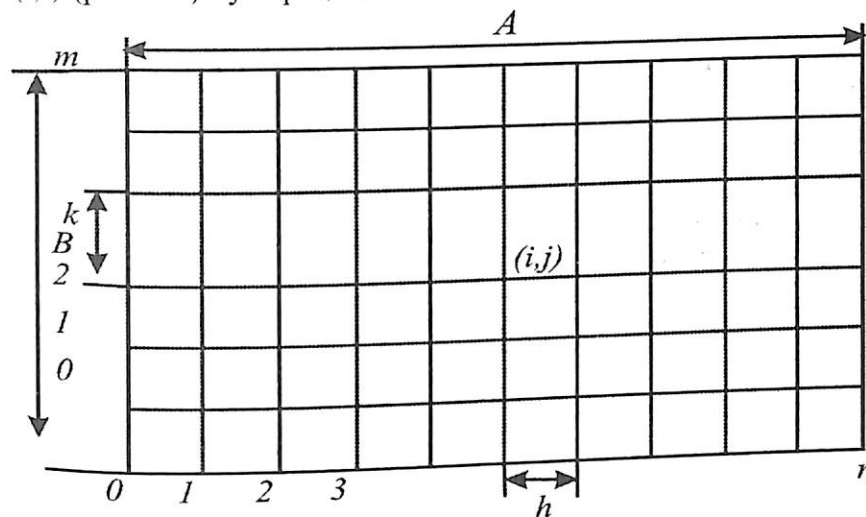
ки ҳалли $u = u(x, y)$ бояд барои соҳаи қиматҳои x, y шакли квадрати $-l < x < l, -l < y < l$ хангоми шартҳои канории $u(x, -l) = u(x, l) = 0$ ва $u(-l, y) = u(l, y) = 0$, барои қимати $\varphi = \text{const}$ иҷро шудан муайян гардад.

Паҳн шавии потенциали (ё шиддати электрикӣ) дар сатҳи ҳамвор хангоми додашавии потенциал ба масъалаи физики алоқаманд оварда шуда бо муодилаи Пуассон навишта мешавад.

Барои лоиҳабандии модели дискрети муодилаи Пуассонро аппроксиматсия намуда, тӯри фарқиро месозем. Барои созиш кубурро росткунча бо бари A ва дарозии B бо чоришавӣ мехонем. Барии росткунча A -ро ба n хиссаи интервали ченаки $h = \frac{A}{n}$, дарозии росткунча B -ро ба m хиссаи андозаи $k = \frac{B}{m}$ ҷудо

менамоём. Дар дохили соҳа $(n-1) \cdot (m-1)$ буриши туриро ҳосил мекунем. Рақамгузори бо бар аз 0 то n , бо дарозии аз 0 то m аст.

Ибтидои координата бо ибтидои росткунҷаи бо нуқтаи $(0,0)$ (расми 3) мувофиқ мебошад.



Расми 3. Тури росткунҷавӣ.

Агар бо $\lambda = \frac{k}{h}$ -ро ишора намоем, он гоҳ муодилаи дифференциалии (1)-ро бо намуни муодилаи фарқии

$$\lambda^2 u_{i+1,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) u_{i,j} = \varphi \quad (2)$$

овардан мумкин аст, ки $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ва $j = 1, 2, 3, \dots, m-1$ мебошад.

Шарти канорӣ бо периметрии квадрати кубур дар намуни зерин навишта мешавад:

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= f_{i,0}; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \\ u_{i,m} &= f_{i,m}; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \\ u_{0,j} &= f_{0,j}; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, m, \\ u_{n,j} &= f_{n,j}; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, m, \end{aligned} \quad (3)$$

Дар оянда қимати $\lambda = 1$ мехонем, яъне кадами интегриронии x ва y якхела $h = k$ мебошад. Ин маънои онро дорад, ки

кимати $u_{i,j}$ ҳисоби миёнаи арифметикиро аз чор пайвасти ҳамсоя ба онро дорад. Алгоритми ҳалли муодиларо аз (2) ҳосил мекунем:

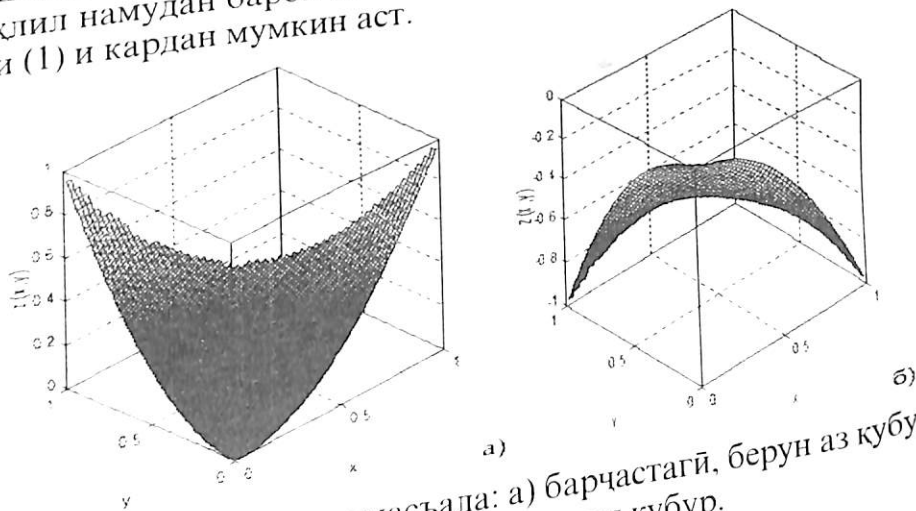
$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - \varphi = x. \quad (4)$$

Ин усули ҳалли муодилаи Пуассонро усули Лимбман меноманд. Муносибати зеринро менависем:

$$u_{i,j} = \omega x + (1 - \omega)u_{i,j}. \quad (5)$$

Дар ин ҷо x - кимати u буда аз баробарии (4) ҳисоб карда мешавад. Параметри ω зарбшавандаи зуди номида мешавад ва дар ҳудуди аз 1 то 5 ҷойгир аст.

Дар расми 4 инъикоси айёни сатхиро пешниҳод карда шуд, ки мувофиқат дорад ба барчастиги ва фуруҳамидагии пленкаи элаستيки дар охири кубури квадрати чоришавии газ ё моеъ капидашуда. Ҳалли муодилаи фарқии (4) дар расми 4 а) пешниҳод шудааст, ки мувофиқан дар кубур фишори ($\varphi=100$) таъсир карда аст. Агар ягон беҳавои ($\varphi=-10$) дар кубур ҷой дошта бошад, он гоҳ пленкаи эластикӣ намуди дар расми 5 б) нишондодаро дорад. Таҷрибаҳои ҳисоббарорӣ барои ташҳис ва таҳлил намудан барои киматҳои гуногуни тарафи рости муодилаи (1) и қардан мумкин аст.



Расми 4. Намуди ҳалли масъала: а) барчастигӣ, берун аз кубур; б) фуруҳамидагӣ, дохили кубур.

БОБИ XI МОДЕЛСОЗИИ АДАДИИ МУОДИЛАИ НАМУДИ ГИПЕРБОЛИКӢ

§1. Гузориши масъала

Ҳалли ададии масъалаи канории якҷинса, яъне

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,t_0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

-ро муоина менамоем.

Порчаи $[0,l]$ - ро ба N - ҳисса тақсим менамоем. Масофаи байни нуктаҳои ҳамсояро $x_{i+1} - x_{i+2} = h = \frac{l}{N}$ - қадами турӣ дар порчаи $[0,l]$ меномем.

Порчаи $[0,t_0]$ - ро ба M - ҳисса тақсим менамоем. Масофаи байни нуктаҳои ҳамсояро $t_{j+1} - t_{j+2} = \tau = \frac{t_0}{M}$ - қадами турӣ дар порчаи $[0,t_0]$ меномем.

Нуктаҳои тақсимодро $(x_i = ih, t_j = j\tau)$ - гирехи турӣ мегуем. Маҷмӯи ҳамаи гирехҳо

$$w_{h\tau} = \{x_i, t_j\}; \quad x_i = ih; \quad t_j = j\tau; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 1, 2, \dots, M-1\}$$

тури соҳаи $D = \{0 < x < l, 0 < t < t_0\}$ - ро ташкил медиҳад. Нуктаҳои ибтидоӣ $(x_0 = 0, t_0 = 0)$ ва интиҳоӣ $(x_N = l, t_M = t_0)$ бошад, он гоҳ маҷмӯи

$$w_{h\tau} = \{x_i = ih, t_j = j\tau\}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, N; \quad j = 1, 2, \dots, M-1, M\}$$

мешавад.

Ин тури тартибдодашуда мунтазам аст, чунки дарозии порчаҳои $[x_{i+1}, x_i]$ $[t_{j+1}, t_j]$ доимӣ, яъне $(h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{t_0}{M})$ мебошад.

Дар соҳаи $w_{h\tau}$, ба ҷои функсияи бефосилаи аргументи $u(x,t)$, функсияи дискретии аргументи $u_{h\tau}(x_i, t_j)$ - ро дидан мумкин аст.

§2. Аппроксиматсияи масъалаи канории якум барои муодилаи гиперболикӣ

Баъзе аз нуктаҳои x - ро дар тири Ох нишона намуда нуктаҳои $x-h$ ва $x+h$, ки $h>0$ аст, интихоб менамоем. Барои аппроксиматсияи $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ифодаҳои зеринро истифода бурдан мумкин аст:

$$\begin{aligned}\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} &\equiv u_x, \\ \frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h} &\equiv u_x, \\ \frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h} &\equiv u_x;\end{aligned}$$

Ин баробариҳои мувофиқан фарқи роста, фарқи чаппа ва фарқи миёнаи ҳосила мебошад.

Барои навиштани фарқи аппроксиматсионии ҳосилаи хусусии тартиби дууми се нукта $(x-h, x, x+h)$ -ро истифода мебарем. Дар ин маврид

$$u_{xx} \equiv \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \quad (3)$$

мешавад. Айнан ҳамин тарик фарқи аппроксиматсионии ҳосилаи хусусии тартиби дууми се нукта $(t+\tau, t, t-\tau)$ -ро барои тағйирёбандаи t меорем:

$$u_{tt} \equiv \frac{u(x,t+\tau) - 2u(x,t) + u(x,t-\tau)}{\tau^2} \quad (4)$$

Ҳамин тавр аппроксиматсияи ҳосилаҳоро муайян намудем. Ҳатогии аппроксиматсия, яъне наздикшавии фарқҳо бо ҳосиларо муайян менамоем ва онро бо

$f(x) = u_{xx} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $g(t) = u_{tt} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ дар нуктаи (x,t) ҳангоми $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ ишора мекунем. Барои наздикшавиро муайян намудан функсияи $u(x,t)$ - ро ба катори Тейлор паҳн менамоем:

$$u(x \pm h, t) = u(x, t) \pm hu'(x, t) + \frac{h^2}{2} u''(x, t) + o(h^3),$$

$$u(x, t \pm \tau) = u(x, t) \pm \tau u'_t(x, t) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(x, t) + o(\tau^3).$$

Дар баробариҳои (1)-(2) фарқҳои ҳосил кардашуда (3) ва (4)-ро истифода намуда, муодилаи фарқии тартиби дуум бо коэффитсиентҳои доимӣ

$$\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + \frac{u(x,t+\tau) - 2u(x,t) + u(x,t-\tau)}{\tau^2} = 0$$

ё

$$\tau^2(u'_{i+1} + u'_{i-1}) - 2(h^2 + \tau^2)u'_i + h^2(u''_{i+1} + u''_{i-1}) = 0, \quad (i=1,2,\dots,N-1; \quad j=1,2,\dots,M-1). \quad (5)$$

қаноаткунандаи шартҳои канории

$$\begin{aligned}u_i^0 &= \varphi, \quad u_i^M = \psi, \quad i=1,2,\dots,N-1 \\ u_0^j &= 0, \quad u_N^j = 0, \quad j=1,2,\dots,M-1\end{aligned} \quad (6)$$

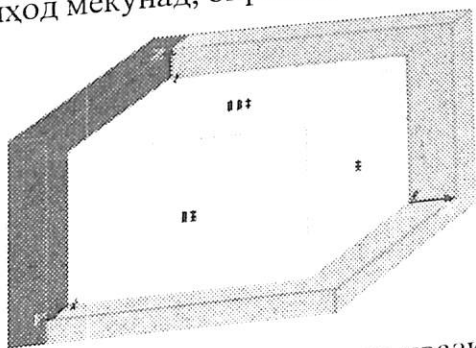
-ро ҳосил мекунем. Масъалаи (5), (6) масъалаи канори барои муодилаи фарқии тартиби дуум, яъне аппроксиматсияи масъалаи (1), (2) мебошад.

БОБИ XII МОДЕЛСОЗИИ АДАДИИ МУОДИЛАИ НАМУДИ ПАРАБОЛИКӢ

§1. Гузориши масъала

Параметрҳои геометрии додашуда, дар ҳар як ҳолати конкreti хосиятҳои физики ҳарорат ва шартҳои канори тавсифи фардӣ дорад, вале онро ба намуди оддӣ ва фарқкунандаи дастаи шартҳои канорӣ ҳамаи намуд, мисолҳо овардан мумкин аст. Объекти кубӣ бо дарозии тегаи воҳидии аз материали саҳти изотропии бо гармигузаронии $\lambda(T)$ ва ҳаҷми нисбии гармигунҷоиши $V(T) = c(T)\rho(T)$ чой доштаро дорем.

Паҳншавии гарми дар тарафи рости паҳлӯи $T_1(y, z, \tau)$ ва зичии селай ҳарорат $q_1(x, z, \tau)$ дар паҳлӯи пеш дода шуда аст. Инчунин, маълум аст, ки тегаи болои бо гармии муҳит $T_c(\tau)$ ҳангоми коэффитсиенти гармиивазкунии $\alpha(x, y, T, \tau)$ будан, пушонида шуда аст; тегаи чап гармичудокунанда ба ҳисоб ме-равад, вале тегаи қафо ва поёнии бо ҷисм пайваста гармигузаронии $\lambda_2(T)$ дорад. Вобастагии ҳароратии ин ҷисм бо тегаи поёнии куб мумкин идеали хонда шавад, алокаи муқовимати термики бо қади тегаи қафо мувофиқан бо функсияи $R_T(x, z, T)$ чудо карда шудааст. Паҳншавии аввали ҳарорат $T_n(x, y, z)$ маълум мебошад. Дар ин маврид муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусуси ба худ модели математики раванди гармигузарониро пешниҳод мекунад, онро дар поён меорем.



Соҳтор ба додаҳои шартҳои канории ивазкунии ҳарорат: I, II ва III – тараф мувофиқ ба шартҳои канории ҷинси I, II ва III;

дар тарафи чап шартҳои гармичудокунӣ, дар тарафҳои боқимонда шартҳои канории ҷинси IV дода шуда аст.

Мисоли классики муодилаи намуди параболикӣ муодилаи гармигузаронӣ (диффузия) аст. Дар фазои якченака муодилаи гармигузаронӣ якҷинса (бе манбаи энергия) чунин намудро дорад:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

Дар ин ҷо $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ - коэффитсиенти ҳарораткучониш (λ -коэффитсиенти гармигузаронӣ, c_p -ҳаҷми нисбии ҳарорат, ρ -зичӣ).

Агар дар канорҳои $x=0$ ва $x=l$ қимати функсияи ёфташавандаи $u(x, t)$ дар намуди

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t) \quad (2)$$

дода шуда бошад, яъне шартҳои канории ҷинси якум, ва ба ғайр аз ин барои қимати $t=0$ шартҳои аввалаи

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3)$$

чой дошта бошад, он гоҳ масъалаи (1)-(3) масъалаи якуми канорӣ-аввал барои муодилаи гармигузаронии (1) ном дорад.

Дар назарияи гармикӯчиш функсияи $u(x, t)$ дар соҳаи фазо-вақти $\Omega \times T = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ маънои паҳншавии ҳарорат, шартҳои (2) ва (3) бо ёрии функсияҳои $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ҳарорати дар канорҳои $x=0$ ва $x=l$ дода шударо мефаҳмонад.

Агар дар канорҳои $x=0$ ва $x=l$ ҳосилаи қимати функсияи ёфташавандаи $u(x, t)$ дар намуди

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \psi(t) \quad (4)$$

дода шуда бошад, яъне шартҳои канории ҷинси дуум, он гоҳ масъалаи (1), (3), (4) масъалаи дууми канорӣ-аввал барои муодилаи гармигузаронии (1) ном дорад. Дар назарияи гармикӯчиш функсияи $u(x, t)$ дар соҳаи фазо-вақти $\Omega \times T = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ маънои паҳншавии ҷараёни ҳарорат, шартҳои (4) бо ёрии функсияҳои $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ҷараёни ҳарорати дар канорҳои $x=0$ ва $x=l$ дода шударо мефаҳмонад.

Агар дар канорҳои $x=0$ ва $x=1$ комбинатсияи хаттӣ ва ҳосилаи қимати функсияи ёфташавандаи $u(x,t)$ дар намуди

$$\alpha \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta u(x,t) \Big|_{x=0} = \varphi(t), \quad \beta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \alpha u(x,t) \Big|_{x=1} = \psi(t) \quad (5)$$

дода шуда бошад, яъне шартҳои канори ҷинси сеюм, он гоҳ масъалаи (1), (3), (5) масъалаи сеюми канорӣ-аввал барои муодилаи гармигузаронии (1) ном дорад. Дар назарияи гармикӯчиш шартҳои канорӣ (5) барои функсияи $u(x,t)$ дар соҳаи фазо-вакhti $\Omega \times T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ маънои додашавии иваз шавии ҳарорат байни муҳити газмонанд ё моеъҳо ва шартҳои (5) бо ёрии функсияҳои $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ҳарорати номуайяни дар канорҳои $x=0$ ва $x=1$ соҳаи ҳисобкуни ҷой дошта мебошад.

Барои масъалаҳои фазоии гармикӯчиш дар соҳаи $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ масъалаи канорӣ-аввалаи якум намуди

$$u(x,0) = \psi(x), \quad u(0,t) = \varphi_1(t); \quad u(1,t) = \varphi_2(t)$$

-ро дорад, дар ин ҷо $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ба ҳамин монанд гузориши масъалаи дуюм ва сеюми канорӣ-аввал барои муодилаи фазои ҷой дорад.

Дар амалия гоҳ-гоҳ масъалаи омехтаи канорӣ-аввал барои муодилаи гармигузарони, ки дар канорҳои соҳа шартҳои ҷинси гуногуни канорӣ дода мешавад.

§2. Аппроксиматсияи масъалаи гармигузаронӣ

Дар модели математики иваз намудани тағйирёбандаи бе-охир хурд ба намуди каноникӣ монанд ба вай асосан ба усулҳои адабии моделсозии тааллуқ дорад. Дар усулҳои элементҳои охиринок соҳаи бефосила ба элементҳо ҷудо карда мешавад, ки ёфтани ҳал мумкин нисбатан одӣ гардад. Усул барои ҳалли масъалаҳои ғайри хаттӣ дар соҳаи шакли мураккаб барои ҳисоби қанишҳои ҷинси гуногун ва дигар хусусиятҳо мубокиқ аст. Вале барои татбиқи усули элементҳои охиринок барномаи ҷудокунии автомати пешрафта, хотираи васеъ ва компютери зудамал лозим мебошад. Татбиқи ин усул бо васонти монанди ба техникаи ҳисоббарории пайвасти ҳоло бе натиҷа аст. Усули элементҳои канорӣ (сарҳадӣ) бо истифодаи ҳалли фундамента-

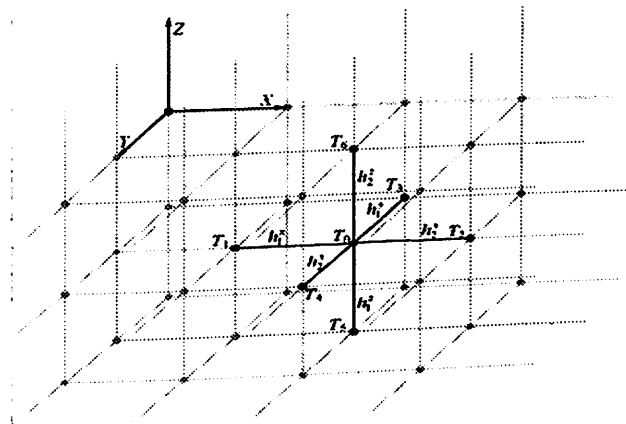
лии масъалаи канорӣ асос ёфта мебошад. Дар соҳаи сарҳадӣ, ки ба элементҳои охиринок ҷудо мешаванд, дискретӣ ва ададӣ муайян намудани қимати ҳарорат талаб менамояд. Раванди соҳаи дохили бо муодилаи интегралӣ навишта мешавад. Усули рости тахмини гузаронидани аппроксиматсияи фарқӣ-дифференсиалиро пешниҳод дорад, ки натиҷа муодилаи дифференсиали бо ҳосилаҳои хусусӣ ба муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ табдилдода мешавад, пас яке аз усулҳои аналитикӣ ё ададӣ истифода мегардад.

Барои татбиқи техники бештар коркардашуда ва қулай усули фарқҳои охиринок мебошад. Ин усул наздиккунонии аппроксиматсионӣ муодилаи дифференсиали асосии бо шартҳои канорӣ ва аввала ба муодилаи фарқи аст, ки дар натиҷаи моделсозӣ ба ҳал намудани системаҳои муодилаҳои алгебравӣ оварда мешавад. Ин усулро инчунин усулҳои тури ном мебаранд. Модели намуди оддитарин, ки дар ҳар як қисми ҳосилаи хусусии тартиби дуюм ҳисобкунӣ бо қимати ҳарорат дар се нуқтаи ҳамсоя аст, модели тури мебошад.

Дар нуқта бо ҳарорати T_0 (расми 1) дар лаҳзаи вақти k -ум баробарии

$$\text{div}(\lambda(T) \text{grad} T) \sim \lambda_k(T_k) \frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{h_1^2} + \frac{\lambda_{k+1}(T_{k+1}) - \lambda_k(T_k)}{h_2} \frac{T_{k+1} - T_k}{h_1}$$

наздикшуда ҳонда мешавад, ки h_1, h_2 қадами фазои аст.



Расми 1. Схемани гиреҳҳои аппроксиматсионии фарқҳои охиринок

Агар дар ин маврид ҳосила бо вақтро мувофиқан бо схемаи аниқӣ аппроксиматсионии фарқҳои охиринок, бо фарқи роста иваз намоем, он гоҳ тарафи рости муодилаи гармигузаронии чунин мешавад:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \sim \rho c_p \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t}$$

Дар ин маврид ҳалли пайдошуда системаи муодилаҳои алгебравии оддӣ барои қабати навбатии вақт чунин намуд дорад:

$$\rho c_p \frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} = \lambda_k (T_k^n) \frac{T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n}{h_1^2} + \frac{\lambda_{k+1}(T_{k+1}^n) - \lambda_k(T_k^n)}{h_2} \frac{T_{k+1}^n - T_k^n}{h_1}$$

Чунин амал татбиқи маҳдудро дорад, чунки барои таъмини устувории ҳал иҷрои шартӣ мураккаби мувофиқи қадами дискрети байни фазо ва вақт талаб карда мешавад. Ҳангоми ҳалли масъалаи баръакси гармигузаронӣ ин талабот ҳамчун қоида ба шарти устувори муқобил мебошад ($\Delta t > \Delta \tau_k$).

Схемаи устувори моделсозии ададӣ гармигузарони ғайри статсионарии ба гирифтани ҳосилаи тақрибӣ аз ҳарорат бо вақти фарқӣ чаппа мувофиқ аст. Дар ин ҳолат аппроксиматсияи фарқи охиринокӣ муодилаи гармигузарони бо саҳеҳии аниқии то $O(h^2 + \Delta t)$ дар гузориши дученака чунин намудро дорад:

$$\rho c_p \frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} = \lambda_k (T_k^n) \frac{T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n}{h_1^2}$$

Фарқи охиринокӣ шакли шартӣ муодилаи канориро менависем. Шартӣ канорӣ чинси 2 (тартиби аниқӣ $O(h + \Delta t)$):

$$T_{k+1}^n - T_k^n = h_1 q,$$

ки T - ҳарорати нуқтаҳои дохили наздик ба нуқтаҳои канорӣ бо ҳарорати T_0 .

Шартӣ канорӣ чинси 3 (тартиби аниқӣ $O(h + \Delta t)$):

$$T_{k+1}^n - T_k^n = \frac{h_2}{h_1} (T_k^{n+1} - T_k^n)$$

Схемаи ноайёни моделсозии ададии нишондода дар усулҳои ҳалли масъалаи роста ва чаппаи гармигузаронӣ асос мебошад. Вай дар ҳудуди васеъии бузургии қадамҳои фарқҳои

охиринокӣ аппроксиматсионӣ пухташуда ва мумкин аст бо васоити рақамӣ, ҳамчун монан ва пайвасти техникаи ҳисоббарори татбиқ карда шуда мебошад. Дар вай муайян намудани ҳарорат дар қадами вақтии $k+1$ -ум ба ҳалли системаҳои муодилаҳои алгебравӣ оварда мешавад. Татбиқи гузориши хаттишуда ададӣ коэффитсиентҳои ин система аз ҳал вобаста кам карда мешавад.

Ин схема ҳалли нисбата аниқӣ саҳеҳи масъалаи ростаро дар муқоиса бо дигар схемаҳои фарқҳои охиринокӣ аппроксиматсионии дар боло қайдшуда бо ҳамон миқдори гиреҳҳои турӣ медиҳад.

Ба ғайр аз истифодаи васеъии гузориши Кирхгоф ва Гудмен ҳангоми мурочиат ба усулҳои ададии ҳалли масъалаи гармигузарони, ҳалҳои методии зерини таъминкунандаи аниқии васеъ ва суръати ҳал истифода мешавад:

- усули итератсионӣ + λ ;
- интиҳоби коэффитсиенти релаксатсия; схемаи Зейдел;
- гузариши гиреҳҳо аз канор ба марказ; ҳисоби итератсионии ғайри хаттӣ;
- интиҳоби параметрӣ критерияи нигоҳ доштани итератсия;
- ҳиллаи мувофиқ ба дискрети намудани схема, пушидани турҳои канорӣ.

АДАБИЁТҲОИ ИСТИФОДАШУДА

1. Алиев Б., Ашӯров М. Усулҳои ададӣ. Душанбе, ДДМТ, 1994, -134с.
2. Алиев Б.А., Юханонов Н.Н. Усулҳои асосии математикаи ҳисобкунӣ. Душанбе, «Маориф», 1989, -224с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. -М.: Наука, 1975, -631с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука, 1987. -598с.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. -М.: Наука, т.1, 1977. -632с.; Физматгиз, т.2, 1962. -566с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1970. -598с.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. -М.: Наука, 1980, 1982.
8. Колмагоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1981. -542с.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 11-е изд. -М.: Наука, 1975. -431с.
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1989. -608с.
11. Самарский А.А. Введение в численные методы. -М.: Наука, 1987. -286с.
12. Самарский А.А. Теории разностных схем. -М.: Наука, 1983. -516с.
13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1986. -288с.
14. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. -М.: Наука, 1987. -160с.
15. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. -М.: Наука, 1984. -192с.
16. Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Лёшь. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977-344 с.
17. Ҷӯраев Х.Ш. Усулҳои ададӣ. Фасли 1. -Душанбе: Деваштич. -2007. -109 с.
18. Алиев Б., Джураев Х.Ш. О корнях сингулярно возмущенных алгебраических уравнений // Докл. АН РТ, 2004, том 47, №4, -с.92-97.

19. Алиев Б., Ҷӯраев Х.Ш. Решаҳои муодилаҳои ошубӣ // Маърифат, 2005, №7-8, -с.33-36.
20. Гилязов С.Ф. Усулы решения линейных некорректных задач. -М.: Изд-во МГУ, 1987, -120 с.
21. Джураев Х.Ш. Об одном регуляризирующем алгоритме получения приближений к нормальному решению вырожденных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). // Прикладная математика: Сборник научных трудов. -М.: МГПИ им.В.И.Ленина, 1986, с.76-83.
22. Зорич В.А. Математический анализ, часть 1. -М.: Наука, 1981, -544с.
23. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и усул обратных задач в машиностроении. -М.: Мшиностроение, 1990, -264 с.
24. Ҷӯраев Х.Ш. Усулҳои ададӣ. Фасли 2. -Душанбе: Дақиқӣ. -2014. -72 с.

Хайрулло Чӯраев

УСУЛҲОИ АДАДӢ

Ба ҷоп 23.04.2021 иҷозат дода шуд. Андозаи 60x84¹/₁₆.
Қоғози офсет. Ҷопи офсет. Гарнитураи Times New Roman Tj.
Ҷузъи ҷопии шартӣ 12,75.
Теъдоди нашр 500 нусха. Супориши № 133.

ҶДММ “ЭР-граф”.
734036, ш. Душанбе, кӯчаи Р. Набиев, 218.
Тел: (+992 37) 227-39-92. E-mail: rgraph.tj@gmail.com